Opponensi vélemény Révész Szilárd György „Extremal problems for positive definite functions and polynomials” c. MTA doktori értekezéséről

A iv+164 oldal terjedelmű, angol nyelven írt értekezésében a jelölt a klasszikus analízis három témaköréhez tartozó problémákat old meg. Ezek közül kettő esetében az addigi szerzők sejtése kifejezetten az ellenkezője volt annak, mint amit a jelöltnek sikerült bizonyítania. A harmadik esetében, amely a pozitív definit függvényekre vonatkozó Turán- -Erőd problémával kapcsolatos, nem született meglepő eredmény. Itt az előrelépést éppen az jelenti, hogy a korábbi speciális eredmények után lényegesebben nagyobb általánosságot sikerült elérnie.

Az értekezés 1. Fejezetének címe: „Turán–Erőd típusú, fordított Markov egyenlőtlenségek a sík komplex tartományaira”. Ennek terjedelme 38 oldal, amelynek végén „További megjegyzések és problémák”, „Köszönetnyilvánítás” (Halász Gábornak) és 22 referenciát tartalmazó „Irodalomjegyzék” található.

Jól ismert, hogy tetszőleges n-ed fokú komplex együtthatójú p polinomra a Markov egyenlőtlenség szerint

$$\|p'\|_K \leq c_K n^2 \|p\|_K,$$

ahol K kompakt és konvex halmaz a síkon, c_K konstans és $\|.\|$ a K-n vett maximum norma. Ha például $K = [-1, 1]$, akkor ennél nem is adható jobb becslés; ha azonban K egy konvex tartomány, akkor itt Cn is írható Cn^2 helyett. Jelöljük $\mathcal{P}_n(K)$-val azon n-ed fokú komplex együtthatójú p polinomok halmazát, amelyeknek mindegyik zérushelye K-ba esik. Turán Pál azt vizsgálta, hogy vajon a $\mathcal{P}_n(K)$-beli polinomokra érvényes-e egy fordított irányú Markov egyenlőtlenség. Más szavakkal, megadható-e olyan $C_n(K) > 0$ konstans, hogy minden $p \in \mathcal{P}_n(K)$ polinomra

$$\|p'\|_K \geq C_n(K)\|p\|_K.$$

Turán Pál 1939-ben bebizonyította, hogy ha K körlap, akkor a fordított egyenlőtlenség $C_n(K) = n/d$-vel áll fenn, ahol d a körlap átmérője; míg ha K egy szakasz, akkor a fordított egyenlőtlenség $C_n(K) = c\sqrt{n}/d$-vel áll fenn, ahol d a szakasz hossza és $c > 0$ abszolút konstans.

Itt mindenképpen utalnunk kell arra, hogy Erőd János is publikált egy cikket erről a témáról 1939-ben, amelyet azóta is sokan idéztek, de csak az intervallum esetére vonatkozó konstans pontos kiszámításával kapcsolatban. De valójában Erőd János cikke ennél sokkal több, eredmények és gondolatok egészen értékes tárháza. Ez indokolja azt, hogy a Tézisekkel ellentétben, a doktori értekezésben már az 1. Fejezet címében a Turán–Erőd típusú egyenlőtlenség elnevezés szerepel.

Turán Pál és Erőd János dolgozatait követve számos további eredmény került publikálásra, elsősorban olyan K halmazokra, amelyeknek a határa szakaszonként síma. Ezek közül a legjelentősebbet N. Levenberg és E. Poletsky közösen publikálták 2002-ben. A jelölt egy közel 70 éves problémakört zárt le 2006-ban a J. Approx. Theory-ban megjelent dolgozatával. Halász Gábor lényeges ötletét (essential idea) felhasználva, a jelölt a következő tételt bizonyította be: Ha a K konvex és kompakt halmaz belseje nem üres, akkor a fordított Markov egyenlőtlenség a $C_n(K) = (cd/w^2)n$ jobboldallal igaz, ahol d a K halmaz átmérője, w a K halmaz legkisebb szélessége, és $c = 0,0003$. Ezen tétel értékét tovább növeli az a tény, hogy a jelölt még azt is bizonyította, hogy a fordított Markov egyenlőtlensége pontos abban az értelemben, hogy minden elég nagy n-re van olyan $p \in \mathcal{P}_n(K)$ polinom, amelyre

$$\|p'\| \leq (600d/w^2)n\|p\|.$$

Az 1. Fejezetben elért eredmények élessége a komplex számsík geometriájának megértésén, pontos analitikus kezelésén múlik. Az, hogy a geometriát használni kell, nem új gondolat, mivel Erőd János már 1939-ben felismerte ezt az irányt. A fejezet újdonsága annak tisztázása, hogy a görbületet milyen mértékben lehet kihasználni. A jelölt Blaschke ún. guruló körtételének (Blaschke's rolling ball theorem) egy élesítését (lásd J.B. Strantzen 1989-ben megjelent cikkében) tudta bevetni bizonyításában.

Az értekezés 2. Fejezetének címe: „Turán típusú extremális probléma pozitív definit függvényekre". Ennek terjedelme 67 oldal, amelynek végén 89 referenciát tartalmazó „Irodalomjegyzék" található. A szakirodalomban Sztecskin-nek egy 1972-ben megjelent cikke nyomán elterjedt elnevezés szerint Turán extremális problémájának nevet viseli a mai általánosabb formában a következő probléma: Legyen Ω egy nyílt, 0-ra szimmetrikus halmaz. Jelöljük $\mathcal{F}(\Omega)$-val azon folytonos, pozitív definit, integrálható függvények halmazát, amelyeknek tartója $\operatorname{supp} f \subseteq \Omega$. Az Ω halmaz Turán konstansát a

$$\mathcal{T}(\Omega) := \sup\{\int_\Omega f/f(0) : f \in \mathcal{F}(\Omega)\}$$

képlettel definiáljuk.

Többek között, Sztecskin bizonyította, hogy ha

$$h = 1/n,\ n \in \mathbb{N} \quad \text{és} \quad \Omega = [-h, h] \subset \mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

akkor a

$$\Delta(x) := (1 - |x|/h)_+$$

háromszög-függvény az extremális és $\mathcal{T}_{\mathbb{T}}([-h,h]) = h$. Ebből már könnyen levezethető, hogy tetszőleges h-ra is hasonló állítás érvényes:

$$\mathcal{T}_{\mathbb{T}}([-h,h]) = h + O(h^2) \quad \text{és} \quad \mathcal{T}_{\mathbb{R}}([-h,h]) = h.$$

Megjegyezzük, hogy ez az utóbbi eredmény már R.P. Boas, Jr. és M. Kac egy 1945-ben megjelent cikkében is megtalálható. Sőt, C. Carathéodory (1911) és Fejér Lipót (1915) bizonyos eredményei is már ezen problémakör előfutárai voltak, mégpedig az ún. pontonkénti Turán problémával kapcsolatosak, amelyben adott $z \in \Omega$ pontbeli függvényérték maximumát keressük.

Később Sztecskin tanítványai, többek között V.V. Arestov, E.E. Berdysheva, D.V. Gorbachev és A.S. Manoshina kiterjedten vizsgálták Turán problémájának többváltozós változatát $\mathbb{R}^d$-ben.

A Turán–Sztecskin nevével jelzett probléma vizsgálatát 2003-ban a jelölt kiterjesztette a lokálisan kompakt Abel (rövidítve: LCA) csoportokra. Ez a kiterjesztés kézenfekvő volt, mivel a pozitív definitség, a zéruselem környezete és egy zérus-szimmetrikus Ω halmazon történő integrálás teljesen természetes egy LCA csoport algebrai és topológiai struktúrájában. A Haar mérték biztosítja, hogy az intgrál tetszőleges kompakt halmazon jól definiált. Ezen vizsgálatok eredményeit a jelölt M.N. Kolountzakis-szal közös dolgozataiban publikálta a Proc. Amer. Math. Soc., Canad. J. Math. és J. London Math. Soc. folyóiratokban.

Bár a 2. Fejezet témakörében nem született meglepő eredmény, inkább az jelentett előrelépést, hogy a korábbi eléggé speciális eeedmények után lényegesen nagyobb általánosságot sikerült megragadni. A hely és idő korlátos volta miatt, az eredmények részletes ismertetésére itt nem térünk ki.

Az értekezés 3. Fejezetének címe: „Hézagos, idempotens trigonometrikus polinomok integrál koncentrációja”. Ennek terjedelme 57 oldal, amelynek végén „Köszönetnyilvánítás” (Terence Tao-nak) és 45 referenciát tartalmazó „Irodalomjegyzék” található.

Norbert Wiener (1934) klasszikus tétele szerint, ha egy f függvény Fourier sorában egyre nagyobbak a hézagok és f L^2-beli akármilyen kis intervallumon, akkor f L^2-beli a teljes $(-\pi, \pi)$ intervallumon is. Anthony Zygmund vetette fel a kérdést, hogy mi a helyzet más L^p terekben. Erre a kérdésre válaszolva, Erdős Pál és Rényi Alfréd 1962-ben ellenpéldát adtak minden $p > 2$-re véletlen konstrukcióval. Hamarosan Turán Pál explicit ellenpéldát adott elég nagy p-re. Ezek után az volt az általános vélekedés, hogy $p < 2$ esetén Wiener tétele érvényben marad.

Ezen vélekedéssel szemben, 2008-ban a jelölt Aline Bonami-val közösen azt bizonyította be, hogy Wiener tétele kizárólag a $p = 2$ esetben igaz. Sőt, ennél lényegesen többet bizonyítottak, mivel Zygmund kérdésének eldöntése csak melléktermék, hiszen közös dolgozatuknak főtárgya azon csupa 0 és 1 együtthatójú polinomok vizsgálata, amelyeknek értékei kis halmazra koncentrálódnak, és az ellenpéldát ilyenekből építették fel.

A szokásos jelöléssel legyen $e(t) := e^{2\pi it}$, továbbá legyen $e_h(t) := e(ht)$. A konvolúció műveletére nézve fennálló tulajdonságuk miatt a

$$\mathcal{P} := \{\sum_{h\in H} e_h : H \subset \mathbb{N},\ \#H < \infty\}$$

halmazbeli trigonometrikus (exponenciális) polinomokat idempotens trigonometrikus polinomoknak, vagy röviden csak idempotenseknek nevezzük. Továbbá, egy $E \subset \mathbb{T}$ halmazt szimmetriusnak nevezünk, ha minden $x \in E$ esetén $-x \in E$.

Azt mondjuk, hogy p-koncentráció áll fenn valamely $p > 0$-ra, ha létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy bármelyik szimmetrikus, nyílt $E \subset \mathbb{T}$ halmazhoz található olyan $f \in \mathcal{P}$ idempotens, amelyre

$$\int_E |f|^p \geq c \int_{\mathbb{T}} |f|^p.$$

Az összes ilyen c konstans supremumát c_p-vel jelöljük, és a p- koncentráció szintjének nevezzük; míg az ennek eleget tevő f-et p- koncentrálódó (idempotens) polinomnak nevezzük.

A nyílt halmazokra vonatkozó koncentráció fogalma kiterjeszthető mérhető halmazokra is. Akkor mondjuk, hogy p-koncentráció áll fenn mérhető halmazokra, ha létezik olyan $\gamma > 0$ konstans, hogy minden szimmetrikus, mérhető és pozitív mértékű $E \subset \mathbb{T}$ halmazhoz található olyan $f \in \mathcal{P}$ idempotens, amelyre

$$\int_E |f|^p \geq \gamma \int_{\mathbb{T}} |f|^p.$$

Az összes ilyen γ konstans supremumát γ_p-vel jelöljük, és a mérhető halmazokra vonatkozó p-koncentráció szintjének nevezzük.

Ezen definíciók terminusaiban a jelölt Aline Bonami-val közösen elért legfontosabb eredményét a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Minden $0 < p < \infty$ esetén pozitív p-koncentráció van. Ha p nem páros egész szám, akkor teljes koncentráció áll fenn, azaz $c_p = 1$. A páros egészeket tekintve,

$$0.495 < c_4 \leq 1/2 \quad \text{és} \quad 0.483 < c_{2k} \leq 1^2, \quad k = 3, 4, \ldots.$$

Ezen felül, a $p = 2$ esetet kivéve, ugyanezeken a szinteken van koncentráció tetszőlegesen nagy előírt hézagok mellett is. Viszont $p = 2$ esetén tetszőleges nagy hézagok előírása esetén a koncentráció szintje 0-ra csökken.

Megemlítjük, hogy $p = 2$ esetén c_2 értékét M. Déchamps–Gondim, F. Lust-Piquard és H. Queffélec már 1983-ban megadták:

$$c_2 = \sup_{x>0} \frac{2\sin^2 x}{\pi x} = 0.46\ldots.$$

A mérhető halmazok koncentráció szintjére a jelölt és Alne Bonami a következőket bizonyították. Minden $1/2 < p < \infty$ esetén a mérhető halmazokra is pozitív p-koncentráció van. Ha $p > 1$ nem páros egész szám, akkor mérhető halmazokra is teljes koncentráció áll fenn.

Viszont továbbra is nyitott kérdés, hogy $0 < p \leq 1/2$ esetén van-e a mérhető halmazokra is pozitív koncentráció, és hogy $0 < p \leq 1$ esetén van-e teljes koncentráció.

Megjegyezzük, hogy a jelölt és Aline Bonami a koncentráció kérdését a $\mathbb{Z}_q := \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ diszkrét csoporton is vizsgálták és a fentiekhez hasonló tételeket bizonyítottak be, ahol $q \geq 2$ egész szám.

Az értekezés 3. Fejezetében levő eredményeket olyan magas szintűnek és bőségesnek tartom, hogy már annak alapján is odaítélhető lenne a jelöltnek az MTA doktora cím. De az értekezés 1. és 2. Fejezetében levő eredmények is kiemelkedően magas szintűek. Ugyancsak az elismerés hangján kell szólnom a jelölt Téziseiről, amelyben logikusan exponálja az egyes problémákat, részletekbe menően ismerteti nemcsak a megelőző eredményeket, hanem kitér az azok bizonyításában alkalmazott módszerek előnyeire és esetleges korlátaira, feltárja a lehetséges további forrásokat és a továbblépést biztosító új mószereket, amelyekkel az adott probléma gyakran még az általánosabb feltételek mellett is természetesebb módon oldható meg.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy 2003-tól kezdődően a jelölt a klasszikus analízis három témakörében ért el nemzetközileg is kiemelkedő eredményeket. Két témakör esetében éppen az ellenkezőjét bizonyította annak, mint amit a korábbi eredmények alapján az addigi szerzők sejtettek. A harmadik témakörben nem született meglepő eredmény, itt a jelölt a korábbi speciális eredmények után lényegesen nagyobb általánosságot ért el. Az eredmények bizonyítására olyan új módszereket alkalmazott, amelyeket meggyőződésünk szerint másik is sikerrel fognak majd kutatásaikban alkalmazni. A jelölt eredményeit nemzetközileg is a legelismertebb folyóiratokban publikálta, nevezetesen az American Math. J., C.R. Math. Acad. Sci. Paris, Canadian J. Math., East J. Approx., J. Approx. Theory, J. London Math. Soc. (2), Proc. Amer. Math. Soc., Trans. Amer. Math. Soc. folyóiratokban.

Az eredények mélysége, sokrétűsége és nemzetközi visszhangja alapján az értekezés tudományos eredményeit elegendőnek tartom az MTA doktori cím megszerzéséhez és a nyilvános védés kitűzését javasolom.

Szeged, 2010. augusztus 23.

Dr. Móricz Ferenc
a matematikai tudományok doktora