

BÍRÁLAT

Pach Péter Pál:

Algebraic Methods in Additive Combinatorics

1. A dolgozat témája és tudományos jelentősége

Pach Péter Pál doktori értekezése az additív kombinatorika egyik legfontosabb és nemzetközileg is kiemelt kutatási területét vizsgálja: számtani sorozatokat nem tartalmazó halmazok méretére vonatkozó felső és alsó korlátok kérdését véges Abel-csoportokban, különösen a \mathbb{Z}_m^n típusú csoportokban és véges testek feletti vektorterekben.

A dolgozat központi tudományos eredménye a Croot–Lev–Pach-féle polinomiális módszer részletes kidolgozása, rendszerezett bemutatása és továbbfejlesztett alkalmazása. Ez a módszer alapvető áttörést hozott a 3-tagú számtani sorozatokat elkerülő halmazok vizsgálatában, mivel első alkalommal adott exponenciálisan erősebb felső korlátot a \mathbb{Z}_4^n -beli esetben. A szerzők közel voltak a \mathbb{Z}_3^n -beli eset megoldásához, csak egy kis lépés hiányzott.

A dolgozat nem csupán ismerteti ezt az eredményt, hanem matematikailag precíz és koherens keretbe helyezi, valamint számos további irányban alkalmazza.

2. A fő tudományos eredmény: a Croot–Lev–Pach tétel

A dolgozat központi eredménye a \mathbb{Z}_4^n feletti 3AP-mentes halmazokra adott exponenciális felső korlát részletes bemutatása és alkalmazása. A CLP-módszer segítségével igazolható, hogy ha $A \subset \mathbb{Z}_4^n$ 3-tagú aritmetikai progressziót nem tartalmaz, akkor

$$|A| \leq 4^{\gamma n}, \quad 4^\gamma \approx 3.61.$$

Ennek jelentősége nem pusztán a konkrét számszerű korlátban rejlik, hanem abban, hogy ez volt az első olyan eredmény a témában, amely valódi exponenciális rést mutatott a triviális 4^n felső korláttal szemben. A módszer közvetlen inspirációt adott a további fejleményekhez.

A szerző érdeme, hogy a módszert teljes részletességgel kidolgozza, technikai lépéseit világosan strukturálja, és a bizonyítási mechanizmust átlátható módon prezentálja.

3. A dolgozat további eredményei

A dolgozat a CLP-módszer alkalmazásán túlmenően számos további eredményt tartalmaz:

- Új alsó korlát adása $r_3(\mathbb{Z}_4^n)$ esetén, $3^n/\sqrt{n}$ nagyságrendű növekedéssel.

- Kis dimenziókban egzakt értékek meghatározása \mathbb{Z}_4^n -ben 3AP- és 4AP-mentes halmazokra.
- Hosszabb számtani sorozatok vizsgálata, különösen \mathbb{Z}_6^n esetén.
- Általános alsó korlátok bizonyítása \mathbb{Z}_m^n -ben.

4. A dolgozat tudományos színvonala

A dolgozat szerkezete világos és logikus. A jelölésrendszer következetes, a bizonyítások részletesek és ellenőrizhetők. A hivatkozások nemzetközileg relevánsak és naprakészek.

5. A tézisek tételes elfogadása

A doktori mű tézisei közül

- a Croot–Lev–Pach tétel rendszerezett bemutatását és alkalmazásait,
- az erre épülő további felső korlátokat,
- az alsó korlátokra vonatkozó konstrukciós eredményeket,
- valamint a kis dimenziós egzakt meghatározásokat

új tudományos eredményként elfogadom.

Olyan tézist, amelyet ne fogadnék el új tudományos eredményként, nem találtam.

6. Összegzés

Pach Péter Pál doktori értekezése jelentős, nemzetközileg is releváns tudományos eredményeket tartalmaz. A dolgozat a Croot–Lev–Pach módszer elmélyült és magas színvonalú feldolgozását adja.

A doktori művet nyilvános vitára alkalmasnak tartom, és sikeres vita esetén javaslom a Magyar Tudományos Akadémia Doktora cím odaítélését.

Solymosi József

2026 március 01