Válasz Balog Antal bírálatára

Nagyon köszönöm Balog Antalnak az értekezésem alapos áttanulmányozását és az értékes megjegyzéseket.

A bírálatban az alábbi három kérdést fogalmazta meg a bíráló, melyekre a kérdések után válaszolok:

„1. Kérdés: A jelölt megemlíti, hogy $r_3(\mathbb{F}_3^n)$ már régebbről ismert $n \leq 6$-ig, de azokat jelentős számítógépes támogatással érték el. Vajon a 2.11 és 2.12 Tételek is tovább folytathatók néhány n értékkel, ha bevetünk számítógépeket is?"

Válasz: Igen, esetleg elképzelhető, de egyáltalán nem automatikus, hogy számítógépes segítséggel kicsit folytatható lehet a pontos értékek listája, ugyanis az általános észrevételek mellett sok ad hoc ötlet is szerepet kapott a bizonyításokban. Az egzakt értékek vizsgálatában az egyik motivációnk az volt, hogy a 2.3 Tételben szereplő konstrukció optimális-e (abban a néhány esetben, amikor a pontos értéket sikerült meghatározni annak bizonyult), illeve, hogy a 2.23 Tétel bizonyításában is szerepet kapó tenzorszorzatot használó gondolatok mennyire lehetnek használhatók általánosan.

„2. Kérdés: Van-e a 7.6 Tételhez kapcsolódó alsó becslés, ami erősebb, mint ami a 7.4 Tételből következik?"

Válasz: Ezt nem vizsgáltuk, de adható jobb becslés. A 7.4 Tétel alapján $n^{\lceil \frac{q-1}{3} \rceil}$ nagyságrendű konstrukciót kapunk a q prím esetben. Ennél jobb konstrukció a következő: vegyük azt az $\binom{n}{q-1}$ vektort, melynek $q-1$ darab 1-es koordinátája van. Ez megfelelő, ugyanis két ilyen vektor különbségének minden nemnulla koordinátája ± 1, és ezek száma a $(0, 2q-2)$ intervallumba eső páros szám, vagyis nem 0 modulo q (hiszen q páratlan). (A csupa derékszög feltétel pedig ekvivalens azzal, hogy minden oldal merőleges saját magára.) Érdekes probléma az alsó és felső becslések közötti hézagot megpróbálni tovább szűkíteni.

„3. Kérdés: $k \geq 3$ fix. Lehet-e valami érdekeset mondani arról az $A \subset \mathbb{F}_q^n$ halmazról, ami nem tartalmaz k vektort úgy, hogy közülük bármely három csupa derékszögű háromszög?"

Válasz: Ez is egy nagyon érdekes kérdésfelvetés. Úgy látom, módszerünk nem terjed ki közvetlenül erre az általánosabb formára. A 7.6 Tétel bizonyításához hasonlóan fel lehet írni például $k = 4$ mellett a megfelelő $F(x, y, z, w)$ polinomot (ami ekkor hat tényező szorzata lesz). A nehézség itt is annak kezelése, amikor x, y, z, w nem mind egyenlők, de nem is mind különbözők. Ezen Kronecker-delta függvényekkel lehet segíteni, viszont $\delta_{xy}\delta_{zw}F(x, y, z, w)$ alakú összeadandók is megjelennek, és a $k = 3$ esettel ellentétben ez „nem olvasztható be" az értekezésben írtakhoz hasonlóan F szeletrangfelbontásába, hiszen a $\delta_{xy}\delta_{zw}$ szorzatban mind a négy változó szerepel.

A kérdésben szereplő konfiguráció tehát k olyan vektor, melyek közül bármelyiket kitüntetve egy $(k-1)$-derékszöget kapunk. Az értekezésben is említettük Naslund szép eredményét $(k-1)$-derékszöget nem tartalmazó halmazokról, aminek igazolásához a szeletrang általánosításaként a partíciórangot vezette be. Itt viszont a kérdés az, hogy egy ennél is szigorúbb feltételnek eleget tevő konfiguráció megjelenése mikor lesz garantálható.

Még egyszer köszönöm Balog Antalnak az alapos munkát és hogy támogatja az MTA doktora fokozat odaítélését.

Budapest, 2026. április 1.

Pach Péter Pál

Pach Péter Pál