OPPONENSI VÉLEMÉNY
Pach Péter Pál
POLINOM MÓDSZER AZ ADDITíV KOMBINATORIKÁBAN
című doktori értekezéséről.

Jelen értekezés a kombinatorikus számelmélet tárgykörébe tartozó problémákat vizsgál, módszerei algebrai, számelméleti, és kombinatorikus alapokon nyugszanak, az eredmények szorosan összefüggenek egymással. A dolgozat időszerű, a polinom módszer egy új segédeszköz, melynek ereje, alkalmazhatósága még messze nincs kiaknázva.

Az alap probléma gyökere Erdős Pál és Turán Pál azon sejtése, hogy pozitiv egész számok elég nagy halmaza (pozitiv sűrűségü hlmaza) tartalmaz minden rögzitett k–ra k–tagu számtani sorozatot. A $k = 3$ majd $k = 4$ esetekre Klaus Roth adott bizonyitást Fourier analizis segitségével, végül Szemerédi Endre minden k–ra kombinatorikus úton. A következő lépés kvantitativ eredmények bizonyitása lett, amihez megint Szemerédi Endre úttörő munkája adott irányt. A megszokott jelölést használva $r_k(N)$ jelöli az $[1,\ldots,N]$ egész számok k–tagu számtani sorozatot nem tartalmazó részhalmazainak maximális méretét. Roth tétele tehát annyit jelent, hogy $r_3(N) = o(N)$, de igazából a bizonyitásból $r_3(N) = O(N/\log\log N)$ adódik. Ezt javitotta meg Szemerédi Endre egy nagyságrenddel $r_3(N) = O(N/\log^c N)$ valamilyen kicsi pozitiv c–vel. 1985–től 2023–ig ennek a c–nek az értéke javult 1/3–tól 1–ig kisebb lépésekben, olyan neves kutatók munkájával, mint Roger Heath–Brown, Jean Bourgain, és Tom Sanders, amikoris újabb nagyságrendet lépett Kelley és Meka, illetve Bloom és Sisask, elérve a közel optimális $r_3(N) = O(N\exp(-c\log^{1/9} N))$ becslést. (Ugyanis Behrend 1946–ban, még Roth eredménye előtt konstruált példát arra, hogy $r_3(N) \gg N\exp(-c'\log^{1/2} N)$, ami ma is a legjobb, csak c' értéke javult valamelyest.)

1995–ben Roy Meshulam megvizsgálta az analóg kérdést az $\mathbb{F}_p^n$ véges vektortérben, és azt találta, hogy (jelölésünk logikus kiterjesztésével) $r_3(\mathbb{F}_p^n) = O_p(p^n/n)$, ami az $N/\log N$ eredmény megfelelője. Mig az egész számok esetében az újabb és újabb becslések egyre nehezebb módszereket használtak, véges test feletti vektortérre a bizonyitás szép és elegáns. Terry Tao "kedvenc nyitott kérdésének" nevezte az $\mathbb{F}_3^n$ 3–tagu számtani sorozatot nem tartalmazó részhalmazainak megértését, de Meshulam eredményét neki nem sikerült megjavitania. 2012–ben Bateman és Katz a nevezőt n^{1+c}–re emelte.

Erre reagált a jelölt, Pach Péter Pál 2017–ben, amikor társszerzőivel (Ernest Croot és Vsevolod Lev) bebizonyitották (a jelölés további kiterjesztésével), hogy $r_3(\mathbb{Z}_4^n) = O(3.61^n)$, ami $N = 4^n$–nel irva a nagyon erős és meglepő $O(N^{0.926})$–nak felel meg, egész számokra ez már nem is igaz. Ez a disszertáció 2.1 Tétele, a jelölt szerint is a disszertáció legfontosabb tétele. A hosszabb történeti bevezetéssel én is ezt akartam hangsúlyozni. Sőt, véleményem szerint **ez az egy eredmény elegendő az MTA doktora cimhez**.

A bizonyitás két jelentős innovációt tartalmaz, egyik egy halmazrendszeres átfogalmazás, $\mathbb{Z}_4^n$–beli 3 vagy 4 tagu számtani sorozatokat nem tartalmazó halmazok megfeleltethetőek $\mathbb{F}_2^n$ beli bizonyos halazrendszerekkel, a másik pedig, az igazán fontos innováció a polinom módszer alkalmazása. A polinom módszer lényege, hogy ha egy test feletti polinomnak valamilyen értelemben sok gyöke van, akkor az a nulla polinom. Ez csak az elv, de a szerzőknek egy teljesen új változatot kellett kidolgozniuk céljuk eléréséhez.

A disszertáció természetesen sokkal több eredményt tartalmaz. A második fejezet tipikusan alsó és felső becsléseket az $r_k(\mathbb{Z}_m^n)$ mennyiségre különböző k, m, n választással. Például az iménti esetre (2.4 Következmény) $r_3(\mathbb{Z}_4^n) \gg 3^n/\sqrt{n} \gg N^{0.7924}$. Ebbe a családba tartozó eredmények (tételek vagy következmények) felsorolása egészen a 2.31 Tételig tartanak, ami azt mondja ki, hogy $r_p(\mathbb{F}_p^n) \geq (p-1)^n + (\frac{n}{2}-1)(p-1)(p-2)^{n-3}$. Ez alsó becslés az $\mathbb{F}_p$ feletti n–dimenziós affin tér legnagyobb egyenesmentes részhalmazának méretére. Más. Kicsi k, m, n esetében pontos értékeket is kaphatunk $r_k(\mathbb{Z}_m^n)$–re, a 2.11 és 2.12 Tételek tartalmazzák a $k = 3, m = 4, n \leq 5$, illetve a $k = 4, m = 4, n \leq 4$ eseteket. Zárójelben megjegyezném, hogy a konkrét Ramsey számok kiszámitása is nehéz, itt $r_4(\mathbb{Z}_4^4) = 128$ kiszámitása a disszertáció leghosszabb, legfáradságosabb érvelése, ami tisztán logikai, nem használ számitógépet. Ennek kapcsán feltenném egy kérdést a jelöltnek.

1. Kérdés: A jelölt megemliti, hogy $r_3(\mathbb{F}_3^n)$ már régebbről ismert $n \leq 6$–ig, de azokat jelentős számitógépes támogatással érték el. Vajon a 2.11 és 2.12 Tételek is tovább folytathatók néhány n értékkel ha bevetünk számitógépeket is?

A 3. 4. 5. és 6. fejezetek a már felsorolt állitások bizonyitásait tartalmazzák. A 7. fejezet kicsit kilóg a sorból, korábban a tiltott konfigurációkat lineáris egyenletekkel irhattuk le, most derékszög mentes halmazokat vizsgálunk. Legyen q páratlan prim hatvány, az $x, y, z \in \mathbb{F}_q^n$ hármas egy z–ben derékszög, ha különbözőek, és a standard skaláris szorzatra $\langle x - z, y - z \rangle = 0$. A fejezet tételei preciz alsó és felső becsléseket adnak, melyek fix q és változó n esetén $n^{q/3}$ és n^{q-2} közé teszi a legnagyobb derékszög mentes részhalmaz méretét (7.3 Tétel és 7.5 Következmény). A felső becslés megcáfol egy korábbi sejtést. Még egy utolsó eredményt emelnék ki, ami kódelméleti ihletésű és kapcsolódik a derékszög mentességhez. Ez a 7.9 Tétel, ami csak részben új eredmény, de egészben új bizonyitással. Ha $T(n, q)$ jelöli (q most egy páratlan prim) az $\{a, b\}^n$ legnagyobb olyan részhalmazának méretét, amelyben nincs két vektor q-val osztható Hamming–távolságra, akkor

$$\binom{n}{q-1} + \binom{n}{q-3} + \cdots \binom{n}{2} + \binom{n}{0} \leq T(n, q) \leq \binom{n}{q-1} + \binom{n}{q-2} + \cdots \binom{n}{1} + \binom{n}{0},$$

továbbá $n \equiv 0 \pmod{q}$ esetben az alsó, $n \equiv -1 \pmod{q}$ esetben a felső becslés éles.

A 7. fejezettel kapcsolatban is feltennék két kérdést, ami a 7.6 Tétel egy lehetséges általánositására kérdez rá.

2. Kérdés: Van-e a 7.6 Tételhez kapcsolódó alsó becslés, ami erősebb, mint ami a 7.4 Tételből következik?

3. Kérdés: $k \geq 3$ fix. Lehet-e valami érdekeset mondani arról az $A \subset \mathbb{F}_q^n$ halmazról, ami nem tartalmaz k vektort úgy, hogy közülük bármely három csupa derékszögű háromszög?

Végül leteszek még egy centet korábbi véleményem alátámasztására. A 2.1 Tételt 2017–ben publikálták a szerzők, az eltelt rövid idő alatt már 148 független idézetet kapott (MTMT adat). Ez nagyon ritkán fordul elő!

Egyébként a jelöltnek összesen 57 publikációja van, ebből 38 tudományos folyóiratban, amiből 8 D1 és 15 Q1 szintű. 57–re még PhD dolgozata, továbbá konferencia kötetekben, tudományos gyűjteményekben, ismeretterjesztő kiadványokban megjelent irásai egészitik ki. (Ezek is MTMT adatok.)

Balog Antal