Pach Péter Pál
Algebraic Methods in Additive Combinatorics
című MTA doktori értekezésének bírálata

Az értekezés bevezetője rendkívül olvasmányos; jómagam is számos olyan történeti összefüggésre és friss kutatási eredményre bukkantam benne, amelyek újdonsága meglepett. A jelölt stílusa világos, a kérdésfeltevések pedig maguktól értetődően adódnak. A munka egyik központi problémája a $\mathbb{Z}_m^n$ csoportbeli legnagyobb 3-tagú számtani sorozatmentes halmaz méretének meghatározása, amely „cap-set" problémaként ismert a szakirodalomban. Ennek vizsgálatához a szerző bevezeti az $r_3(\mathbb{Z}_m^n)$ mennyiség fogalmát. Figyelemre méltó, hogy több speciális paraméter mellett is sikerült megjavítania a korábban létező alsó és felső becsléseket, érdemben finomítva a terület eszköztárát. Külön színt visz a dolgozatba a matematikai absztrakció és a közkedvelt SET kártyajáték közötti kapcsolat bemutatása, amely rávilágít a probléma intuitív oldalára is.

Kiemelendő továbbá az Elsholtz, Führer, Füredi, Kovács, Simon és Velich társszerzőkkel közös kutatás. Ebben a részben a szerzők szellemes módon javítják az $r_p(\mathbb{Z}_p^n)$ esetére vonatkozó alsó becsléseket – ez az az eset, amikor a halmaz nem tartalmaz olyan egyenest, amelyen pontosan p darab pont helyezkedik el. A bemutatott bizonyítások meggyőzőek, különösen a 4. fejezetben kifejtett „subset reformulation" eljárás, amely a kérdéskört $\mathbb{F}_2^n$-beli részhalmaz-rendszerek tulajdonságaira vezeti vissza.

Az 5. fejezet módszertani leleményességgel vezeti vissza a $\mathbb{Z}_6^n$ feletti haladványmentes halmazok vizsgálatát a $\mathbb{Z}_3^n$ és $\mathbb{Z}_2^n$ komponensekre, kihasználva a kínai maradéktétel nyújtotta struktúrát. Ez a megközelítés elegáns elméleti keretet biztosít ahhoz, hogy a korábban ismertetett polinom-módszerek ezen a speciális, nem prímhatvány rendű csoporton is hatékonyan működjenek. A 7. fejezet a Tao által szimmetrizált szelet-rang (slice rank) technikát mutatja be, amely a szerző és társai által kidolgozott CLP-eljárás modern továbbfejlesztése. Ez a tenzor-algebrai megközelítés lehetővé teszi a halmazméretek korlátozását a hozzájuk rendelt hipermátrixok rangján keresztül. A fejezet kulcsfontosságú eredménye a derékszögmentes halmazok felső korlátjának jelentős javítása, emellett a szerző a technika erejét az Erdős Pálhoz köthető napraforgó-sejtés (sunflower conjecture) egy speciális esetének megoldásával is demonstrálja. Ezzel a társszerzőkkel közösen fejlesztett apparátus a modern additív kombinatorika egyik legsokoldalúbb vizsgálóeszközévé vált.

A dolgozatot tanulmányozva észrevettem, hogy több kérdés egyszerűen átvihető $\mathbb{F}_{p^n}$ típusú véges testekre $\mathbb{Z}_m^n$ helyett. Például a jelölt eredményeiből szinte azonnal következik, hogy jól becsülhető $\mathbb{F}_{p^n}$-ben az olyan halmazok mérete, amelyekben az $xy = z^2$ egyenlet nem oldható meg. Itt megkérdezném: lehet-e érdemlegeset mondani azon halmazok méretéről, amelyekben az $xy + 1 = z^2$ egyenletnek nincs megoldása?

Összefoglalva: A bemutatott aszimptotikus korlátok elméleti jelentősége kiemelkedő, bár bizonyos csoportok (például $\mathbb{Z}_5^n$) esetén az új eredmények gyakorlati érvényesülése csak rendkívül magas dimenziószám felett jelentkezik. Érdemes megjegyezni, hogy egyes fejezetekben a precíz algebrai levezetések dominanciája mellett a kombinatorikus intuíció időnként háttérbe szorul, amit a szerző is elismer a bizonyítások néhol formális jellegére tett észrevételével. Ugyanakkor hangsúlyozni kell, hogy az értekezés tudományos értéke és a szerző nemzetközi szinten is meghatározó kutatási eredményei megkérdőjelezhetetlenek. Pach Péter Pál munkája az additív kombinatorika egyik legjelentősebb áttörését, a Croot–Lev–Pach-féle polinom-módszer kidolgozását és annak sokrétű kiterjesztését mutatja be, amely alapjaiban formálta át a terület metodikáját. A dolgozat nemcsak klasszikus problémákra ad újszerű válaszokat, hanem módszertani szempontból is távlatokat nyit, így a hazai és nemzetközi matematikai közösség számára alapvető hivatkozási ponttá vált. **Mindezek alapján javaslom a doktori védés megtartását, és az MTA doktora cím odaítélését.**

Budapest, 2026. február 4.

Dr. Gyarmati Katalin
ELTE TTK, Matematikai Intézet
(egyetemi docens)