

hajnal.peter_141_23

Kombinatorika, rendezés és geometria

MTA doktori tézisek

Hajnal Péter
SZTE Bolyai Intézet

Szeged
2025

Tartalomjegyzék

Bevezetés	5
1. Független csúcshalmazok geometriai hipergráfokban	5
2. Ramsey-típusú problémák	8
3. Összeszámlálás	11
4. Telített geometriai struktúrák	15
5. Geometriai transzverzális egyenesek	18
Irodalomjegyzék	21

Bevezetés

A kombinatorika a matematika egy gyorsan fejlődő ága, melynek sok kapcsolata van a klasszikus területekhez, és jelentős hatással is van ezekre és alkalmazásaikra. Különösen jelentős az elméleti számítástudománnyal való kapcsolata.

A kombinatorika alapfogalmai nagyon egyszerűek, de egyben nagy kifejező erővel rendelkeznek. Egy hipergráf egy véges halmaz részhalmazából álló rendszer. A hipergráf által tartalmazott részhalmazokat éleknek nevezzük. Nagyon sok struktúra lényege leírható egy hipergráffal.

A 20-adik század közepére kikristályosodtak az alap extrémális és Ramsey-típusú problémák. Azóta nagyon szoros kapcsolatok alakultak ki a kombinatorika, illetve algebra, geometria, analízis, topológia és valószínűségszámítás között. Ezek a kapcsolatok kétirányúak. A klasszikus ágak sok módszert adnak kombinatorikus problémák megoldására. Másrészt a kombinatorikus fogalmak, ötletek a klasszikus ágakban is gyümölcsözőnek bizonyultak.

Disszertációm eredményeinek nagy részét a különböző matematikai ágak közötti kölcsönhatások ösztönözték. A munkában központi szerepet kapnak azok a problémák, ahol a motiváció geometriai.

1. fejezet

Független csúcshalmazok geometriai hipergráfokban

Gyakran találkozunk olyan helyzetekkel, amikor egy geometriai problémát szeretnénk megoldani, és a problémán alapulva definiálunk egy kombinatorikus struktúrát, amely a kérdés releváns információit tartalmazza. A probléma megoldása megfogalmazható a kombinatorikus struktúra segítségével, és támadható kombinatorikus módszerekkel. A kombinatorikus eredmény az eredeti geometriai környezetben értelmezhető. A módszer nagyon hatékony, annak ellenére hogy a kombinatorikus struktúra legtöbbször nem pontosan „fordít”. A geometriai problémáról egy kombinatorikusra való áttérés matematikai veszteséggel járhat.

Disszertációnk első két fejezetében két olyan problémát vizsgálunk, ahol a kombinatorikus fordítás és kombinatorikus módszerekkel érünk el új eredményeket.

Mindkét esetben a geometriai problémát úgy „kódoljuk” egy kombinatorikus struktúrával, hogy az alap geometriai kérdés egy „nagy” független ponthalmaz (csúcsok egy élt nem tartalmazó részhalmaza) keresését jelenti hipergráfunkban. Az *Gowers* és *Heilbronn* fejezetek tartalmazzák ezen irányú eredményeimet.

A szemi-véletlen módszert Ajtai Miklós, Komlós János és Szemerédi Endre [4] vezette be gráfok esetére. Később [88] a módszert kiterjesztette 3-uniform hipergráfokra (minden él három elemű). Később további erősítések, általánosítások (például [5] és [39]) történtek.

Egy $\mathcal{H}$ hipergráf a V csúcsalmazzal, $\mathcal{P}(V)$, a V halmaz hatványhalmazának, egy részhalmaza. Azaz $\mathcal{H}$ a V alaphalmaz bizonyos részhalmazait tartalmazza, amelyeket éleknek nevezünk. Ha az élek elemszáma egy közös k szám, akkor azt mondjuk $\mathcal{H}$ egy k -uniform hipergráf. Egy $I \subset V$ csúcsalmaz független csúcsalmaz ha nem tartalmaz részhalmazként élt. A $\mathcal{H}$ hipergráf független halmazai között a legnagyobb elemszámú független halmaz méretét $\alpha(\mathcal{H})$ -val jelöljük. Több olyan eredmény is van, amely 3-uniform hipergráfok α paraméterére ad alsó becslés ritkasági feltételek mellett.

Először is felidézek néhány alapfogalmat a hipergráfok elméletéből: Egy x csúcs fokszáma ($\deg(x)$) az x -et tartalmazó élek száma. Egy k -kör ($k \geq 2$) a $\mathcal{H}$ hipergráfban k különböző csúcs sorozata: $x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = x_0$, továbbá k különböző él sorozata: $E_1, \dots, E_k$, amelyek $i = 1, 2, \dots, k$ esetén teljesítik, hogy $x_{i-1}, x_i \in E_i$. A fenti kört *egyszerűnek* nevezzük ha $i = 1, 2, \dots, k$ esetén $E_i \cap (\cup_{j:j \neq i} E_j) = \{x_{i-1}, x_i\}$ is teljesül.

Lássuk a szemi-random módszer első hipergráfos megfogalmazását.

Tétel ([88], Lemma 1). *Legyen $\mathcal{H}$ egy 3-uniform hipergráf v csúcson. Jelölje $\bar{d}$ a $\mathcal{H}$ hipergráf átlag fokszámát. Tegyük fel, hogy $\bar{d} \leq t^2$ és $1 \ll t \ll v^{1/10}$.*

Ha $\mathcal{H}$ nem tartalmaz legfeljebb 4 hosszú egyszerű köröket, akkor

$$\alpha(\mathcal{H}) = \Omega\left(\frac{v}{t} \sqrt{\log t}\right).$$

A tételben (és később) $f \ll g$ egy alkalmas $\alpha > 0$ (rejtett, nem hangsúlyozott) konstanssal az $f \leq \alpha g$ egyenlőtlenséget jelöli.

Megjegyezzük, hogy Spencer vette észre, hogy ([122], (1972)) a valószínűségszámítási módszer egyszerű alkalmazásával kapjuk a $\alpha(\mathcal{H}) = \Omega(v/t)$ becslést. Ezen egyszerű egyenlőtlenségre mint a gráfelméleti Turán tétel hipergráfos kiterjesztésére gondolunk. Ezt élesíti az előző tétel rövid, egyszerű körök hiánya esetén. Alkalmazásaink során a konstruált hipergráfokban lesznek 3, illetve 4 hosszú körök. A következő tétel nagyon hasznos lesz számunkra, Ez az alap szemi-random módszert terjeszti ki szélesebb hipergráfosztályra.

Tétel ([39], Theorem 2). *Legyen $\mathcal{H}$ egy k -uniform hipergráf v csúcson. Legyen Δ a $\mathcal{H}$ hipergráf maximális foka. Tegyük fel, hogy $\Delta \leq t^{k-1}$ és $1 \ll t$. Ha $\mathcal{H}$ nem tartalmaz 2-kört (két él legalább két közös csúccsal), akkor*

$$\alpha(\mathcal{H}) = \Omega\left(\frac{v}{t} (\log t)^{\frac{1}{k-1}}\right).$$

A szerzők észrevétele, hogy a szemi-random módszer már lineáris hipergráfokra is alkalmazható. Ennek a módszernek két geometriai alkalmazását ismertetjük.

Az első alkalmazás egy Erdős Páltól származó, majd később függetlenül Gowers által is kimondott kérdés [62]. Adott egy $\mathcal{P}$ véges síkbeli ponthalmaz, mi az a minimális méret

amely garantálja legyen $\mathcal{P}$ -ben n egy egyenesre eső, vagy n független pont (semelyik három sem kollineáris)? Gowers megtette az alapvető észrevételeket: a négyzetrács pontjainak egy $n/2 \times n/2$ méretű része mutatja, hogy az $\frac{1}{4}n^2$ méret szükséges, másrészt $2n^3$ méretű, n kollineáris pontot nem tartalmazó ponthalmaz esetén a mohó algoritmus garantál n független pontot. Payne és Wood [106] a felső becslést $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ -re javította. Ők is egy olyan ponthalmazt vettek, amely nem tartalmaz n kollineáris pontot, de mérete jóval n^3 alatt van. A mohó algoritmus helyett azonban Spencer lemmáját alkalmazták, azaz egy egyszerű véletlen ritkítást vettek a definiált hipergráfukban. A Szemerédi–Trotter-tétel segítségével egyszerű megbecsülni a megmaradt élek számát, amely becslés elvezet a tételükhöz.

Szemerédi Endrével ezt a becslést javítjuk meg. Először definiáljuk a kollineáris pont-hármasok hipergráfját, majd egy véletlen ritkítást hajtunk végre. Ennek célja nem a kevés él elérése, hanem a 2-köröktől való megszabadulás. Ezek után alkalmazhatjuk a szemi-random módszert ([39]) egy nagy független ponthalmaz találására. Hipergráfunk független csúcshalmazai pontosan a geometriai független ponthalmazok.

1. Tétel. *Legyen $\mathcal{P}$ egy tetszőleges $\alpha \frac{n^2 \log n}{\log \log n}$ méretű síkbeli ponthalmaz alkalmas $\alpha > 0$ konstansra. Ekkor található n pontot $\mathcal{P}$ -ben, amelyek függetlenek vagy kollineárisak.*

Második geometriai alkalmazásunk szorosan kapcsolódik Heilbronn háromszög problémájához [112], [119], [113], [114], [115], [116], [87]. Vegyünk egy „szép” egység területű, zárt D tartományt (általában egy négyzetet, körlapot vagy egy szabályos háromszöget). Helyezzünk n pontot D -be és vegyük az általuk meghatározott háromszögek legkisebb területét. Milyen nagy lehet ez a paraméter? Legyen $H_\Delta(n)$ a maximuma ennek a paraméternek az összes pont n -est figyelembe véve.

Háromszögek helyett vehetünk pont k -asokat is ponthalmazunkból, majd képezzük a kivett pontok konvex burkát. Ha ennek területével dolgozunk háromszögek helyett, akkor a megfelelő szélsőérték probléma optimumát jelölje $H_k(n)$ (így $H_3(n) = H_\Delta(n)$). A legjobb $H_\Delta(n)$ -re vonatkozó alsó becslés [88]-ben található, ezt és néhány nyilvánvaló egyenlőtlenséget összegeztünk:

$$\alpha \frac{\sqrt{\log n}}{n^2} \leq H_\Delta(n) \leq H_4(n) \leq H_5(n) \leq \dots \leq \beta \frac{1}{n},$$

ahol α, β alkalmas pozitív konstansok. Két központi kérdést emelünk ki: Igaz-e hogy $H_\Delta(n) = \mathcal{O}(1/n^{2-\varepsilon})$ minden pozitív ε -ra és $H_4(n) = o(1/n)$?

Számunkra a $H_4(n)$ -re vonatkozó alsó becslések érdekesek. Schmidt [119] belátta, hogy $H_4(n) = \Omega(1/n^{3/2})$. A bizonyítás egy egyszerű mohó algoritmus. [13]-ben a szerzők egy új bizonyítást adnak és kiterjesztik az eredményt. Ezek mellett egy kérdést is feltesznek, amit nem tudtak megválaszolni: A Schmidt becslés javítható-e egy logaritmikus szorzóval? A szemi-random módszer segítségével megjavítjuk Schmidt becslését és így megválaszoljuk [13] kérdését.

2. Tétel. *Létezik egy n elemű ponthalmaz az egységnégyzetben úgy, hogy ne tartalmazzon olyan pontnégyest amely konvex burkának területe nem éri el $\beta(\log n)^{1/2}/n^{3/2}$ -t alkalmas β pozitív konstansra.*

2. fejezet

Extremális és Ramsey-típusú problémák rendezett alaphalmazzal

Amikor egy geometriai konfiguráció kombinatorikus lényegét fogalmazzuk meg, akkor nagyon gyakran a kombinatorikus alaphalmazon lesz egy rendezés. Ez a rendezés fontos szerepet játszik a kombinatorikus tulajdonságok megfogalmazásában. Rendezett alaphalmazzal kapcsolatos kombinatorikus struktúrák vizsgálatának hosszú története van. Az egyik első példa a Davenport–Schinzel probléma ([35], (1965)). Az alapkérdés motivációja differenciálegyenletek vizsgálatából ered. Definiálják egy függvény grafikonjának bonyolultságát, ahol a függvény n másik függvény maximuma. Ezen függvények grafikonjairól tudtak metszési feltételeket és így érdekelte őket milyen nagy lehet a bonyolultsága a maximum függvénynek. A kombinatorikus lényeg egyszerű volt. Csak a legegyszerűbb kérdést mondjuk ki: Adott egy n elemű ábécé, ebből kell felépítenünk szavakat (karaktersorozatok) úgy, hogy két közvetlen egymásutáni karakter mindig különböző legyen és ne forduljon elő *ababa* részszo $a \neq b$ karakterekre. Milyen hosszú szót építhetünk fel? A részszoakat úgy kapjuk, hogy az eredeti szóból törölünk karaktereket, de a megmaradó karakterek az eredeti sorrendben követik egymást.

A sorrend lényeges. Évtizedek után született meg a megoldás: Hart és Sharir ([68], (1986)) mutatta meg, hogy a küszöbérték (n karakterből felépülő maximális szó hossza) $\Theta(n\alpha(n))$, ahol $\alpha(n)$ az inverz Ackermann függvény [1]. Az ő motivációjuk adatstruktúrák és analízisük volt. Egy út összenyomási algoritmust, amelyet Tarjan ([132], (1975)) javasolt, analizáltak. A klasszikus extremális kombinatorikában ilyen küszöbérték nem lépett fel. Például be lehet látni, hogy gráfok esetén a Turán-típusú kérdésekben ez a küszöbérték nem lehetséges.

Egy másik problémát is kiemelünk, amely természetes módon vezet el egy kombinatorikus problémához, amely alaphalmaza rendezett halmaz. Erdős egyik kombinatorikus geometriai alapproblémája, hogy a síkon n pont legfeljebb hány egységtávolságot határoz meg. A kérdés a kombinatorika egyik legjobban vizsgált, központi kérdése. Ennek ellenére kevés eredmény ismert. Ennek egyik oka, hogy a „kombinatorikus fordítások” eléggé pontatlanok. Felmerült a konvex ponthalmazok (egy konvex sokszög csúcshalmaza) vizsgálata.

A legjobb konstrukció $2n - 7$ egységtávolságot tartalmaz (Hajnal P. és Edelsbrunner ([41], (1990)), amely nagyon távol volt a $\mathcal{O}(n^{4/3})$ -es felső becsléstől. Füredi ([57], (1990)) javította meg a felső becslést $\mathcal{O}(n \log n)$ -re. Felismerte azt, hogy konvex ponthalmaz elemei között van egy a konvexburok kerülete által meghatározott körszerű rendezés. Ezt a rendezést használva adott egy tiltott konfigurációt az egységtávolságok gráfjára. Így ju-

tott el a következő extrémális tétel, amely bizonyításának lényege: Ha egy $n \times n$ méretű 0-1 mátrix nem tartalmaz négy 1-est, amelyek $\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ konfigurációt alkotnak, akkor a mátrixban az egyesek száma $\mathcal{O}(n \log n)$.

A fent kiemelt tétel nagyon gyümölcsözőnek bizonyult. Füredi és Hajnal P. a fenti tételhez hasonló tételeket vizsgált más tiltott részkonfigurációk esetén. Egy elmélet kialakítását kezdték el és cikkükben összefoglalták az általuk legfontosabbnak tartott nyitott problémákat. Az elmélet kialakulása valóban elkezdődött, amit sok további cikk jelez (például lásd [81], [130], [107], [131]). A 2018-as IMU kongresszus ezen témáról szóló meghívott előadása (Tardos Gábor) további kérdéseket vet fel és kutatásokat ösztönöz. A Füredi–Hajnal-cikkből egyetlen problémát emelünk ki, amely különösen fontos szerepet kapott: Ha a tiltott konfigurációt alkotó 1-esek egy permutáció mátrixot alkotnak, akkor a maximális száma az 1-eseknek $\mathcal{O}(n)$.

A *Staircases of Gyárfás* fejezetben Gyárfás egy Ramsey-típusú problémáját vizsgáljuk. A motiváció geometriai és a kombinatorikus megfogalmazás 0-1 mátrixok nyelvén a legtermészetesebb.

Jól ismert (Erdős és Rado egy korai megjegyzése, ma már standard feladat BSc gráfelmélet kurzus keretében) hogy a teljes gráfok tetszőleges piros/kék élszínezése esetén lesz monokromatikus feszítőfa. 1998-ig váratott, hogy Károlyi, Pach és Tóth [78] kimondja és belátja ennek egy nagyon szép általánosítását: Adott n általános helyzetű pont a síkon. Az általuk meghatározott szakaszokat tetszőlegesen kiszínezzük piros/kék színekkel. Ekkor garantált, hogy létezik egyszínű, nem-metsző feszítőfa.

A fenti kérdéseket teljes páros gráfra is feltehetjük. Monokromatikus feszítőfa nem lesz garantált, de vizsgálható milyen nagy monokromatikus fa-részgráf lesz. A gráfelméleti kérdés egyszerűen megválaszolható: Ha $K_{n,n}$ éleit tetszőlegesen kiszínezzük piros/kék színnel, akkor a legnagyobb monokromatikus fa csúcsszáma legalább n , ha n páros és $n + 1$, ha n páratlan. Továbbá a fenti becslések nem javíthatók.

Gyárfás egy szép tétele ([78]) vezetett a geometriai probléma vizsgálatához: Adott $2n$ konvex helyzetű ponthalmaz és egy egyenes, amely a ponthalmazt két n elemű félre vágja. Vegyük az egyenesünket metsző n^2 összekötő szakaszt és színezzük ki piros/kék színnel. Milyen nagy monokromatikus nem-metsző fát garantálhatunk? A fenti geometriai/gráfelméleti kérdés megfogalmazható mint egy mátrixokra vonatkozó probléma, ahogy ez egy megjegyzésként megjelenik [26]-ben.

Legyen M egy 0-1 mátrix. Egy 0-lépcsős nulla elemek egy $\{s_i\}_{i=1}^\ell$ sorozata M -ben úgy, hogy s_i -hez képest s_{i+1} vagy azonos sorban jobbra, vagy azonos oszlopban alatta van. (Kiemeljük, hogy nem tesszük fel, hogy s_i és s_{i+1} közvetlen egymás mellett áll.) Hasonlóan definiálhatók az 1-lépcsősök, amelyeket 1-es elemek alkotnak. Egy elemsorozat M -ben homogén lépcsős, ha 0- vagy 1-lépcsős. Egy S homogén lépcsős hossza az elemeinek száma. Ezt $|S|$ -sel jelöljük. S -re úgy is tekinthetünk mint $|S| - 1$ lépés, ahol minden lépés egy jobbra, vagy lefelé lépés egy a kiinduló helyzetben lévő értékkel megegyező értékű elemre. S egy eleme fordulópont, ha az odavezető és a kivezető lépés iránya különbözik.

Sejtés (Gyárfás sejtése). *Tetszőleges $n \times n$ méretű 0-1 mátrix tartalmaz $n - 1$ méretű homogén lépcsőt.*

Jelölje $st(M)$ az M mátrix homogén lépcsői között a legnagyobb méretét. Jelölje $st_0(M)$ (illetve $st_1(M)$) az M mátrix 0-homogén lépcsői között a legnagyobb méretét (illetve az 1-lépcsőket tekintve). Tehát $st(M) = \max\{st_0(M), st_1(M)\}$.

Az eredeti Ramsey-típusú problémában a ponthalmaz kettévágása egy felezés volt, azaz a mátrix nyelvezetben négyzetes mátrixokat vizsgáltunk eddig. Most bevezetjük az aszimmetrikus változatot:

$$st(n) = \min\{st(M) : M \in \{0, 1\}^{n \times n}\},$$

$$st(n, N) = \min\{st(M) : M \in \{0, 1\}^{n \times N}\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $st(n, N) = st(N, n)$. A továbbiakban feltesszük, hogy $N \geq n$.

A Gyárfás-sejtés megfogalmazható úgy is, hogy $st(n) = st(n, n) \geq n - 1$. A [26] cikk leír egy egyszerű konstrukciót, amely mutatja, hogy $st(n) \leq n - 1$ (feltéve, hogy $n > 1$). Így a Gyárfás-sejtés pontos állítása, hogy $st(n) = n - 1$, ha $n > 1$.

$st(M) = \max\{st_0(M), st_1(M)\}$ helyett vizsgálhatjuk a

$$st_\Sigma(M) = st_0(M) + st_1(M)$$

paramétert is.

Természetes bevezetni a következő Ramsey-típusú paramétereket:

$$st_\Sigma(n) = \min\{st_\Sigma(M) : M \in \{0, 1\}^{n \times n}\},$$

$$st_\Sigma(n, N) = \min\{st_\Sigma(M) : M \in \{0, 1\}^{n \times N}\}.$$

Cai, Grindstaff, Gyárfás és Shull a $st_\Sigma(n)$ függvénnyel kapcsolatban kimond egy sejtést (lásd [34]), ami hamisnak bizonyult (lásd a [26] cikk, [34] újság változatának utolsó megjegyzése). A fejezetben meghatározzuk $st_\Sigma(n, N)$ pontos értékét.

3. Tétel. $n \leq N$ esetén

$$st_\Sigma(n, N) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + N - 1.$$

A következő szekcióban $st(n, N)$ -nel foglalkozunk. Két konstrukciót ismertettünk (azaz felső becsléseket adunk az $st(n, N)$ függvényre).

4. Tétel. $N \geq \lfloor \frac{5}{2}n \rfloor - 1$ esetén,

$$st(n, N) = \left\lceil \frac{\lfloor n/2 \rfloor + N - 1}{2} \right\rceil.$$

Továbbá, ha $n < N < \lfloor \frac{5}{2}n \rfloor - 1$ akkor,

$$st(n, N) \leq \left\lceil \frac{2n + N - 2}{3} \right\rceil.$$

A tétel kimondásából látszik, hogy bizonyos paraméter értékek esetén a felső becsléssel azonos alsó becslést is tudtunk társítani. Azt sejtjük, hogy becsléseink mindig a helyes értékeket adják.

5. Sejtés. $n < N < \lfloor \frac{5}{2}n \rfloor - 1$ esetén,

$$st(n, N) = \left\lceil \frac{2n + N - 2}{3} \right\rceil.$$

Sejtésünk a négyzetes esetben Gyárfás sejtését adja. Sajnos a négyzetes, illetve közel-négyzetes mátrixok esete mindmáig megoldatlan.

A fejezet végső szekciójában lényegesen megjavítjuk $st(n)$ egyszerű $\frac{4}{5}n$ -es alsó becslését [63] (szemben a [26] cikkel, ahol a javíthatóságot megmutatták, de javításukban szereplő konstans csak alig mozdul el). Belátjuk a következő tételt.

6. Tétel. *Tetszőleges $M \in \{0, 1\}^{n \times n}$ mátrix esetén*

$$st(M) \geq \frac{5}{6}n - \frac{7}{12}.$$

3. fejezet

Rendezett alaphalmazokkal rendelkező kombinatorikus struktúrák összeszámlálása

Megemlítiünk még egy kombinatorikus problémát, amelyben az alaphalmaz rendezése fontos szerepet játszik. Ez egy a fentiekől különböző „kultúrából” ered, az összeszámlálási kombinatorikából. A témakör egyik fontos problémája volt a Stanley–Wilf-sejtés. Először is definiáljuk, hogy mikor mondjuk azt, hogy egy $\pi \in S_n$ permutáció tartalmazza a $\tau \in S_k$ permutáció-mintát: Ha a π -t leíró permutációmátrixnak részmátrixa τ permutáció mátrixa. Nagyon sok konkrét (kis k -hoz tartozó) τ permutáció esetén ismert hány olyan $\pi \in S_n$ permutáció van, amely nem tartalmazza τ -t. Konkrét esetekben (például $\tau = 213$) a választ a Catalan-számok adják. Más esetekben bonyolultabb módon adott a megfelelő permutációk száma. Erre a számra azonban mindig n -ben exponenciális becslés adható, ami jóval kisebb $|S_n| = n!$ -nál. A Stanley–Wilf-sejtés azt mondja, hogy minden fix $\tau \in S_k$ esetén azon S_n -beli permutációk száma, amelyek nem tartalmazzák τ -t csak exponenciálisan sokan lehetnek. A sejtés vizsgálata sokáig a középpontban volt (lásd [19]), több speciális τ -t vizsgáltak, több PhD dolgozat született a témában.

2000-ben Klazar ([85], (2000)) egy fontos észrevételt tett: Ha a Füredi–Hajnal-sejtés igaz (azaz egy permutáció mátrix 1-esének konfigurációját tiltjuk egy $n \times n$ méretű 0-1 mátrixban, akkor az 1-esek száma lineáris), akkor a Stanley–Wilf-sejtés is igaz. A két sejtés két különböző kutatói kultúrában volt ismert. Ez az eredmény meglepő módon összekötötte az extrémális és az összeszámlálási kérdést. 2004-ben Marcus és Tardos ([102], (2004)) bebizonyította a Füredi–Hajnal-sejtést, így a Stanley–Wilf-sejtés is bizonyítást nyert.

Marcus és Tardos többet állított mint amit a Stanley–Wilf-sejtést kívánt. A permutáció mátrixok alaphalmaza helyett a 0-1 mátrixok alaphalmazában számolt meg bizonyos tiltott

konfigurációt nem tartalmazó mátrixokat. Ezzel problémák egy új serege felé irányította a figyelmet.

Kevés példa volt ismert tiltott részmátrixok mellett 0-1 mátrixok összeszámolására. Egy azonban különösen fontos lesz számunkra. Egy 0-1 mátrixot *egyedi-összegűnek* nevezzük, ha sor és oszlopösszegei meghatározzák a mátrixot. Jelölje $\mathcal{L}_n^{(k)}$ az $n \times k$ méretű egyedi-összegű 0-1 mátrixok halmazát. Ezen mátrixok Gale és Ryser ([60], [117], (1957)) egy klasszikus tétele alapján jellemezhető két kizárt részmátrixszal. 2008-ban Brewbaker meghatározta számukat.

Tétel (Brewbaker, [15], (2008)). *Az $n \times k$ méretű egyedi-összegű 0-1 mátrixok száma*

$$|\mathcal{L}_n^{(k)}| = \sum_{m=0}^{\min(n,k)} (m!)^2 \begin{Bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k+1 \\ m+1 \end{Bmatrix}.$$

Az állítás jobb oldalán szereplő formula már ismert volt egy teljesen más kutatási területről. A $\zeta(k) = \sum_{m>0} \frac{1}{m^k}$ Dirichlet-sor (amely $k > 1$ konvergens), és analitikus komplex kiterjesztése, a Riemann zeta függvény a matematika egyik legfontosabb objektuma. Története a 17-ik században, az úgy nevezett Basel problémával kezdődött. Ez $\zeta(2)$ értékének meghatározását kérte. Sok erőfeszítés történt a megoldásra és a Bernoulli-számok előtérbe kerültek.

Definíció. *A Bernoulli-számok $(B_n)_{n=0}^\infty$ sorozatát exponenciális generátorfüggvényükkel definiáljuk*

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

A számokat Jacob Bernoulli vezette be 1713-ban (posztumusz) publikált munkájában, ahol az első n pozitív egész hatványösszegeire vonatkozó formulákat vizsgálta és az előforduló együtthatók között keresett szabályosságokat. Euler használta és tovább vizsgálta ezeket, ő a számsorozat keresztszülője is. Euler volt, aki megoldotta a Basel problémát és belátta, hogy $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Eredmény kiterjeszthető a zeta függvény pozitív, páros helyeken felvett értékeire is: $\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}$, ahol $k = 1, 2, 3, \dots$. A további nagyon széles körű eredményekhez, kutatásokhoz csak kiinduló forrásokat adunk: [8], [70], [118].

A ζ függvény több kiterjesztése közül az egyik különösen fontos lesz számunkra. A többszörös ζ értékek $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ szám n -esekhez tartoznak (ahol $k_i \geq 2$ egészek), definíciójuk a következő konvergens összeg

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}.$$

A Riemann-féle zeta függvény ezen természetes kiterjesztését Euler [48] kezdte el az $n = 2$ eset vizsgálatával. A 20. század végére a többszörös zeta függvények a kvantumtérelmélet, csomók elmélete, mixed Tate motive, vagy kvantum csoportok vizsgálata során is szerepet kaptak ([23], [105], [61], [70]), tanulmányozásuk egyre intenzívebb lett.

A poly-Bernoulli számokat Kaneko [75] vezette be 1997-ben mint a klasszikus Bernoulli számok általánosítása, a többszörös zeta függvények értékeinek vizsgálata során. Ahogy a klasszikus ζ függvény értékei „tartalmazzák” a Bernoulli számokat, a többszörös zeta függvények értékeiből kiolvashatók releváns számok. Ezek a poly-Bernoulli számok, természetes definíciójuk generátorfüggvényekre alapul.

Definíció (Kaneko, [76]). A $B_n^{(k)}$ poly-Bernoulli számok, ahol n egy pozitív egész és k egy egész, a következő exponenciális generátorfüggvénnyel definiált

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{x^n}{n!} = \frac{Li_k(1 - e^{-x})}{1 - e^{-x}}, \quad (3.1)$$

ahol

$$Li_k(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i^k},$$

azaz $Li_k(z)$ a k -adik polilogaritmus függvény, ha $k > 0$, továbbá egy racionális törtfüggvény ha $k \leq 0$.

$B_n^{(1)}$ számok a klasszikus Bernoulli-számok. A poly-Bernoulli számok bevezetése után nagyon sok számelméleti cikk jelent meg tanulmányozásukról. Ezek a generátorfüggvényes definíción alapultak és algebrai manipulációkkal vezettek le tulajdonságokat. Érdekességként észrevették, hogy negatív k index esetén a poly-Bernoulli számok természetes számok.

3.1. táblázat. A poly-Bernoulli számok $B_n^{(-k)}$ az $n, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ paraméterek esetén

$\begin{smallmatrix} k \\ n \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	4	8	16	32
2	1	4	14	46	146	454
3	1	8	46	230	1066	4718
4	1	16	146	1066	6906	41506
5	1	32	454	4718	41506	329462

A táblázat szimmetriája n és $-k$ -ban egyből szembetűnő. Ez a következő analitikus tulajdonságból nyilvánvaló is: $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(-k)} \frac{x^n}{n!} \frac{y^k}{k!} = \frac{e^{x+y}}{e^x + e^y - e^{x+y}}$. Szintén algebrai manipulációk után jutottak el a következő képlethez $B_n^{(-k)} = \sum_{m=0}^{\min(n,k)} m! \{n+1\}_{m+1} \{k+1\}_{m+1}$, amelyből kiolvashatóvá, hogy a $B_n^{(-k)}$ számok ($n, k \in \mathbb{N}$) valóban természetes számok. ($\{s\}_t$ jelöli egy s elemű halmaz t darab halmazba való osztályozásainak számát, azaz a másodfajú Stirling-számokat.)

Ahogy Brewbaker belátta a fent említett tételét egyből észrevette, hogy azt a $|\mathcal{L}_n^k| = B_n^{(-k)}$ formában is megadhatja. Vagy pedig eredményét használhatja a poly-Bernoulli számok kombinatorikus definíciójára: $B_n^{(-k)}$ definiálható mint az $n \times k$ méretű egyedi-összegű 0-1 mátrixok száma.

A kombinatorikus szemlélet a negatív k paraméterű számokat tudja jól kezelni. Mostantól kezdve csak ezekkel a számokkal dolgozunk és az egyszerűség kedvéért $B_n^{(-k)}$ -ra bevezetjük a $B_{n,k}$ jelölést.

7. Definíció. A $(B_{n,k})_{n,k=1}^{\infty}$ poly-Bernoulli számok a

$$B_{n,k} = |\mathcal{L}_{n,k}|$$

számok, azaz az egyedi-összegű, $n \times k$ méretű 0-1 mátrixok száma.

A számtáblázat megtalálható az egész sorozatok online enciklopédiájában (OEIS [109]), mint A099594.

Az a felismerés, hogy a poly-Bernoulli számok kombinatorikusan is definiálhatók lehetőséget adnak arra, hogy kombinatorikusan bizonyítsunk olyan tulajdonságokat, amelyek algebrai átalakítások „melléktermékeiként” adódtak, illetve kombinatorikus gondolatok új összefüggésekhez vezessenek. Például a poly-Bernoulli számok szimmetriája, illetve az, hogy értékeik természetes számok kombinatorikusan nyilvánvalóak. Ilyen irányú eredményeket [11]-ben publikáltunk.

Ohno [104] bevezette a zéta csillag függvényeket

$$\zeta^*(k_1, \dots, k_n) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}}.$$

Kaneko [77] ahogy a többszörös zéta függvényekből ezekből a zéta csillag függvényekből is kiolvasott releváns együtthatókat: $C_n^{(k)}$. Algebrai manipulációkkal rekurziók, formulák és tulajdonságok vezethetők le ezekre a számokra is.

A disszertációban kombinatorikusan definiáljuk a $C_{n,k}$ számokat, amely a Kaneko által bevezetett együtthatókat adja negatív k értékekre. A poly-Bernoulli számokkal való hasonlóság már a definíció szintjén megjelenik és a párhuzamos tárgyalás rávilágít a hasonlóság gyökerére. A kombinatorikus definíció esetleges. Kiderül, hogy a $C_{n,k}$ és poly-Bernoulli számoknak rengeteg egymástól független definíciója adható. Ezek a számelméleti vizsgálatoktól függetlenül, részben Kaneko munkássága előtt már kutatott volt. Ezek a kutatások egymástól függetlenek voltak. Gyakran a $C_{n,k}$, gyakran a poly-Bernoulli számok, illetve a velük rokon $D_{n,k}$ számokkal kapcsolatosak. Az egyes már ismert tulajdonságok kombinatorikus igazolásához különböző alternatív kombinatorikus definíciók lesznek megfelelőek. Lássuk a definíciókat:

Legyen $\mathcal{L}_n^k(c)$ azon $n \times k$ méretű 0-1 egyedi-összegű mátrixok halmaza, amelyek nem tartalmaznak 0 oszlopot, azaz minden oszlopban legalább egy 1-es szerepel. Jelölje $\mathcal{L}_n^k(c|r)$ azon $n \times k$ méretű 0-1 egyedi-összegű mátrixok halmaza, amelyek nem tartalmaznak sem 0 oszlopot, sem 0 sort.

8. Definíció. $C_{n,k}$ jelölje $|\mathcal{L}_n^k(c)|$ -t, azaz azon $n \times k$ méretű egyedi-összegű mátrixok számát, amelyek nem tartalmaznak csupa 0 oszlopot.

$D_{n,k}$ jelölje $|\mathcal{L}_n^k(c|r)|$ -t, azaz azon $n \times k$ méretű egyedi-összegű mátrixok számát, amelyek nem tartalmaznak csupa 0 oszlopot és sort sem.

Belátjuk, hogy $C_{n,k} = C_n^{(-k)}$. Nem meglepő a poly-Bernoulli számokkal való hasonlóság és természetes a $D_{n,k}$ számok bevezetése is.

A *Poly-Bernoulli numbers, their relatives, and their combinatorics* fejezetben számos alternatív kombinatorikus definíciót adunk a $C_{n,k}$ és $D_{n,k}$ számokra. Ezek segítségével látunk be régi és új azonosságokat. Bizonyításaink kombinatorikusak. Ezek természetesebbek az analitikus/algebrai bizonyításoknál, illetve a kombinatorikus gondolatok gyakran olyan összefüggésekhez vezetnek, amelyek az analitikus módszerek használói nem vettek észre. A poly-Bernoulli számok bevezetése/elnevezése viszonylag új. Azonban ezek a számok már korábban is felbukkantak matematikai vizsgálat során. Érdekességként megjegyezzük, hogy Lovász László 1979-ben kiadott [99] klasszikus feladatgyűjteményében a negyedik fejezet 36-os számú feladata a $D_{n,k}$ számokkal foglalkozik. Azóta is többször, a legkülönbözőbb helyeken felmerültek ezek a számok, legtöbbször minden hivatkozás nélkül a korábbi kutatásokra.

Néhány jellemző eredmény ebből a fejezetből.

9. Tétel.

$$C_{n,k} = C_{k+1,n-1}.$$

10. Tétel.

$$B_{n,k} = C_{n,k} + C_{k,n} = C_{n,k} + C_{n+1,k-1}.$$

A bizonyítások kombinatorikusak: az egyenlőség mindkét oldala egy-egy halmaz elemszámaként írható le. Az egyenlőség a bal oldalhoz és jobb oldalhoz tartozó halmazok között megadható bijekcióból következik. Mivel sok kombinatorikus interpretáció van, ezért sok lehetőség van a fenti bizonyítási séma elvégzésére. Az itt adott indoklások látványosak, egyszerűek.

4. fejezet

Telített geometriai struktúrák

Sokszor a geometria adja a probléma környezetét és kérdés kombinatorikus motivációjú.

Telítés egy hasznos eszköz a kombinatorikában. Gyakran egy $\mathcal{T}$ tulajdonságú kombinatorikus struktúrát vizsgálunk. A struktúra lehet például egy adott ponthalmazon vett egyszerű gráfok. Egy ilyen gráfot $\mathcal{T}$ -telítettnek nevezzük, ha rendelkezik a $\mathcal{T}$ tulajdonsággal, de tetszőleges két nem-szomszédos csúcs összekötése a tulajdonság elvesztését eredményezi. Sokszor a $\mathcal{T}$ tulajdonságú struktúrákra nem mondható túl sok strukturális tulajdonság, szemben a telített struktúrákkal. A telített struktúrák mély ismerete az összes $\mathcal{T}$ -tulajdonságú struktúráról ad információt. Például a teljes párosítást nem tartalmazó gráfok között a telítettek könnyen leírhatók. Ezek leírása gyorsan elvezet a Tutte-tétel felismeréséhez és bizonyításához. [44], [100], [80] csak néhány fontos publikáció a telítési módszer bemutatására. A [54] részletes összefoglaló cikk az ' F -et részhipergráfként nem tartalmaz' tulajdonság telített hipergráfjairól való ismereteinkről.

Egy ponthalmaz triangulációját úgy is tekinthetjük, hogy a pontjaink által meghatározott szakaszok közül választunk ki egy nem-metsző részt, amely telített.

Ez irányú kutatásaim ismertetéséhez néhány fogalmat kell bevezetni. Legyen $G = (V, E)$ egy egyszerű gráf ($E \subset \binom{V}{2}$). A G gráf δ lerajzolása egy leképezés a $V \cup E$ halmazból: $\delta|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ egy 1-1 leképezés, azaz δ csúcsokhoz a (koordináta-)sík különböző pontjait rendeli. A képpontokra mint csúcspontokra hivatkozunk. Legyen $\mathcal{C}$ „szép” egyszerű síkgörbék halmaza. Gondolhatunk egyszerű Jordan-görbékre vagy egyszerű szakaszokból álló görbékre. $\delta|_E : E \rightarrow \mathcal{C}$, azaz δ gráfunk minden éléhez egy görbét rendel. A $\{\delta(e) : e \in E\}$ halmaz elemeit élgörbéknek nevezzük. Feltesszük, hogy

- (1) minden $e = xy \in E$ él esetén a $\delta(e)$ élgörbe a $\delta(x)$ és $\delta(y)$ csúcspontokat köti össze és nem halad át más csúcsponton,

- (2) tetszőleges két élgörbe csak véges sok közös ponttal rendelkezik, amelyek az esetleges közös végpont kivételével a két élgörbe átmetszése.

Egy lerajzolás *szép*, ha nincs átmetszés az élgörbék között. Egy lerajzolás *egyszerű*, ha tetszőleges két élgörbének legfeljebb egy közös pontja van. (Így egy szép lerajzolás szükségszerűen egyszerű, de fordítva ez nem igaz.) Egy lerajzolás k -egyszerű, ha tetszőleges két élgörbének legfeljebb k közös pontja van.

Egy (G, δ) pár, azaz egy gráf egy lerajzolásával együtt egy topologikus gráf. Ez a topologikus gráf egyszerű, ha a lerajzolás egyszerű (gráfjaink mindig egyszerűek). (G, δ) pontosan akkor geometriai gráf, ha élgörbéi szakaszok. Egy geometriai gráf szükségszerűen egyszerű topologikus gráf. A teljes gráfnak is van geometriai lerajzolása. Csupán a csúcspontokat kell általános helyzetű pontoknak választani. Így minden gráfnak van geometriai, tehát egyben egyszerű lerajzolása is. A szép lerajzolás fogalma ettől nagyon különbözik: Szép lerajzolás létezése egy nagyon megszorító feltétel. Ez a síkgráfság egy megfogalmazása, speciálisan csak ritka gráfoknak lehet szép lerajzolása. Topologikus gráfokkal foglalkozunk. A csúcsok/csúcspontok, illetve élek/élgörbék fogalmakat szinonimaként használjuk.

Telítés szempontjából is a szépség, illetve egyszerűség fogalma lényegesen különböző. Ha vesziünk egy szép lerajzolását és ezt telítjük, akkor egy olyan lerajzolóhoz jutunk, amelyben minden tartományt három él határol és az élek száma $3|V| - 6$ (feltesszük, hogy $|V| \geq 3$). Azaz a végső, telített gráf mérete nem függ a telítési folyamatától.

A [96] cikk kezdte meg az egyszerű topologikus gráfok között a telítettek vizsgálatát. Egy teljes gráf geometriai lerajzolása telített, azaz itt a telítettek között vannak nagyon sűrűk. A [96] cikk egyik fő eredménye, hogy vannak ritka (lineáris sok éllel rendelkező) telített egyszerű topologikus gráfok. A felismerés után a szerzők nem próbálták meg az élszámban szereplő konstans faktorok javítását.

Eredményeiket élesítjük. A telítettséget megpróbáljuk minél kevesebb él jelenlétével elérni. Mivel az egyszerű lerajzolások eléggé „összegubancolódnak” a „spórolás” konstrukciók egyáltalában nem egyszerűek. Az egyszerű esetben az eredeti 17.5-es, illetve a 2-egyszerű esetben $16n$ -es felső becslést egy telített topologikus gráf élszámára sikerült megjavítani.

11. Tétel. *Tetszőleges pozitív n esetén létezik legfeljebb $7n$ élű egyszerű topologikus gráf, amely telített.*

A [96] cikk alsó becslést is ad a telített egyszerű topologikus gráfok élszámára. Az alsó becslés a következő észrevételen alapul: Ha egy legalább 4 pontú egyszerű topologikus gráf A csúcspontjának foka legfeljebb 2, akkor hozzáadható egy A -ból induló élgörbe, ami megőrzi a lerajzolás egyszerűségét. Azaz a legalább négy pontú telített topologikus gráfokban minden csúcs foka legalább 3. Az érvelés lokális tulajdonságok alapján állít nem telítettséget. Habár nem tudunk [96] alsó becslésén javítani, de ezen lokális érvelési technika korlátaira rámutatunk.

12. Tétel. *Legyen k tetszőleges természetes szám. Ekkor létezik $10k$ csúcsú egyszerű topologikus gráf, amelyben található k darab 5 fokú csúcs.*

Konstrukciónkat kiterjesztjük 2-egyszerű topologikus gráfokra. Ezen irányú kutatásainkat a következő tétel foglalja össze.

13. Tétel. *Tetszőleges pozitív egész n -re létezik 2-egyszerű topologikus gráf, amely élszáma legfeljebb $14.5n$.*

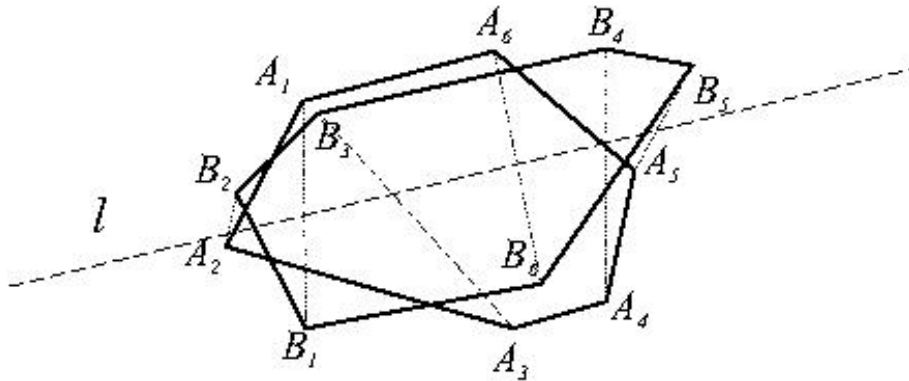
5. fejezet

Geometriai transzverzális egyenesek

A következő fejezetben síkbeli konvex poligonok egy tulajdonságát vizsgáljuk.

14. Tétel. *Legyenek $A_1, \dots, A_n$ és $B_1, \dots, B_n$ síkbeli konvex poligonok, amelyek körüljárása ellentétes. Ekkor van olyan egyenes, amelynek az $A_1B_1, \dots, A_nB_n$ szakaszok mindegyikével van közös pontja.*

Az állításbeli egyenest az A_jB_j szakaszok közös transzverzálisának nevezzük (5.1. ábra).

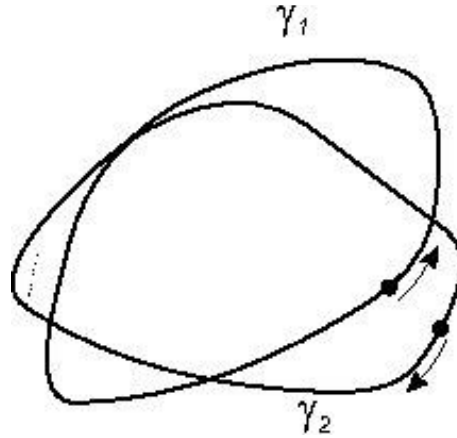


5.1. ábra. A konvex poligonok és az A_iB_i szakaszok közös transzverzálisa

Egy ekvivalens, folytonos megfogalmazását is adjuk a 14. Tételnek

15. Tétel. *Legyenek γ_1 és γ_2 konvex görbék a síkon. Tegyük fel, hogy mindkét görbén egy-egy autó mozog körbe azonos kezdő időpontból indulva. Az egyik pozitív, a másik negatív irányításban járja be pályáját és azonos pillanatban érkezik vissza a kiinduló pontba. Ekkor létezik egy olyan ℓ egyenes, amelynek az utazás teljes ideje során az ellentétes oldalán tartózkodik a két autó.*

Az egyenes pontjait mindkét oldalhoz hozzáértjük. Az autók megállhatnak, de visszafordulásukat nem engedjük meg (lásd 5.2. ábra).



5.2. ábra. Két konvex görbe és egy-egy autó rajtuk

Nyilván 14. Tétel következik 15. Tételből. Valóban, ha adott $A_1, \dots, A_n$ és $B_1, \dots, B_n$ akkor a két autó egy közös időpillanatban induljon az A_1 , illetve B_1 csúcsból. A két autó sokszögük mindegyik oldalát 1 perc alatt járja be egyenletes sebességgel. Az utazás kezdete után $i - 1$ perccel, az első autó pozíciója A_i és a másodiké B_i lesz ($i = 1, \dots, n$). A 15. Tétel által garantált ℓ egyenes bizonyítja a 14. Tételt.

Egy egyszerű approximációs érvelés mutatja, hogy a másik irányban is igaz a következtetés, azaz a két tétel ekvivalens: Ehhez vegyük azokat a pontokat, ahol a két autó a $t = (k/n)T$ időpillanatokban tartózkodnak ($k = 1, \dots, n$), ahol T a teljes körbeutazáshoz szükséges idő. A kapott n -szögre alkalmazható 14. Tétel. A kapott egyeneseket vizsgáljuk $n \rightarrow \infty$ esetben és konstruálhatunk egy 15. Tételt bizonyító egyenest.

A magasabb dimenziós esetet is vizsgáljuk és $\mathbb{R}^3$ -ban a következő eredményeket igazoljuk.

16. Állítás. Ha $A_1 \cdots A_n$ és $B_1 \cdots B_n$ ellenkezőleg irányított egybevágó poliéderek (az egybevágóságnál A_i képe B_i , $i = 1, 2, \dots, n$). Ekkor található olyan sík a térben, amely az összes $A_i B_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ szakaszt metszi.

17. Állítás. Legyen $A_1 \cdots A_n$ egy térbeli poliéder és $B_1 \cdots B_n$ ennek egy affin képe. Ha ezek a poliéderek ellentétesen vannak irányítva (abban az értelemben, hogy megfelelő lapjai irányításai ellentétesek), akkor található egy sík amely az összes $A_i B_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ szakaszt metszi.

Eredményeinket kiterjesztjük $\mathbb{R}^d$ -re.

Megjegyezzük, hogy más kiterjesztések is lehetségesek. Az általunk tárgyalt kiterjesztésektől eltérő bizonyított Holmsen, Kincses és Roldán-Pensado [71] $\mathbb{R}^d$ -ben vettek két konvex (bármelyik hipersík legfeljebb d pontban metszi) görbét, C_1 -et és C_2 -t, melyek $[0, 1]$ -gyel, ellentétes irányban paraméterezettek. Belátták, hogy található olyan H hipersík, hogy tetszőleges $t \in [0, 1]$ esetén a $C_1(t)$ és $C_2(t)$ nem esnek H által meghatározott ugyanazon nyílt feltérbe.

Irodalomjegyzék

- [1] W. Ackermann, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, *Math. Ann.*, **99** (1928), 118–133.
- [2] R. Adamec, M. Klazar and P. Valtr, Forbidden words, *Preprint*, Department of Mathematics, Karlovy University, Prague, Czechoslovakia.
- [3] P. Agarwal, M. Sharir and P. Shor, Sharp upper and lower bounds on the length of general Davenport-Schinzel sequences, *Preprint*.
- [4] M. Ajtai, J. Komlós, E. Szemerédi, A dense infinite Sidon sequence, *European J. Combin* **2** no.1 (1981), 1–11.
- [5] M. Ajtai, J. Komlós, J. Pintz, J. Spencer, E. Szemerédi, Extremal uncrowded hypergraphs, *J. Combin. Theory Ser. A* **32** no.3 (1982), 321–335.
- [6] S. Akiyama, Y. Tanigawa, Multiple zeta values at non-positive integers, *Ramanujan J.*, **5**(2001)
- [7] R. Andrade, E. Lundberg, B. Nagle, Asymptotics of the extremal exceedance set statistic, *European Journal of Combinatorics*, **46** (2015), 75–88.
- [8] Arakawa, Ibukiyama, Kaneko, *Bernoulli numbers and zeta functions*, With an appendix by Don Zagier, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Tokyo, 2014.
- [9] T. Arakawa, M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, *Nagoya J. Math.*, **153**(1999), 189–209.
- [10] J. C. Aval, A. Boussicault, M. Bouval, M. Silimbani, Combinatorics of non-ambiguous trees, *Adv. in Appl. Math.*, **56**(2014), 78–108.
- [11] B. Bényi, P. Hajnal, Combinatorics of poly-Bernoulli numbers, *Studia Sci. Math. Hungarica*, **52**(4) (2015) 537–558.
- [12] B. Bényi, Advances in Bijective Combinatorics, PhD thesis.
- [13] C. Bertram-Kretzberg, T. Hofmeister, H. Lefmann, An algorithm for Heilbronn’s problem, *SIAM J. Comput.*, **30**(2000), no.2, 383–390.
- [14] W.A. Beyer and A. Zardecki, The early history of the ham sandwich theorem, *American Mathematical Monthly*, **111**(2004), 58–61.
- [15] C.R. Brewbaker, A combinatorial interpretation of the poly-Bernoulli numbers and two Fermat analogues, *Integers*, **8**, (2008), A02.

- [16] C.R. Brewbaker, personal communications.
- [17] B. Bollobás, *Extremal Graph Theory*, Academic Press, London - New York, 1978.
- [18] B. Bollobás, P. Erdős, M. Simonovits, On the structure of edge graphs II, *J. London Math. Soc.*, 12 (2), 1976, 219–224.
- [19] M. Bóna, *Combinatorics of permutations*, With a foreword by Richard Stanley, Second edition. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), CRC Press, Boca Raton, FL, 2012.
- [20] W. G. Brown, On graphs that do not contain a Thomsen graph, *Canad. Math. Bull.*, **9** (1966), 281–285.
- [21] D. Bienstock and E. Győri, An extremal problem on sparse 0-1 matrices, to appear in *SIAM J. Disc. Math.*
- [22] J. Borwein, R. Girgensohn, Evaluations of binomial series, *Aequationes Math.*, **70**, (2005), 25–36.
- [23] D.J. Broadhurst, D. Kreimer, Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops, *Physics Lett. B*, **393**(1997), 403–412.
- [24] A. Burstein, N. Eriksen, Combinatorial properties of permutation tableaux, in *Permutation Patterns*, (2010), S.A. Linton, N. Ruskuc, V. Vatter (eds.), LMS Lecture Note Series No. 376, Cambridge University Press, 171–192.
- [25] J. Burns, Bijective proofs for „enumerative properties of Ferrers graphs", arXiv-math/0312282v1 (2003).
- [26] S. Cai, G. Grindstaff, A. Gyárfás, and W. Shull, Noncrossing Monochromatic Subtrees and Staircases in 0-1 Matrices, *Journal of Discrete Mathematics* Volume 2014, Article ID 731519, 5 pages, Hindawi Publishing Corporation <http://dx.doi.org/10.1155/2014/731519>.
- [27] P. J. Cameron, C. A. Glass, R. u. Schumacher, Acyclic orientations and poly-Bernoulli numbers, arXiv 1412.3685v1 (2014)
- [28] K. Chen, Algorithms for Bernoulli and Euler numbers, *Journal of Integer Sequences*, **4**, (2001), A01.1.6
- [29] E. Clark, R. Ehrenborg, Explicit expressions for extremal exceedance set statistics, *European J. Combin.*, **31**, (2010), 270–279.
- [30] *Contests in Higher Mathematics, 1949-1961*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.
- [31] K. Corrádi and A. Hajnal, On the maximal number of independent circuits in a graph., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **14**(1963), 423–439.
- [32] S. Corteel, L. K. William, Tableaux combinatorics for the asymmetric exclusion process, *Adv. Appl. Math.*, **39(3)**, (2007), 293–310.

- [33] H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, 1961.
- [34] S. Cai, G. Grindstaff, A. Gyárfás, and W. Shull, Noncrossing Monochromatic Subtrees and Staircases in 0-1 Matrices, <http://www.bsmath.hu/staircasefinal.pdf> under the homepage of Budapest Semester. A preliminary version of [26]
- [35] H. Davenport and A. Schinzel, A combinatorial problem connected with differential equations, I and II, *Amer. J. Math.*, **87** (1965), 684-694 and *Acta Arithmetica*, **17** (1971), 363-372.
- [36] R. Diestel, *Graph Theory*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 173, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [37] G.A. Dirac, Some theorems on abstract graphs, *Proc. London Math. Soc.*, 2 (1952), 68–81.
- [38] V.G. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$, *Leningrad Math. J.*, **2**(1991), 829–860.
- [39] R. Duke, H. Lefmann, V. Rödl, On uncrowded hypergraphs, *Random Structures Algorithms* **6**(1995), no. 2-3, 209–212.
- [40] R. Ehrenborg, E. Steingrímsson, The exceedance set of a permutation, *Adv. Appl. Math.*, **24**, (2000), 284–299.
- [41] H. Edelsbrunner and P. Hajnal, A lower bound on the number of unit distances between the vertices of a convex polygon, *J. Combin. Theory Ser. A*, **56**(1991), 312–316.
- [42] R. Ehrenborg, S. van Willigenburg, Enumerative properties of Ferrers graphs, *Discrete and Computational Geometry*, **32**(4) (2004) 481–492.
- [43] P. Erdős, Problem 9, *Theory of graphs and its applications* (M. Fielder ed.), Czech. Acad. Sci. Publ., Prague (1964), 159.
- [44] P. Erdős, A. Hajnal, J. W. Moon, A problem in graph theory, *Amer. Math. Monthly* **71**(1964), 1107–1110.
- [45] P. Erdős, A. Rényi and V.T. Sós, On a problem of graph theory, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **1** (1966), 215–235.
- [46] P. Erdős and M. Simonovits, A limit theorem in graph theory, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **1** (1966), 51–57.
- [47] P. Erdős and A. H. Stone, On the structure of linear graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 1087–1091.
- [48] L. Euler, Meditationes circa singulare serierum genus, *Novi Comm. Acad. Sci. Petropol* **20**(1775), 140–186; reprinted in *Opera Omnia* ser. I, vol. 15, B.G. Teubner, Berlin (1927), 217–267.

- [49] G. Fan and R. Häggkvist, The square of a hamiltonian cycle, *SIAM J. Disc. Math.*, (1994), 203–212.
- [50] G. Fan and H.A. Kierstead, The square of paths and cycles, manuscript.
- [51] G. Fan and H.A. Kierstead, The square of paths and cycles, *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B*, **63**(1995), 55–64.
- [52] G. Fan and H.A. Kierstead, Hamiltonian square-paths, *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B*, **67**(1996), 167–182.
- [53] G. Fan and H.A. Kierstead, Partitioning a graph into two square-cycles, *Journal of Graph Theory*, **23**(1996), 241–256.
- [54] J. R. Faudree, R. J. Faudree, J. R. Schmitt, A survey of minimum saturated graphs, *The Electronic J. Comb.* **18**(2011), DS19.
- [55] R.J. Faudree, R.J. Gould and M. Jacobson, On a problem of Pósa and Seymour, manuscript.
- [56] R.J. Faudree, R.J. Gould, M.S. Jacobson and R.H. Schelp, On a problem of Paul Seymour, *Recent Advances in Graph Theory* (V.R. Kulli ed.), Vishwa International Publication (1991), 197–215.
- [57] Z. Füredi, The maximum number of unit distances in a convex n -gon, *J. Combinatorial Th., A.*, **55**(1990), 316–320.
- [58] Z. Füredi and P. Hajnal, Davenport–Schinzel theory of matrices, *Discrete Math.*, **103**(3)(1992), 233–251.
- [59] W. Fulton, *Algebraic topology (a first course)*, Graduate Texts in Mathematics, Pringer-Verlag, New York, 1995.
- [60] D. Gale, A theorem on flows in networks, *Pacific J. Math.*, **7**(2)(1957), 1073–1082.
- [61] A.B. Goncharov, Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes, *Math. Res. Letters*, **5**(1998), 497–516.
- [62] T. Gowers, A Geometric Ramsey Problem, <http://mathoverflow.net/questions/50928/a-geometric-ramsey-problem>, accessed May 2016.
- [63] A. Gyárfás, Ramsey and Turán-type problems for non-crossing subgraphs of bipartite geometric graphs, *Annales Univ. Sci. Budapest*, **54**(2011), 45–56.
- [64] D. Gebhard, B. Sagan, Sinks in acyclic orientations of graphs, *J. Combin. Theorie Ser. B*, **80** (2000), 130–146.
- [65] C. Greene, T. Zaslavsky, On the interpretation of Whitney number through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non-radon partitions, and orientations of graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **280** (1983), 97–126.
- [66] R. Häggkvist, On F -hamiltonian graphs, *Graph Theory and Related Topics* (J.A. Bondy and U.S.R. Murty eds.), Academic Press, New York (1979), 219–231.

- [67] A. Hajnal and E. Szemerédi, Proof of a conjecture of Erdős, *Combinatorial Theory and its Applications* vol. II (P. Erdős, A. Rényi and V.T. Sós eds.), Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 4, North-Holland, Amsterdam (1970), 601–623.
- [68] S. Hart and M. Sharir, Nonlinearity of Davenport-Schinzel sequences and of generalized path compression schemes, *Combinatorica*, **6** (1986), 151–177.
- [69] M. He, J.I. Munro, S.S. Rao, A Categorization Theorem on Suffix Arrays with Applications to Space Efficient Text Indexes, In: *Proceedings of ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)* (2005) 23–32.
- [70] M. Hoffman, *References on multiple zeta values and Euler sums*, <https://www.usna.edu/Users/math/meh/biblio.html>.
- [71] A.F. Holmsen, J. Kincses, Edgardo Roldán-Pensado, Cutting convex curves, **58**(2016), 34–37. *European Journal of Combinatorics*,
- [72] T. Hubai, The chromatic polynomial, MSc thesis, 2009.
- [73] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random graphs*, 2000, Wiley, New York.
- [74] S. Jukna, *Extremal combinatorics*, With applications in computer science, second edition, Texts in Theoretical Computer Science, Springer, Heidelberg, 2011.
- [75] M. Kaneko, Poly-Bernoulli numbers, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, **9**(1997), 221–228.
- [76] M. Kaneko, The Akiyama-Tanigawa algorithm for Poly-Bernoulli numbers, *J. of Integer Sequences*, **3** (2000), A00.2.9
- [77] M. Kaneko, Poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, in *Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L-functions* (Ed. by G. Bhowmik, K. Matsumoto and H. Tsumura), MSJ Memoir, **21** (2010), 73–85.
- [78] G. Károlyi, J. Pach, G. Tóth, Ramsey-type results for geometric graphs, I., *Discrete and Computational Geometry*, **18**(1997), 247–255.
- [79] G. Károlyi, J. Pach, G. Tóth, P. Valtr, Ramsey-type results for geometric graphs, II., *Discrete and Computational Geometry*. **20**(1998), 375–388.
- [80] L. Kászonyi, Zs. Tuza, Saturated graphs with minimal number of edges, *J. Graph Theory* **10**(1986), 203–210.
- [81] B. Keszegh, On linear forbidden submatrices, *Journal of Combinatorial Theory*, Ser. A, **116**(2009), 232–241.
- [82] H.A. Kierstead, J. Quintana, Square Hamiltonian cycles in graphs with maximal 4-cliques, *Discrete Mathematics*, **178**(1998), 81–92.
- [83] H.K. Kim, D.S. Krotov, J.Y. Lee, Matrices uniquely determined by their lonesum, *Linear Algebra and its Applications*, **438** (2013) 3107–3123.

- [84] S. Kitaev, T. Mansour, A. Vella, Pattern avoidance in matrices, *Journal of Integer Sequences*, **8** (2005), A05.2.2
- [85] M. Klazar, The Füredi–Hajnal conjecture implies the Stanley–Wilf conjecture, *Formal power series and algebraic combinatorics* (Moscow, 2000), Springer, Berlin (2000) 250–255.
- [86] P. Komjáth, A simplified construction of nonlinear Davenport-Schinzel sequences, *J. of Comb. Theory*, **A 49** (1988), 262–267.
- [87] J. Komlós, J. Pintz, E. Szemerédi, On Heilbronn’s triangle problem, *J. London Math. Soc.* **24**(2) no.2 (1981), 385–396.
- [88] J. Komlós, J. Pintz, E. Szemerédi, A lower bound for Heilbronn’s problem, *J. London Math. Soc.* **25**(2) no.1 (1982), 13–24.
- [89] J. Komlós, G.N. Sárközy and E. Szemerédi, On the square of a Hamiltonian cycle in dense graphs, *Random Structures and Algorithms*, **9**(1996), 193–211.
- [90] J. Komlós, G.N. Sárközy and E. Szemerédi, Blow-up Lemma, *Combinatorica*, **17**(1)(1997), 109–123.
- [91] J. Komlós, G.N. Sárközy, E. Szemerédi, On The Pósa-Seymour conjecture, *Journal of Graph Theory*, **29**(1998), 167–176.
- [92] J. Komlós, G.N. Sárközy and E. Szemerédi, Proof of the Seymour conjecture for large graphs, *Annals of Combinatorics*, **2**(1998), 43–60.
- [93] J. Komlós, G.N. Sárközy and E. Szemerédi, An algorithmic version of the Blow-up Lemma, *Random Structures and Algorithms*, **12**(1998), 297–312.
- [94] D. König, Dénes (1936), *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936.
- [95] T. Kővári, V.T. Sós and P. Turán, On a problem of Zarankiewicz, *Colloq. Math.*, **3** (1954), 50–57.
- [96] J. Kynčl, J. Pach, R. Radoičić, G. Tóth, Saturated simple and k -simple topological graphs, <http://arxiv.org/abs/1309.1046>.
- [97] S. Launois, Combinatorics of H-primes in quantum matrices, *J. of Algebra*, **309**(1)(2007) 139–167.
- [98] I. Levitt, G. Sárközy, E. Szemerédi, How to avoid using the Regularity Lemma: Pósa’s conjecture revisited, *Discrete Mathematics*, **310**(2010), 630–641.
- [99] L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises*, Corrected reprint of the 2nd edition, AMS Chelsea Publishing, Providence RI, (2007); 2nd Edition, North-Holland Publishing Co, Amsterdam, (1993); original edition, North-Holland Publishing Co, Amsterdam, (1979).
- [100] L. Lovász, Three short proofs in graph theory, *J. Combinatorial Theory Ser.* **19**(1975), 269–271.

- [101] L. Lovász, K. Vesztergombi, Restricted permutations and Stirling numbers, in *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, vol. 18. Combinatorics, Keszthely, (1976), 731–738.
- [102] A. Marcus, G. Tardos, Excluded permutation matrices and the Stanley-Wilf conjecture, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **107** (2004), 153–160.
- [103] J. Mitchell, Shortest rectilinear paths among obstacles, *SORIE Technical report No. 739*, Cornell University, 1987.
- [104] Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, *J. Number Th.*, **74**(1999), 39–43.
- [105] Y. Ohno, D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, *Indag. Math.*, **12**(4)(2001), 483–487.
- [106] M.S. Payne, D.R. Wood, On the general position subset selection problem, *SIAM J. Discrete Math.*, **27**(4), 2013, 1727–1733.
- [107] S. Pettie, Degrees of nonlinearity in forbidden 0-1 matrix problems, *Discrete Mathematics*, **311**(2011), 2396–2410.
- [108] R. Pollack, R. Wenger, Necessary and sufficient conditions for hyperplane transversals, *Combinatorica*, **10**(1990), 307–311.
- [109] N.J.A. Sloane, The on-line encyclopedia of integer sequences, URL <http://oeis.org>
- [110] A. Postnikov, Total positivity, Grassmannians, networks, <http://math.mit.edu/~apost/papers.html>
- [111] V. Rödl, A. Ruciński, E. Szemerédi, A Dirac-type theorem for 3-uniform hypergraphs, *Combinatorics, Probability and Computing*, **15**(2006), 229–251.
- [112] K.F. Roth, On a problem of Heilbronn, *J. London Math. Soc.* **26** (1951), 198–204.
- [113] K.F. Roth, On a problem of Heilbronn II, *Proc. London Math. Soc.* **25**(3) (1972), 193–212;
- [114] K.F. Roth, On a problem of Heilbronn III, *Proc. London Math. Soc.* **25**(3) (1972), 543–549.
- [115] K.F. Roth, Estimation of the area of the smallest triangle obtained by selecting three out of n points in a disc of unit area, *Analytic number theory* (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, St. Louis Univ., St. Louis, Mo., 1972), 251–262, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.
- [116] K.F. Roth, Developments in Heilbronn’s triangle problem, *Advances in Math.* **22** no.3 (1976), 364–385.
- [117] H.J. Ryser, Combinatorial properties of matrices of zeros and ones, *Can. J. Math.*, **9**(1957), 371–377.

- [118] Skula, Slavutskii, *Bernoulli numbers, Bibliography (1713–1983)*, University J.E. Purkyně, Brno, 1987.
- [119] W. Schmidt, On a problem of Heilbronn, *J. London Math. Soc.* **4**(2) (1971/72), 545–550.
- [120] P. Seymour, Problem section, *Combinatorics: Proceedings of the British Combinatorial Conference 1973* (T.P. McDonough and V.C. Mavron eds.), Cambridge University Press (1974), 201–202.
- [121] M. Sharir, Almost linear upper bounds on the length of generalized Davenport-Schinzel sequences, *Combinatorica*, **7** (1987), 131–143.
- [122] J. Spencer, Turán’s theorem for k -graphs, *Discrete Math.*, **2**(1972), 183–186.
- [123] R. Stanley, Acyclic orientations of graphs, *Discrete Math.*, **5** (1973), 171–178.
- [124] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics Vol. II.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [125] J.R. Swenson, The chromatic polynomial of a complete bipartite graph, *Amer. Math. Monthly*, **80** (1973), 797–798.
- [126] E. Szemerédi, Regular partitions of graphs, Colloques Internationaux C.N.R.S. N^o 260, Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes, Orsay (1976), 399–401.
- [127] E. Szemerédi, On a problem by Davenport and Schinzel, *Acta Arithmetica*, **15** (1974), 213–224.
- [128] E. Szemerédi, W. Trotter, Extremal problems in discrete geometry *Combinatorica* **3** no.3-4 (1983), 381–392.
- [129] G. Székely (editor), *Contests in Higher Mathematics*, Problem Books in Mathematics, Springer Verlag, New York, 1995.
- [130] G. Tardos, On 0-1 matrices and small excluded submatrices, *Journal of Combinatorial Theory, Ser. A*, **111**(2005), 266–288.
- [131] G. Tardos, Extremal theory of ordered graphs, *Proceedings of the International Congress of Mathematics 2018*, Vol. 3, Edited by B. Sirakov, P.N. de Souza and M. Viana editors), World Scientific (2019), 3219–3228.
- [132] R.E. Tarjan, Efficiency of a good but not linear set merging algorithm, *J. ACM*, **22**(1975), 215–225.
- [133] K. Vesztegombi, Permutations with Restriction of Middle Strength, *Studia Sci. Math. Hungarica*, **9**(1974) 181–185.
- [134] A. Wiernik, Planar realizations of Nonlinear Davenport-Schinzel sequences by segments, in *Proceedings, 27th IEEE Found. of Comput. Sci.*, (1986), 97-106; to appear in *Discret and Comput. Geom.*
- [135] T. Yun, Diagrams of Affine Permutations and Their Labellings, PhD. thesis, 2013.