

Bírálat Hajnal Péter
Combinatorics, geometry and order című
MTA doktori disszertációjáról

A dolgozat elsősorban extrémális kombinatorikai eredményeket tartalmaz, közös bennük, hogy nagyon szép példák a különböző területek közti kapcsolatokra. A legtöbb eredményben az alapprobléma geometriai, de az algebra, analízis és valószínűségszámítás is fontos szerepet játszik. A dolgozat 105 oldalas, nagyon szép munka, körülbelül 11 kiváló cikk eredményein alapul.

Az első fejezet a bevezetés és összefoglalás. A második fejezet Erdős és Gowers következő problémájával foglalkozik. Mi az a legkisebb $f(n)$ szám, amelyre teljesül, hogy $f(n)$ pont között a síkon mindig található n egy egyenesen vagy n általános helyzetben. Payne és Wood belátták, hogy $f(n) \leq cn^2 \log n$. ezt javítja tovább Hajnal Péter Szemerédiel közös munkájában $cn^2 \log n / \log \log n$ -re. A bizonyítás nagyon ötletes, a szemirandom módszeren alapul, amit Ajtai, Komlós és Szemerédi fejlesztettek ki.

A harmadik fejezet a Heilbronn-féle négyszög problémával foglalkozik. A klasszikus Heilbronn probléma a következő. Határozzuk meg a legkisebb $H_\Delta(n)$ számot azzal a tulajdonsággal, hogy tetszőleges n pont az egységnégyszetben meghatároz egy legfeljebb $H_\Delta(n)$ területű háromszöget. Ennek a nyolcvan éves problémának nagyon izgalmas története van és máig nem tudjuk az igazságot. Itt hiányoltam a dolgozatban a korlátok áttekintését és hiányzik a legjobb, 2023-as felső becslés (Cohen, Pohoata, Zakharov).

A dolgozat ennek a négyesekre vonatkozó változatát vizsgálja. Határozzuk meg a legkisebb $H_4(n)$ számot azzal a tulajdonsággal, hogy tetszőleges n pont az egységnégyszetben tartalmaz négy pontot, amelyek konvex burka legfeljebb $H_4(n)$ területű. A fő eredmény itt is Szemerédiel közös, megjavítják Schmidt alsó korlátját, amely $\Omega(1/n^{3/2})$, $\Omega(\log^{1/2} n/n^{3/2})$ -re. Itt is a szemirandom módszert alkalmazzák.

A 0 – 1 mátrixok extrémális elméletében az alapkérdés a következő Legfeljebb hány 1-es lehet egy olyan 0 – 1 mátrixban, amely nem tartalmaz egy (vagy több) adott 0 – 1 mátrixot részmátrixként. Ez a kérdés az extrémális gráfelmélet általánosításának tekinthető, számos geometriai és más alkalmazással. A terület kutatása többek között Füredi és Hajnal cikkével kezdődött, és óriási fejlődésen ment keresztül. A negyedik fejezetben Gyárfás egy problémáját vizsgálják ezzel a módszerrel. Adott $2n$ pont konvex helyzetben, két n -es osztályra bontva, amelyeket elválaszt egy egyenes. Az osztályok között futó szakaszokat két színnel színezve, mekkora (hány élű) egyszínű, nem metsző fát találhatunk biztosan? Legyen ez a szám $st(n)$, Gyárfás sejtése szerint $st(n) = n - 1$. A mátrixok nyelvén egy ilyen fa egy 0-kból vagy 1-esekből álló „lépcső” a szomszédossági mátrixban. Gyárfás sejtését nem sikerült igazolni, de erre, és az aszimmetrikus változatra nagyon szép konstrukciók segítségével javítják a felső korlátot, amely bizonyos esetekben már pontos.

Az ötödik fejezet a Bernoulli és a poly-Bernoulli számokkal foglalkozik. A Bernoulli számok a Riemann-féle zeta függvény vizsgálatában alapvető szerepet töltenek be. A

Riemann-féle zeta függvény általánosításai, az úgynevezett többszörös zeta függvények, amelyek sok területen fontosnak bizonyultak, ezek vizsgálatánál a poly-Bernulli számok kerülnek elő. A fejezet fő eredményei a poly-Bernulli számokra adott sok különböző kombinatorikus definíció, és ezek segítségével rengeteg azonosság, összefüggés felfedezése és kombinatorikus bizonyítása.

A hatodik fejezet telített geometriai lerajzolásokról szól. Egy gráfot, lerajzolva a síkra, topológiai gráfnak hívunk. Ez egyszerű, ha bármely két élnek legfeljebb egy közös pontja van, amely egy közös végpont vagy egy metszés. Kynčl vette először észre, hogy vannak nagyon kevés élű egyszerű topologikus gráfok, amelyek nem bővíthetők, vagyis nem adható hozzájuk egy él úgy, egyszerűek maradjanak. Általánosabban, egy topologikus gráf k -egyszerű, ha bármely két élnek legfeljebb k közös pontja van. Kynčl és társszerzői mutattak lineáris alsó és felső korlátokat a nem bővíthető k -egyszerű topologikus gráfok minimális élszámára. Ebben a fejezetben Hajnal Péter társszerzőivel alaposan megjavítja a felső korlátokat $k = 1$ és 2 esetén. A konstrukciók nagyon szépek és kifejezetten nehezek, ötletesek. Biztos vagyok benne, hogy az ötletek felhasználhatók a $k > 2$ esetekben is.

Végül a hetedik fejezet a következő problémával foglalkozik. Adott egy $A_1, \dots, A_n$ és egy $B_1, \dots, B_n$ ellentétes irányítású konvex sokszög. Ekkor van olyan egyenes, amely az $A_i B_i$ szakaszok mindegyikét metszi. Ezt a feladatot Hajnal Péter társszerzőivel együtt javasolta az 1999-es Schweitzer versenyre. Ennek a tételnek a három dimenziós általánosítását vizsgálták. A legfontosabb eredmény a következő. Legyen $A_1, \dots, A_n$ egy konvex poliéder és legyen $B_1, \dots, B_n$ ennek affin, ellentétes irányítású képe. Ekkor van olyan sík, amely az $A_i B_i$ szakaszok mindegyikét metszi. Azt is belátták, hogy tetszőleges ellentétes irányítású poliéderekre nem feltétlenül igaz az állítás, már oktaéderekre sem. Ez egy nagyon szép tétel, és elég meglepő, hogy már oktaédereknél sem elég az ellenkező irányítás. Több más irányú általánosítás is ismert.

A dolgozat alapján egyértelmű, hogy Hajnal Péternek nagyon komoly tudása van, kiválóan átlátja a kombinatorika sok területét és a köztük levő összefüggéseket. A felhasznált cikkek jórészt vezető folyóiratokban jelentek meg, és néhánynak nagyon nagy hatása volt a későbbi kutatásokra.

A dolgozat kisebb pontatlanságoktól eltekintve nagyon szépen megszerkesztett munka. A tézisekben szereplő eredmények új eredmények, és messzemenően kielégítik az MTA doktori cím követelményeit. Melegen támogatom a nyilvános vita kitűzését és az MTA doktora cím odaítélését.

Egy kérdés: A bevezetésben szerepel a következő:

$$\alpha \frac{\sqrt{\log n}}{n^2} \leq H_\Delta(n) \leq H_4(n) \leq H_5(n) \leq \dots \leq \beta \frac{1}{n}$$

Az világos, hogy minden k -ra $H_k(n) \leq \beta_k \frac{1}{n}$, de valóban ismert, hogy van egy univerzális β_* amelyre $H_k(n) \leq \beta_* \frac{1}{n}$ minden k -ra és elég nagy n -re?

Budapest, 2026 június 3, Tóth Géza