

Válasz Tardos Gábor bírálatára

Először is nagyon köszönöm Tardos Gábornak az értekezésem alapos áttanulmányozását, értékes megjegyzéseit és jogos kritikáját.

A bírálat négy konkrét kérdést fogalmaz meg, amelyeket az alábbiakban felidézek és megválaszolok.

1. Kérdés: Szeretnék egy listát látni az egyes fejezetek alapját jelentő publikációkról. Be lettek nyújtva valahova? El lettek fogadva? Megjelentek? Hol?

Válasz: Mindegyik fejezetben ismertetett eredmények mindegyike megjelent cikkekben szerepelnek. Az alábbiakban felsorolom a fejezetek "forrásait":

[1. fejezet] Egy összefoglaló fejezet, bizonyítások nélkül. A disszertáció számára írt fejezet.

[2.-3. fejezet] Péter Hajnal, Endre Szemerédi, Two Geometrical Applications of the Semi-random Method In: Ambrus, Gergely; Bárány, Imre; Böröczky, Károly J; Fejes Tóth, Gábor; Pach, János (szerk.) New Trends in Intuitive Geometry New York, Amerikai Egyesült Államok, Berlin, Németország, Heidelberg, Németország : Springer Netherlands (2018) 458 p. pp. 189-199. Paper: Chapter 8 , 11 p.

[4. fejezet] János Csányi, Péter Hajnal, Gábor V. Nagy On the staircases of Gyárfás ELECTRONIC JOURNAL OF COMBINATORICS 23 : (2) Paper: P2.17, 10 p. (2016)

[5. fejezet] B. Bényi, P. Hajnal, Combinatorics of poly-Bernoulli numbers, Studia Sci. Math. Hungarica, 52(4) (2015) 537–558.

B. Bényi, P. Hajnal, Combinatorial properties of poly-Bernoulli relatives, Integers, 17 (2017), A31. Available at <http://math.colgate.edu/~integers/vol17.html>.

[6-7. fejezet] Hajnal, P. ; Igamberdiev, A. ; Rote, G. ; Schulz, A. ; Saturated simple and 2-simple topological graphs with few edges LECTURE NOTES IN COMPUTER SCIENCE 9224 pp. 391-405. , 15 p. (2016)

[8. fejezet] Péter, Hajnal ; László, I Szabó ; Vilmos, Totik; Convex polygons and common transversals AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY 122 : (9) pp. 836-844. , 9 p. (2015)

2. Kérdés: Az utolsó fejezetben vizsgált sokszöges (vagy versenyző autókra vonatkozó) állítás megkapóan egyszerű. Honnan származik?

Válasz: Az állítás a főtétele Szabó László Imrével és Totik Vilmossal közös cikkünknek. Hárman sok éven keresztül osztottunk egy egybenyíló szoba kettősön. Emlékezetem szerint Szabó László vetette fel mint kérdés, talán a háromszög esetéből kiindulva. A folytonos változat, a megoldás órák közötti beszélgetések alatt alakult ki. Egyszóval (a szerintem is megkapó) állítás tanszéki szülemény.

3. Kérdés: Ismert vagy esetleg várható a Heilbronn problémára nagyságrendileg jobb alsó becslés, ha négy pont helyett mondjuk tíz pont konvex burkát vizsgáljuk?

Válasz: Igen, ismert ilyen becslés: Claudia Bertram–Kretzberg, Thomas Hofmeister, Hanno Lefmann An Algorithm for Heilbronn's Problem SIAM Journal on Computing 30(2):383-390, July 2006 cikkükben belátják, hogy $H_k(n) \gg \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k-2}}}$.

A geometriai állítást bizonyítása egy kombinatorikus átfogalmazással kezdődik. Az alaptartományban vesszük egy "finom" négyzetrács rácspontjait. Ekkor persze lesznek egy egyenesre eső (azaz 0 területű) pont k -asok. A pontokat egy hipergáf csúcsainak tekintjük. Vesszük azokat a k -asokat, amik "túl kicsi" területet határoznak meg. Ebben a hipergráfban keresünk egy nagy független ponthalmazt. Azaz kiritkítjuk a kezdeti "rossz" ponthalmazt egy a Heilbronn-problémához alkalmas ponthalmazzá.

Itt jön a képbe Turán tétele. A tétel egy alakja egy egyszerű gráf legnagyobb független halmazának méretére ad becslést: $\alpha(G) \geq \frac{|V|}{d_{\text{átlag}}(G)}$, ahol $d_{\text{átlag}}(G)$ a G gráf átlagos fokszáma. Egy lehetséges bizonyítás egy mohó algoritmus és annak elemzése. Spencer 1972-ben terjesztette ki ezt a tétel k -uniform hipergráfokra a véletlen módszer segítségével. Az eredmény egy fenti típusú alsó becslés, de a nevezőben $d_{\text{átlag}}^{\frac{1}{k-1}}(G)$ szerepel. (J. Spencer, Turán's Theorem for k -Graphs, Discrete Mathematics, 2 (1972), 183–186.)

Tehát ötletek szintjén nem merül fel új a becslés nagyobb k paraméterekre való kiterjesztésében. A technika olyan, hogy ugyanaz a gondolatmenet (a rács véletlen kiritkítása) egyre javuló felső becsléseket ad.

A cikk azzal zárul, hogy a szerző megemlíti a javítás kívánatosságát, ahogy a klasszikus (háromszögekre vonatkozó) esetben történt (M. Ajtai, J. Komlós, J. Pintz, J. Spencer and E. Szemerédi, Extremal Uncrowded Hypergraphs, Journal of Combinatorial Theory Ser. A, 32 (1982), 321–335). Ez a disszertációm eredménye $k = 4$ -re. Sajnos ez az előzmény nem volt számomra ismert, amikor a kutatás/publikáció történt.

4. Kérdés: Egy $n \geq 4$ csúcsú telített egyszerű topológiai gráf minden csúcsának a foka legalább három. Ebből adódik, hogy a gráfnak legalább $1.5n$ éle van. Mondható ennél több? Hol várható az igazság $1.5n$ és $7n$ között?

Válasz: Nem tudok erre vonatkozó eredményről. Talán kezelhető probléma, hogy a telített gráfok fokszám eloszlásáról többet mondjunk mint a "minden fok legalább három" egyszerű állítás. Ezen irányú gondolataink vezettek a disszertáció 6.4 szekciójához (local saturation). Az itt ismertetett gondolatok inkább negatív eredmények. Nem lesz egyszerű általános állításokat mondani telített egyszerű topológia gráfok fokszámaira.

Hogy hova várom az igazságot? Az az érzésem, hogy szigorúan köztes lesz.

A felső becslés, $7n$ javítását nehéznek tartom. A végső konstrukciónk sok javítási lépés eredője. Többször tudtunk ügyeskedni és egy kicsit javítani korábbi konstrukciónkon (a kezdet az volt, hogy J. Kynčl, J. Pach, R. Radoičić és G. Tóth konstrukcióját megjavítottam). A végső topológikus gráf ezért is ennyire összetett. Ennek ellenére a kiinduló J. Kynčl, J. Pach, R. Radoičić és G. Tóth konstrukció, illetve annak szimmetriája ott van benne. Talán egy teljesen más elindulás jobb becsléshez vezet?

Az alsó becslés javításán nem lepődnék meg, ezt a kérdést ígéretesebbnek tartom.

Azon viszont meglepődnék, ha a konstrukció és az alsó becslés közel kerülne egymáshoz.

Összegezve: Tippem, hogy az igazság $7n$ -hez van közelebb, de a konstans 7 nem optimális. A jelenlegi alsó becslésben szereplő 1.5 konstans jelentős javítása új, lényegi ötleteket kíván.

Még egyszer köszönöm Tardos Gábor munkáját és pozitív véleményét.

Szeged, 2026. július 21.



Hajnal Péter