

Válasz Tóth Géza bírálatára

Először is nagyon köszönöm Tóth Gézának az értekezésem alapos áttanulmányozását és értékes megjegyzéseit.

A bírálat egy konkrét kérdést fogalmaz meg, amelyet az alábbiakban felidézek és megválaszolok.

Kérdés:

$$\alpha \frac{\sqrt{\log n}}{n^2} \leq H_{\Delta}(n) \leq H_4(n) \leq H_5(n) \leq \dots \leq \beta \frac{1}{n}$$

Az világos, hogy minden k -ra $H_k(n) \leq \beta_k \frac{1}{n}$, de valóban ismert, hogy van egy univerzális β , amelyre $H_k(n) \leq \beta \frac{1}{n}$ minden k -ra és elég nagy n -re?

Válasz: Az idézett sor valóban kétértelmű. Amit szerettem volna állítani, az a "gyenge" változat:

$$\alpha \frac{\sqrt{\log n}}{n^2} \leq H_{\Delta}(n) \leq H_4(n) \leq H_5(n) \leq \dots,$$

Továbbá minden $k \geq 4$ esetén $H_k(n) \leq \beta \frac{1}{n}$ alkalmas, esetleg k -tól függő β konstansra.

Tehát a kérdés értelmezhető úgy is, hogy: Mit tudunk az erős változatról? Illetve milyen felső becslés ismert $H_k(n)$ -re? Illetve az ismert $\beta \frac{1}{n}$ alakú becslések konstansa hogyan függ k -tól?

Először nézzük $H_4(n)$ triviális felső becslését. Feltesszük, hogy az U alaptartomány egy egységnégyszet. Osszuk fel U -t ℓ darab egybevágó téglalapra, ahol $3\ell < n$. ℓ -t a $\{\frac{n-1}{3}, \frac{n-2}{3}, \frac{n-3}{3}\}$ egész elemének választjuk. A skatulya-elv szerint lesz olyan kistéglalap, ami tartalmaz pontnégyest a tetszőlegesen elhelyezett n pontunk közül. Ezek konvex burkának területe legfeljebb $\frac{1}{\ell}$. Így $H_4(n) \leq \frac{3}{n-1}$. Ugyanez a gondolatmenet általános indexre azt adja, hogy $H_k(n) \leq \frac{k-1}{n-1}$.

Ez a becslés már W. Schmidt számára ismert volt, aki bevezette a $H_4(n)$ paramétert. A paraméterről szinte semmi újat nem tudunk Schmidt úttörő munkásságán túl. De a felső becslés tekintetében egy viszonylag új eredmény van: Rishikesh Gajjala, Jayanth Ravi, Improved upper bounds for the Heilbronn's Problem for k -gons, Proceedings of the 36th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2024), Brock University, St. Catharines, Canada, 153–157.

Gajjala és Ravi belátja, hogy $H_4(n) \leq \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})$. Általánosan $H_k(n) \leq \frac{k-2}{n} + o(\frac{1}{n})$. A bizonyítás elemi geometria és kombinatorika. Az eredmény egy nagyon csekély javítás a triviális becsléshez képest.

Összefoglalva: Nem tudom, hogy az erős változat igaz-e. Ezt cáfolni se tudom. Jó kérdés további kutatások ösztönzésére.

Még egyszer köszönöm Tóth Géza munkáját és pozitív véleményét.

Szeged, 2026. július 21.


Hajnal Péter