

opponensi vélemény

Hajnal Péter MTA doktori disszertációjáról

A disszertáció matematikailag nagyon érdekes, de sajnos nehezen olvasható. A fő nehézség a sok-sok jelölési pontatlanságból fakad, amelyek jelentősen lassítottak abban, hogy el tudjam olvasni és megértsem a szöveget. Emellett az is problémás, hogy bár a mások cikkeire való hivatkozások nagyon pontosak, a saját munkáira a szerző sokszor egyáltalán nem hivatkozik, időnként az sem teljesen világos, melyik eredmény saját.

Nem érdemes azonban ebben bírálatban az apróbb pontatlanságokat sorolnom, így a továbbiakban a disszertáció matematikai tartalmára koncentrálok.

A disszertáció egy bevezető és hét további, különböző kombinatorikai témákban elért, de egyaránt szép és érdekes eredményeket bemutató fejezetből áll. A legtöbb esetben széles körben vizsgált, fontos optimalizációs kérdésekben elért élesebb korlátokról, korábbi eredmények javításáról van szó. Mind a vizsgált témák sokszínűsége, mind a sok különböző alkalmazott módszer Hajnal Péter széles matematikai látókörét bizonyítja.

A második fejezet egy alapvető diszkrét geometriai problémával foglalkozik, amit először Erdős Pál kérdezett: Hány pontot kell megadni a síkon, hogy biztosan legyen közte n egy egyenesen, vagy n általános helyzeten, azaz úgy, hogy semelyik három pont nincs egy egyenesen (a disszertáció az ilyen pontthalmazt *függetlennek* nevezi). Itt a triviális korlátok $n^2/4$ (ennyi pont egy négyzetrácsban nem elég) és $2n^3$ (ennyi pont közül a mohó algoritmus is talál n függetlent vagy n pontot egy egyenesen). A felső korlátot Payne és Wood 2013-ban $O(n^2 \log n)$ -re javította. A fejezet egy további javítást tartalmaz: már $O(n^2 \log n / \log \log n)$ pont is elég. A javításhoz a szerző Duke, Lefmann és Rödl „uncrowded” hipergráfos módszerét használja. Ez egy nagyon hatékony módszer, ami gyakran, mint itt is, érdekes új alkalmazásokhoz vezet.

Ugyanezt az „uncrowded” hipergráfos módszert alkalmazza Hajnal Péter a harmadik fejezetben is, de a diszkrét geometria egy másik, talán még híresebb problémájára, a Heilbronn háromszög probléma egy változatára. Az eredeti probléma azt kérdezi, hogy megadható-e n pont az egységnyezetben, hogy bármelyik három konvex burka (az általuk meghatározott háromszög) nagy területű legyen. Olyan pontthalmazt egyszerű megadni, ahol minden háromszög területe $\Omega(1/n^2)$, ennél csak kicsit jobb Komlós, Pintz és Szemerédi 1982-es konstrukciója. Ha viszont három helyett négy pont konvex burkának területét

vizsgáljuk, arra Schmidt 1972-ben talált egy lényegesen erősebb konstrukciót. Ennek a logaritmikus javítását mutatja be fejezet. Bár az uncrowded hipergráfos módszer tipikusan csak kisebb javítást tud eredményezni, hangsúlyozom, hogy egy olyan alapvető és széles körben kutatott problémánál, mint a Heilbronn háromszög probléma minden apró javításnak nagy a jelentősége.

A negyedik fejezet egy 0-1 mátrixokról szóló extrémális problémát vizsgál. Ilyen extrémális problémákkal Hajnal Péter régóta és kiemelkedően sikeresen foglalkozik. Páter 1992-es, Füredi Zoltánnal közös, ugyancsak 0-1 mátrixok extrémális elméletéről szóló cikke máig rengeteg kutatás alapját adja. Ha szabad egy személyes megjegyzést is tennem, több saját eredményem is ebben a régi cikkben feltett kérdéseket válaszol meg, de maradt olyan kérdése is a cikknek, ami azóta is nyitott. Ez a fejezet egy konkrét, diszkrét geometriából származó, de önmagában is érdekes, Gyárfás Andrásról származó kérdést vizsgál: úgy nevezett *homogén 0-, illetve 1-lépcsők* nagyságát egy adott méretű 0-1 mátrixban. Vizsgálható a maximum, vagy az összeg. Pontosabban legyen $st(n, N)$ a maximális k , hogy minden $n \times N$ -es 0-1 mátrixban van k méretű homogén 0- vagy 1-lépcső, illetve legyen $st_{\Sigma}(n, N)$ a maximális k , hogy minden $n \times N$ -es 0-1 mátrixban van egy homogén 0-lépcső és egy homogén 1-lépcső (egyik lehet üres is), melyek méretének összege k . Ebből a másodikat sikerült pontosan meghatározni minden n és N értékre. Az elsővel kapcsolatban is érdekes rész-eredményekről számol be a fejezet. Ha a 0-1 mátrix messze van a négyzetestől (pontosabban, ha $N \geq \lfloor 5n/2 \rfloor - 1$), akkor a triviális $st(n, N) \geq \lceil st_{\Sigma}(n, N)/2 \rceil$ becslés éles és megadja st pontos értékét. Ha viszont a mátrix közel négyzetes, akkor triviális becslés nem éles és a fejezetben találunk egy erősebb felső becslést, és egy sejtést, ami szerint ez már éles. Ez a sejtés Gyárfás négyzetes mátrixokra vonatkozó sejtését általánosítja.

Az ötödik fejezet is 0-1 mátrixokról szól, de itt extrémális helyett enumeratív kérdésekről van szó. Adott méretű 0-1 mátrixok leszámolása, amik nem tartalmaznak bizonyos *tiltott részmatricákat*, teljes általánosságban tipikusan kezelhetetlenül nehéz problémákra vezetnek. A fejezetben azonban szép számmal kerül bemutatásra olyan tiltott részmatricák halmaza, amik kezelhetőeknek bizonyulnak. A leszámolási probléma gyakran az úgy nevezett poly-Bernoulli számokhoz, vagy azok valamelyik rokonához vezet. A tiltott részmatricák problémán túl permutációk leszámolási problémáiról is szó esik, ahol az $\{x \mid \pi(x) > x\}$ halmazra teszünk megkötéseket. A fejezetben találunk egyszerű kombinatorikai bizonyítást korábbi ismert összefüggésekre, valamint szép új állításokat is.

A hatodik és a hetedik fejezet telített topológiai gráfokról szól. Egy *topológiai gráf* egy egyszerű gráf lerajzolása, ahol az éleket síkgörbék reprezentálják. Ezek a görbék metszhetik egymást, de tipikusan valamilyen korlátozást teszünk a metszésekre. A hatodik fejezet *egyszerű* topológiai gráfokról szól, itt két élnek legfeljebb egy közös pontja lehet. Talán az első természetes kérdés, hogy hány él lehet maximum egy adott méretű egyszerű topológiai gráfnak, de ebben az esetben ez a kérdés triviális: a teljes gráf is lerajzolható egyszerű topológiai gráfként. A második kérdés ekkor az, hogy milyen kevés él lehet egy *telített* egyszerű topológiai gráfnak, azaz olyannak, ahol további élet már nem lehet behúzni úgy, hogy a topológiai gráf egyszerű maradjon. Kynčl, Pach, Radoičić

és Tóth egy meglepő eredménye, hogy már lineárisan sok éllel is vannak telített egyszerű topológiai gráfok. A hatodik fejezet fő eredménye ennek javítása: n csúcs esetén $17.5n$ helyett már egy nem túl egyszerű konstrukcióval $7n$ él is elég a telítettséghez. Emelett a fejezet tartalmaz más érdekes eredményeket is a ritka telített egyszerű topológiai gráfokról. A hetedik fejezet az egyszerű topológiai gráfokra kifejlesztett módszereket alkalmazza *2-egyszerű topológiai gráfokra*, azaz ha két élnek maximum két közös pontja lehet. Itt is elég lineárisan sok (nevezetesen legfeljebb $14.5n$) él a telítettség eléréséhez.

Végül a nyolcadik fejezet a következő egyszerű állítást bizonyítja: Ha a síkban adottak az ellenkező körüljárású $A_1 \dots A_n$ és $B_1 \dots B_n$ konvex n -szögek, akkor található egy olyan egyenes, amely minden $A_i B_i$ szakaszt metsz. Az állítás érdekességét csak növeli, hogy a természetes általánosítása csak nagyon erős megszorítások mellett igaz magasabb dimenzióban.

Hajnal Péter disszertációja magas színvonalon mutatja meg a szerző áttekintését a kombinatorika sokszínű világában és meggyőzött arról, hogy **a szerző messzemenően megérdemli az MTA doktora fokozatot**. Ezért javaslom a doktori védés kitűzését.

Kérdések:

Csak egy technikai, egy történeti és két tartalmi kérdésem van.

1. Szeretnék egy listát látni az egyes fejezetek alapját jelentő publikációkról. Be lettek nyújtva valahova? El lettek fogadva? Megjelentek? Hol?
2. Az utolsó fejezetben vizsgált sokszöges (vagy versenyző autókra vonatkozó) állítás megkapóan egyszerű. Honnan származik?
3. Ismert vagy esetleg várható a Heilbronn problémára nagysegrendileg jobb alsó becslés, ha négy pont helyett mondjuk tíz pont konvex burkát vizsgáljuk?
4. Egy $n \geq 4$ csúcsú telített egyszerű topológiai gráf minden csúcsának a foka legalább három. Ebből adódik, hogy a gráfnak legalább $1.5n$ éle van. Mondható ennél több? Hol várható az igazság $1.5n$ és $7n$ között?

Budapest, 2026, július 14.

Tardos Gábor
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet