

Bírálóí vélemény **Hajnal Péter**
Combinatorics, Geometry, and Order
című MTA doktori értekezéséről

Hajnal Péter disszertációja sok fontos, szerteágazó - többek között geometriai, számelméleti, gráfelméleti - eredményt tartalmaz. A dolgozat mégis egységes, a szép megoldások mélyén mindig ott van a kombinatorika.

A disszertáció első fejezete egy nagyon szellemes bevezetés, ahol a szerző felsorolja és tézisszerűen kontextusba helyezi az eredményeket, rávilágít a matematika vizsgált ágai közötti átjárhatóságra.

A dolgozat második és harmadik fejezete a szerzőnek egy Szemerédi Endrével [4] írt cikkének két alapvető fontosságú tételét tartalmazza. Az 1. Tétel Erdős és Gowers következő kérdésére ad az addig ismertnél jobb felső korlátot. Mi az a legkisebb $m = m(n)$, hogy akárhogy elhelyezünk a síkon m pontot, találunk közöttük n pontot, amelyek vagy egy egyenesen vannak, vagy függetlenek (azaz semelyik három pont nem kollineáris). Gowers észrevette, hogy $c_1 n^2 \leq m(n) \leq c_2 n^3$. A felső korlátot Payne és Wood javították $n^2 \log n$ nagyságrendűre. Hajnal és Szemerédi [4] ezt a korlátot csökkentették tovább, belátták, hogy $m(n) \leq c_3 n^2 \log n / (\log \log n)$ (mindegyik c_i az abszolút konstans). Az elegáns bizonyítás a geometriai kérdést hipergráfokra fogalmazza át, majd szemi-véletlen módszert használ [2] nagy független pontthalmaz megtalálásához.

A harmadik fejezet Heilbronn híres problémájához kapcsolódik. Vegyünk valamilyen szabályos, zárt, egységnyi területű tartományt a síkon (legyen ez négyszög, kör, vagy szabályos háromszög). Erre lerakunk n darab pontot. A pontok minden hármasa - esetleg elfajuló - háromszöget határoz meg. A pontokat úgy akarjuk elhelyezni, hogy a legkisebb háromszög területe minél nagyobb legyen: ennek a $H_3(n)$ területnek az aszimptotikus viselkedése máig megoldatlan. A kérdés általánosítható minden $k \geq 3$ -ra: tekintsük a pontok minden k elemű részhalmazának konvex burkát és ismét azt szeretnénk, hogy a legkisebb terület minél nagyobb ($H_k(n)$) legyen. A problémát számos kiváló matematikus vizsgálta, többek között a Fields Medal-os Roth is több dolgozatot publikált a témakörben. $H_4(n)$ -re az $\Omega(1/n^{3/2})$ alsó korlátot Schmidt [12] illetve Bertram-Kretzberg, T. Hofmeister, H. Lefmann [1] bizonyították. Hajnal és Szemerédi [4] ezt a becslést javították nagyságrendben egy logaritmikus szorzóval. Azaz belátták, hogy *létezik egy n elemű pontthalmaz az egységnégyzetben úgy, hogy ne tartalmazzon olyan pontnégyest, amely konvex burkának területe nem éri el $\beta(\log n)^{1/2}/n^{3/2}$ -t alkalmas β pozitív konstansra.* A bizonyítás itt is szemi-véletlen módszert használ. Megjegyzendő, hogy gyakran a log- vagy log log-faktoros bizonyítások további nagyságrendi javításokhoz vezetnek, ezért mindkét fenti tétel áttörésnek tekinthető.

Károlyi, Pach és Tóth [5] bizonyították a következő szép állítást. *Egy tetszőleges, általános elhelyezkedésű n pontból álló síkbeli $\mathcal{P}$ pontthalmaz összes $\binom{n}{2}$ pontpárját kössük össze egyenes szakaszokkal*

és színezzük ki a szakaszokat pirosra vagy kékre. Ez az alakzat mindig fog tartalmazni nem önmetsző, egyszínű feszítő fát. Gyárfás egy hasonló Ramsey típusú problémát kezdett el vizsgálni. Adott $2n$ konvex helyzetű pont és egy egyenes, amely egyenletesen szeparálja a pontokat: A teljes páros gráf élei itt az egyenesünket metsző n^2 összekötő szakasz. Ezeket színezzük pirosra és kékre. Mekkora egyszínű, nem metsző fa garantálható?

Gyárfás és szerzőtársai a kérdést átfogalmazták $0-1$ mátrixokban fellelhető alakzatokra, úgynevezett homogén lépcsőkre, és azt sejtették, minden $n \times n$ -es $0-1$ mátrix tartalmaz $n-1$ méretű homogén lépcsőt. A negyedik fejezet tartalmazza az eddig ismert legjobb, $\sim 5n/6$ -os alsó korlátot, amely jelentősen javítja Gyárfásék $\sim (4+\varepsilon)n/5$ -ös eredményét.

A nagy hatású nyitott problémák megfogalmazása óriási szerepet játszik a matematikában. Hajnal Péter erre való érzékenysége tükröződik a Füredi Zoltánnal írt [3] dolgozatában. Alapkérdésként egy $n \times n$ -es $0-1$ mátrixban szeretnénk az egyeseknek bizonyos konfigurációit kitiltani, és azt kérdezzük, hogy maximum hány egyes tartalmazása lehetséges. Stanley és Wilf sejtették még az 1980-as években, hogy azon n -hosszú permutációk száma, amik nem tartalmaznak egy fix $\tau \in S_k$ permutáció-mintát, n -ben exponenciálisan sokan vannak. A [3] cikk egyik sejtése azt mondta ki, hogy ha egy permutáció mátrix 1-einek a konfigurációját tiltjuk ki, akkor az egyesek száma lineáris. Klazar [7] vette észre, hogy ha Hajnal-Füredi sejtés igaz, akkor a Stanley-Wilf sejtés is az. Ezért, amikor Marcus és Tardos [9] belátták, hogy a Hajnal-Füredi sejtés igaz, akkor az algebrai kombinatorikában központi szerepet játszó Stanley-Wilf sejtést is igazolták. Hozzáteszem, hogy a Füredi-Hajnal cikk, az említett sejtésen kívül is sok szép problémát tartalmaz, ezek sok alapvető eredményt inspiráltak. Itt kiemelném a Pach, Tardos [10], Korándi, Tardos, Tomon, Weidert [8], Pettie, Tardos dolgozatokat. A Füredi-Hajnal cikk fontosságát a több mint 200 hivatkozás kiemeli.

A dolgozat ötödik fejezetében a szerző elsősorban a negatív paraméterű poly-Bernoulli (és hozzájuk kapcsolódó) számokról közöl új, érdekes egyenlőségeket. Az eredmények e számok kombinatorikus interpretációjából következnek (bijection principle), így elegánsak és egyszerűek.

A hatodik és hetedik fejezet topologikus gráfokkal (gráf lerajzolással együtt) foglalkozik. Egy lerajzolás szép, ha az élgörgek között nincs átmetszés, egyszerű, ha bármely két élgörbének legfeljebb egy közös pontja van és k -egyszerű, ha bármely két élgörbének legfeljebb k közös pontja van. Az egyszerű topologikus gráfokat telítettség szempontjából Kyncl, Pach, Radoicic, és Tóth [6] kezdték el vizsgálni és belátták, hogy léteznek egyszerű telített illetve 2-egyszerű telített topologikus gráfok lineárisan sok éllel. A szerző mindkét esetben szignifikánsan megjavítja az együtthatókat. Mindkét konstrukció rendkívül elegáns.

Az utolsó fejezet geometriai transzverzális egyenesekkel foglalkozik. A szerzők belátják, hogy ha $A_1, \dots, A_n$ és $B_1, \dots, B_n$ síkbeli konvex poligonok, amelyek körüljárása ellentétes, akkor van olyan egyenes, amelynek az $A_1B_1, \dots, A_nB_n$ szakaszok mindegyikével van közös pontja. Az állítás ekvivalens folytonos megfelelője a következő. Legyenek γ_1 és γ_2 konvex görbék a síkon. Tegyük fel, hogy mindkét görbén egy-egy autó mozog körbe azonos kezdő időpontból indulva. Az egyik pozitív, a másik negatív irányításban járja be pályáját és azonos pillanatban érkeznek vissza a kiinduló pontba. Ekkor létezik egy olyan ℓ egyenes, amelynek az utazás teljes ideje során az ellentétes oldalán tartózkodik a két autó. Az állítás különösen elegáns és első látásra meglepő.

A disszertációval kapcsolatban mindössze két kritikai megjegyzésem lenne. Egyrészt a szerző nem hivatkozta meg mindig a saját eredményeit. Például az utolsó eredmény alapjául szolgáló Hajnal-Szabó-Totik dolgozatra nem találtam hivatkozást. Szintén zavaró volt egy kicsit, hogy az utolsó fejezet

úgy kezdődik, hogy "*Proof.* Theorem 15. For definiteness assume..." A többi fejezet önmagában is olvasható, minden fejezet elején ott található egy bevezetés. Persze, a hivatkozások az internet korában könnyen megkereshetők, és gyorsan rá lehet jönni arra is, hogy az utolsó fejezetet a szerző - a 60 oldallal korábban - a bevezetésben hivatkozott tételének a bizonyításával kezdi. Ezekről eltekintve a disszertáció jól megírt, olvasmányos: én nagyon élveztem.

Összefoglalva, Hajnal Péter alapvető eredményeket ért kombinatorikus módszerekkel a matematika több ágában. Kiemelném az Erdős-Gowers illetve Heilbronn probléma körüli eredményeit. Ugyanakkor legalább olyan fontosnak érzem $0-1$ mátrixokban az egyeseknek bizonyos konfigurációit tiltó vizsgálódásait, hiszen fontos szerepük volt a Stanley-Wilf sejtés későbbi bizonyításában, és további fontos kutatások ösztönzésében. *Hajnal Péter eredményeit bőségesen elegendőnek tartom az MTA doktori cím megszerzéséhez, és a nyilvános védés kitűzését a leghatározottabban javaslom.*

Budapest, 2026.06.11.



Ruszinkó Miklós

ruszinko@renyi.hu

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

References

- [1] C. Bertram-Kretzberg, T. Hofmeister, H. Lefmann, An algorithm for Heilbronn's problem, *SIAM J. Comput.*, **30**, 2, (2000), 383–390.
- [2] R. Duke, H. Lefmann, V. Rödl, On uncrowded hypergraphs, *Random Structures and Algorithms*, **6**, 2-3, (1995), 209-212
- [3] Z. Füredi and P. Hajnal, Davenport–Schinzel theory of matrices, *Discrete Math.*, **103**, 3, (1992), 233–251.
- [4] P. Hajnal, E. Szemerédi, Two geometrical applications of the semi-random method *In: Ambrus, Gergely; Bárány, Imre; Böröczky, Károly J; Fejes Tóth, Gábor; Pach, János (szerk.) New Trends in Intuitive Geometry Berlin, Németország, Heidelberg, Németország : Springer-Verlag (2018), 189-199.*
- [5] G. Károlyi, J. Pach, G. Tóth, Ramsey-type results for geometric graphs, I., *Discrete and Computational Geometry*, 18, (1997), 247–255.
- [6] J. Kyncl, J. Pach, R. Radoicic, G. Tóth, Saturated simple and k -simple topological graphs, <http://arxiv.org/abs/1309.1046>.
- [7] M. Klazar, The Füredi–Hajnal conjecture implies the Stanley–Wilf conjecture, *Formal power series and algebraic combinatorics* (Moscow, 2000), Springer, Berlin (2000) 250–255.

- [8] D. Korándi, G. Tardos, I. Tomon, C. Weidert, On the Turán number of ordered forests, *J. Comb. Theory A*, **165**, (2019), 32-43.
- [9] A. Marcus, G. Tardos, Excluded permutation matrices and the Stanley-Wilf conjecture, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 107 (2004), 153–160.
- [10] J. Pach, G. Tardos, Forbidden paths and cycles in ordered graphs and matrices, *Israel Journal of Mathematics*, **155**, (2006), 359-380.
- [11] M.S. Payne, D.R. Wood, On the general position subset selection problem, *SIAM J. Discrete Math.*, **27**, 4, (2013), 1727-1733.
- [12] W. Schmidt, On a problem of Heilbronn, *J. London Math. Soc.* **4**, 2, (1971/72), 545–550.