

MTA doktori értekezés

**ÚJ MATEMATIKAI MODELLEK SZEMCSÉS
ANYAGOK MODELLEZÉSÉHEZ**

tézisfüzet

Dr. Oldal István

Gödöllő

2024.

Tartalom

1.	Bevezetés	2
2.	A kutatások során alkalmazott módszerek	3
2.1.	Boltozódási vizsgálatok.....	3
2.2.	Kifolyási vizsgálatok.....	4
2.3.	Az új kontakt modell vizsgálatára alkalmazott DEM modell	7
3.	Silóból történő kifolyás új analitikus modellje.....	11
3.1.	Instabil boltozatok hipotézise	11
3.2.	Boltozatalak meghatározása	12
3.3.	Kifolyási tömegáram meghatározása hengeres silókra	13
3.4.	Sebességeloszlás eredmények	14
3.5.	Tömegáram eredmények	17
4.	Új elvű csillapítási modell DEM alkalmazásra	21
4.1.	Elvi megoldás és általános formula.....	21
4.2.	Új kapcsolati függvény alkalmazása	23
5.	Új tudományos eredmények	28
6.	Összefoglalás	31
7.	Summary.....	32
8.	A témához kapcsolódó saját publikációk	33

1. Bevezetés

Szemcsés anyagnak (vagy szemcsés halmaznak) nevezzük azokat az anyagokat, amelyek a halmaz méretéhez képest kis méretű szilárd szemcsékből állnak. A mezőgazdaság és az ipar majdnem minden területén előfordulnak, ömlesztett anyagok, szemestermények, porok, a talaj mind ilyen anyagok. A gyakori előfordulás miatt sokszor merül fel a mechanikai modellezés igénye. A szilárd testeknél vagy folyadékoknál megszokott modellezési eljárások sok esetben nem alkalmasak a viselkedésük leírására, speciális tulajdonságaik miatt. Ezek közül az egyik legfontosabb, hogy folyadék és szilárd test jellegű viselkedést is képesek mutatni a megfelelő körülmények között. Amikor egy épület alapozását kell megtervezni, akkor a szilárd test jellegű tulajdonságot kell megtartani és olyan peremfeltételeket előírni, ahol szilárd testként viselkedik a szemcsés halmaz. Amikor szemesterményt akarunk silóban tárolni és az a célunk, hogy kifolyjon, amikor üríteni kell, akkor pedig olyan körülményeket kell biztosítanunk, ahol folyadékszerű viselkedést mutat. A folyadék és szilárd halmazállapot jellegű viselkedés miatt speciális mechanikai modellekre van szükség a szemcsés halmazok leírására. A tudományos kutatások során és gyakorlati alkalmazások esetén számos modell született leírásukra, a klasszikus analitikus modellek a XIX. század végétől kezdve. A gyakorlat számára nagyon hasznos és jól használható eredmények a mai napig alkalmazásban vannak. Ezen a területen kevés új eredménnyel találkozunk az utóbbi évtizedekben. Jelenleg a numerikus modellezés került a tudományos kutatások középpontjába, ezen belül kiemelt jelentőségű a diszkrét elemes modellezés.

Kutatásaim során mind az analitikus, mind a numerikus modellezés területén végeztem kutatásokat. Disszertációmban a két területen elért, általam legfontosabbnak ítélt eredményeimet mutatom be. Az analitikus modellezést a silókifolyásra alkalmazom, amely a PhD kutatásaim során megalkotott eljárás és modell kiterjesztése, általánosítása. A numerikus modellezésben a diszkrét elemes modellezés egyik alapjához, a kapcsolati modellekhez fejlesztettem ki újszerű megközelítésű csillapítási módszert, amely az eredmények alapján numerikusan stabilabb számításokat tesz lehetővé. Ennek általános elméleti megközelítését és egy adott modellre történő alkalmazását mutatom be dolgozatomban.

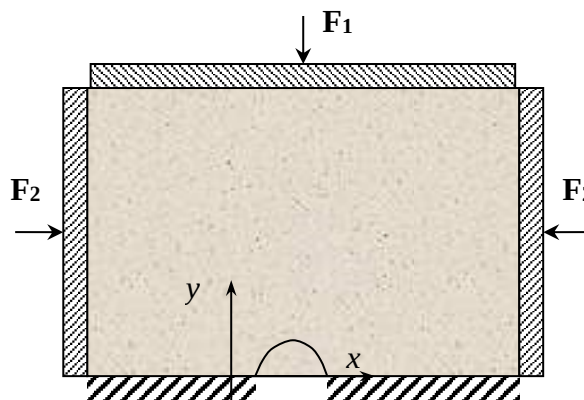
Az eredmények alapját képező kutatási munka egy részét kutatócsoportban, egy részét önállóan végeztem el. A dolgozatban az ígék egyes szám és többes szám első személyben használt alakjával különböztetem meg ezeket.

2. A kutatások során alkalmazott módszerek

2.1. Boltozódási vizsgálatok

2.1.1. Berendezés leírása

Az 1. ábrán látható boltozódásvizsgáló berendezéssel végeztük el a kísérleteket. A készülék célja, hogy síkalakváltozási állapotot hozzon létre, aminek az eredményeképp látható síkbeli boltozat alakul ki. Ennek érdekében két párhuzamos és függőleges átlátszó plexilap között van kialakítva egy téglalap alapú üreg. A plexilapra kívülről a boltozat méreteinek rögzítésére szolgáló négyzetrácsot helyezünk. A lapokkal határolt üreg szélessége kellően nagy ahhoz, hogy ne zavarja a középben kialakuló boltozat feltételeit az a két oldalfal. Az alsó felület a feltöltés idejére teljesen lezárható, a vizsgálat során pálcákkal beállítható rést hozunk létre, amely szintén a síkmodell feltételeinek megfelelően állandó szélességű. Egy pálca szélessége 10 mm, a maximálisan beállítható legnagyobb részméret 220 mm.



1. ábra Boltozódásvizsgáló berendezés fényképe és vázlata

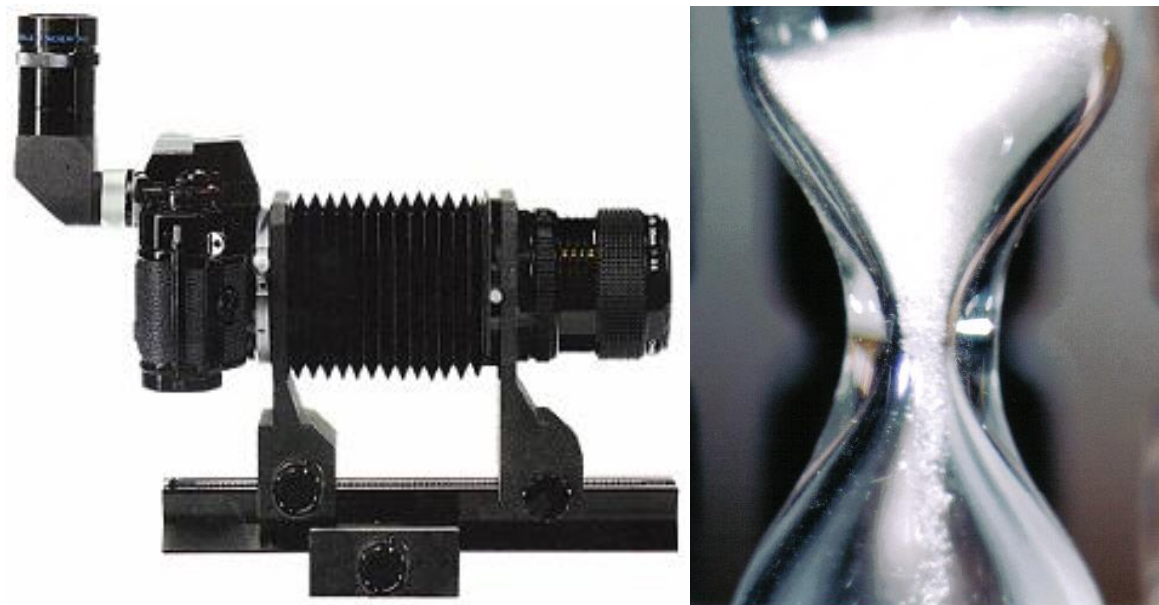
A kísérleteket a könnyű kezelhetőség miatt nedves homokkal végeztük el.

2.2. Kifolyási vizsgálatok

2.2.1. Kifolyás szemcseszintű vizuális vizsgálata

A kifolyás során azt vizsgáltam, hogy folytonos-e az áramlás vagy vannak elkülöníthető fázisai. A kísérlethez homokórát használtam (2. ábra).

A homokórában lévő áramlásról készítettem fényképeket. A mozgásokat villanófénnyel „befagyaszta” láthatóvá tehető a kifolyás egy-egy pillanata. A kísérletek során a szűkületben történő áramlásra makrofényképezéssel, harmonika kihuzat segítségével tudtam ránagyítani a megfelelő minőségben.

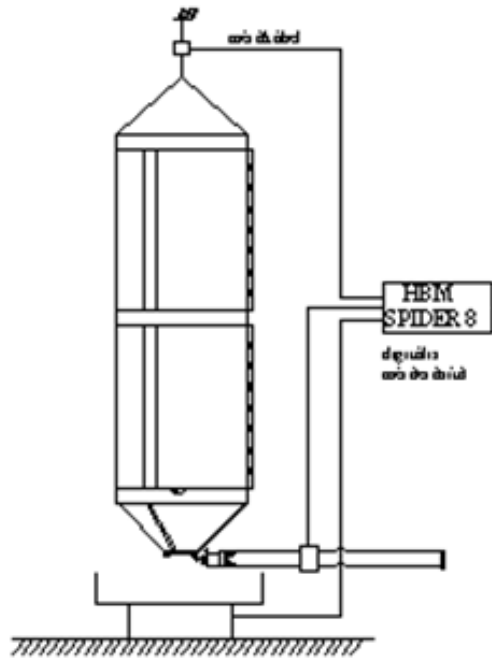


2. ábra Homokóra és fényképezőgép harmonika kihuzattal

2.2.2. Kísérleti silók

A kifolyási kísérletek három modellsilón folytak. A nagyobb hengeres modell méretei: 440 mm átmérőjű és 1250 mm magas, 0,18 m³ térfogatú hengeres siló, cserélhető kúpos garattal. Három garat készült 50mm és 100 mm között változtatható átmérőjű (kúpos toldattal) kifolyónyílással. A garatok félkúpszöge $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

A mérőberendezés átlátszó fala lehetővé tette a folyamat megfigyelését. A különböző garatokban térfogati és tölcséres kifolyási mód is megfigyelhető volt a mérések során.

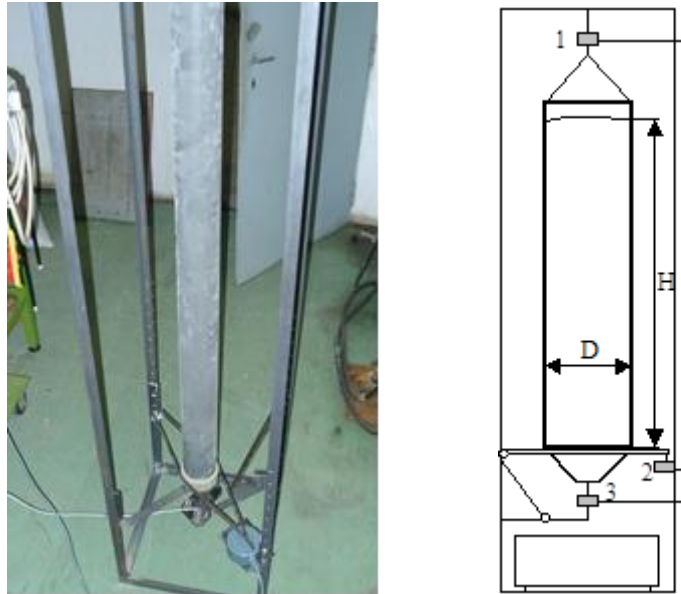


A kisebb hengeres siló átmérője 100 mm, magassága 1500 mm. A garat cserélhető, és a kis méret lehetővé teszi a cserekúpok gyors gyárthatóságát és módosíthatóságát.

A kísérletek során két paramétert vizsgáltam, amely eltérő kialakítást igényelt.

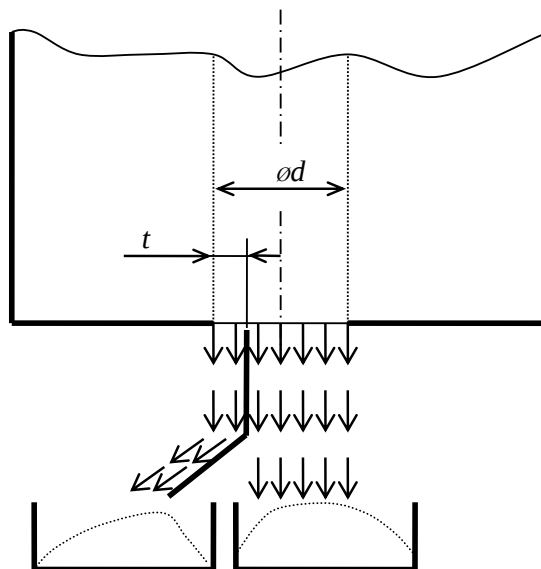
- Kifolyónyílás átmérőjének hatása: ebben a kísérletsorozatban a kifolyónyílás átmérőjét 25, 30, 35, 40, 45, 60, 70, 80, 90, 100 mm-es méretekben változtattam, a méréseket búzával végeztem el háromszoros ismétléssel. A kifolyókúp félkúpszöge minden esetben 45° volt. Az átmérő legnagyobb értéke ebben az esetben már nem jelentett fizikailag garatot, mert megegyezett a 100mm-es silóátmérővel, így annak meghosszabbítása volt. A kísérletek során ugyanazt a garatot használtam, a kifolyónyílás lépésről lépésre történő felbővítésével.
- Félkúpszög hatása: vizsgálatához 10, 20, 30, 37,5, 45, 90° -os (síkfenek) félkúpszögű garatokat gyártottam, 20 mm-es kifolyónyílás átmérővel. A mért anyag búza. Ebben a vizsgálatban minden félkúpszög esetében külön garatot kellett gyártani.

Három erőmérőt építettem be (3. ábra), ezek a silón (1), a garaton (2) és az elzáró elemen (3) érzékelik az erőt. Kifolyási mérésekhez értelemszerűen csak az első kettőt használjuk. A mérőrendszer többi eleme nem változott a nagyobb modellhez képest.



3. ábra Kis méretű hengeres silómodell

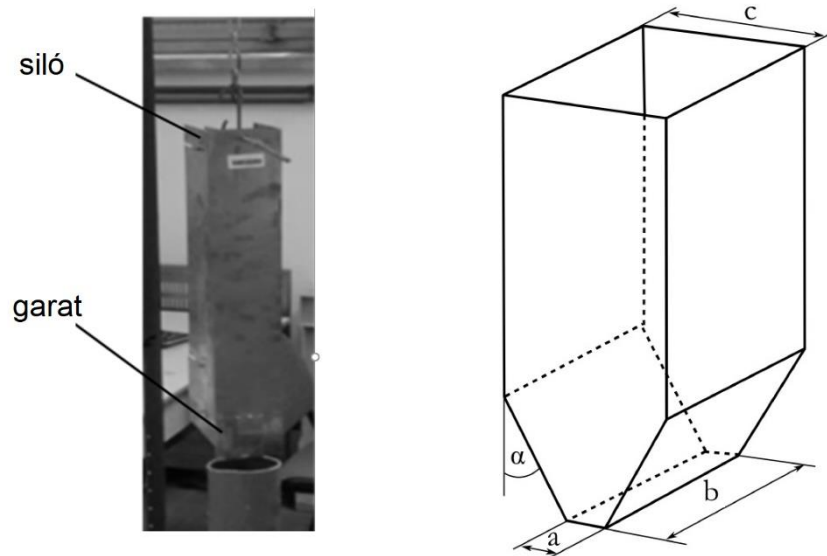
Sebességeloszlás mérésekhez terelőlemezes kiegészítéssel láttam el a kisebb modellsilót, ehhez a kísérletsorozathoz mákot alkalmaztam. A beállított részméreteket 2 és 15mm közt 1mm-es lépésekkel változtattam, minden mérést háromszori ismétléssel végeztem el.



4. ábra Sebességeloszlás mérése

A síkáramlást négyszög keresztmetszetű modellsilóval hoztuk létre, a modell vázlata az 5. ábrán látható. A modell 0,3mm vastag acéllemezről készült. A garat ennél a modellenél is cserélhető, ahogy a korábbi hengeres siló esetében. Három különböző vizsgálathoz készült három különböző paraméterében változó készlet.

- A garat lejtésének vizsgálatához a szimmetrikus sík lejtő félnyílásszögét (18. ábra α méret) 10° és 70° között hét lépcsőben változtattuk. Ezekben az esetekben a kifolyónyílás állandó $20\text{mm} \times 100\text{mm}$ méretű volt. A siló mérete $100\text{mm} \times 100\text{mm}$, így a kis hengeres siló mérettartományába esik. A szélességet nem változtattuk ezen kísérletek során.
- A második kísérletsorozat a silótest szélesség-mélység arányának vizsgálatára vonatkozott. Ekkor a siló c mérete állandó 100mm volt, a b méretet 25mm és 125mm között fokozatmentesen állíthatóvá tettük. A garat félnyílásszöge állandó 60° volt. A siló arányai ebben vizsgálatban $c/b = 0,8 - 4$ között változtak.
- A harmadik kísérletsorozatban a modell alkalmazhatósági határainak vizsgálata volt a cél. Ebben az esetben azt vizsgáltuk, hogy mekkora minimális garat szükséges ahhoz, hogy az áramlások modellezésére a létrehozott modell még alkalmas legyen. A siló és a kifolyónyílás a/c arányát $0,15 - 1$ határok között változtattuk



5. ábra Síkáramlású modellsiló

2.3. Az új kontakt modell vizsgálatára alkalmazott DEM modell

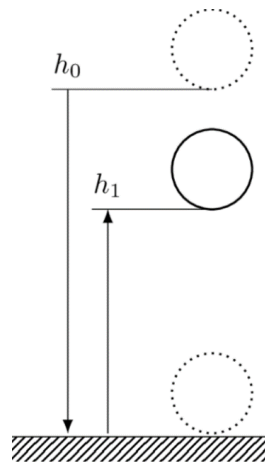
Az új kontakt modellt MercuryDPM nyílt forráskódú diszkrét elemes modellező szoftverben hoztuk létre. A szoftver lehetővé teszi, hogy C++ programnyelv használatával új szemcsekapcsolati modellt hozzunk létre és azt a modellezés során alkalmazzuk. A szoftver saját modellkönyvtárral rendelkezik, amelyben található viszkózus csillapítású Hertz

(HertzianViscoelasticNormalModel) kapcsolati modell, amelyet az összehasonlításhoz használtunk.

2.3.1. Ejtési vizsgálat egy szemcsével

Az első vizsgálat célja, annak megállapítása, hogy az ütközési tényező hatása az új modell esetében nem változott-e meg. Ennek vizsgálatára egy szemcsét ejtettünk le $h_0 = 100\text{mm}$ kezdeti magasságból egy síkra. A visszapattanás és az időben történő mozgás összehasonlításával megállapítható, hogy az új modell mennyire tér el a gyakorlatban bevált modelltől.

A vizsgálat vázlata a 6. ábrán látható.



6. ábra Ejtésteszt vázlata

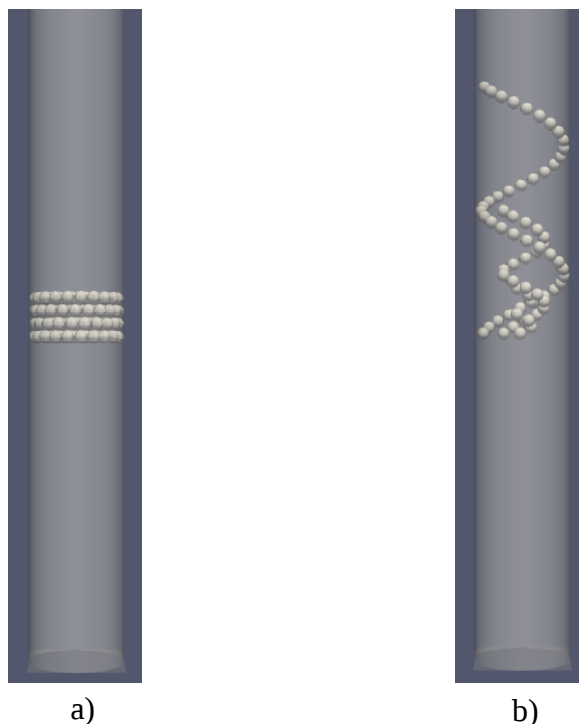
A vizsgálat eredményeképpen az egymás utáni h_0 és h_1 ütközés előtti és utáni maximális magasságok jelzik, hogy az ütközési tényező kezelése szempontjából az adott modell helyes-e.

2.3.2. Ejtési vizsgálat több szemcsével

A több szemcsével végzett vizsgálat célja annak megállapítása, hogy a többszörös ütközések esetén milyen hatása van az új modellben alkalmazott csillapításnak. Két beállítással történt a vizsgálat. Elsőként a szemcséket szorosan elrendezve, második esetben a szemcséket lazán, több spirál mentén elrendezve indítottuk. Mindkét esetben a szemcse minden tulajdonsága megegyezett az előző fejezetben bemutatott esettel.

A vizsgálatokat egy 30mm átmérőjű és 300mm magas hengerben végeztük. A legalsó szemcsék kezdeti magassága 150mm volt, az első esetben szorosan elrendezve 4 sorban

definiáltuk a szemcséket. A második esetben három különböző sugarú spirálban, nagy hézagokkal rendeztük el a szemcséket a 7. ábrán látható módon.

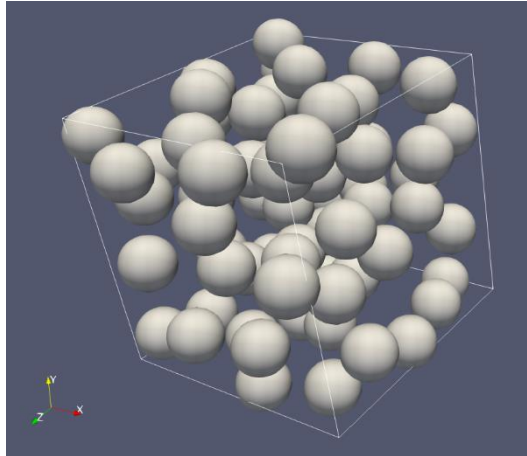


7. ábra Több szemcsével elvégzett ejtészvizsgálat geometriai modellje

A korábbi vizsgálat arra irányult, hogy a csillapítás módjának változását vizsgáljuk abból a szempontból, hogy az ütközési tényező azonos módon viselkedik-e, mint a bevált modell esetében. Ez a vizsgálat viszont az eltérésekre koncentrál, annak megállapítása érdekében, hogy vannak-e a szimuláció során megfigyelhető előnyei az új modellnek.

2.3.3. Izotróp nyomás

Az izotróp nyomás vizsgálatot annak megállapítására végeztük el, hogy a Hertz-Mindlin kapcsolati modell és az új kapcsolati modell numerikus stabilitását össze tudjuk hasonlítani. Ezt úgy értük el, hogy egy $0,095 \text{ m}^3$ térfogatú kockát véletlenszerű elrendezéssel kitöltünk az előző vizsgálatoknál is alkalmazott paraméterekkel rendelkező szemcsés anyaggal (8. ábra). Ezután egy olyan kinematikai peremfeltételt adtunk meg, amely a kocka minden lapját állandó $\dot{\epsilon} = 0,4 \text{ 1/s}$ deformációsebességgel összenyomja.



8. ábra Izotróp nyomás geometriája

Minden vizsgálat a t_R Rayleigh időlépésnél kisebb időlépéssel történt $0,1t_R - 0,5t_R$ tartományban annak érdekében, hogy a modell tulajdonságait az időlépés függvényében is meg tudjuk határozni.

3. Silóból történő kifolyás új analitikus modellje

Az első kifolyási modell a PhD kutatásaim eredménye, amely a hengeres silók esetére érvényes analitikus modell. Ennek továbbfejlesztése sík falú silókra és helyességének ellenőrzése további kutatásokat igényelt. Ebben a fejezetben a modell alapját képező hipotézist, az ebből létrehozott kifolyási modelleket, valamint ezek igazolását mutatom be.

3.1. Instabil boltozatok hipotézise

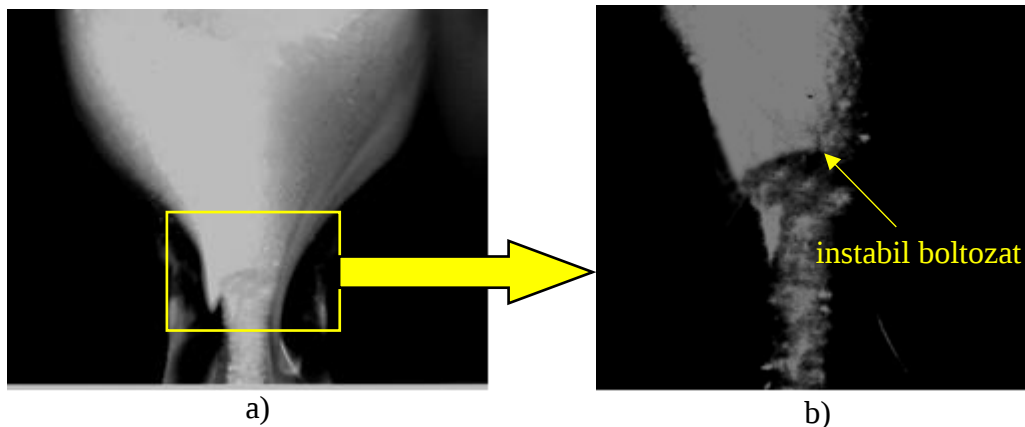
3.1.1. Kifolyás új definíciója

A szemcsés anyag kifolyása feltételezésem szerint folyamatosan kialakuló és összeomló boltozatok sorozataként jön létre. Így az anyag a kifolyónyílás fölött egy boltozat alakja által megadott pontról szabadeséssel hullik ki a silóból.

3.1.2. Kísérleti igazolás

Instabil boltozatok vizuális igazolása

A kísérletek eredményei láthatóak a 9. ábrán. A 9.b ábrán (a 9.a részlete növelt kontraszttal) egy instabil boltozatot látunk, amely a többi felvételen nem látható, tehát csak adott időpillanatban létezett.



9. ábra Kifolyás közben kialakuló boltozatok

Az instabil boltozatok jelenlétét a kísérletek bizonyítják. Az a hipotézis, hogy azok folyamatos összeomlása és kihullása határozza meg a kifolyt anyag mennyiségét, az ezen alapuló számítási modell eredményeinek igazolásával bizonyítható.

3.1.3. Hipotézis következménye

A hipotézisem szerint a kifolyás az instabil boltozatokon alapul. Ezek a boltozatok a kifolyónyílás fölött állandó peremfeltételeket biztosítanak, így a kifolyás minden paramétere állandó, a sebesség és a tömegáram is. Azaz a kifolyási tömegáram állandó, nem függ a siló töltöttségétől, független a szemcsés halmaz magasságától.

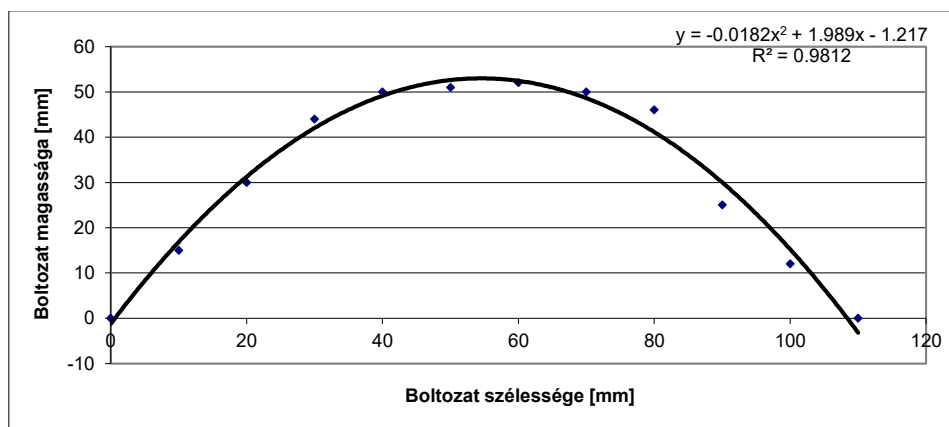
3.2. Boltozatalak meghatározása

3.2.1. A boltozat alakjának mérési eredményei

A 4.1.1. fejezetben bemutatott berendezésen a boltozat alakját az oldalfalon elhelyezett négyzetrács segítségével rögzítettem. A kapott függvények az oldalfalra feltapadt és a leolvasás pontosságát csökkentő anyag ellenére alkalmasak az alak vizsgálatára. A pontonként rögzített alakot közelítő függvényekkel írtam le tíz mérés esetében.

Az egyes beállítások és anyagjellemzők függvényében a boltozat szélessége és magassága más és más értékeket mutatott, azonban a jelenlegi kutatásokban fontos jellemző, az alakra illeszthető függvény típusa azonos volt a mérések során.

A mérések során megállapítható volt, hogy az alak jól közelíthető másodfokú parabola függvénnyel. A 10. ábrán egy olyan mérési eredmény látható, ahol a másodfokú függvény determinációs együtthatója $R^2 = 0,9812$.



10. ábra. A boltozat alakjának közelítése másodfokú függvénnyel

Tíz mérés esetén az illeszkedés mértékét az 1. táblázatban foglaltam össze. A kisebb együttható oka a feltapadások miatt nagyobb az eltérések az elméleti függvénytől.

1. táblázat R^2 értékek mért boltozatalakok esetén

Mérés sorszáma	R^2	Mérés sorszáma	R^2
1	0,9945	6	0,9812
2	0,8844	7	0,9074
3	0,9141	8	0,958
4	0,8872	9	0,96
5	0,8258	10	0,884

3.3. Kifolyási tömegáram meghatározása hengeres silókra

3.3.1. Kifolyási sebesség számítása

A kifolyt anyag az összeomlott instabil boltozat anyaga. A boltozat összetörése után az anyag szabadeséssel távozik a kifolyónyíláson (Oldal et al.: 2012.). Ebből következik, hogy a boltozat alakja, mint a szabadesés kezdőpontja adja meg a kifolyás sebességét adott pontban. Tölcséres kifolyás esetén a boltozat szélső pontjai nem mozognak, így ebből kiindulva zérus kezdősebességű szabadesésként számítható a sebesség. A boltozat h magassága nem mérhető, ezért δ_b boltozati alaktényezőt bevezetve, amely feltételezésem szerint anyagjellemző, a boltozat magasság-szélesség arány

$$\delta_b = \frac{h}{d} \quad (1)$$

Tengelyszimmetrikus áramlás (hengeres siló) esetén a kifolyási sebesség:

$$v(x, \varphi) = \sqrt{2g\delta_b d} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{d}\right)^2} \quad (2)$$

Figyelembe véve, hogy a szemcsék csökkentik a kifolyási keresztmetszetet, a tömegáram:

$$W = \frac{\pi\sqrt{2g}}{6} \rho_h \sqrt{\delta_b} (d - d_p)^{\frac{5}{2}} \quad (3)$$

Az összefüggés tölcséres kifolyás esetén fennálló feltételek mellett nyerte el azt a formát, ezért térfogati áramlás esetén nem alkalmazható.

Sík áramlás esetében a sebesség:

$$v(x, z) = \sqrt{2g\delta_b a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{a}\right)^2} \quad (4)$$

A tömegáramot:

$$W = \frac{\pi\sqrt{2g}}{4} \rho_h b \sqrt{\delta_b} (a - d_p)^{\frac{3}{2}} \quad (5)$$

A peremfeltételek tölcséres áramlás esetén teljesülnek, hasonlóan (3)-hoz, ez sem alkalmazható térfogati áramlás esetén.

3.4. Sebességeloszlás eredmények

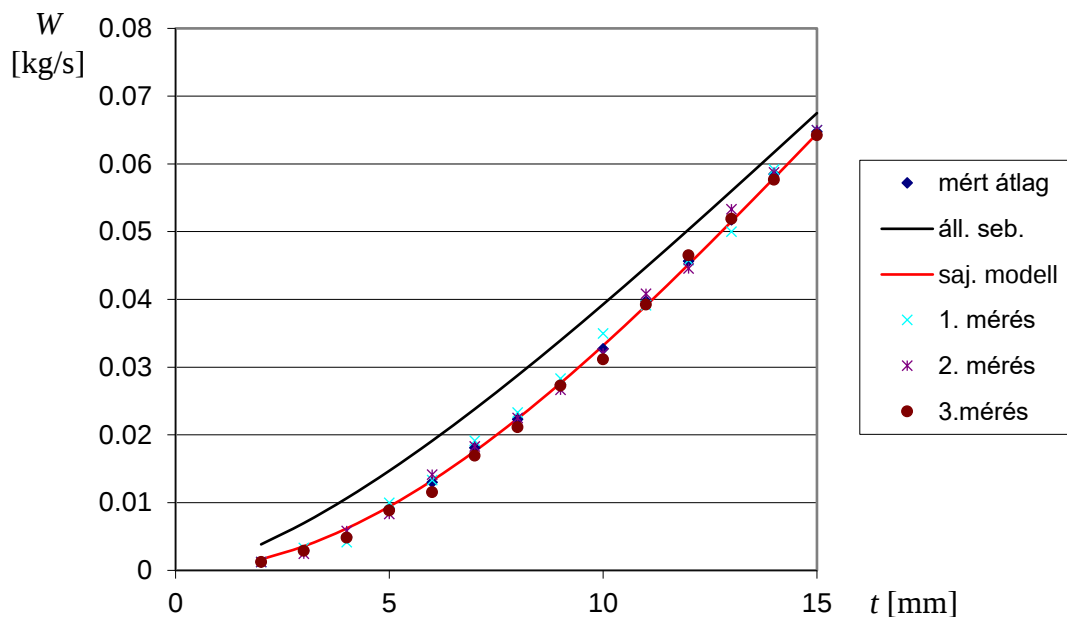
3.4.1. Sebességeloszlás kísérleti vizsgálata

A kifolyónyílásnál az áramlást kettéosztottuk a 4. ábrán látható módon. A körszeleten integrálva polárkoordinátákkal $-\varphi$ és φ valamint a szelő sugárban számított határától R -ig és a halmazsűrűséggel megszorozva kapjuk a körszeletre számított tömegáramot.

$$W_t = \rho_h \int_{-\varphi}^{\varphi} \int_{\frac{R \cos \varphi}{\cos \alpha}}^{2\pi} \sqrt{2g\delta_b d} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{d}\right)^2} x dx d\alpha \quad (6)$$

ahol φ a t részmérethez tartozó középponti szög fele:

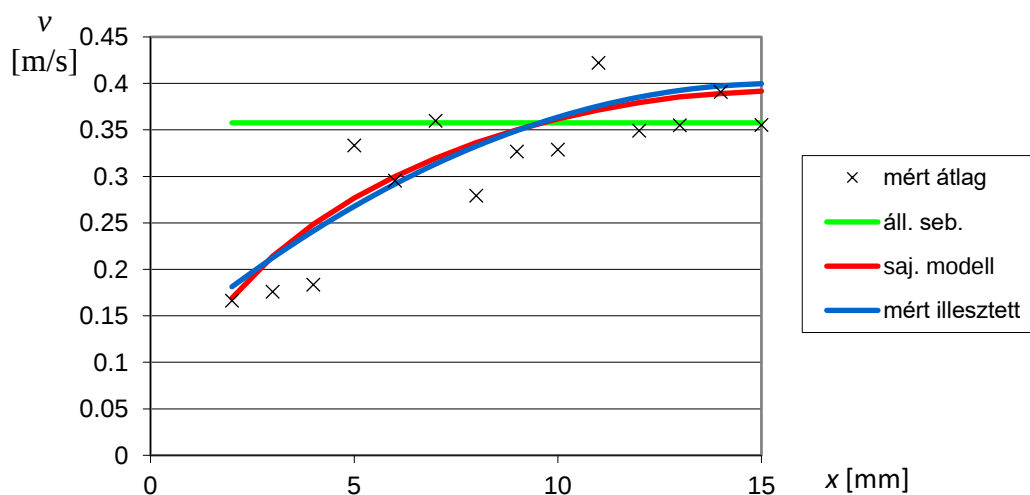
$$\varphi = \arccos \left(1 - \frac{t}{R}\right) \quad (7)$$



11. ábra Tömegáram a résméret függvényében

A 11. ábrán látható a különböző modellek és a mérési eredmények összehasonlítása. Az eredmények azt mutatják, hogy a sebességváltozás figyelembe vételével a mérési eredményekkel jobban egyező tömegáramokat számoltunk.

A 12. ábrán láthatóak a sebességeloszlás mért és számított eredményei. Zöld folytonos vonallal a korábbi modellek állandó sebességű konstans függvénye. Az adott réshez tartozó mérések átlaga x jelölővel, az ezekre illesztett görbe kék folytonos vonallal. A saját modellem számított értékeit piros folytonos vonallal ábrázoltam.

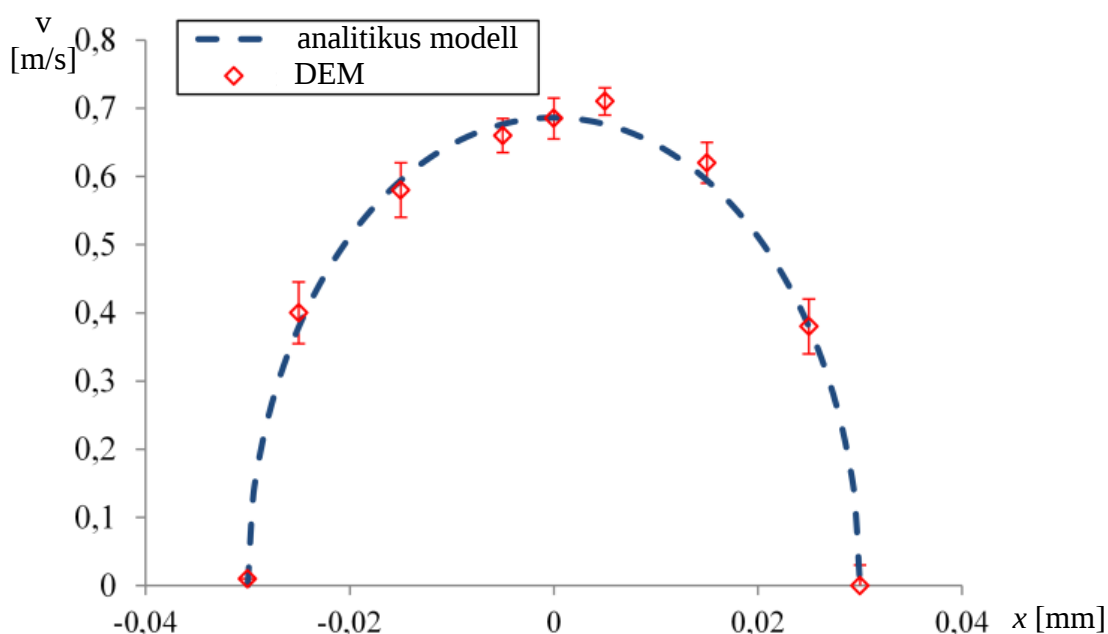


12. ábra Számított és mért sebességek a kifolyónyílásnál

Megfigyelhető, hogy a mért értékek nagy szórásai ellenére a mérésekre illesztett görbe jó egyezést mutat a modellem eredményeivel. Így megállapítható, hogy a korábbi modellek állandó sebességű megközelítése a valós sebességviszonyoktól jelentősen eltér és az új, instabil boltozatokra alapozott analitikus modell a sebességviszonyokat jól leírja.

3.4.2. Sebességeloszlás numerikus vizsgálata

Síkáramlású siló esetére nem kísérleti úton, hanem számítógépes modellezés eredményeivel hasonlítottuk össze az analitikus modell eredményeit. A kapott eredményeket a 13. ábrán mutatom be. A síkáramlásra kiterjesztett analitikus modellel számított sebességeloszlás kék szaggatott vonallal jelenik meg. A diszkrét modellezést háromszoros ismétléssel végeztük el, így azoknak átlagát és szórását is meghatároztuk. A 60°-os garat esetében kapott eredményeket (átlag és szórás) piros színnel ábrázoltuk.



13. ábra Számított sebességek a kifolyónyílás mentén

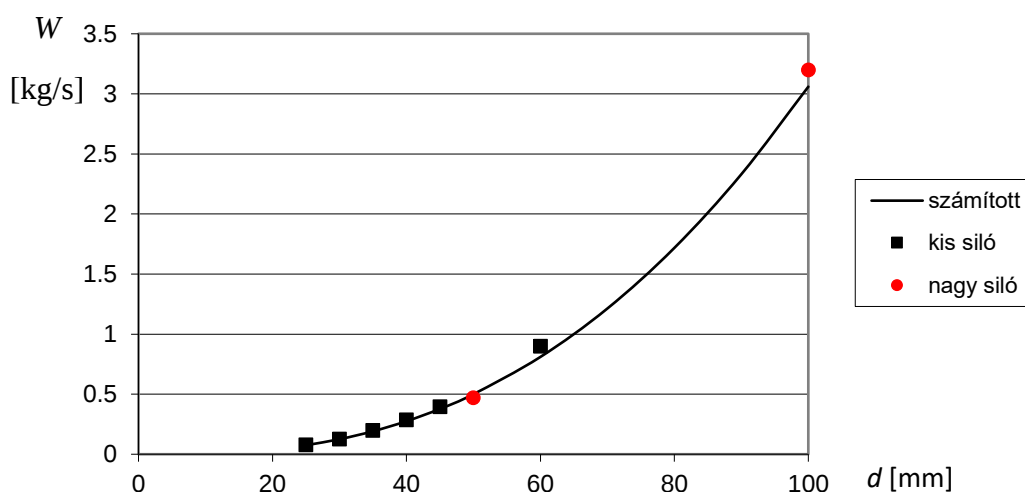
Az eredmények szerint a sebességeloszlást síkáramlás esetén is jól leírja a modell. A szimuláció eredményei jól illeszkednek az analitikus modellel meghatározott görbére.

3.5. Tömegáram eredmények

3.5.1. Kifolyónyílás méretének hatása

Tengelyszimmetrikus siló

Az átmérő hatásának vizsgálatát a kis modell esetén 25, 30, 35, 40, 45, 60, 70, 80, 90, 100 mm-es átmérőjű kifolyónyílású garattal, búzával végeztem el. A nagy modell esetén 50 mm és 100 mm átmérőjű kifolyónyílást alkalmaztunk. Minden esetben háromszoros ismétléssel mértünk.

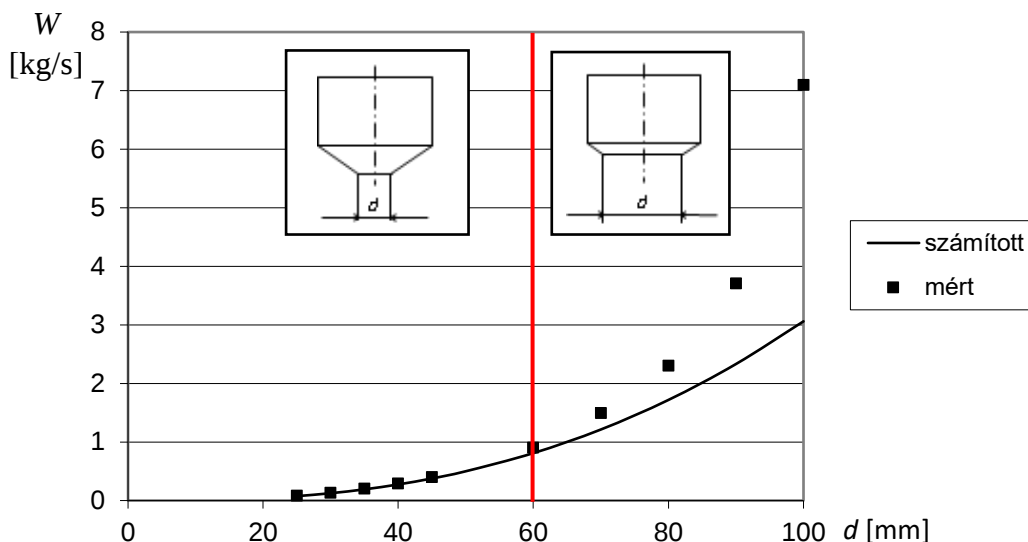


14. ábra Kifolyónyílás átmérőének függvényében mért tömegáramok (búza)

A 14. ábrán láthatjuk, hogy a (3) szerinti 2,5 kitevő az átmérőben a mérésekkel igazolható, mind a kis, mind a nagy silómodellel végzett mérések illeszkednek a számított értékekre. Ez egyben azt is jelenti, hogy a ebben a tartományban a siló átmérőjének nincs hatása a kifolyásra. Az elméletem szerint csak a kifolyónyílás közvetlen környezete határozza meg a kifolyást, ezek a mérések ezt igazolják. A kis modell eredményeit csak 60 mm-ig ábrázoltam. Ennek oka, hogy amikor elérjük a kifolyónyílással a silóátmérő 60%-át, akkor arányaiban a siló fala is a kifolyónyílás közvetlen környezetébe kerül, azaz hatást kezd kifejteni a kifolyásra.

A modell alkalmazhatóságának határát átmérő esetében a 15. ábrán mutatom be. Ha a kis siló esetén az átmérőt tovább növeltem 60 mm felett, egészen a 100 mm-es silóátmérőig, akkor a számított értékektől egyre nagyobb mértékben eltérő kifolyási tömegáramot mértem. Ennek okaként azt állapítottam meg, hogy a silóátmérőt egyre jobban megközelítve az eredeti feltételezésem a zérus sebességű peremmel létrejövő instabil boltozat egyre kevésbé valósul meg. A silóátmérő 60%-nál az instabil boltozat mellett 20% garatrész van, amin a boltozat meg

tud támaszkodni. Az átmérőt tovább növelve az arány egyre kisebb lesz, azaz eltűnik a perem, amire a boltozat fel tudna támaszkodni. Ennek megfelelően azt látjuk a 38. ábrán, hogy a mért értékek a modellel számított értékektől egyre távolodnak. Az utolsó pont, ahol a mérések illeszkednek a számított görbére, a silóátmérő 60%-a, így ezt tekintem a modellem alkalmazhatósági határának.

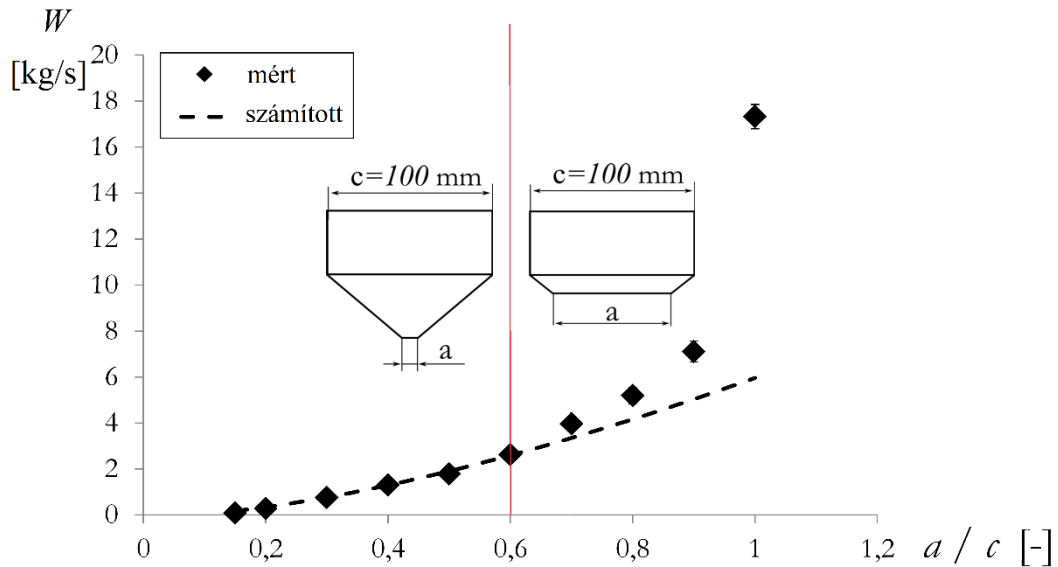


15. ábra Számított tömegáramok érvényességi határa

A 15. ábrán 60 mm feletti átmérő melletti eltérések a silóátmérő és a kifolyónyílás arányából következnek. Ez bizonyítja a 14. ábrán látható 100 mm kifolyónyílás mellett a nagy modellsilón végzett mérés, amely jól illeszkedik a számított értékekre, mert ott a 100 mm-es kifolyónyílás a 440 mm silóátmérő 23%-a, azaz messze van a 60%-os határtól.

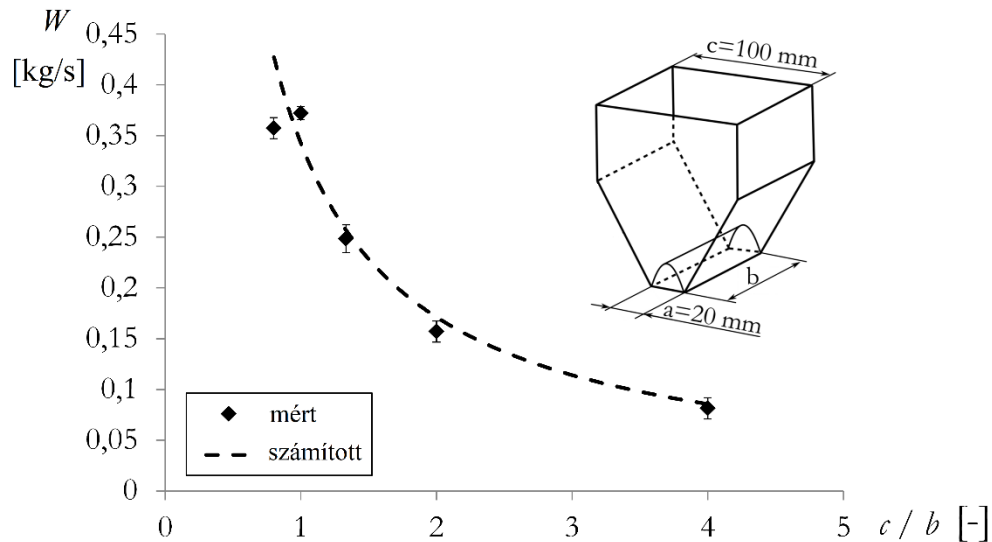
Síkáramlású siló

(5) szerint a nyílás szélessége 1,5 kitevővel van hatással a tömegáram értékére. A 16. ábrán a szélesség hatását mutatom be. Mivel hasonló eredményt várok, mint a tengelyszimmetrikus esetben, így a szélességi méretet eleve a siló szélességének arányában ábrázolom, hogy az illeszkedés és az érvényességi határ is látható legyen. A viselkedés a tengelyszimmetrikus esettel azonos tulajdonságot mutat. Amíg a garat elég támasztási felületet ad, addig a mért eredmények illeszkednek a számított tömegáramokra. Ugyanúgy a siló szélességének 60%-a az a határ, ahol még nincs zavaró hatása a perem csökkenésének. A 60% feletti nyílás esetében a perem támasztó hatása egyre kisebb, a számítási hiba pedig egyre nagyobb. Megállapíthatjuk tehát, hogy a tengelyszimmetrikus és síkáramlás esetében is a kifolyónyílás fő mérete a silóméret 60%-ig ad az analitikus modellünkkel jó eredményeket a kifolyási tömegáramra.



16. ábra Kifolyónyílás szélességének hatása a tömegáramra síkáramlás esetén

A síkáramlású modell esetében a b mélység hatása a (5) szerint számítva a 17. ábrán látható. Mivel a kérdés az megfelelő illeszkedés mellett az alkalmazhatóság határa, így ebben az esetben is a siló szélességének arányában vizsgáljuk. Itt a mélység kettős szerepben van a síkmodell miatt. Egyrészt a kifolyónyílás mélysége, másrészt a siló mélysége is. Ezért a határ bármelyik hatásból következhet vagy a kifolyónyílás vagy a silószélesség hatása okozhatja a modell hibáját.



17. ábra A b szélesség hatása a tömegáramra síkáramlás esetén

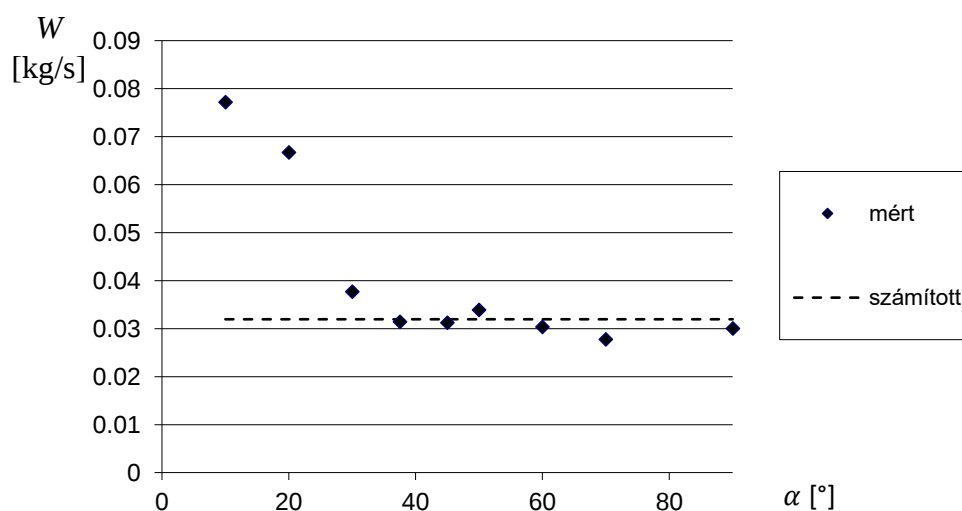
A 17. ábrán látható, hogy a siló szélességénél nagyobb mélység esetén jó eredményt ad a modell, 1:1 arány alatt már hibát mutat. Mivel az a kifolyónyílás 20 mm, így valószínűleg a

siló arányai okozzák az eltérést. Azaz ha a szögletes siló két mérete azonos, akkor az áramlások elkezdenek térbelivé válni, így a síkmodell alkalmazásával már hibát követünk el.

3.5.2. Garat nyílásszögének hatása

Tengelyszimmetrikus siló

Hengeres siló esetén a kísérletekhez $\alpha = 10, 20, 30, 37,5, 45, 90^\circ$ -os (síkfénék) félkúpszögű kifolyókúpokat használtam. Az alkalmazott modell a kis méretű hengeres silómodell, a kifolyási átmérő 20 mm minden esetben. A mérésekhez búzával végeztem el.



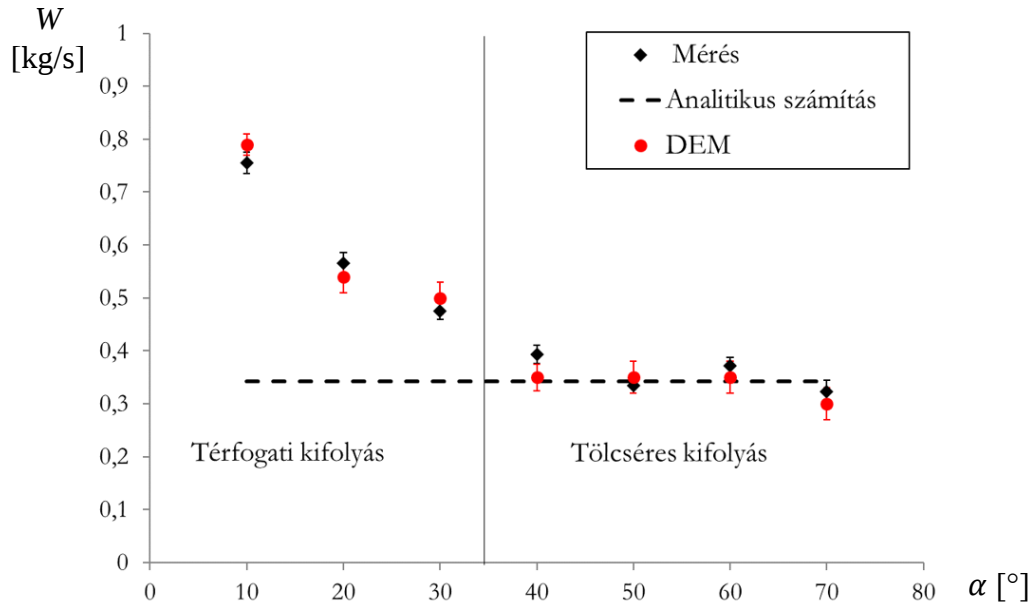
18. ábra Félkúpszög hatása a kifolyási tömegáramra hengeres siló esetén

Búza esetén $37-38^\circ$ félkúpszög alatt térfogati, felette tölcséres kifolyási mód várható az irodalom szerint, a mérések alapján tehát igazolható az a feltétel, hogy az analitikus modellem tölcséres kifolyási mód esetére érvényes. A modell kiterjeszthető a térfogati kifolyás esetére, ha a δ_b anyagállandót térfogati kifolyásnál a szög függvényében módosítom, azonban ez már nem analitikus, hanem empirikus megoldás lenne.

Síkáramlású siló

Síkáramlás esetén is hasonló eredményt várható, mivel azonos elven határoztuk meg az analitikus modellt. A modell eredményeit a DEM modell eredményeivel is összehasonlítottam. Az eredményeket a 19. ábrán mutatom be.

Az analitikus modell határait a mérés és a DEM számítás alapján is ugyanazt a következtetést vonhatjuk le. Síkáramlású siló esetében is azt mutatják az eredmények, hogy az analitikus modell csak tölcséres kifolyási mód esetén alkalmas a tömegáram számítására.

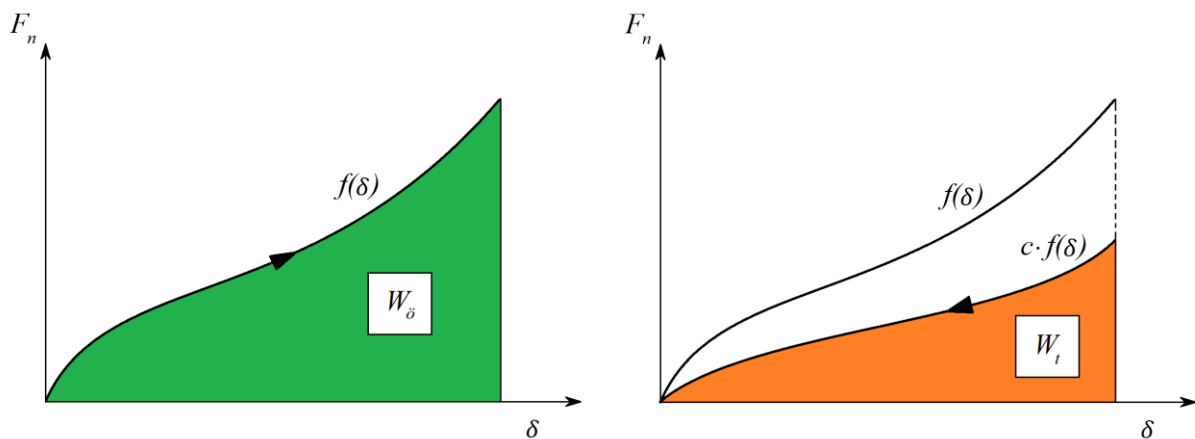


19. ábra Félnyílásszög hatása a kifolyási tömegáramra síkaramlású siló esetén

4. Új elvű csillapítási modell DEM alkalmazásra

4.1. Elvi megoldás és általános formula

Az új modell elveti a korábbiak azon tulajdonságát, hogy a függvény folytonos legyen. Mivel a diszkrét elemes modellezéskor eleve időlépésekben modellezünk, ez nem igényli a folytonos modellt, de ennek elhagyásával elérhető az a cél, hogy az energiaelnyelés a legnagyobb összenyomódás és erő közelében legyen a maximális. A 20. ábrán látható az új modell elve, a c konstanst kell úgy megválasztani, hogy a k rugalmassági modulus a teljes függvényre érvényes legyen.



20. ábra Új csillapítási modell elvi vázlata

Az ütközési tényező számítható az erő-elmozdulás függvényekből számított munkákból az összenyomódási (W_{δ}) szakaszon és tágulási (W_t) szakaszon:

$$k = \sqrt{\frac{W_t}{W_{\delta}}} = \sqrt{\frac{\int c f(\delta) d\delta}{\int f(\delta) d\delta}} = \sqrt{\frac{c \int f(\delta) d\delta}{\int f(\delta) d\delta}} = \sqrt{c} \quad (8)$$

azaz a konstans értéke az ütközési tényezéből számítható:

$$c = k^2. \quad (9)$$

Az elv a gyakorlatban akkor lesz jól használható, ha a lehető legegyszerűbb matematikai formában írjuk fel. Ha két modellt adunk meg és a programnak kell kiválasztani, hogy melyiket alkalmazza a terhelés irányának megfelelően, az is alkalmazható, de ennél jobb, ha zárt alakban írjuk fel a függvényt, amely összenyomódási és a tágulási szakaszra egyaránt érvényes.

A modellünk így a következő alakban írható fel:

$$F_n(\delta) = \left(\frac{1 + k^2}{2} + \text{sign}(v_{nrel}) \frac{1 - k^2}{2} \right) f(\delta) \quad (10)$$

ahol:

- $F_n(\delta)$: a disszipációt leíró normális irányú erő-elmozdulás függvény,
- δ : összenyomódás,
- k : ütközési tényező,
- sign : előjelfüggvény,
- v_{nrel} : a két test normális irányú relatív sebessége,
- $f(\delta)$: tetszőleges rugalmas erő-elmozdulás függvény.

A (10) formában felírt kapcsolati függvény az alakjából és a definíciója szerint a következő elvárásoknak felel meg:

- bármilyen rugalmas függvényre alkalmazható,
- az ütközési tényező elvi helyes alkalmazását teszi lehetővé,
- a csillapítás arányos az összenyomódással,
- egyszerű felépítésű,
- nem torzítja az eredeti függvényt, mint a viszkózus taggal kiegészített függvények,
- várhatóan nagyobb numerikus stabilitás,
- várhatóan kisebb számítási igény.

4.2. Új kapcsolati függvény alkalmazása

A Hertz-Mindlin kapcsolati függvényt választottuk az alkalmazásra és az összehasonlításra. Az új függvény esetében elhagyjuk a sebességfüggő viszkózus tagot és csak a Hertz, rugalmas tagot hagyjuk meg, így az új modell a Hertz-függvényre alkalmazva:

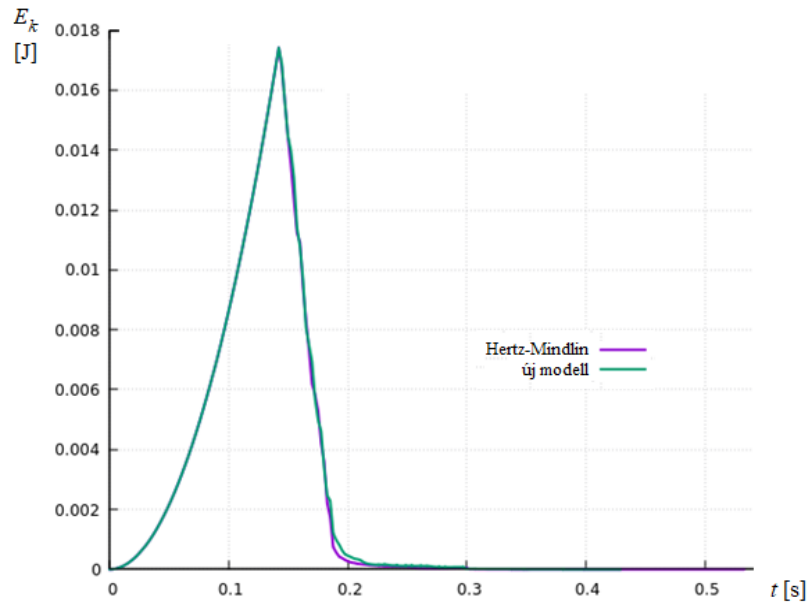
$$F_n = \frac{4}{3} \left(\frac{1 + k^2}{2} + \text{sign}(v_{nrel}) \frac{1 - k^2}{2} \right) E_0 \sqrt{R_0} \delta^{\frac{3}{2}} \quad (11)$$

4.2.1. Egy szemcse ejtésének eredményei

Szimulált kísérletet futtattuk le a Hertz-Mindlin és az új (11) kapcsolati függvény alkalmazásával. Ebben az esetben az volt a cél, hogy megállapítsuk az új modell alkalmasságát az ütközési tényező modellezésére összehasonlítva azt a gyakorlatban elterjedt modellel. Az ejtési kísérlet eredményei közül a szemcse magasságának időbeli alakulását vizsgálatuk és hasonlítottuk össze a két modell esetén. A vizsgálatok időlépéseit a t_R Rayleigh-időlépés (a szemcsén áthaladó mechanikai hullám áthaladási ideje) alapján választottuk ki. A Rayleigh-időlépés 10% és 20%-nál elvégezve nem volt észrevehető különbség a két modellel számított eredmények között. Így belátható, hogy a két modell bár teljesen eltérő módon alkalmazza a csillapítás számítására az ütközési tényezőt, a végeredmény azonosan jó. Ezzel az új kapcsolati modell alkalmasságát bizonyítottuk az ütközési tényező helyes leírására.

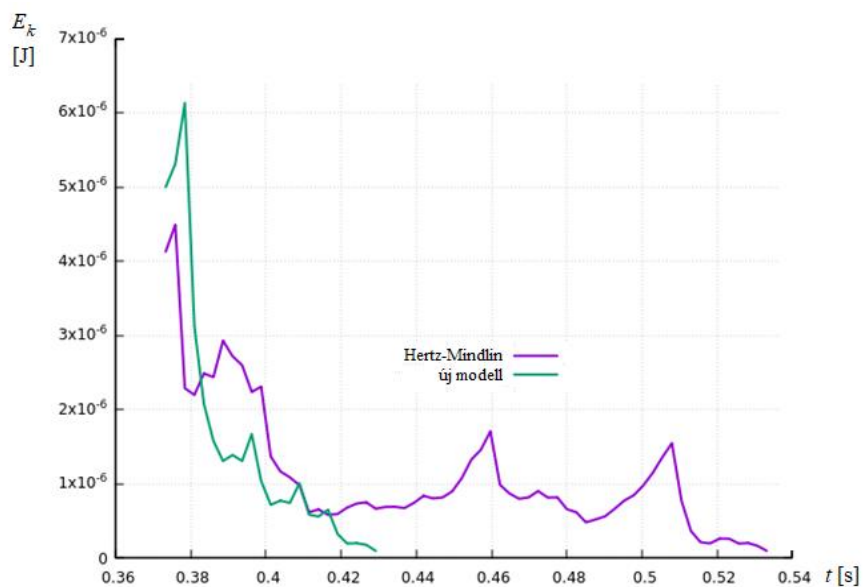
4.2.2. Több szemcse ejtésének eredményei

A szabályosan, szorosan elrendezett kezdeti helyzetből (7. a ábra) indítva a halmazt, több időlépéssel is elvégeztük a számításokat. A Rayleigh-időlépés 10, 20, 30, 40, 50, 60% esetén is végeztünk szimulációt. A 7.b ábra szerinti elrendezésből indítva a halmazt ugyanazt a vizsgálatot végeztük el.



21. ábra A laza halmaz mozgási energiája az idő függvényében $0,6t_R$ időlépés esetén

Mindkét esetben hasonló eredményt kaptunk. A teljes tartományon vizsgálva a 21. ábra a laza halmaz, de ugyanilyen eredményt adott a szoros halmaz is, a két modell ebben a léptékben nagyon hasonló eredményt adott. Komolyabb különbséget a legutolsó szakaszban mutatott mindkét elrendezés.



22. ábra A laza halmaz mozgási energiája az idő függvényében $0,6t_R$ időlépés esetén az utolsó szakaszon

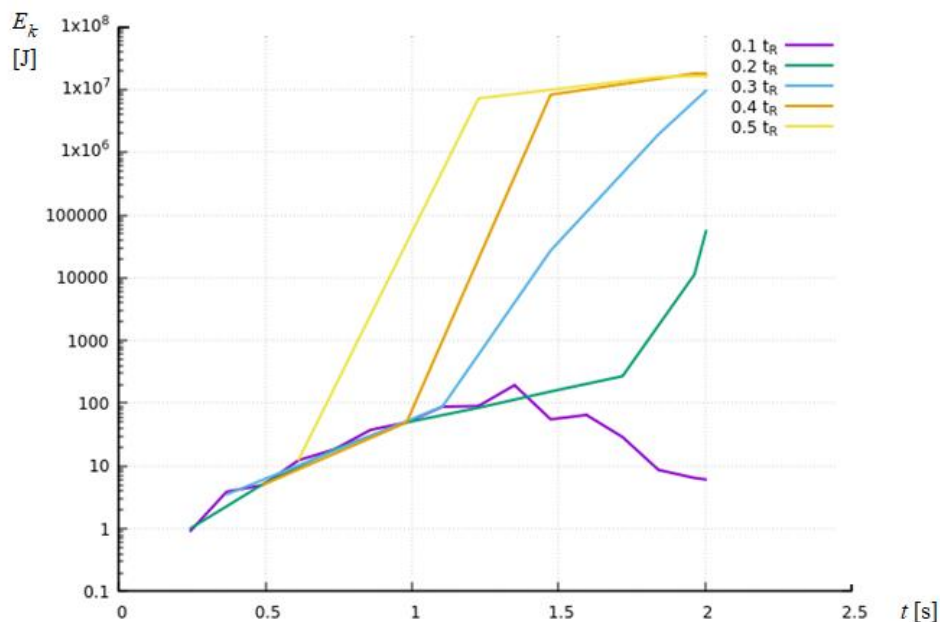
A 22. ábrán látható, hogy a halmaz 0,1 másodperccel hamarabb csillapodott le az új csillapítási modell esetén, ez is hasonló a szoros halmaz eredményéhez.

4.2.3. Izotróp nyomóvizsgálat eredményei stabilitásra

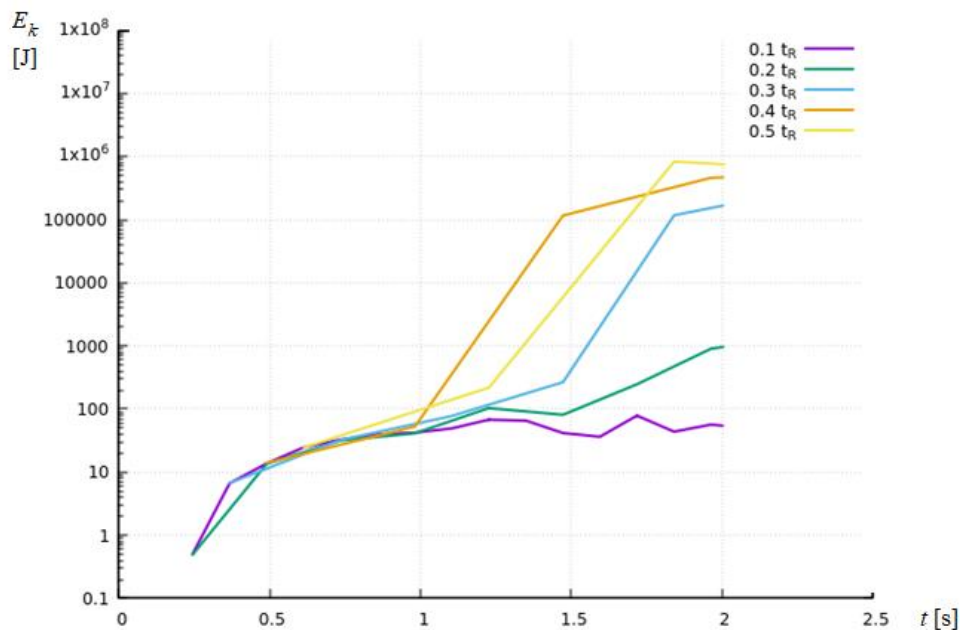
Ebben a vizsgálatban a halmaz véletlenszerű elrendezéssel indítottuk, állandó deformációsebességgel mozog a perem, így bármelyik modell gyorsan eljut abba a fázisba, amikor a szimuláció stabilitása megszűnik. A vizsgálatokat a Rayleigh-időlépés 10, 20, 30, 40, 50%-a nagyságú időlépések mellett végeztük el. A próbafuttatások alapján állapítottuk meg a szimulációk időtartamát, amely az eredmények stabilitásától függetlenül két másodperc volt.

A halmazokat addig tekintettük stabilnak, amíg a teljes mozgási energia nagyságrendje el nem érte a 100 J értéket. Ha a szimuláció során ezt túllépte a halmaz, akkor már nem volt képes stabilitást elérni, utána már exponenciálisan növekedett a kinetikus energia. (Az ábrákon logaritmikus lépték van, hogy a kis energiaszintek és a stabilitását veszített halmaz energiája is látható legyen.)

Az adatok áttekinthetősége érdekében a két modell eredményeit külön ábrán mutatom be egymás alatt. Mindkét modell esetében az egyes görbék adott időlépések mellett számított mozgási energia értékeit mutatják. Lila színű $0,1t_R$, a zöld $0,2t_R$, a kék $0,3t_R$, a narancs $0,4t_R$ és a citromsárga görbe a $0,5t_R$ időlépés esetén számított mozgási energia értékeket mutatja a szimulációs idő függvényében. A 23. ábrán a Hertz-Mindlin kapcsolati modellel számított, a 24. ábrán az új modellel számított eredményeket mutatom be.



23. ábra Hertz-Mindlin kapcsolati modellel számított mozgási energia az idő függvényében



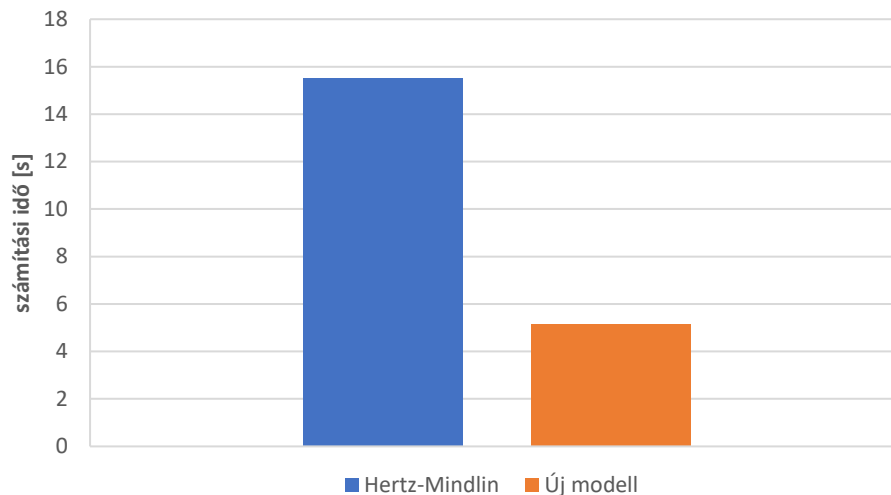
24. ábra Új kapcsolati modell esetében számított mozgási energia az idő függvényében

- A legkisebb időlépés esetében mindkét modell mellett stabil maradt a halmaz a szimuláció végéig.
- $0,2t_R$ időlépés esetén egy kicsivel laposabb az új modell görbéje 1,5 és 2 s között, de előtte nincs jelentős különbség.
- $0,3t_R$ esetén a Hertz-Mindlin modellel az energia 1,2 s után kezd exponenciális növekedésbe, az új modellel csak 1,5 s után.
- $0,4t_R$ időlépés mellett mindkét modellel 1 s után veszti el a stabilitását a halmaz. Az új modellel nagyságrenddel kisebb energiát ér el a halmaz a stabilitás elvesztése után, ami gyakorlati szempontból kevésbé érdekes, de mutatja az új modell nagyobb csillapítását még ezen a tartományon is.
- $0,5t_R$ időlépés mellett ismét nagyobb a különbség, a Hertz-Mindlin modell esetén a halmaz energiája 0,6 s időpontban kezd exponenciálisan növekedni és 0,7 s már elveszti stabilitását. Az új modell csak jóval később, a szimuláció 1,2 s időpontjánál veszti el stabilitását.

Ezen vizsgálatok alapján megállapítható, hogy az új modell néhány esetben, főleg kisebb időlépéseknél hasonló stabilitást mutatott a Hertz-Mindlin modellhez. Azonban a legtöbb esetben és főleg az időlépés növelésekor az új modell nagyobb stabilitást mutatott. Olyan eset nem fordult elő, ahol az új modell kisebb stabilitást mutatott.

4.2.4. Izotróp nyomóvizsgálat eredményei számítási időre

Az izotróp nyomóvizsgálat nemcsak a kapcsolati modell szimulációra gyakorolt hatásának vizsgálatára alkalmas. A függvény egyszerűbb formájából arra a következtetésre jutottam, hogy alkalmazása esetén várható a számítási időigény csökkenése. A korábbi vizsgálatok alapján egy mindkét modell esetében a stabil szimulációt jelentő $0,12t_R$ időlépést választottunk a számítási igény megállapítására.



25. ábra Számítás időigénye

Az eredmények összehasonlíthatósága érdekében a számításokat egy magon futtattuk hússzoros ismétléssel. Az eredmény a 25. ábrán látható. A Hertz-Mindlin kapcsolati modell alkalmazása esetén a számítás Intel(R) Core(TM) i7-7500U CPU @ 2.70GHz processzoron, egy magon 15,537 s $\pm 0,284$ s időt vett igénybe. Az új modell esetében ugyanez 5,169 s $\pm 0,085$ s volt. Az új modell előnyei közül gyakorlati szempontból ez a legjelentősebb, mert a diszkrét elemes modellezések esetén nagyon gyakori probléma a nagy a számítási időigény.

5. Új tudományos eredmények

1. tézis: Általánosított, instabil boltozódáson alapuló kifolyási modellel analitikusan leírható a síkmodellel közelíthető silók (tengelyszimmetrikus, síkalakvázolás) kifolyási sebessége és tömegárama tölcséres kifolyási mód esetén (Oldal et. al, 2012.) (Safranyik, Oldal, 2021.)

Az instabil boltozat alakja másodfokú függvénnyel közelíthető, a kifolyónyílás mérete és δ_b alaktényező alkalmazásával. Ekkor a kifolyási sebesség tengelyszimmetrikus (hengeres siló) esetben:

$$v(x, \varphi) = \sqrt{2g\delta_b d} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{d}\right)^2}$$

síkmozgás esetében:

$$v(x, z) = \sqrt{2g\delta_b a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{a}\right)^2}$$

A tömegáram tengelyszimmetrikus esetben:

$$W = \frac{\pi\sqrt{2g}}{6} \rho_h \sqrt{\delta_b} (d - d_p)^{\frac{5}{2}}$$

síkmozgás esetében:

$$W = \frac{\pi\sqrt{2g}}{4} \rho_h b \sqrt{\delta_b} (a - d_p)^{\frac{3}{2}}$$

összefüggésekkel számítható.

A modell alkalmazhatósági határai a kifolyónyílás d és a méretére:

$$7d_p \leq d \leq 0,6D$$

$$7d_p \leq a \leq 0,6c$$

Ahol:

- g : gravitációs gyorsulás,
- δ_b : boltozat alaktényezője,
- d : kifolyónyílás átmérője (hengeres siló),
- x : sugár polárkoordináta (hengeres siló), szélességi koordináta (síkmozgás),
- a : kifolyónyílás szélessége (síkmozgás),
- ρ_h : halmazsűrűség,
- d_p : átlagos szemcseméret,
- b : siló mélysége (síkmozgás),
- D : silóátmérő (hengeres siló),

- c : siló szélessége (síkmozgás),
- φ : szög polárkoordináta (hengeres siló),
- z : mélység koordináta (síkmozgás).

Az új modell előnyei a korábbiakhoz képest:

- tölcséres kifolyás esetére csak empirikus modellek léteztek korábban,
- a korábbi modellek állandó sebességet feltételeztek a kifolyónyílás mentén, az új modell nemcsak ettől tér el, hanem bizonyítottan jól írja le a sebességeloszlást.

2. tézis: Új csillapítási elven alapuló szemcsekapcsolati modell, amely alkalmazható bármely rugalmas függvényre (Oldal, 2024.)

A modell a következő alakban írható fel:

$$F_n(\delta) = \left(\frac{1 + k^2}{2} + \text{sign}(v_{nrel}) \frac{1 - k^2}{2} \right) f(\delta)$$

ahol:

- $F_n(\delta)$: a disszipációt leíró normális irányú erő-elmozdulás függvény,
- δ : összenyomódás (átfedés),
- k : ütközési tényező,
- sign : előjelfüggvény,
- v_{nrel} : a két test normális irányú relatív sebessége,
- $f(\delta)$: tetszőleges rugalmas erő-elmozdulás függvény.

Az új modell előnyei a korábbiakhoz képest, amely magából a levezetésből következik, külön bizonyítást nem igényel:

- bármilyen rugalmas függvényre alkalmazható,
- az ütközési tényezőt egzakt módon alkalmazza,
- a csillapítás arányos az összenyomódással,
- egyszerű felépítésű,
- nem torzítja az eredeti függvényt.

3. tézis:   j típusú szemcsekapcsolati modell Hertz-függvényre való alkalmazása

(Oldal István; Safranyik Ferenc; Keppler István, Tóth János: High stability damping model for discrete element method (bírálat alatt))

A modell a k  vetkezo  alakban   rhato fel:

$$F_n = \frac{4}{3} \left(\frac{1 + k^2}{2} + \text{sign}(v_{nrel}) \frac{1 - k^2}{2} \right) E_0 \sqrt{R_0} \delta^{\frac{3}{2}}$$

ahol:

- F_n : a disszipációt leíró normális   r  -elmozdulás függvény,
- δ : az   rintkezo  testek átfedése,
- k :   tk  z  si tényező,
- sign : előjelfüggvény,
- v_{nrel} : a két test normális   r  ny   relatív sebessége,
- E_0 : az   rintkezo  teste redukált rugalmassági modulusa a (27) alapján számítva,
- R_0 : redukált szemcse sugár a (20) alapján számítva.

A modell szimulációval történő ellenőrzése alapján a k  vetkezo  tulajdonságokat igazoltuk:

- az ütközési tényezőt jól modellezi $0,2t_R$ id  l  p  sig egy szemcse esetében,
- gravitációval terhelt halmaz $0,1t_R$ és $0,6t_R$ időlépés tartományban a viszkózus csillapítású modellel jó egyezést mutat a halmaz laza állapotában, az összetömörödött, nyugalmi állapothoz közelítve az új modell minden esetben nagyobb stabilitást mutatott,
- izotróp nyomás esetében $0,1t_R$ és $0,5t_R$ időlépés tartományban az új függvény hasonló vagy nagyobb stabilitást mutatott, mint a viszkózus csillapítású modell, nagyobb időlépések esetén az új modell nagyobb stabilitást mutatott,
 - izotróp nyomás esetén az új modellel azonos feltételek mellett kevesebb, mint egyharmad számítási gépidőt   g  nyelt a viszkózus csillapításhoz képest.

6. Összefoglalás

A PhD megszerzése után a szemcsés anyagok modellezésének analitikus és numerikus területén is végeztem kutatásokat. A disszertációban két területen elért eredményeimet foglaltam össze. Az egyik terület, a silók ürítésének analitikus leírása a másik terület a diszkrét elemek módszerén belül a szemcsekapcsolati modellek csillapítása és annak modellezése.

Szemcsés anyagok silóból történő kifolyására a szakirodalomban térfogati kifolyás esetére találunk analitikus számítási modellt, tölcéses kifolyásra nem, arra a kifolyási módra csak empirikus számítási modelleket találunk. Ezen kívül az összes számítási modell állandó sebességet feltételez a kifolyónyílás mentén, ami hibás, mert sem a mérések sem a numerikus modellek nem mutatnak állandó sebességet. A kifolyás új megközelítését még a PhD munkám során elkezdtem, azonban annak általánosítását síkmodellekre később dolgoztuk ki. A modell az instabil boltozatok hipotézisének alapján leírja a kifolyási sebességet a kifolyónyílás mentén tengelyszimmetrikus és síkmozgású silók esetében. Ezek a sebességek kísérleti vizsgálatokkal és numerikus modellekkel igazolva megfelelnek a valós viszonyoknak. A sebesség alapján meghatározható a kifolyási tömegáram értéke, amely mind a tengelyszimmetrikus, mind a síkáramlás esetére mérésekkel igazoltan helyes. Összességében ezen a területen létrehoztam egy korábban nem létező elméleten alapuló analitikus modellt, amely általánosan síkmodellel leírható silóból való kifolyás modellezésére alkalmas.

Diszkrét elemek módszerének egyik alap modellje a szemcsekapcsolati modell. Ezt a modellt a csillapítás szempontjából vizsgáltam. Kohéziómentes rugalmas anyagokra három alaptípust találtam a szakirodalomban, az elterjedtebb modell a viszkózus csillapítás és az elasztoplasztikus modell, a harmadik modell két eltérő mereedségű egyenest alkalmaz a csillapítás leírására. Mindegyiknek megvannak az előnyei és a hátrányai, ebben a kutatási munkában a hátrányokkal és azok megoldásával foglalkoztam. A két eltérő mereedségű egyenessel modellezett csillapítás nagymértékben leszűkíti az alkalmazhatóságot, mivel a valós szemcsék érintkezése nemlineáris, ezen kívül nem a zérusba tér vissza a második szakasz, így ez további megoldandó feladat. Viszkoelasztikus modell bonyolultabb és több paramétert igényel. A viszkózus csillapítás sebességfüggő tagot ad a rugalmas kapcsolatot leíró modellhez. Ennek két fő hátránya van. Az egyik, hogy eltorzítja az alapfüggvényt, a másik, hogy kis sebességek esetén (a legtöbb halmaz modellezésekor kvázi nyugalmi helyzet van, így ez sűrűn előforduló eset) romlik a csillapítás hatása. A problémák megoldására egy olyan csillapítási modellt dolgoztam ki, ami az eredeti rugalmas modellt nem módosítja az összenyomódási szakaszon, csak a tágulási szakasz módosításával modellezi a csillapítást. Ez nem ad plusz tagot a modellhez, így egyszerű formája van, kevés paramétert alkalmaz. Az így felírt modell mentes az alap modell torzításától és igazoltan stabilabb kis sebességek esetén valamint kisebb a számítási igénye, mint a viszkózus modellnek.

Dolgozatomban a bemutatott eredményeket három tézispontban foglaltam össze.

7. Summary

After obtaining my PhD, I conducted research in both the analytical and numerical modeling of granular materials. In my dissertation, I summarized the results achieved in two areas. The first area focuses on the analytical description of silo discharge, while the second pertains to damping in particle contact models within the framework of the discrete element method and its modeling.

In the literature, an analytical calculation model is available for the massflow discharge of granular materials from silos, but no such model exists for funnel flow, where only empirical calculation models are found. Additionally, all existing calculation models assume a constant velocity along the discharge opening, which is incorrect, as neither measurements nor numerical models show a constant velocity. I began developing a new approach to describe discharge during my PhD work, but its generalization to planar models was developed later. Based on the hypothesis of unstable arches, the model describes the discharge velocity along the outlet for axisymmetric and planar silos. These velocities have been validated through experimentals and numerical models, demonstrating consistency with real-world conditions. The velocity profile allows for the determination of the mass flow rate, which has been experimentally verified to be accurate for both axisymmetric and planar flows. Overall, I developed an analytical model based on a previously non-existent theoretical framework, which is suitable for modeling silo discharge in a generalized manner using planar models.

One of the fundamental models of the discrete element method is the contact model of particles. I examined this model from the perspective of damping. For cohesionless elastic materials, I identified three basic types in the literature. The more widespread models are the viscous damping model and the elastoplastic model, while the third model uses two linear segments with different slopes to describe damping. Each has its advantages and disadvantages. In this research, I focused on the disadvantages and their solutions. Damping modeled with two linear segments significantly limits applicability, as the real contact between particles is nonlinear. Additionally, the second segment does not return to zero, presenting another issue to address. The viscoelastic model is more complex and requires more parameters. The viscous damping model introduces a velocity-dependent term to the elastic contact model. This has two main drawbacks: first, it distorts the fundamental function; second, at low velocities (a common scenario in most granular material simulations, as they are typically in a quasi-static state), the damping effect deteriorates. To address these problems, I developed a damping model that does not modify the original elastic model during the compression phase but models damping by altering the expansion phase. This approach does not add extra terms to the model, giving it a simple form and requiring few parameters. The resulting model is free from distortions of the base model, is demonstrably more stable at low velocities, and has lower computational demands compared to the viscous model.

In my dissertation, I summarized the presented results in three thesis points.

8. A témához kapcsolódó saját publikációk

2007. PhD védés utáni publikációk

1. Keppler István; Hudoba Zoltán; Oldal István; Fenyvesi László: Rezgő talajművelő szerszámok modellezése diszkrét elemek módszerével, XII. Magyar Mechanikai Konferencia Miskolc, Magyarország : Miskolci Egyetem Műszaki Mechanikai Intézet 2015. pp. 140-140.
2. Keppler, István; Hudoba Zoltán; Oldal István; Csátár Attila; Fenyvesi László: Discrete element modeling of vibrating tillage tools, ENGINEERING COMPUTATIONS 32 : 2 2015. pp. 308-328.
3. Keppler István; Kocsis László; Oldal István; Csátár Attila: Determination of the discrete element model parameters of granular materials, HUNGARIAN AGRICULTURAL ENGINEERING 23 2011. pp. 30-32.
4. Keppler István; Kocsis László; Oldal István; Farkas István; Csátár Attila: GRAIN VELOCITY DISTRIBUTION IN A MIXED FLOW DRYER, ADVANCED POWDER TECHNOLOGY 23 : 6 2012. pp. 824-832.
5. Keppler István; Oldal István: Silóürítés analitikus és diszkrét elemes modellje, XI. Magyar Mechanikai Konferencia : az előadások összefoglalói, Miskolc, Magyarország: Miskolci Egyetem 2011. pp. 141-141
6. Keppler István; Oldal István; Safranyik Ferenc; Bablena Adrienn: Calibration of discrete element models, MECHANICAL ENGINEERING LETTERS: R AND D: RESEARCH AND DEVELOPMENT 14 2016. pp. 140-151.
7. Keppler I; Oldal I; Csátár A: Determination of granular assemblies' discrete element material parameters by modelling the standard shear test, MECHANICAL ENGINEERING LETTERS: R AND D: RESEARCH AND DEVELOPMENT 4 2010. pp. 212-219.
8. Keppler I ; Safranyik F ; Oldal I: Shear test as calibration experiment for DEM simulations: a sensitivity study, ENGINEERING COMPUTATIONS 33 : 3 2016. pp. 742-758.
9. M. Csizmadia B. szerk.; Bojtár G ; Csátár A ; Égert J ; Keppler I ; Csizmadia B ; Oldal I: Sajátos anyagmodellek és alkalmazásuk a mezőgazdaságban, Gödöllő, Magyarország : FVM Mezőgazdasági Gépesítési Intézet (MGI) 2009. , 145 p. ISBN: 9789635132157
10. Oldal István: High stability damping model for discrete element method, MECHANICAL ENGINEERING LETTERS: R AND D: RESEARCH AND DEVELOPMENT 25 2024. pp. 172-181
11. Oldal István; Keppler István: The effect of arching on the outflow properties of silos, MECHANICAL ENGINEERING LETTERS: R AND D: RESEARCH AND DEVELOPMENT 3 : 2 2009. pp. 166-179.
12. Oldal István; Keppler István; Bablena Adrienn; Safranyik Ferenc; Varga Attila: On the Discrete Element Modeling of Agricultural Granular Materials, MECHANICAL ENGINEERING LETTERS: R AND D: RESEARCH AND DEVELOPMENT 11 2014. pp. 8-17.
13. Oldal István; Keppler István; Csizmadia Béla; Fenyvesi László: Outflow properties of silos: The effect of arching, ADVANCED POWDER TECHNOLOGY 23 : 3 2012. pp. 290-297.
14. Oldal István; Safranyik Ferenc: Extension of silo discharge model based on discrete element method, JOURNAL OF MECHANICAL SCIENCE AND TECHNOLOGY 29 : 9 2015. pp. 3789-3796.

- 15.Oldal István; Safranyik Ferenc; Keppler István: Reducing computational time of cohesionless discrete simulations based on particle clusters ENGINEERING COMPUTATIONS 34 : 2 2017. pp. 648-663.
- 16.Safranyik, Ferenc; Oldal István; M. Csizmadia Béla: Gerjesztett silók kifolyásának modellezési lehetőségei, FMTÜ XIX. Nemzetközi Tudományos Konferencia Kolozsvár, Románia : Erdélyi Múzeum Egyesület (EME) 2014. pp. 353-356.
- 17.Safranyik, Ferenc; Oldal István; M. Csizmadia Béla: Effect of vibration on silo flow of cohesionless granular materials, Proceedings of 32nd Danubia-Adria Symposium on Advances in Experimental Mechanics Zilina, Szlovákia : EDIS Zilina University Publishers 2015.
- 18.Safranyik Ferenc; Oldal István; Csizmadia Béla: Gerjesztett silók kísérleti elemzése, MEZŐGAZDASÁGI TECHNIKA 56 : 3 2015. pp. 2-5.
- 19.Safranyik Ferenc; Oldal István: Discrete element model of particle outflow, Synergy 2013, Gödöllő, Magyarország: Szent István Egyetem Gépészmérnöki Kar 2013. p. 4
- 20.Safranyik Ferenc; Oldal István: 3D discrete element model of silo discharge, POLJOPRIVREDNA TEHNIKA / AGRICULTURAL ENGINEERING 38 : 2 2013. pp. 23-34.
- 21.Safranyik Ferenc; Oldal István: Numerical modeling of silo discharge, In: International Student Scientific Conference of Recent Advances in Agriculture, Mechanical Engineering and Waste Policy Nitra, Szlovákia: Slovak University of Agriculture in Nitra 2013. pp. 275-280.
- 22.Safranyik Ferenc; Oldal István: Analytical approach of funnel flow discharge, JOURNAL OF MECHANICAL SCIENCE AND TECHNOLOGY 35 : 2 2021. pp. 635-640.
- 23.Safranyik Ferenc; Oldal, István: A silóürítés gyakorlatban alkalmazható diszkrét elemes modellje, FMTÜ XVIII. Nemzetközi Tudományos Konferencia, Kolozsvár, Románia: Erdélyi Múzeum Egyesület (EME) 2013. pp. 351-354.
- 24.Safranyik Ferenc; Varga Attila; Oldal István; Keppler István: Optimal and effective technique for particle packing, ADVANCED POWDER TECHNOLOGY 31 : 8 2020. pp. 3222-3235.
- 25.Talafha, Muath, S.; Oldal István: The Effect of Triple Particle Sizes on the Mechanical Behaviour of Granular Materials using Discrete Element Method (DEM), FME TRANSACTIONS 50 : 1 2022. pp. 139-148.
- 26.Talafha, Muath, S.; Oldal István: The Combined Effect of Normal Stress and Mechanical Vibration on Wheat Packing Density, JOURNAL OF ENGINEERING MECHANICS 150 : 1 Paper: 04023111 2024.
- 27.Talafha, Muath, S.; Oldal István: Evaluation the effect of particle sphericity on direct shear mechanical behavior of granular materials using discrete element method (DEM), INTERNATIONAL JOURNAL FOR ENGINEERING MODELLING 34 : 1 2021. pp. 1-18.
- 28.Talafha, Muath; Oldal István ; Garneoui, Seifeddine: Study the particle size impact on the mechanical behaviour of granular material by discrete element method, FME TRANSACTIONS 50 : 3 2022. pp. 473-483.
- 29.Zachár András; Keppler István; Oldal István: Investigation of the applicability and efficiency of different mathematical modeling and numerical simulation methods for soil tool interaction, JOURNAL OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MECHANICS 11 : 1 pp. 2016. 77-94.