

VÁLASZ MTA DOKTORI ÉRTEKEZÉS BÍRÁLATRA

ÉRTEKEZÉS CÍME: Új matematikai modellek szemcsés anyagok modellezéséhez

ÉRTEKEZÉS SZERZŐJE: Dr. Oldal István

BÍRÁLÓ: Dr. Bagi Katalin, MTA doktora

Köszönöm az alapos és részletes bírálatot. A bírálatra adott válaszütemben követem a bírálat szerkezeti felépítését és fejezetenként pontokba szerkesztve válaszütem meg a felmerült kérdéseket.

Formai észrevételek

Köszönöm az észrevételeket. A szerkezeti felépítésben a két témakör eltérése miatt válaszütem kellett, hogy az előírt tagolást vagy a könnyebb érthetőséget tartsam szem előtt. A dolgozat formai kereteit nem tartottam rugalmasnak, ezért válaszütem ezt a tagolást. Az előadás esetében a kevésbé kötött felépítés miatt a témánkénti bemutatást fogom követni.

Kiseb tartalmi észrevételek és kérdések

- 1. A szemcsealmazok kontinuum-modelljeivel kapcsolatban esetleg hiányolható lehet egy megjegyzés a folyadékként való modellezés lehetőségére (bár ennek ma már inkább történeti érdekessége van), a diszkrételes modellekre vonatkozóan pedig hiányzik egy utalás az implicit eljárások létezésére, hiszen implicit időintegrálás esetén jóval kevésbé okoznak gondot a Jelölt kutatásai által csökkenteni kívánt numerikus oszcillációk.*

A diszkrételes modellezés irodalmának elemzésekor igyekeztem fókuszálni a probléma bemutatására. Valóban be lehetett volna mutatni még néhány kapcsolódó területet, de módosította volna az irodalom elemzésének felépítését, amivel az olvasó figyelmét esetleg eltértem a probléma lényegétől. Ha beemelek marginális témát a feldolgozásba, akkor azokat lényegesebbnek állítottam volna be a valóságosnál, már azzal, hogy szerepeltetem. Ezért válaszütem ezt a koncentráltabb formát. A 3.4 fejezet elején ezt az elvet, mint az irodalom elemzésének irányát kitűztem: „A DEM témakörben elért eredményeim közül az ütközési tényezőn alapuló új csillapító modellt tartom a legfontosabbnak, így a disszertációmban ezeket mutatom be. Ennek megfelelően a szakirodalom áttekintését is erre a területre fókuszálom.”

- 2. A 3.4.1 fejezet a diszkrételes modellekben szokásosan alkalmazható csillapításokat tekinti át. Pontatlannak érzem azt a két állítást, hogy „A két test találkozását ütközésként írjuk le.” illetve „A diszkrételes modellezés esetében a legelterjedtebb csillapítás az ütközési tényező alkalmazása a kapcsolati modellben.”. Az érintkező szemcsék egymáson való megcsúszásakor fellépő súrlódási disszipáció, illetve az esetleges kohézió felszakítása miatti energiaveszteség az adott feladattól, a halmaz pillanatnyi állapotától stb. függően akár fontosabb is lehet, mint az ütközések miatti energiaveszteség.*

Igen, a megfogalmazás így pontatlan. A testek találkozását nem minden esetben ütközésként írjuk le, csak az ütközési tényező alkalmazása miatt tekinthetünk rá így. A legelterjedtebb csillapítás valóban az elcsúszás okozta súrlódás, ha a teljes kapcsolatot nézzük. A 3.4.1 fejezet elején azonban leszűkítem a témakört: „Munkám során a normális irányú erők modellezésére koncentrálok, így a jelenséget és modelleket is csak ebből a szemszögből vizsgálom.” Ha a fentiekhez hozzáadjuk ezt a megjegyzést, akkor az állítás már pontosabb. A súrlódás természetesen hatással van az energiaveszteségre a normális irányú erők mellett, az elemzésben csak a normális irányú erőkkel

foglalkoztam. A kohézió speciális problémája nem témája a dolgozatnak, ezt a 8. fejezetben írtam le, valószínűleg ebben a fejezetben is célszerű lett volna leírni.

- 3.** *Jelölt kapcsolati modelljéről fontos rögzíteni, hogy jelen állapotában gömb alakú (vagy gömbökből összerakott), végtelen merev elemek esetére vonatkozik.*

A kapcsolati modellem általános, (57) egyenlettel leírt és a második tételben is bemutatott formájában nem korlátozódik erre az esetre. Az bármely rugalmas kapcsolati függvény esetén módosítás nélkül alkalmazható, az ütközési tényező kevésbé szigorú alkalmazása esetén szinte bármely kapcsolati függvény esetén. A Hertz-elmélethez alkalmazott formájában az (58) egyenlettel leírva (harmadik tétel) viszont valóban erre a speciális esetre vonatkozik.

- 4.** *Vélhetően csak elírás, 25. oldal, utolsó bekezdés első sora.*

Igen, elírás, kimaradt a relatív szó.

- 5.** *A síkáramlású silóból kifolyó anyag szétoztásával kapcsolatban (37.-38. oldal): Véleménye szerint van-e valós lehetőség a sebességprofil feltérképezésére oly módon, hogy sok terelőlemezt alkalmazva szeletekre osztjuk a kiáramló anyagot? Esetleg tud-e ilyen vizsgálatról a szakirodalomban?*

Igen, lehetne úgy is mérni a sebességprofil, hogy több lemezt alkalmazunk. Ez is a lehetőségek közt volt. Ami miatt az egy terelőlemezes megoldást választottam annak három oka volt:

1. egyszerűbb, rés méretet könnyebben módosítható kialakítás,
2. az egyes lemezállások közti különbséget meghatározva ugyanazt kapom, mintha több lemezzel mértem volna (a 35. ábrán bemutatott értékeket így határoztam meg)
3. minden terelő elem a szemcsék és a lemez nem zérus mérete miatt megzavarja az áramlást, mert a lemez éléről elpattanó szemcsék esetleg távolabb kerülnek. Ez egylemezes verziónál nem okoz mérési hibát, több lemez esetén másik sávba pattanhatnak szemcsék, ami mérési hibát okozna.

A szakirodalomban nem találok ilyen méréssel. Feltételezésem szerint azért nem merült fel igény ennek a mérésére korábban, mert az empirikus és az analitikus modellek is konstans sebességgel számolnak, így a sebességeloszlással nem foglalkoztak kísérleti úton.

- 6.** *A kifolyáskori sebességeloszlással kapcsolatban: Mák (tehát igen apró, gömbszerű szemcse) esetére látványosan meggyőző a 34. ábra. A numerikus szimulációk lehetővé tennék gyakorlatilag tetszőleges alakú, kellően kicsiny szemcsék vizsgálatát. Várakozása szerint ugyanilyen jól működne-e a kifolyási modell másféle szemcsealakokra (akár pl. rücskös felszínű, egymásba akadni is képes homokszemcsékre)?*

A kifolyási modell érvényességének feltétele a kifolyónyílás fölötti instabil boltozat megléte. Ezt homokszemcséken fényképeztem, így ilyen, nem gömbszerű szemcsealak esetén bizonyítottan van boltozat, ami alapján azt feltételezem, hogy a sebességeloszlás is a modellnek megfelelően alakul.

- 7.** *Az 5.6.1 fejezetben Jelölt megadja különféle anyagok esetére a kialakuló boltozat magasságának és szélességének arányát, az ún. boltozati alaktényezőt, mint anyagjellemzőt. Ennek értékét a legtöbb esetben egyetlen értékes jegyre határozta meg (64. oldal 4. táblázat), feltételezhetően a mérés kivitelezésének nehézségei miatt. A térfogatáram és a tömegáram megbízható előrejelzése szempontjából viszont pontosabb*

eredmények lennének szükségesek. Kérem, részletezze, hogyan történt pontosan ez a mérés, és hogy van-e javaslata pontosabb mérési módszerre.

Az alaktényezőt a mért kifolyási tömegáram alapján, a (38) összefüggésből határoztam meg. Bármelyik beállítás esetén megmérhető az anyagjellemző, a többi mérésre jó eredményt adott. A vizsgált anyagok többségénél a tizedes értéktől nagyon kis mértékben tért el az alaktényező, ezért a kerekítés néhány százalékos hibán belül minden mérésre megfelelő értéket adott. A más esetében szükség volt a pontosabb értékre, ezért mákra egy nagyságrenddel pontosabb értéket határoztam meg.

- 8.** *Érdekes, hogy a 4. táblázatban szereplő boltozati alaktényező mintha monoton csökkenne a szemcseméret növekedésével (a táblázatból az látható, hogy az adott 100 mm-es kifolyónyílás esetén minél kisebb a szemcse, annál magasabb a boltozat, bár az egyetlen értékes jegye való pontosság miatt ezt nem lehet biztosan állítani, különösen hogy a PE-LD granulátum szemcseméretére és –alakjára nem találtam adatot az értekezésben). Más méretű kifolyónyílásra is végzett vizsgálatokat Jelölt, vagy tud ilyen vizsgálatokról? Ha igen, akkor ott is ugyanilyen tendencia és ugyanilyen értékek adódtak?*

Az alaktényező szemszemérettől való függését nem vizsgáltam. Az irodalomban vannak ilyen jellegű vizsgálatok, nem az alaktényezőre, hanem a kifolyási tömegáramra vonatkozó vizsgálatok, amelyek közvetetten az alaktényezőre is igazak. Zhou et al. (2026) <https://doi.org/10.1016/j.cherd.2026.02.007> azt írja, hogy a nagyobb szemcseméret növeli a kifolyási tömegáramot, de csak só anyagra igazolták a mérési eredményei, a többi anyaggal összehasonlítva már nem. A cikk konklúziójában már nem is szerepel az állítás. Nem mondható ki egyértelműen, hogy a szemcseméret arányos a kifolyási tömegárammal, így a modellem értelmezése szerinti alaktényezővel sem.

- 9.** *A szemcséknek természetesen nem csupán a mérete, de az alakja is jelentősen befolyásolhatja a boltozat csúcsosságát, ezért a jövőben érdemes lehet legalábbis diszkrételes szimulációkkal megvizsgálni, hogyan függ az alaktól és a mérettől a boltozat alakja. A silókban tárolt szemcsehalmazok boltozódási jelenségeit a diszkrételes modellekben tapasztalható numerikus oszcillációk miatt mindeddig igen nehéz volt megbízhatóan vizsgálni: a numerikus oszcillációk túl gyakran „szétrázták” a kialakulni próbáló boltozatokat, és nem lehetett elkülöníteni, mi a numerikus hiba és mi a valós jelenség. Jelölt csillapítási módszere komoly előrelépést hozhat ezen a téren.*

A szemcsealak feltételezésem szerint nagyobb hatást gyakorol a boltozat alakjára, de nem vizsgáltam ezt külön. A numerikus modellezésben külön problémát jelent, hogy a boltozatok összeomlása miatt eleve van egy természetes gerjesztés magából a kifolyásból is, ami hozzáadódik a numerikus oszcillációhoz és további problémát okoz.

- 10.** *Jelölt kétdimenziós kísérleteiben (5.2.2 pont) azt találta, hogy a boltozat alakja mindig másodfokú parabola (bár igaz, hogy az R^2 értékek egyes esetekben jóval 0,9 alatt maradnak). Háromdimenziós esetre indirekt módon bár, de alátámasztja a másodfokú parabola alakot a tömegáramra és a sebességeloszlásra vonatkozó előrejelzések sikeressége. Mi lehet a másodfokú parabola alak fizikai oka?*

Feltételezésem szerint a természetes boltozat alakja energiaminimum elven alakul ki, így az alakot szimmetrikus peremfeltételek mellett folytonosan differenciálható páros függvények között kell keresnünk. Ha ez a feltétel teljesül, akkor Taylor polinommal közelíthetjük a függvényt. Ennek az első páros függvénye a parabola függvény, ezt vizsgáltam és alkalmaztam. Valószínű, hogy negyedfokú

parabola jobb közelítést adna az alakra, azonban akkor több konstans kellene bevezetnünk, aminek a meghatározása problémákat okozna a gyakorlati alkalmazásban. A másodfokú parabola esetében alkalmazott egyetlen konstans is csak indirekt módon a kifolyási tömegáramból lehet meghatározni. Mivel ez az első közelítés megfelelő pontosságot adott, így nem kerestem más függvényt. A mérések során az R^2 értékek főleg a nem tökéletesen homogén anyag miatt voltak rosszabbak, ez a mérés során látszott az alakon. Lokálisan feltapadt vagy leszakadt anyagrészek voltak az egyébként parabolával jól közelíthető fő alak mellett.

11. Egy fogalmazásbeli pontatlanság: Jelölt sokszor hivatkozik a Mindlin-Deresiewicz-féle kapcsolati modellre, de a fogalmazásmód több helyen azt sugallja, mintha e modell lényege egyfajta normálirányú csillapítás lenne. A fogalmazásmód félrevezető: a Mindlin-Deresiewicz-modell a (nyomóerővel egyidejűleg ható) nyíróerővel foglalkozik. Ennek az igen bonyolult modellnek az egyszerűsített verzióit használják diszkrétélemes modellekben az érintőirányú relatív eltolódás és az érintőirányú erő közötti összefüggés megteremtésére.

Igen, ez valóban félreérthető, természetesen a modell normál irányú komponensét vizsgáltam. A vizsgálataim elején leírtam, hogy csak a normál irányú kapcsolatra koncentrálok, de a modellnél is meg lehetett volna ismételni, hogy egyértelműbb legyen.

12. Vélhetően elírás: az 57. oldalon, az (51) képlet előtt a és b konstansokat említ a szöveg, de a képletekben c_1 és c_2 szerepel. Ugyanarról van szó?

Igen, a disszertáció első verziójában még a és b konstansokat alkalmaztam a képletekben is. Később áttértem az indexes konstansokra, de a szövegben az eredeti verzió maradt.

13. Saját kapcsolati csillapítási modelljének célja, hogy (71. oldal első bekezdés) „az energiaelnyelés maximumát is a maximális összenyomódás és erő közelébe koncentráljuk”. A fogalmazásmód itt is némileg félreérthető. Az (57) képlet azt látszik inkább mutatni, hogy a már létrejött kapcsolat esetén az oszcilláló mozgás során a még jobban egymásba nyomódó – lazuló – még jobban egymásba nyomódó – lazuló ciklusok minden egyes lazuló lépésekor az alacsonyabb ágon történik az erő számítása, azaz minden egyes ciklusban megtörténik az energiaelnyelődés a lazulási lépésben.

Mindkét állítás igaz. Az (57) képlet alapján mindig az alacsonyabb ágon történik a lazuló ciklus, ez nem mond ellent annak, hogy az energiaelnyelés maximuma a maximális összenyomódás és erő közelében van. A 46. ábrán mutattam ezt be, ami az (57) képletet vizualizálja. Az alacsonyabb és a magasabb ág különbsége az erő növekedésével növekszik, így a csillapítás arányos és a legnagyobb erőnél a legnagyobb. Ez azokban az esetekben fontos, amikor nincs teljes ciklus, azaz nincs teljes kirugózás, ott a modellem nagyobb csillapítást biztosít, így nagyobb időlépték alkalmazható.

14. Nem találtam az értekezésben: Milyen szemcseszámmal történtek az izotrop nyomóvizsgálatok?

68 szemcsével.

15. A csillapítási módszer hatékonyságát célszerű lett volna a Hertz-modell mellett az egyszerű konstans merevségű kapcsolati modellel is összevetni. Sok feladattípusnál – különösen ha a szemcsék anyaga nem tekinthető lineárisan rugalmasnak – az utóbbit alkalmazzák, éppen jóval kedvezőbb numerikus viselkedése miatt.

Az új csillapítási modellben szerintem is több lehetőség van, a jövőben ezeket meg fogom vizsgálni. Elsőként egy széles körben használt modellel akartam összehasonlítani.

Lényegi észrevételek és kérdések

1. Az 5.3 és 5.4 fejezet foglalkozik a kifolyási sebességeloszlással és ez alapján a kifolyási tömegáram előrejelzésével, mindkét fajta silóra. Itt a ρ_h halmazsűrűségi paraméter számszerűsíti azt, hogy a halmaz esés közben fellazul, sűrűsége változik. Milyen szemcsejellemzők befolyásolják ezt a számot? Tapasztalata szerint anyagjellemző-e ez egyáltalán, vagy függ a szemcseméretnek a kifolyónyílás méretéhez való viszonyától, a boltozat magasságától, esetleg egyéb paraméterektől? Ha anyagjellemzőnek tekinti: Hogyan lehetne egy-egy anyagra kísérletileg megmérni ezt a számot?

A halmazsűrűség esetén a szabványban meghatározott definíciót használok, a gyakorlati alkalmazhatóságot figyelembe véve. A szabvány ennek mérését úgy írja elő, hogy ödométerben az adott helyen várható nyomás mellett mért a halmaz térfogatából és a tömegéből kell számítani. Ebben a formában tekinthető anyagjellemzőnek, azonban nem írja le a halmaz sűrűségének változását kifolyás közben. A modellben ezt másképp kezelem.

A halmaz sűrűségének változása a sebességgel arányos, azaz a keresztmetszeten belül változik, így egy konstans segítségével nem írható le. A modellem azonban a sebességváltozást leírja, így a halmazsűrűséget is konstans bemenő adatként kezelhetjük. A szabványos halmazsűrűséget alkalmazom, külön nem veszem figyelembe ennek változását. Ez azért nem okoz kimutatható hibát, mert az alaktényezőt a mért tömegáramból számolom, így a két hatás, a boltozatalak és a sűrűségváltozás együttes eredményét tartalmazza. A két hatást külön-külön kísérleti úton nem is lehetne jól mérni, de nincs is rá szükség a modell alkalmazhatóságához.

2. A 4.1 és 4.2 fejezetekben (a boltozódási ill. kifolyási vizsgálatok leírásánál) és az 5. fejezetben (amely az ezekkel kapcsolatos eredményeket mutatja be, megalapozva az 1. tézist) nehéz elkülöníteni, mely vizsgálatok és felismerések azok, amelyek Jelölt PhD-értekezésében is megjelentek már, és melyek azok, amelyeket újaknak tekinthetünk. Kérem Jelöltet, hogy válaszával tegyen ebben rendet: emelje ki egyértelműen a PhD-értekezése óta végzett vizsgálatokat illetve az esetleges korábbi kísérletekből a PhD-értekezés után levont következtetéseket.

A PhD értekezésemben négy tézis volt:

1. Szemcsés halmazok silóból való kifolyása nem más, mint instabil boltozatok keletkezésének és összeomlásának sorozata
2. A boltozatok alakja másodfokú függvénnyel közelíthető
3. A keresztmetszet mentén a kifolyási sebességeloszlás nem állandó, a következő függvény írja le:

$$v(x, \varphi) = \sqrt{2g\delta_b d} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{d}\right)^2}$$

4. A siló kifolyási tömegáramát a következő összefüggéssel lehet számítani (hengeres silóra):

$$W = \frac{\pi\sqrt{2g}}{6} \rho_h \sqrt{\delta_b} (d - d_p)^{\frac{5}{2}}$$

A PhD értekezésben ezen tézisek közül közvetlenül kísérleti úton igazoltam az 1. tézist. Közvetetten, kísérleti úton a 2., 3. és 4. téziseket.

A sebességeloszlás mérése a műhelyvitán merült fel igényként, annak eredménye nyilvános védésen már szerepelt, de csak később lett publikálva. Így a sebességeloszlás közvetlen kísérleti igazolása félig a PhD előtt, félig utána történt meg.

A PhD után született, jelenlegi disszertációban 1. tézisben szereplő ill. azt alátámasztó eredmények:

- sebességeloszlás közvetlen DEM igazolása,
- tömegáram DEM igazolása,
- kifolyási mód változásának DEM igazolása,
- szögletes siló esetén a sebességeloszlás analitikus leírása,
- szögletes siló esetén a tömegáram analitikus leírása,
- a hengeres és szögletes silók, mint síkmodellel leírható esetek egységes, azonos alapfüggvénnyel történő analitikus leírása.

Tehát a PhD után két irányban született új eredmény. Az egyik a párhuzamos falú, szögletes silóra való kiterjesztése az alapelvnek, a másik mindkét (hengeres, szögletes) siló esetére elvégzett DEM modellezések, amelyek az eredmények közvetlen igazolásában (kifolyási tömegáram, sebességeloszlás, kifolyási mód) jelentettek előrelépést. A korábban mérésekből csak áttételesen bizonyítható feltételezések numerikus modellezéssel közvetlenül bizonyítást nyertek. Ezek az eredmények különböző publikációkban részleteiben szerepelnek és mind a PhD fokozat megszerzését követően születtek. Az új és a korábbi eredmények közös, általános síkmodellezésként történő kezelése szintén újdonság.

3. Jelölt merőleges ütközésekre, laza halmaz leejtésére, illetve izotrop tömörítési folyamat szimulációjára tesztelte kapcsolati csillapítási modelljét. Izotrop tömörítés vagy laza halmaz ülepítése során viszont – különösen amíg még nagy a hézagtényező – az ide-oda pattogó szemcsék csúsznak is egymáson, vagy érintőirányban is megütik egymást. Ez már itt is indokolta volna Jelölt csillapítási módszerének az érintőirányú komponensekre való alkalmazását. (A silókifolyás szimulálásánál alkalmazott Tsuji et al (1992) modell (41. oldal, (22) képlet) tartalmaz érintőirányú ütközési csillapítást, de még azt a változatot, amit normálirányban Jelölt javítani kívánt.) Jelölt modelljének mindenképp szükséges továbbfejlesztési iránya lenne az érintőirányú erőkre való kiterjesztés. Hogyan lehetne ezt megtenni, mit kellene esetleg másképp csinálni, mint a normálirányú komponens esetében?

A modell érintőirányra történő kiterjesztése logikus folytatása a modell alkalmazásának és ez lesz a kutatás következő lépése. A (22) képletben szereplő érintő irányú csillapító tag

$$-2 \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{\ln(k)}{\sqrt{\ln^2(k) + \pi^2}} \sqrt{E_0 m_0^4 R_0} \sqrt{\delta} v_{trel}$$

csak annyiban különbözik a normál irányú (18) tagtól,

$$-2 \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{\ln(k)}{\sqrt{\ln^2(k) + \pi^2}} \sqrt{E_0 m_0} \sqrt[4]{R_0} \sqrt{\delta} v_{nrel}$$

hogy a normál irányú relatív sebesség érintő irányú relatív sebességre van kicserélve. Első lépésben ezt a megoldást követném és az (57) képletben

$$F_n(\delta) = \left(\frac{1+k^2}{2} + \text{sign}(v_{nrel}) \frac{1-k^2}{2} \right) f(\delta)$$

a sebesség tagot érintő irányú tagra cserélném, valamint az $f(\delta)$ függvényt az érintő irányra vonatkozó függvényre cserélném. Ennek eredménye a következő függvény:

$$F_t(\delta) = - \left(\frac{1+k^2}{2} + \text{sign}(v_{trel}) \frac{1-k^2}{2} \right) 8G_0 \sqrt{\delta R_0} \delta_t$$

Ezt a függvényt alkalmaznám az érintő irányú kapcsolat modellezésére, várhatóan további számítási idő csökkenést jelentene. A jövőben ezt a megoldást is meg fogom vizsgálni.

- 4. Jelölt hangsúlyozza, hogy csillapítási modellje rugalmas erő-átfedés-összefüggésre alkalmazható. Feltétlenül szükséges ez a korlátozás? A kérdés azért is lényeges, mert az érintőirányú komponensre való kiterjesztheséget jelentősen korlátozná, ha így lenne. (A Mindlin-Deresiewicz-elméletben már kis érintőirányú kapcsolati erő esetén is megjelenik az a körszimmetrikus tartomány, amelyen képlékeny állapotban van a kapcsolat – nem beszélve a teljes súrlódásos megcsúszásról, amely valós halmazok nyírása esetén az energiaelnyelés egyik fő része. Valós szemcsék esetén ráadásul a Mindlin-Deresiewicz-elmélet nem is ad jó közelítést, amikor a felületek alakja nem pontosan gömb.)**

A rugalmas alapfüggvény abban az elméleti esetben szükséges, ha az ütközési tényezőt egzaktul akarjuk modellezni. Bármilyen függvény esetén alkalmazható a modell, de az ütközési tényező értéke el fog térni a mérhető valós ütközési tényezőtől. Ha az ütközési tényezőt kevésbé kötjük az eredeti definícióhoz és DEM paraméterként kezeljük, akkor ez a korlátozás nem szükséges. Figyelembe véve, hogy a gyakorlatban és a több kapcsolati modellnél az ütközési tényező paraméterként van kezelve, valószínűleg ez a korlátozás csak elméleti. Gyakorlati problémák megoldása során a korlát elengedése várhatóan nem okoz problémát.

- 5. Ahogy azt Jelölt is kiemeli, az explicit időintegrálásos diszkrétéleemes eljárásoknál az irreális numerikus oszcillációk komoly numerikus nehézségeket okoznak, kapcsolati csillapítási modellje épp ezért jelentős előrelépést hozhat, ha elterjed a nemzetközi gyakorlatban. Az oszcillációk különösen olyankor akadályozzák a megbízható numerikus modellezést, ha nem dinamikus folyamatot szimulálunk, hanem egy halmaz egyensúlyi állapotát keressük. Jelölt csillapítási modelljének fontos előnye lenne, ha az egyensúlyi állapotba való eljutást is segítené, a kiegyensúlyozódás folyamatát gyorsítva fel. Kérem Jelöltet, hogy mutasson ilyen esetre is példát (pl. egy nagyobb elemszámú ülepítési vagy rézsűmegcsúszási feladatot), összevetve az egyensúly eléréséig szükséges futási időt a korábbi Hertz-modelles és – ha megoldható – egy konstans normálmerevségű verzióval.**

A válaszhoz ülepítési modellt választottam, három kezdeti szemcseelrendezéssel ismételve az ülepítést. A három esetben az elemszámok: 4622, 4594, 4727. Mindhárom esetben a Hertz modellt alkalmaztunk a régi és az új csillapítás mellett. Az alkalmazott modell paraméterei azonosak a korábbi ejtéstesztek és izotróp nyomás modellezés paramétereivel. A modellezés során két idő értéket kellett meghatározni. Az egyik az ülepedés ideje, amíg az adott halmaz nyugalmi állapotba kerül, ennek az

értéke a szimulációban 1,7 másodperc. Az időlépték maximuma a régi modell esetén $1,8t_R$ az új modell esetén $1,91t_R$. A modellem itt már mutatott előnyt, mert bár a nyomás ebben az esetben relatív kicsi, így nem okozott olyan nagy eltérést, mint izotróp nyomás esetén ($0,12t_R$, $0,45t_R$) de a számítási időigény ennél nagyobb mértékben csökkent. Az eredményeket a következő táblázatokban foglalom össze:

Hertz-Mindlin		
1. eset	2. eset	3. eset
N=4622	N=4594	N=4727
szimulációs idő = 1.7 s		
időlépés = $1,8t_R$		
számítási idő	számítási idő	számítási idő
4625 s	4517 s	4740 s

új csillapítás		
1. eset	2. eset	3. eset
N=4622	N=4594	N=4727
szimulációs idő=1.7 s		
időlépés = $1,91t_R$		
számítási idő	számítási idő	számítási idő
3579 s	3599 s	3739 s

A három esetben a régi modellel a számítási időigény átlaga: 4627 s, az új csillapítási modell alkalmazásával: 3639 s. Ebben az esetben a régi modellnek 27%-kal több számítási időigénye van, mint az új modellnek.

A tézisekről

1. Az 1. tézis Jelölt PhD-kutatásainak logikus továbbfejlesztéseként született, az alapötlet egyértelműen Jelölté. A tézist adó négy képlet közül azonban a negyedik – amelyik a síkmozgás esetében adja meg a tömegáramot – Jelölt tanítványának PhD-tézisei között (Safranyik Ferenc 2016-os értekezésének 4. tézisében) is szerepel. Bár mester és tanítvány közös munkáját gyakran nem lehet elválasztani, és Safranyik Ferenc maga is az Oldal-féle analitikus modell kiterjesztésének nevezi az általa tézisként megfogalmazott összefüggést, mégis véleményem szerint Jelölt értekezésében helyesebb lett volna „közös eredmény Safranyik Ferencsel” megjegyzést tenni ehhez a képlethez. A tézis többi részét Jelölt saját eredményeként fogadom el.

Az 1. tézis egy átfogó, általános megfogalmazása a bemutatott eredményeknek. Az kérdéses rész Safranyik Ferenc doktoranduszommal közös eredmény. Azonban ennek a többi eredménnyel együttes, általános síkmodellezési esetként történő szintézise új megközelítés, amely egységes, analitikus, kísérleti és numerikus bizonyítása korábban nem létezett.

2. A 2. és 3. tézis szorosan összefügg. A 2. tézis általános javaslatot tesz tetszőleges kapcsolati normálerő-átfedés-összefüggés esetére, a 3. tézis pedig ezt a javaslatot alkalmazza a Hertz-modellre. A két tézist célszerű lett volna összevonni, hiszen önmagában a 2. tézis nem megy túl az – amúgy értékes – ötletfelvetésen, a Hertz-modellre vagy más konkrét erő-átfedés-függvényre való alkalmazása nélkül nem lenne ellenőrizhető, a 3. tézis viszont a 2. tézisben szereplő ötlet alkalmazása és gondos ellenőrzése különféle típusú problémák szimulációjában. A 2. és 3. tézist tehát csak együttesen tartom tézisértékűnek.

A 2. és 3. tézis valóban összefügg, azonban véleményem szerint két külön eredménynek tekinthető. A 2. tézis egy általános elméleti megközelítése a csillapítás matematikai kezelésének. Egy teljesen általános állítás, amely analitikusan (51) – (57) összefüggések alapján bizonyítottan helyesen modellezi az ütközési tényezőt, mint csillapítást. Ez egy elméleti állítás elméletileg bizonyítva. Annak a feltételezésnek az igazolására, hogy ez stabilabb és kisebb számítási igényt jelent, kell az alkalmazás, de annak a bizonyítására, hogy alkalmas az ütközési tényező helyes modellezésére, nem.

Ennek a gyakorlati alkalmazása már nem lehetséges általános formában, ahhoz kell egy konkrét kapcsolati függvény, amire alkalmazva az adott gyakorlati előnyök kimutathatók. Ez a 3. tézis, ahol az elméleti összefüggést a Hertz-modellre alkalmazom. Így bár azokat a feltételezéseket, hogy stabilabb és kisebb a számítási igényt jelent, igazolja, de a megállapítások és eredmények csak az adott kapcsolati modell esetére érvényesek és a korlátozások is erre a modellre vonatkoznak.

A két tézis összevonása azt a problémát okozza, hogy a 2. tézis érvényességét korlátozza. Például a kisebb tartalmi észrevételek 3. pontjában említett *„Jelölt kapcsolati modelljéről fontos rögzíteni, hogy jelen állapotában gömb alakú (vagy gömbökből összerakott), végtelen merev elemek esetére vonatkozik.”* állítás csak a 3. tézis eredményeire korlátozódik.

A 2. tézis egy széles körben (a DEM témakörén kívül is) érvényes, de kevesebb, általánosabb eredményt mutató állítás. A 3. tézis egy sokkal szűkebb tartományban érvényes, de több eredményt mutató állítás.

Köszönöm a bírálatot, remélem, hogy a válaszok minden kérdést tisztáznak, a tézisek így elfogadhatóak és a nyilvános vita megrendezhető.

Gödöllő, 2025. 06. 17.

Oldal István