



ÚJ MATEMATIKAI MODELLEK SZEMCSÉS ANYAGOK MODELLEZÉSÉHEZ

MTA doktori értekezés

Dr. Oldal István

Gödöllő

2024

Tartalom

1.	Jelölésjegyzék.....	3
2.	Bevezetés.....	5
3.	Irodalmi áttekintés.....	7
3.1.	Szemcsés anyagok tulajdonságai.....	7
3.2.	Szemcsés halmazok mechanikai modellezése.....	12
3.3.	Silóból történő kifolyás analitikus modellezése.....	14
3.4.	Diszkrét elemek módszerének speciális kérdései.....	22
4.	A kutatások során alkalmazott módszerek.....	31
4.1.	Boltozódási vizsgálatok.....	31
4.2.	Kifolyási vizsgálatok.....	33
4.3.	Az új kontakt modell vizsgálatára alkalmazott DEM modell.....	43
5.	Silóból történő kifolyás új analitikus modellje.....	49
5.1.	Instabil boltozatok hipotézise.....	49
5.2.	Boltozatalak meghatározása.....	52
5.3.	Kifolyási tömegáram meghatározása hengeres silókra.....	55
5.4.	Kifolyási tömegáram meghatározása síkaramlású silókra.....	58
5.5.	Sebességeloszlás eredmények.....	60
5.6.	Tömegáram eredmények.....	63
6.	Új elvű csillapítási modell DEM alkalmazásra.....	71
6.1.	Elvi megoldás és általános formula.....	71
6.2.	Új kapcsolati függvény alkalmazása.....	74
7.	Új tudományos eredmények.....	83
8.	Összefoglalás.....	87
9.	Summary.....	88
10.	Köszönetnyilvánítás.....	89
11.	Felhasznált irodalom.....	91
12.	A témához kapcsolódó saját publikációk.....	96

1. Jelölésjegyzék

$\underline{\underline{A}}$ – alakváltozási sebesség mátrixa [1/s]

a – kifolyónyílás szélessége [m]

b – siló mélysége [m]

d – kifolyónyílás átmérője [m]

d_p – átlagos szemcseméret [m]

c – siló szélessége [m]

c_h – kohézió [Pa]

c_1 – irányfüggetlen konstans a kapcsolati függvényben [-]

c_2 – irányfüggő konstans a kapcsolati függvényben [-]

c_h – halmazra vonatkozó kifolyási tényező [-]

$f(x)$ – boltozat alakjának síkmetszetét leíró függvény [m]

$f(\delta)$ – tetszőleges rugalmas alakváltozást leíró kapcsolati függvény [N]

ff – folyási tényező [-]

ff_a – folyási tényező aktuális értéke [-]

g – nehézségi gyorsulás [m/s^2]

h – boltozat magassága [m]

k – ütközési tényező [-]

m_0 – érintkező testek redukált tömege [kg]

m_1, m_2 – érintkező testek tömegei [kg]

s – merevség, rugómerevség [N/m]

t – részméret [m]

v – sebesség [m/s]

$\bar{v}$ – átlagsebesség [m/s]

v_{nrel} – két érintkező test relatív normál irányú sebessége [m/s]

v_{trel} – két érintkező test relatív érintő irányú sebessége [m/s]

$A_{kör}$ – kifolyónyílás keresztmetszete [m^2]

$A_{körselet}$ – kifolyónyílás t részmérethez tartozó kifolyási keresztmetszete [m^2]

D – silóátmérő [m]

E – Young-modulus (rugalmassági modulus) [Pa]

E_0 – redukált rugalmassági modulus [Pa]

E_1, E_2 – érintkező testek rugalmassági modulusai [Pa]

E_k – kinetikus (mozgási) energia [J]

F_n – normál irányú kapcsolati erő [N]

F_t – érintő irányú kapcsolati erő [N]

G – csúsztató rugalmassági modulus [Pa]

G_1, G_2 – érintkezésben résztvevő két test csúsztató rugalmassági modulusai [Pa]

G_0 – redukált csúsztató rugalmassági modulus [Pa]

H – silóba töltött anyag magassága [m]

M_r – gördülési ellenállás [Nm]

Q – kifolyási térfogatáram [m^3/s]

R – kifolyónyílás sugara [m]

R_0 – redukált szemcsesugár [m]
 R_1, R_2 – testek érintkező felületeinek sugarai [m]
 R_r – szemcse érintkezési pontja és tömegközéppontja közti távolság [m]
 W – kifolyási tömegáram [kg/s]
 W_0 – kapcsolati erő összenyomódási szakaszon számított munkája [J]
 W_{dis} – elnyelt energia, csillapító tag munkája [J]
 W_t – kapcsolati erő tágulási szakaszon számított munkája [J]

α – kifolyó garat félnyílásszöge (félkúpszög, félcsúcscsszög) [°]
 δ_b – boltozati alaktényező [-]
 δ – deformáció (merev testnél átfedés) [m]
 δ_t – érintkező testek érintő irányú összenyomódása [m]
 $\dot{\epsilon}$ – fajlagos alakváltozási sebesség [1/s]
 ν – Poisson-tényező [-]
 ν_1, ν_2 – érintkezésben résztvevő két test Poisson-tényezői [-]
 φ – súrlódási félkúpszög [°]
 φ_b – belső súrlódási szög [°]
 ρ – sűrűség [kg/m³]
 ρ_h – halmazsűrűség [kg/m³]
 σ – normál feszültség [Pa]
 τ – csúsztató (nyíró) feszültség [Pa]
 μ_0 – nyugvó (statikus, tapadási) súrlódási tényező [-]
 μ – mozgó (dinamikus) súrlódási tényező [-]
 μ_r – gördülési ellenállás tényező [-]
 ω_r – szemcse szögsebességének irányvektora [-]

2. Bevezetés

Szemcsés anyagnak (vagy szemcsés halmaznak) nevezzük azokat az anyagokat, amelyek a halmaz méretéhez képest kis méretű szilárd szemcsékből állnak. A mezőgazdaság és az ipar majdnem minden területén előfordulnak, ömlesztett anyagok, szemestermények, porok, a talaj mind ilyen anyagok. A gyakori előfordulás miatt sokszor merül fel a mechanikai modellezés igénye. A szilárd testeknél vagy folyadékoknál megszokott modellezési eljárások sok esetben nem alkalmasak a viselkedésük leírására, speciális tulajdonságaik miatt. Ezek közül az egyik legfontosabb, hogy folyadék és szilárd test jellegű viselkedést is képesek mutatni a megfelelő körülmények között. Amikor egy épület alapozását kell megtervezni, akkor a szilárd test jellegű tulajdonságot kell megtartani és olyan peremfeltételeket előírni, ahol szilárd testként viselkedik a szemcsés halmaz. Amikor szemesterményt akarunk silóban tárolni és az a célunk, hogy kifolyjon, amikor üríteni kell, akkor pedig olyan körülményeket kell biztosítanunk, ahol folyadékszerű viselkedést mutat. A folyadék és szilárd halmazállapot jellegű viselkedés miatt speciális mechanikai modellekre van szükség a szemcsés halmazok leírására. A tudományos kutatások során és gyakorlati alkalmazások esetén számos modell született leírásukra, a klasszikus analitikus modellek a XIX. század végétől kezdve. A gyakorlat számára nagyon hasznos és jól használható eredmények a mai napig alkalmazásban vannak. Ezen a területen kevés új eredménnyel találkozunk az utóbbi évtizedekben. Jelenleg a numerikus modellezés került a tudományos kutatások középpontjába, ezen belül kiemelt jelentőségű a diszkrét elemes modellezés.

Kutatásaim során mind az analitikus, mind a numerikus modellezés területén végeztem kutatásokat. Disszertációmban a két területen elért, általam legfontosabbnak ítélt eredményeimet mutatom be. Az analitikus modellezést a silókifolyásra alkalmazom, amely a PhD kutatásaim során megalkotott eljárás és modell kiterjesztése, általánosítása. A numerikus modellezésben a diszkrét elemes modellezés egyik alapjához, a kapcsolati modellekhez fejlesztettem ki újszerű megközelítésű csillapítási módszert, amely az eredmények alapján numerikusan stabilabb számításokat tesz lehetővé. Ennek általános elméleti megközelítését és egy adott modellre történő alkalmazását mutatom be dolgozatomban.

Az eredmények alapját képező kutatási munka egy részét kutatócsoportban, egy részét önállóan végeztem el. A dolgozatban az ígék egyes szám és többes szám első személyben használt alakjával különböztetem meg ezeket.

3. Irodalmi áttekintés

3.1. Szemcsés anyagok tulajdonságai

Mind a halmaz, mind az alkotó szemcsék fizikai tulajdonságait leíró jellemzők ismerete szükséges a modellezéshez. A szemcséket leíró jellemzők a szilárd testeknél is alkalmazott anyagi jellemzők, míg a halmazt speciális tulajdonságokkal írjuk le. Ebben a fejezetben ezek közül azokat mutatom be, amelyek a később tárgyalt kérdésekben előfordulnak. A szokásos módon alkalmazott jellemzőket röviden, az ettől eltérő vagy speciális alkalmazások esetében hosszabban fejtem ki az egyes tulajdonságokat, a szükséges esetekben azok mérési módszerét is bemutatom.

3.1.1. Szemcse geometriája

A halmazt alkotó szemcsék geometriájának két leíró jellemzője azok mérete és alakja. Néhány anyag esetében a szemcsék közel azonos méretűek és alakúak (pl. szemestermények) azonban sok esetben sem az alak, sem a méret nem azonos.

Ha modellezés során szemcsékkel dolgozunk, akkor a szemcseméretet definiálnunk kell, ezek közül a legegyszerűbb megoldás az átlagos szemcseméret (d_p). Ezen a szemcsék átlagos méretét legjobban közelítő gömb átmérőjét értjük. A valós szemcsék nagyon ritkán gömb alakúak, így ez csak speciális esetekben alkalmas a geometria leírására.

A szemcsék alakját legtöbbször más módon közelítjük. Diszkrét elemes modellezés (3.2.2. fejezet) esetén két széles körben használatos megoldás a gömbökből összeállított szemcsemodell (clump) és a poliéder szemcsemodell. Általában törekedni kell a valós szemcsék minél jobb közelítésére, azonban erre nem mindig van lehetőség. Két oka lehet annak, ha a valós szemcse alakjától és méretétől eltérünk. Az első, ha nincs egy meghatározható méret és alak. Például a talaj, homok és különböző porok esetében a halmazt alkotó szemcsék mérete a mikronos tartománytól a milliméteres tartományig terjed és nincs két egyforma alakú szemcse. Ebben az esetben nem lehetséges a valós szemcse modellezése. A másik eset, amikor túl sok számítási igénye lenne a valós szemcseméret modellezésének, így annál nagyobb méretet alkalmazunk. Ha eltérünk a valós szemcsék egy az egyben történő modellezésétől, abban az esetben az anyag több más valós fizikai paraméterétől is el kell térnünk és kalibrálni kell.

3.1.2. Rugalmassági modulus, Poisson-tényező

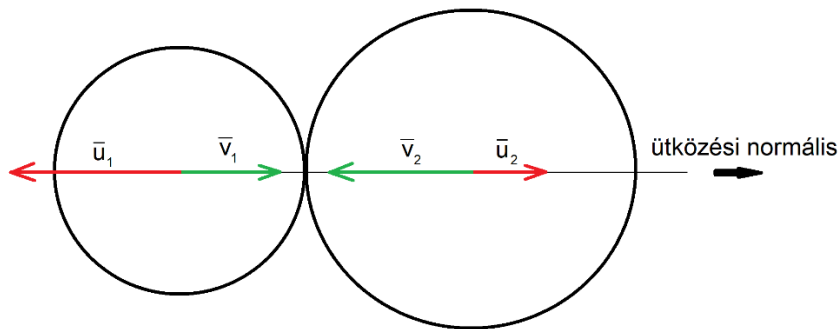
A rugalmassági modulus és a Poisson-tényező a mechanikából ismert anyagjellemző és a szemcse tulajdonsága. Általában lineárisan rugalmas tartományban modellezzük a szemcsét, így a Young-modulus (E) és a csúsztató rugalmassági modulus (G) és a Poisson-tényező (ν) is konstans.

3.1.3. Sűrűség

Szemcsére és halmazra külön számítjuk. A szemcse sűrűsége (ρ) a fizikában ismert módon értelmezhető, a halmaz sűrűsége (ρ_h) a halmaz térfogatának (a szemcsék közti gázzal együtt) és tömegének hányadosa. A halmaz térfogata nem konstans érték, különböző nyomáson értéke változik.

3.1.4. Ütközési tényező

A szemcse anyagjellemzője, korábban nem volt jelentősége, diszkrét numerikus modellezéskor kulcsfontosságú, mert a halmaz energiájának csillapítását főleg ez biztosítja. Az ütközési tényező (k) az ütközés rugalmasságát írja le. Az ütköző testek normális irányú sebességeiből számított lendületek ütközés előtti és utáni aránya (M. Csizmadia, 1997).



1. ábra Sebességek ütközés során

Az 1. ábrán látható centrikus ütközés esetén az ütközési tényező számítása:

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} \quad (1)$$

ahol:

- v_1 : első test ütközés előtti normál irányú sebességkomponense,
- v_2 : második test ütközés előtti normál irányú sebességkomponense,
- u_1 : első test ütközés utáni normál irányú sebességkomponense,
- u_2 : második test ütközés utáni normál irányú sebességkomponense.

Az ütközési tényező értéke tökéletesen rugalmas ütközéskor 1, tökéletesen rugalmatlan ütközéskor 0.

3.1.5. Külső súrlódási tényező

Külső súrlódási tényezőt értelmezhetünk a szemcsére és a halmazra is. Szemcsék esetében ez a fogalom megegyezik a fizikában szilárd testekre ismert definícióval. A nyugvó (nyugvásbeli, statikus, tapadási) súrlódási tényezőt (μ_0) a mozdulatlan testek közt értelmezzük addig a határhelyzetig, amíg az érintkező felületek nem csúsznak el egymáson, a mozgó (mozgásbeli, dinamikus, csúszó) súrlódási tényezőt (μ) egymáson elcsúszó felületek közt értelmezzük.

Szemcsés halmazok esetében megkülönböztetünk külső és belső súrlódást. Külső súrlódási tényezőn a halmaz egy test közötti mechanikai kapcsolatban meghatározott súrlódási tényezőt értjük. (Ez nem azonos a szemcse súrlódási tényezőjével.) Mérését kétféleképpen végezhetjük el. Egyszerűsített megoldás, egy merev lap alkalmazása, amelyre a szemcséket felragasztjuk, és egy változtatható meredekségű lejtőre helyezzük a szemcsés oldalával. A lejtő szögét folyamatosan emelve a megcsúszáshoz tartozó szög megegyezik a súrlódási szög értékével (Sitkei, 1981), ebből szögfüggvénnyel számítható a tényező. Kis hibát okozhat, hogy a szemcsék nem tudnak elfordulni a mérés közben. Pontosabb mérési módszer (Kézdi, 1969; Sitkei, 1981), ha a 2. ábrán bemutatott készüléket alakítjuk át úgy, hogy az egyik dobozfél meg van töltve a szemcsés anyaggal, a másik dobozfél helyett egy, a kérdéses anyagból kialakított lapot helyezzük. Ekkor a szemcsék forgását nem korlátozzuk, mint az előző esetben így a valós súrlódási viszonyokat tudjuk mérni.

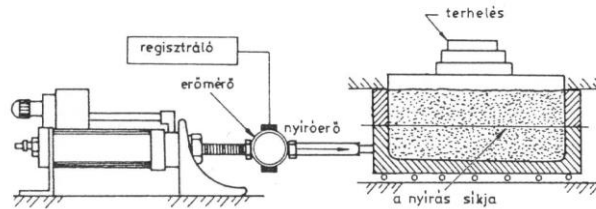
3.1.6. Gördülési ellenállás

A gördülési ellenállás a szemcse jellemzője, a klasszikus értelemben használjuk. Rugalmas testek egymáson való elgördülés esetén az érintkezés felületén fellépő erő hatásvonal elmozdul, ez a gördülést akadályozó nyomatékként jelentkezik és gördülési ellenállásnak nevezzük. A nyomaték értéke a normál erő és a hatásvonal középponttól való távolságának szorzata. Ez a távolság a gördülési ellenállás tényezője (μ_r).

3.1.7. Belső súrlódási szög, kohézió

A szemcsés anyagok tönkremeneteli határgörbéjét leggyakrabban a belső súrlódási szög és a kohézió értékével írjuk le. Ez a két érték írja le a szilárd testektől eltérő viselkedést.

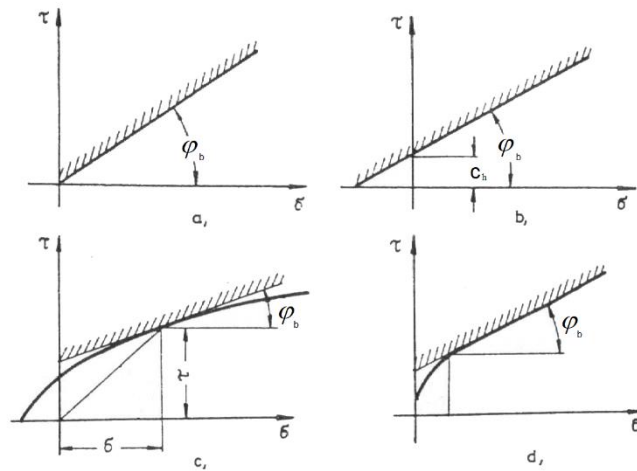
Tönkremeneteli határgörbe meghatározása szemcsés anyagok esetében lehetséges triaxiális vagy nyíródobozos (2. ábra) berendezéssel. A határgörbét terhelési lépcsőkre meghatározott tönkremeneteli Mohr-körök segítségével állítjuk elő. A körök definíció szerint a τ - σ síkon helyezkednek el, amelyekre a 3. ábrán bemutatott jellegzetes burkológörbék illeszthetünk.



2. ábra. Nyírókészülék (Sitkei, 1981)

Nyíródobozos készülékben a két dobozfél által meghatározott sík mentén kényszerítjük a halmazt tönkremenetelre, mivel ezek elcsúsznak egymáson. Az anyagot a dobozba töltve függőleges terheléssel létrehozuk a halmaz normális irányú σ feszültségét. Az osztott doboz felső része nem mozog, az alsó rész vízszintesen állandó sebességgel mozog a mérés során, a két dobozfélben lévő anyag ennek megfelelően egy mozgó és egy álló zónára van osztva, amelyek közt elnyíródik. A nyírási síkban keletkező τ nyírófeszültségek összessége az a nyíróerő, amely a dobozfél mozgásához szükséges erővel egyezik meg, ami mérhető. A nyíróerő-elmozdulás függvényt ábrázolva kapjuk a nyíródiagramot. A nyíródiagramnak, ha megfelelő a nyíródoboz mérete a szemcsemérethez képest, van egy állandósult szakasza. Az állandósult értéket tekintjük az adott normál erőhöz tartozó nyíróerőnek a Mohr-kör meghatározásakor.

Különböző jellegű tönkremeneteli határgörbékét látunk a 3. ábrán. A 3a. ábrán kohéziómentes ideális szemcsés halmaz határgörbéje szerepel, ebben az esetben egy origóból induló egyenest kapunk.



3. ábra Különböző jellegű törési határgörbék (Sitkei, 1981)

Az egyenes egyenlete:

$$\tau = \sigma \cdot \tan \varphi_b \quad (2)$$

ahol φ_b belső súrlódási szög. A száraz homok és a szárított szemes termények viselkednek hasonlóan.

A 3b. ábrán látható a leggyakrabban alkalmazott (a 3.c és 3.d esetben is közelítőleg) szintén lineáris összefüggés, ahol nem zérus a kezdeti nyírófeszültség. Ezt a kezdeti, zérus normálfeszültség mellett meghatározott nyírófeszültség értéket kohézióknak (c_h) nevezzük. Az egyenes egyenlete:

$$\tau = c_h + \sigma \cdot \tan \varphi_b \quad (3)$$

A 3.c és 3.d nemlineáris határgörbék is előfordulnak, azonban ezek leírása több konstans alkalmazását is megköveteli, ami általában a használatot nehezéssé teszi. Ezekben az esetekben is jellemzően a kohézió és belső súrlódási szög konstansokkal leírható (3) egyenletet használjuk, elfogadva annak közelítési hibáját.

3.1.8. Természetes rézsűszög

A természetes rézsűszög leginkább technológiai paraméter. Ömlesztett anyagot egy vízszintes felületre öntve egy olyan halmazt kapunk, amelynek közelítőleg állandó meredekségű lejtős felülete (rézsű) alakul ki. Ennek a vízszintessel bezárt szöge a természetes rézsűszög. Ezt a jellemzőt egyszerűsített megoldásként, amikor nincs lehetőség összetettebb vizsgálat elvégzésére, a numerikus modell kalibrációjára is alkalmazhatjuk.

3.2. Szemcsés halmazok mechanikai modellezése

Szemcsés halmazok modellezését (modell alatt matematikai modellt értek) kétféle módon közelíthetjük meg. Az egyik megközelítés szerint az anyag kontinuum és annak vannak anyagjellemzői amelyek leírják a viselkedését. Itt értelmezhetőek az előző fejezetben bemutatott halmazjellemzők, ebben az esetben a szemcsék tulajdonságait nem vesszük figyelembe a modellben. A másik megközelítés szerint a szemcsék szintjén végezzük el a modellezést, ebben az esetben a szemcsék jellemzőivel dolgozunk és a halmaz tulajdonságai ebből számíthatóak (Bagi, 1996), (Bagi, 2006). Ebben a fejezetben a két módszer főbb jellemzőit ismertetem.

3.2.1. Kontinuum modellezés

A kontinuum, azaz folytonos modell a klasszikus mechanikából ismert szilárd test modell. Ebben a megközelítésben az elemi részek leírásából a teljes test leírását integrálással kapjuk meg. A mechanikai állapot leírása folytonos függvényekkel és tenzorokkal történik. Szemcsés halmaz esetén nem szükséges a szemcsék modellje az alkalmazásához ehelyett a speciális tulajdonságokat, fizikai, szilárdsági és anyagjellemzőket alkalmazunk.

A speciális jellemzőket tartalmazó kontinuum modelleket alkalmazva, végeselem-módszer segítségével leírhatjuk a szemcsés anyag viselkedését tetszőleges halmazgeometria mellett. A szemcsegeometria leírásának problémáját ezzel elkerülhetjük (Bagi, 2000), de a speciális anyagmodellek megfelelő alkalmazásával ez is olyan bonyolultságú problémát jelent, ami összességében nem lesz egyszerűbb vagy kevésbé számításigényes, mint a mikroszerkezeti modellezés.

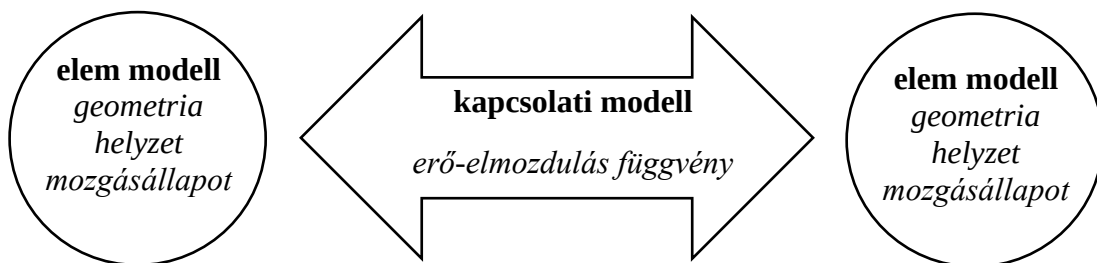
Ha a probléma egyszerű geometriájú és nincsenek összetett peremfeltételek, akkor lehetőség van a probléma analitikus megoldására. Ezek az eredmények főleg a gyakorlati felhasználás szempontjából hasznosak, ha egyszerűek és a elegendően pontosak. Például a Janssen-féle kontinuum analitikus modell (Janssen, 1895), amely silókban írja le a nyomásokat (amely jelentősen eltér a folyadéknyomástól) és a mai napig használatos, az Eurocode alapú Magyar Szabvány (MSZ ENV, 2006) is ezt a számítási módot javasolja.

Értekezésemben bemutatott egyik eredmény a silókifolyás témakörében felmerült probléma egy analitikus megoldása, amely a gyakorlatban könnyen alkalmazható egyszerű számítási módszerhez vezetett.

3.2.2. Diszkrét modellezés

A diszkrét vagy mikroszerkezeti modellezés alkalmazására a számítástechnika adott lehetőséget. Belátható, hogy ha az egyes szemcsék viselkedésének modellezésének összességével szimuláljuk a halmaz viselkedését, az nagy számítási kapacitást igényel. Kezdetben a kisebb számítási kapacitások korlátozták az alkalmazhatóságot és főleg a jelenségek leírására volt lehetőség. A számítási kapacitások növekedése és a fejlődő szimulációs modellek és módszerek eredményeképp ma már mennyiségi leírásra is alkalmas a módszer.

Diszkrét elemek módszere (DEM) esetén idealizált szemcsék (ún. diszkrét elemek) összességüként vizsgáljuk a szemcsés halmazt (Cundall, Strack, 1979). A fő különbség a kontinuumhoz képest, hogy a halmazt alkotó elemek különálló testek. Ezek a testek egymástól függetlenül elmozdulhatnak, elfordulhatnak, azaz önálló szabadságfokokkal rendelkeznek (Bagi, 2007). Az egyes elemek mozgásjellemzőinek és a köztük lévő kapcsolatok leírásával tudjuk a halmaz viselkedését modellezni (4. ábra). Ezt explicit dinamikus numerikus modellezés alkalmazásával valósítjuk meg. A számítások során az elem modellje és a köztük lévő kapcsolat modellje határozza meg, hogy miként fog viselkedni az elem és a halmaz.



4. ábra Diszkrét elemek módszerének alap modelljei

Az elemek mozgását Newton második törvénye és a perdülettétel írja le, a köztük lévő kapcsolatok leírására azonban nagyon sokféle szemcsekapcsolati modell létezik. A szemcsék érintkeznek és ütköznek, a modellezés során az adott probléma leírására alkalmas kapcsolati modell kiválasztása hasonlóan fontos, mint a szemcsealak modelljének kiválasztása.

A numerikus modellezés során szükségünk van csillapításra, ellenkező esetben egy csillapítatlan lengőrendszer végtelen rezgéseit látnánk a szimuláció során. A valós szemcsés anyagok esetében mindig van csillapítás, a modellben ennek megfelelően alkalmaznunk kell mesterséges csillapítást. Ezt a szemcsék közti kapcsolati modellben tudjuk alkalmazni,

csillapításként nagyobb részt az ütközési tényező, kisebb részt a szemcsék közti súrlódás funkcionál. Ezek leírására több létező megoldás van, amelyet a 3.4.1. fejezetben részletesen bemutatok. A szimuláció során fontos ezen kívül az időlépés helyes megválasztása (O'Sullivan, Bray, 2004), (Otsubo et al., 2017). Ennek alapja a mechanikai hullám egy elemen történő áthaladásának ideje (Rayleigh-időlépés), amelynél kisebb időlépés esetén lehet numerikus stabilitást elérni.

Diszkrét elemek módszere esetében hamar beleütközünk a számítási kapacitások korlátaiba. A nagy számú elem és azok mozgásának komplex leírása nagy számítási igényt támasztanak (Williams, O'Connor, 1999), (Huang et al., 2024). Ez adott kapacitás esetén hosszú számítási időt jelent, a modellezések során nagyon gyakori igény ennek csökkentése (Oldal et al., 2017). Az egyik megoldás az elem valóstól eltérő modelljének alkalmazása. A másik megoldás a numerikus stabilitás növelése, amely nagyobb, a Rayleigh-időlépéshez közelebbi időlépés alkalmazását teszi lehetővé.

Értekezésem második fő területe a DEM kapcsolati modell fejlesztése és új megoldás kidolgozása a numerikus stabilitás növelése érdekében.

3.3. Silóból történő kifolyás analitikus modellezése

A silókifolyás analitikus modellezése ma már kevésbé kutatott téma, a fejezetben ismertetett eredmények jellemzően korábbi évtizedek kutatási eredményei. A siló modellezésének kutatásai ma már inkább a diszkrét elemek módszerének alkalmazásával történnek (Yang et al., 2024), (Oldal, Safranyik, 2015), (Gou et al., 2024), (Horabik et al., 2022). A mérések azonban továbbra sem hagyhatóak el a kutatásokból, mivel a modellek ellenőrzésére szükség van (Mu et al., 2024), (Wang et al., 2021). Ennek ellenére ma is lehet új eredményeket elérni az analitikus modellezés területén is.

3.3.1. Kifolyás feltétele

A silóban tárolt szemcsés anyag a silófalra nyomást fejt ki. A jelenség hasonló a folyadékokhoz, azonban a nyomás eltér a folyadékoktól, mert a halmazon belül a nyomás nem minden irányban azonos és a silófallal is súrlódásos kapcsolata van. Ezen kívül a folyadékoktól jelentősen eltérő jelenség alakul ki, ha a támasz egy részét elmozdítjuk, boltozati hatás jön létre. Folyadék esetében ha a tároló fala elmozdul, a folyadék a mozgást követi és a dinamikus hatás megszűnésével a nyomás nem változik. Szemcsés halmaz esetében, mivel nem sebességfüggő

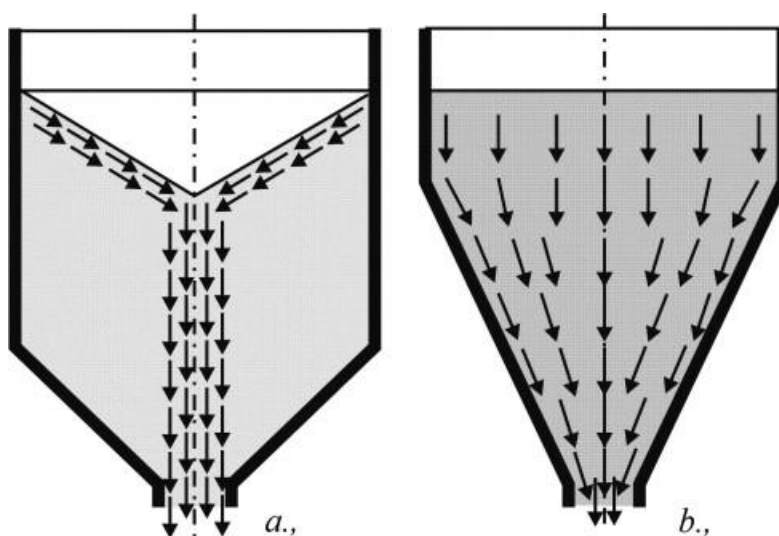
viszkozitása, hanem belső súrlódása van, a fal egy részének elmozdítása megváltoztatja a belső erőket ennek eredményeképp az elmozdult (ha a halmaztól távolodik) felületen csökken a terhelés, amit boltozati hatásnak nevezünk (Kézdi, 1987). Ez a hatás a szemcsés halmazoknál mindig megfigyelhető, az anyagjellemzők és a peremfeltételek azonban befolyásolják a további folyamatokat. A legfőbb eltérés akkor figyelhető meg, ha a támaszt adott helyen teljesen megszüntetjük, ekkor az anyag nem minden esetben folyik ki. Ha nem folyik ki, akkor nemcsak boltozati hatás lép fel, hanem stabil boltozat jön létre.

A stabil boltozat kialakulása a siló ürítésekor a kifolyást megakadályozza, így a silóból történő kifolyás modellezésének első lépése annak megállapítása, hogy a kifolyás létrejön-e.

3.3.2. Kifolyás módjai

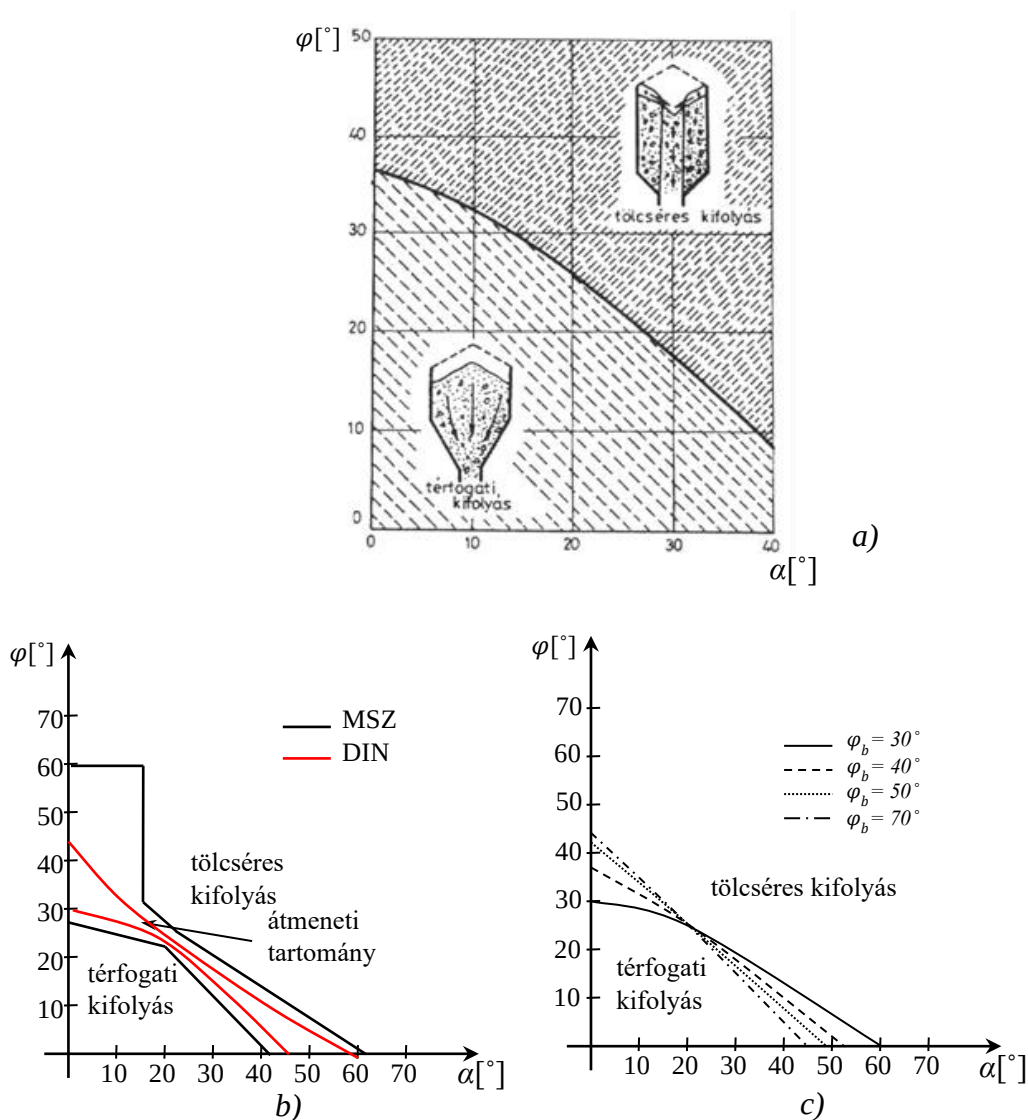
Ha a silóban tárolt anyag esetében a stabil boltozat kialakulását elkerüljük, akkor az képes kifolyni a silóból. Siló tervezésekor ismernünk kell a kifolyás jellemzőit. Elsőként a kifolyási mód ismeretére van szükség, ami befolyásolja a szilárdsági méretezést, mert a silófal terheléseire jelentős hatással van, valamint a kifolyás mennyiségi jellemzőit is befolyásolja.

A kifolyás két jellemző módját az 5. ábra szemlélteti. Az 5.a ábrán látható esetben csak a kifolyónyílás feletti anyagoszlop mozog, a felszínen természetes rézsűszögnek megfelelő lejtő alakul ki, részleges kifolyással (magkifolyás, tölcseres kifolyás) van dolgunk. Ha az anyag teljes térfogatában mozog az 5.b ábrán látható módon, akkor teljes kifolyásról (tömegkifolyás, térfogati kifolyás) beszélünk. Van a kettő kombinációja is, ha a siló felső részében teljes, a garatban részleges az áramlás. Későbbi vizsgálatainkban a garat a kritikus rész, így elég a két csoportba osztás.



5. ábra Kifolyási módok

A kifolyási módot a silógarat α félkúpszöge és a halmaz-silófal közti φ súrlódási félkúpszög határozza meg alapvetően. Ezt a két kifolyási mód közti határt a 6.a ábrán láthatjuk (Sitkei, 1981.) bűzára meghatározva. A Magyar Szabvány (MSZ ENV, 2006.) és a régi DIN 1055 (1987.) szabvány is ugyanezt a két paramétert adja meg a 6.b ábrán látható módon, mint a két kifolyási mód közti kapcsolatot, azonban nem éles határvonalat, hanem egy átmeneti tartományt adnak meg, mivel a különböző anyagoknál nem azonos határgörbéket kapunk. Ennek oka egy hiányzó paraméter, a halmaz φ_b belső súrlódási szöge. A 6.c ábrán láthatóak a belső súrlódási szöget is figyelembe véve meghatározott határgörbék (Jenike, 1987.; Schulze, 1994.) ahol már nincs bizonytalanság, az anyag belső és külső súrlódási tényezője valamint a falsúrlódás egyértelműen meghatározza, hogy az adott kifolyás milyen módon történik.



6. ábra Kifolyási módok meghatározása hengeres silók esetén (Sitkei, 1987; MSZ ENV 1991-4:2006, DIN 1055: 1987; Jenike, 1987; Schulze, 1994)

A kifolyási mód ismerete egy siló esetében meghatározó a kifolyási tömegáram számításához. A tölcséres és a térfogati áramlás látványosan eltérő sebességeloszlást mutat a halmazon belül és ez a többi paraméterre is hatással van, az általunk vizsgált tömegáramra is.

3.3.3. Kifolyási tömegáram számítása

A kifolyási tömegáram analitikus meghatározásának első lépése az előző fejezetben tárgyalt kifolyási mód meghatározása, ezután kiválasztjuk a megfelelő számítási modellt. Ebben a fejezetben az irodalomban megtalálható jelentősebb számítási módszereket mutatom be.

Hagen-modell (1852)

A modell egy korai példája a kifolyási tömegáram számítására. Kísérleti úton állapította meg, kohéziómentes szemcsés anyagokra. Homokkal végezte kísérleteit, aminek eredményeképp a következő számítási összefüggést hozta létre kör alakú silógarat és kifolyónyílás esetére, tölcséres kifolyásra (minden mennyiség SI mértékegységben):

$$W = \rho_h \cdot \sqrt{g} \cdot (d - k_p \cdot d_p)^{2,5} \quad (4)$$

ahol:

- W : kifolyási tömegáram,
- ρ_h : halmazsűrűség,
- g : gravitációs gyorsulás,
- d : kifolyónyílás átmérője,
- k_p : szemcse alaktényezője,
- d_p : átlagos szemcseméret.

A számítási módszer a kifolyás egyes paramétereiktől való függését nagyon jól leírja tölcséres kifolyás esetére. A homokkal végzett kísérletek eredményeit az anyag a halmazsűrűségével és az alaktényezőjével általánosítja, ami szintén a későbbi eredmények alapján szintén jó irány. Azt nem veszi figyelembe, hogy egyes anyagok a halmazsűrűség mellett még további változásokat okoznak a kifolyásban. (A szemcseméret önmagában is kis hatással van a szokásos méretek mellett, ennek az alaktényezőjének a hatása még kisebb.)

Beverloo-modell (1961)

Beverloo (Beverloo et al., 1961) modellje nagyon hasonlít Hagen modelljéhez, azonban kiterjesztette a megoldást több anyagra is. Szintén empirikus összefüggés (tölcséres kifolyás, kör alakú siló, garat és kifolyónyílás mellett), homokra és hét különböző szemesterményre is elvégezte a kísérleteket, ami alapján a következő összefüggésre jutott:

$$W = c_h \cdot \rho_h \cdot \sqrt{g} \cdot (d - k_p \cdot d_p)^{2,5} \quad (5)$$

ahol:

- c_h : kifolyási tényező.

Hagen modelljébe bekerült egy halmazra vonatkozó kifolyási tényező, kiegészítő konstansként, amely már figyelembe veszi nemcsak az anyagok halmazsűrűségét, hanem annak a kifolyásra gyakorolt hatását is. Tölcséres kifolyás esetére ma is ez az elterjedt megoldás a gyakorlatban kohéziómentes szemcsés anyagokra.

Crewdson-modell (1977)

A Beverloo-modelljét finomabb, porszerű anyagokra terjesztette ki Crewdson (Crewdson et al., 1977) kutatócsoportja. A poroknál a szemcsék közti levegő hatása hangsúlyosabbá válik két okból, egyrészt kisebbek a szabad áramlást biztosító szemcsék közti rések, másrészt a szemcseméret csökkenésével annak felület-tömeg aránya is megnő. Ennek következtében a levegő hatásának elhanyagolása növekvő hibával járna. A levegő hatását is figyelembe véve a következő összefüggést publikálták:

$$W = c_h \cdot \rho_h \cdot \sqrt{g + \frac{1}{\rho_h} \frac{dp}{dr}} \cdot (d - k_p \cdot d_p)^{2,5} \quad (6)$$

ahol:

- $\frac{dp}{dr}$: a garatban kialakult nyomásváltozás a nyílástól való távolság függvényében.

A modell gyakorlati alkalmazhatóságát korlátozza, hogy a nyomásváltozás meghatározása a tervezési szakaszban kérdéses.

Williams-modell (1977)

Beverloo modelljét másik irányba terjesztette ki Williams (Williams, 1977). Kutatása a modell térfogati kifolyású silókra való alkalmazhatóságát célozta. Ennek érdekében egy másik konstanst vezetett be az összefüggésbe:

$$W = k_h \cdot \rho_h \cdot \sqrt{g} \cdot d^{2,5} \quad (7)$$

ahol:

- k_h : a garat kúpszögétől, a belső és külső súrlódási szögtől függő konstans.

Az új modell a k_h konstans meghatározásához egy mérések alapján létrehozott diagramot használ. A diagram a garat kúpszögétől, a belső súrlódási szögtől és a halmaz-silófal közti súrlódási szögtől függő értéként adja meg k_h értékét, ami azt eredményezi, hogy nem a modell

írja le a térfogati kifolyás hatását, hanem a konstans. A kifolyónyílás átmérőjét nem korigálja a szemcsemérettel, így annak kontrakciós hatását nem veszi figyelembe, mint a korábbi modellek, azonban ez a gyakorlatban nem okoz komoly hibát a jellemző szemcseméret-kifolyónyílás arányok mellett.

Az eddig ismertetett modellek hasonlóan kezelték a kifolyás jelenségét, és látható az egyes modellek evolúciója. A következőkben ezektől teljesen eltérő megközelítést alkalmazó módszereket vizsgállok meg.

Johanson-modell (1965)

Johanson (Johanson, 1965) térfogati kifolyásra dolgozta ki analitikus modelljét a következő feltételek mellett:

- az alapanyagnak nem zérus a kohéziója,
- az anyag sűrűsége közel állandó, és folytonos
- az anyag állandó a gyorsulású és vastagságú ívekből áll,
- az áramlás a kritikusnál nagyobb és kiszámítható nyomást okoz.

Ezen feltételek teljesülése mellett felírta egy réteg (ív) dinamikus egyensúlyát majd a szűkülő garatban a térfogatállandóság feltételezésével a gyorsuló mozgást. Ennek alapján a következő összefüggésre jutott:

$$W = \rho_h \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \left[\frac{d \cdot g}{4 \cdot tg \alpha} \cdot \left(1 - \frac{ff}{ff_a} \right) \right]^{0,5} \quad (8)$$

ahol:

- α : garat félkúpszöge,
- ff : a folyási faktor kritikus értéke,
- ff_a : a folyási faktor aktuális értéke.

A folyási faktor kritikus értéke adott nyomáson előtömörített halmaz teherbírását jelenti egy oldalon nyitott térben, ez írja le a boltozódásra való képességet. A folyási faktor aktuális értéke a nyílásmérettől függő terhelésként definiálható, így a kettő viszonya alapján eldönthető, hogy a halmaz adott peremfeltételek mellett boltozódik-e. (Ha $ff_a < ff$, akkor az anyag boltozódik és nem tud kifolyni.) Kohéziómentes anyagok esetében $ff = 0$, ekkor az összefüggés egyszerűsödik:

$$W = \rho_h \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \left(\frac{d \cdot g}{4 \cdot tg \alpha} \right)^{0,5} \quad (9)$$

A modell szerint térfogati kifolyás esetén a garat kúpszöge is befolyásolja a kifolyási tömegáramot. A kifolyónyílás átmérője ebben a modellben is 2,5 hatványon van, ebben megegyezik a tölcséres kifolyásra alkalmazott modellekkel.

Carleton-modell (1972)

Carleton modellje (Carleton, 1972) a szemcsemozgás és légmozgás egyensúlyán alapul. Nem a tömegáramot, hanem a szemcsék sebességét határozza grafikus úton a következő egyenletből:

$$\frac{4 \cdot v^2 \cdot \sin \alpha}{d} + \frac{15 \cdot \rho_{lev}^{1/3} \cdot \mu_{lev}^{2/3} \cdot v^{4/3}}{\rho \cdot d_p^{5/3}} = g \quad (10)$$

ahol:

- ρ : a szemcse sűrűsége,
- ρ_{lev} : levegő sűrűsége,
- μ_{lev} : levegő viszkozitása,
- v : a szemcsék átlagsebessége a kifolyónyílásnál.

Ehhez hasonló dinamikus egyensúlyon alapuló modelleket többet is találunk az irodalomban. Az egyenlet nincs megoldva, aki használni akarja, magának kell adott peremfeltételekkel megoldani. A megoldás a szemcse sebessége, így további számításokat igényel, hogy a kifolyási tömegáramhoz eljussunk. Ehhez hasonló megoldásokat találunk Harmens, Shinohara, Holland és Shook munkáiban (Harmens, 1963), (Shinohara et al., 1968), (Holland et al., 1969), (Shook et al., 1970). Közös jellemzőjük, térfogati kifolyás esetére alkalmazhatóak és a gyakorlat számára kevésbé használható, utólagos számításokat igénylő megoldások.

Zanker-modell (1975)

Zanker (Zanker, 1975) 100mm-nél nagyobb átmérőjű kifolyónyílású silók esetére hozta létre empirikus modelljét, amely tölcséres kifolyás esetén írja le a kifolyási tömegáramot a következő összefüggés alapján:

$$W = \frac{\rho \cdot d^x}{(6,288 \cdot \tan \varphi_b + 23,16) \cdot (d_p + 1,889) - 44,9} \quad (11)$$

ahol:

- x : a szemcse alakjától függő kitevő.

A gyakorlati alkalmazhatósága az összefüggés alapján létrehozott nomogramok segítségével történik.

3.3.4. Silókifolyási modellek elemzése

A silókifolyás tömegáramának meghatározására a numerikus módszerek mellett ma is gyakran alkalmazzák a gyakorlatban a könnyen, kevés paraméterrel számítható modelleket. Tölcséres kifolyás esetére a korai és kevésbé pontos Hagen összefüggés fejlettebb változatát a Beverloo által kidolgozott számítási eljárást a mai napig alkalmazzák. Egyszerű, de kellően pontos a gyakorlati alkalmazásra. Crewdson által továbbfejlesztett változata, ami a levegő hatását is figyelembe veszi, bonyolultabbá teszi a megoldást (a nyomásváltozás meghatározása tervezési fázisban kérdéses) és nem okoz olyan mértékű javulást a pontosságban, ami miatt érdemes lenne alkalmazni. Zanker módszere ugyancsak tölcséres kifolyás esetére ellentmond a többi eredménynek, mivel a belső súrlódási szöget is paraméterként kezeli. Valamint a kifolyónyílás átmérőjének kitevője nem 2,5, mint az összes többi modell esetében, hanem változó, ami az egységes irodalmi eredményekkel (és a később ismertetett saját eredményekkel) nem egyezik meg, így kérdéses a modell pontossága. A tölcséres kifolyás esetére vizsgált összes módszer empirikus, nincs olyan modell, ami a kifolyást analitikusan, egy fizikai elvre alapulva számítaná.

Térfogati kifolyás esetére Williams a Beverloo-féle modellt alakította át, de nem modell szinten, hanem csak egy konstanként tartalmazza a változásokat. Térfogati kifolyás esetében a kifolyó garat nyílásszöge is befolyásolja a tömegáramot, így csak olyan modell alkalmas a megfelelő leírására, amelyben megjelenik ez a változó is. Carleton (és több másik kutató ehhez hasonló módon és eredménnyel) analitikus megközelítéssel, a szemcse és a levegő dinamikus egyensúlyából indulva alkotta meg a kifolyásra vonatkozó számítási módszerét. Ennek és a hasonló, légáramot is figyelembe vevő többi modellnek is a gyakorlati alkalmazhatósága a kérdés, a levegő fizikai tulajdonságait is tudni kell a számításhoz, ráadásul feltételezve egy bizonyos áramlási viszonyt, ami a valós kifolyás esetében nem feltétlenül érvényes. A gyakorlatban is bevált, jelenleg is alkalmazott módszert Johanson dolgozott ki, amely nem veszi figyelembe a levegő hatását, analitikusan, az anyagra felírt egyenletekből jutott el a számítási összefüggéshez. Az összefüggést megvizsgálva látható, hogy a tölcséres kifolyásra alkalmazott korai Hagen-moddellel mutat hasonlóságokat, amiből hiányzott a Beverloo-modellben meglévő anyagállandó. A mérések is azt mutatják, hogy Johanson módszere térfogati kifolyásra kevésbé pontos, mint Beverloo módszere tölcséres kifolyásra.

Összegzésként elmondható, hogy mindkét kifolyási mód esetére találunk számítási összefüggéseket. A térfogati kifolyás esetében empirikus és analitikus modelleket is találunk, tölcséres kifolyás esetében csak empirikus modelleket. Tölcséres kifolyás esetére, mivel nem az egész halmaz mozog, nincs olyan ismert összefüggés, ami alapján analitikus úton meghatározható a kifolyási tömegáram. Az összes modell közös jellemzője, hogy a sebességet a kifolyónyílásnál állandónak tekinti, amit a kísérleti eredmények nem igazolnak.

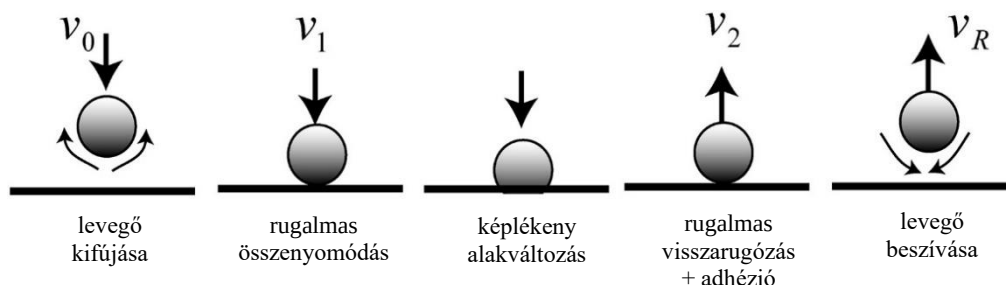
3.4. Diszkrét elemek módszerének speciális kérdései

Kutatásaim a diszkrét elemek módszerének (DEM) több részterületére kiterjedtek. Főként a paraméterek és azok hatásai voltak (vannak) a fókuszban. A paraméterek kalibrációja a mai napig nincs teljesen megoldva, folyamatosan publikálnak újabb eredményeket (Kibriya et al., 2024), (Ming et al., 2025), (Ligier et al., 2024), (Zhou et al., 2025), (Ma et al., 2024), (Bao et al., 2025) ezen a területen. A kezdetektől megfigyelhető volt egy probléma, amely a többi területre hatással van. A modellben szimulált elemek szinte soha nem kerülnek a valós halmazokhoz hasonló nyugalmi állapotba. Mivel a modellezés időben is diszkrét lépésekkel dolgozik, így sokszor előforduló jelenség egy-egy elem instabilitása és a halmazból való nagy sebességű távozása (a szoftverek ezt az elem törlésével kezelik), vagy a teljes halmaz stabilitásának elvesztése („felrobbanása”), ami a valós körülmények közt nem fordul elő. A modell stabilitása kulcsfontosságú kérdés az időlépés megválasztása során, mivel a numerikusan stabilabb modell nagyobb lépésekkel modellezhető, így a számítási idő lecsökkenthető. Vagy azonos időlépéssel nagyobb stabilitással fut, ami lehetővé teszi kritikusabb peremfeltételek modellezését is. A numerikus stabilitást a rendszer csillapítása biztosítja, csillapítás modellezésére sok megoldás van. A kapcsolati modellben külön csillapító tag, súrlódás vagy gördülési ellenállás mind csillapító hatást fejt ki (Ao et al., 2024), (Liu et al., 2024), (Vlogman et al., 2024). Ha nincs a kapcsolati modellben, akkor globális csillapítást is lehet alkalmazni (Eliáš, 2014), (Smilauer et al., 2016), (Orosz, Bagi, 2023). A kapcsolati modellek esetében elterjedt az ütközési tényező, mint a kapcsolati (kontakt) modell csillapító paramétere. A DEM témakörben elért eredményeim közül az ütközési tényezőn alapuló új csillapító modellt tartom a legfontosabbnak, így a disszertációmban ezeket mutatom be. Ennek megfelelően a szakirodalom áttekintését is erre a területre fókuszálom.

3.4.1. Kapcsolati modellek csillapítása, ütközési tényező

A kontakt modellek a szemcse-szemcse vagy szemcse-fal közti mechanikai kölcsönhatásokat írják le. A két test találkozását ütközésként írjuk le. Munkám során a normális

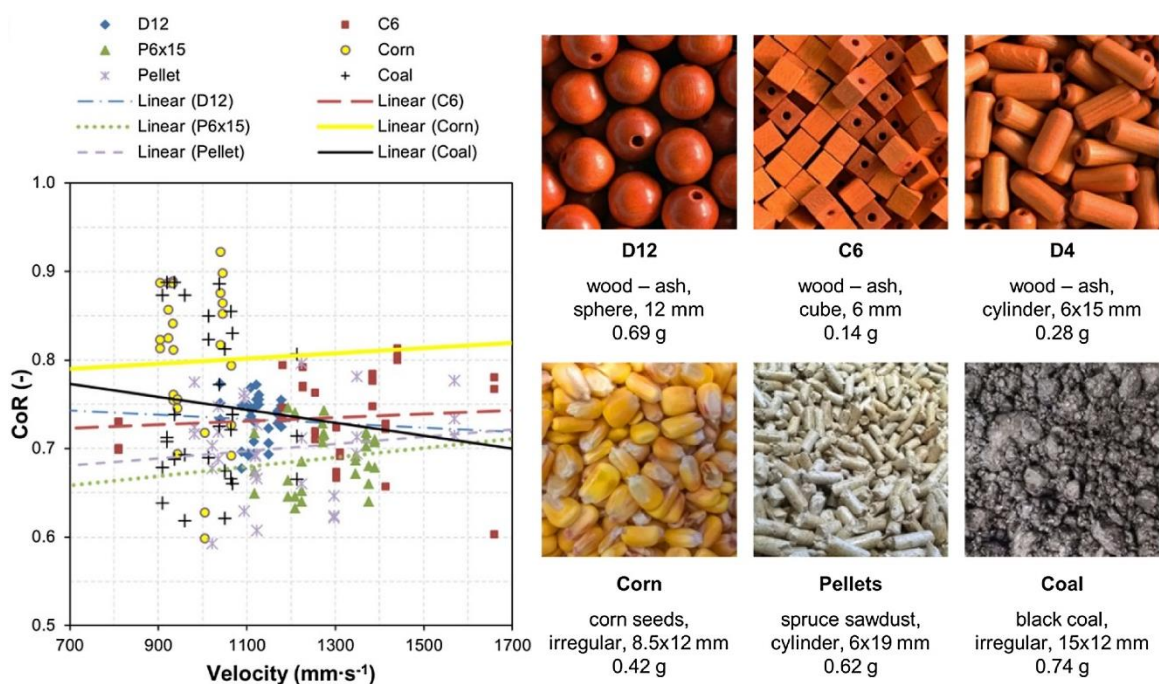
irányú erők modellezésére koncentrálok, így a jelenséget és modelleket is csak ebből a szemszögből vizsgálom. A diszkrét elemes modellezés esetében a legelterjedtebb csillapítás az ütközési tényező alkalmazása a kapcsolati modellben. Munkám során ezt vizsgáltam és ezen a területen értem el eredményeket, így az elemzéseket is erre a területre koncentrálok.



7. ábra Ütközés általános folyamata (Marshall, 2018)

Egy általános, az ütközés során előforduló jelenségeket összegző folyamat egyes fázisai láthatóak a 7. ábrán. A testek érintkezése előtt a köztük lévő levegő távozik, amely nyomásként a felületeken jelentkező hatás. A következő a rugalmas összenyomódás szakasza, amely az anyagoktól és a terheléstől függően többféle függvénnyel leírható. A peremfeltételektől és anyagoktól függően kialakulhat képlékeny deformáció a következő lépcsőben. (Akár tönkremenetel vagy törés is, de ez nem képezi a jelen kutatás tárgyát.) A maximális összenyomódás elérése után a rugalmas rugózás modellel leírható, és megjelenhet az adhézió is. Majd az érintkezés megszűnése után újra a levegő beáramlásának lesz mechanikai hatása. Ezen jelenséget írta le Marshall (Marshall, 2018). Az ütközés jelenségét még részletesebben is lehet vizsgálni, a csillapítást is lehet méretfüggően modellezni (Ye, Zeng, 2017), az ütköző testek felületminőségét (Ghanbarzadeh et. al., 2019), mikrotopográfiáját (Krull et al, 2018) is figyelembe lehet venni. Azonban belátható, hogy diszkrét elemes modellezéskor ennek a folyamatnak a teljes és pontos leírása minden egyes ütközésnél túl nagy számítási igényt támasztana, ezért valós problémák modellezésekor egyszerűbb modellek terjedtek el. A teljes folyamat során a test energiájának egy része elnyelődik, a testek mozgási energiája kisebb lesz, mint ütközés előtt. Az elnyelt energiára jellemző skalár az ütközési tényező (3.1.4. fejezet). Diszkrét elemes vizsgálatok esetében különböző modellekkel lehet leírni a kapcsolatot, amelyek egyik fontos paramétere az ütközési tényező. Az ütközési tényezőt az ütközés korábban bemutatott bonyolult folyamata miatt általában mérésel határozzák meg. Ütközési tényező mérésével sok kutató foglalkozott, így sok esetre és anyagra áll rendelkezésre mérési eredmény. Fal-gömb kapcsolatot könnyebb mérni, mint más geometriát, mert nem kell a központossággal külön foglalkozni, ezért a legtöbb eredmény ilyen esetre van publikálva

különböző anyagokkal. Acél-acél anyagpárosítással (Lifshitz, Kolsky, 1964), (Sondergaard et al., 1990) (Dong, Moys, 2006), cellulóz acetát-üveg (Foerster et al., 1994), wolfram-karbid-piezo kristály (Falcon et al., 1998), korund-acél (Gorham, Kharaz, 2000), (Kharaz et al., 2001), kerámia-polikarbonát (Louge, Adams, 2002), bronz-alumínium (Weir és Tallon, 2005), homokkő-acél (Imre et al., 2008), acél, bronz, alumínium delrinnel párosítva (King et al, 2011), acél-üveg (Montaine et al., 2011), korund kerámia, zeolit nátrium-benzonát, zeolit üveg, száraz és nedves körülmények közt (Mueller et al., 2011, 2015). Ha szemcse-szemcse ütközési tényezőjét vizsgáljuk, a centrikus ütközés biztosítása megoldandó feladat, a mérések beállításkor, a mért eredmények szűrésével vagy statisztikai módszerekkel lehet a valós értéket mérni. Ilyen vizsgálatokat is sok kutató végzett acél-acél golyókkal (Stevens és Hrenya, 2005), (Graselli et al., 2009), acél, bronz, alumínium, parafa gömbökkel (Kuwabara és Kono, 1987), nejlonnal (Labous et al., 1997), polisztirol, acél, üveg, latex, akril anyagokkal (Lorenz et al., 1997), korund kerámia, akril, acél anyagokkal (Sorace et al., 1997), gránit golyókkal (Durda et al., 2011) végeztek kísérleti vizsgálatokat. Az ütközési tényező mérések alapján még homogén anyagú szabályos testek esetén is mutat szórást (Tomar, Bose, 2018).



8. ábra Mért ütközési tényezők különböző anyagú, alakú szemcsékre különböző sebességek mellett (Hlosta et al., 2018) (CoR: ütközési tényező, velocity: ütközés sebessége, wood-ash: kőrisfa, corn seeds: kukoricaszemek, spruce sawdust: fenyőfűrészpor, coal: szén)

Természetes anyagok esetében, amikor az anyag homogenitása is kérdéses és alakja szabálytalan, az ütközési tényező nagyon nagy szórást mutat (Hlosta et al., 2018). A 8. ábrán

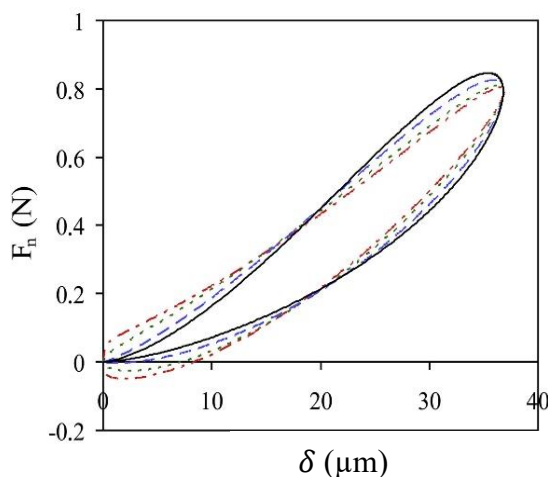
látható, hogy a mért tartományban nagyon nagy szórásokat mértek. A szórás nagyrészt a centrikus ütközés tökéletlenségéből adódik, látható, hogy a szabálytalan alakú szemcsék eredményeinek szórása sokkal nagyobb, mint a szabályos szemcséké. Az illesztett egyeneseknek ilyen szórások mellett nincs sok értelme, nagyjából ugyanilyen illeszkedéssel lehetne konstanst illeszteni a mért pontokra. Azt meg lehet állapítani, hogy az ütközési tényező a sebességtől független (a szórás nagyságrenddel nagyobb, mint a változás), vagy csak elhanyagolható mértékben függ tőle.

Az ütközési tényezőt VEM alkalmazásával, az ütközés folyamatának modellezésével is meg lehet határozni, a valós peremfeltételek közül néhányat el kell hanyagolni vagy modellezni (Zhang, Vu-Quoc, 2002), (Wu et al., 2003), (Wu et al., 2005), (Adams et al., 2004). Ezek az módszerek kiküszöbölik az excentrikus ütközés és a szabálytalan geometria problémáit, azonban az eredmények mégsem alkalmasabbak a DEM alkalmazásra. A diszkrét elemes modellezés során általában nem jellemző a tökéletes geometria és homogén anyagok, így hiába alkalmazunk pontosabb modelleket, az ütközések akkora szórásokat mutatnak, hogy nem lesz a valós esetre pontosabb a modellünk, mint egy egyszerűbb leírással.

3.4.2. Ütközési tényezőt alkalmazó kapcsolati modellek

Diszkrét elemes modellezéskor az ütközés során elnyelt energiát kapcsolati (kontakt) modell segítségével számítjuk. A vizsgálatok során a normális irányú energiaelnyelést vizsgálom. Két test kapcsolatát a köztük létrejövő erő-elmozdulás értékek határozzák meg a modellezéskor. A kontakt modellek normál erő esetében két fő típusú energiaelnyelési módot alkalmaznak. Az egyik esetben a rugalmas tag mellett van egy viszkózus tag, ami az energiaelnyelést biztosítja, a másik esetben (ez lineárisan rugalmas modellre korlátozódik) a modell különböző rugalmasságot mutat összenyomódáskor és kirugózáskor.

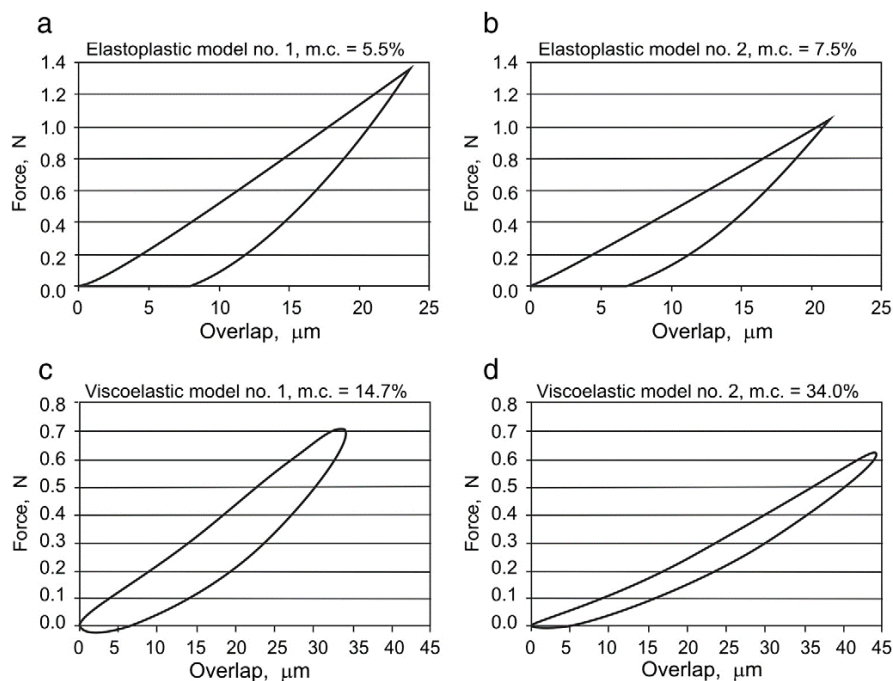
Viszkózus csillapításkor a modellben van egy sebességtől függő csillapító tag, amely tag egyik paramétere az ütközési tényező. Cundall és Strack is ilyen típusú modellt alkalmazott az első diszkrét elemes modell létrehozásakor (Cundall, Strack, 1979). Széles körben használatos a Hertz-Mindlin kapcsolati modell (Hertz, 1882), (Mindlin, Deresiewicz, 1953), (Tsuji et al., 1992), (Dong et al., 2024), (Liu et al., 2024), (Wand et al., 2024), (Derakhshani et al., 2017) ennek nagy előnye, hogy az érintkezési erőt a valóságot jól leíró nemlineáris kapcsolattal modellezi és ehhez illeszt egy viszkózus csillapító tagot (Hu et al., 2011), (Zdancevičius, 2017), (Horabik et al., 2017). Ezen kívül több viszkózus csillapítású modellt alkalmaznak (Orosz, Bagi, 2023), (Smilauer et al., 2016).



9. ábra Viskózus csillapító modellek erő-deformáció függvényei (--- Tsui et al. (1992), --- Kuwabara and Kono (1987), — Alizadeh et al. (2013), — Hu et al. (2011), (F_n : normál erő, δ : átfedés)

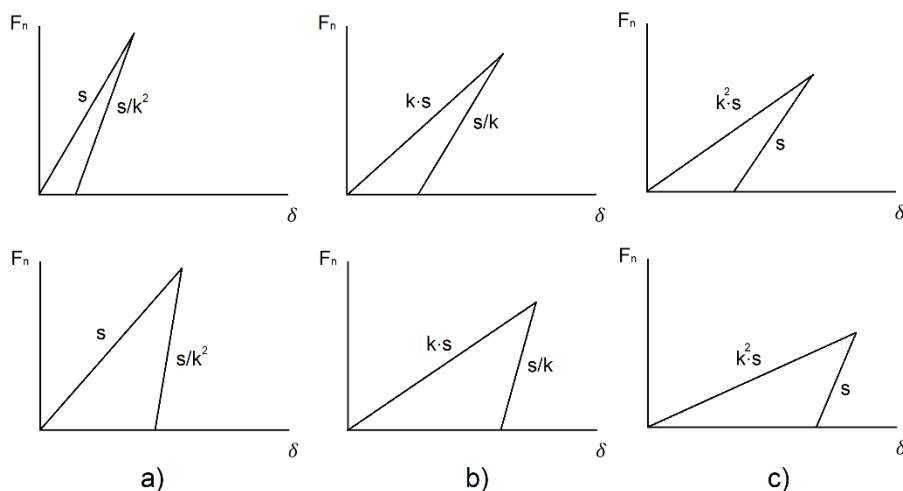
Egyszerű sebességfüggő csillapító kapcsolati modellt alkalmaznak csőben való áramlás modellezésére (Tsui et al., 1992), molekuláris dinamika alapú modellt (Walton, 1983), bond kötéssel való párhuzamos viszkózus csillapítást talajra (Tamás, 2018), talaj-szerszám kölcsönhatásra (Tamás, 2024), homokra (Zhou et al, 1999), nem-newtoni folyadékkal működő modell (Alizadeh et al., 2013). A viszkózus csillapítás többféle karakterisztikájú lehet, így az erő elmozdulás függvények és a modellel szimulált ütközési tényező is különbséget mutat, néhány jellemző függvénytípust láthatunk a 9. ábrán. Az ábrán az F_n normál irányú erő a δ függvényében látható. δ az eredeti kontakt modellek esetében a rugalmas deformációt jelenti, de mivel DEM esetén merev testekről van szó, amelyek nem deformálódnak, így átfedést jelent, ami az alkalmazást nem befolyásolja.

Hertz érintkezési modellt elasztoplasztikus csillapítással párosít Wojtkowski (Wojtkowski et al, 2010) ez és néhány jellegzetes viszkózus csillapítású kapcsolati modell erő-elmozdulás ábrája látható a 10. ábrán. Látható, hogy mindegyik különböző lefutású eredményt produkál. A viszkózus csillapító tagok alkalmazása esetén a rugalmas alakváltozás minden esetben az eredeti állapotába tér vissza a terhelés megszűnése után, míg a képlékeny deformációt alkalmazó modell maradó alakváltozást mutat és nem nyeri vissza az eredeti állapotát a terhelés megszűnése után. A maradó alakváltozás folyamatos nyomon követése jelentősen növeli a számítási igényt, ebből a szempontból a viszkózus modell jobb. A diszkrét elemes modellezések során szinte állandó probléma a számítási kapacitás, így a viszkózus csillapító modell kisebb számítási igénye (valamint a képlékeny alakváltozás ritka előfordulása a valós szemcséknél) indokolja, hogy ez terjedt el szélesebb körben.



10. ábra: Viszkoelasztikus és elasztoplasztikus kapcsolati modellek erő-átfedés függvényei (Wojtkowski et al, 2010)

Ezeiktől eltérő módszer az energiaelnyelés modellezésére a különböző fel- és leterhelési rugalmasságú modell alkalmazása. Az egyes modellek különböznek a fel és leterhelési szakasz leírasi módjában és abban, hogy a függvény milyen úton tér vissza a deformálatlan állapotába. Néhány jellemző modell látható a 11. ábrán.



11. ábra Változó rugalmasságú kapcsolati modellek (Thornton et al., 2013) (F_n : normál erő, δ : deformáció, s : merevség, k : ütközési tényező)

Az ütközési tényező háromféle megközelítés lehetséges, az első esetben (11.a ábra) a merevség az eredeti értékén a terhelési szakaszban érvényes, majd az ütközési tényező

négyzetével módosított értékével rugózik vissza. Ezt a megoldást alkalmazza Walton (Walton, Braun, 1986), (Walton, 1993), Stronge (Stronge, 1994), (Stronge et al., 2001).

Ekkor összenyomódáskor:

$$F_n = s \cdot \delta, \quad (12)$$

kirugózáskor:

$$F_n = \frac{s}{k^2} (\delta - \delta_0), \quad (13)$$

ahol:

- F_n : normál erő,
- δ : deformáció (rugalmas modell esetében), átfedés (merev modell esetében),
- s : a kapcsolat rugómerevsége,
- k : ütközési tényező,
- δ_0 : maradó deformáció.

A második elvi lehetőség, hogy az eredeti merevséget nem alkalmazzuk, hanem annak ütközési tényezővel növelt és csökkentett értékével (11.b ábra).

Ekkor összenyomódáskor:

$$F_n = k \cdot s \cdot \delta, \quad (14)$$

kirugózáskor:

$$F_n = \frac{s}{k} (\delta - \delta_0), \quad (15)$$

A harmadik lehetőség, ha a visszarugózáskor alkalmazzuk az eredeti merevséget és az összenyomódáskor az ütközési tényező négyzetével módosított értéket (11.c ábra). Ezt a megoldást alkalmazza Luding (Luding, 1998), (Luding, 2008).

Ekkor összenyomódáskor:

$$F_n = k^2 \cdot s \cdot \delta, \quad (16)$$

kirugózáskor:

$$F_n = s \cdot (\delta - \delta_0). \quad (17)$$

A különböző rugalmasságú szakaszok elméleti alapja lehet egy rugalmas-ideálisan képlékeny anyagmodell (Thornton, 1997), figyelembe lehet venni az adhéziót (Thornton et al., 2017) és hozzáadható további viszkózus csillapító tag (Thakur et al., 2016). A változó merevségű modell alkalmazása esetén számítási igényt jelent a maradó alakváltozás kezelése,

amely az alkalmazás korlátja. További korlát, hogy csak lineárisan rugalmas esetben alkalmazható megfelelően az ütközési tényező leírására.

3.4.3. Kapcsolati modellek elemzése

A kutatásaim során diszkrét elemek módszerének területén a kapcsolati modellek csillapítására koncentráltam, ezen belül az ütközési tényező alkalmazására, így az irodalom értékelése során is erre a területre koncentráltam.

Az ütközési tényezőt alkalmazó kapcsolati modelleket három nagy csoportba osztottam. Az első a viszkoelasztikus modellek, amelyekben sebességfüggő csillapító tagot alkalmazunk. A második az elasztoplasztikus modellek, amely képlékeny alakváltozást modelleznek csillapításként. A harmadik csoport a változó merevségű modellek, amelyek esetén két különböző merevséget alkalmazunk az összenyomódás és a visszarugózás szakaszára. Az egyes modellek speciális problémáit az előzőekben bemutattam, most azokat a közös jellemzőket vizsgálom, amiben mindegyik hasonlít. Az összes modell esetében a teljes folyamat alatt történik meg az energiaelnyelés, ami a valós ütközés modellezésére megfelel, azonban a diszkrét elemes modellezéskor nem az a cél, hogy az elemek egyes ütközései során az ütközés folyamata legyen jól modellezve, hanem az, hogy az ütközési tényező megfelelően fejtse ki hatását.

Az összes modell plusz tagot ad az eredeti függvényhez, azaz a modell nem az eredeti kapcsolati modell szerint fog működni, hanem attól eltér. Ez a legtöbb esetben nem okoz gondot, mert a függvény egyébként is csak egy egyszerűsített kapcsolati modell. Azonban a Hertz érintkezési modell esetében is módosítja a függvényt, ami így nem az eredeti analitikus kapcsolatot írja le a szemcsék között, hanem annak egy torzított verzióját.

A numerikus stabilitás további növelése szempontjából az összes modell ugyanabba a korlátba ütközik. Minden esetben a legnagyobb összenyomódás körül kis mértékű az energiaelnyelés nagysága. A viszkózus csillapításkor azért, mert a legnagyobb összenyomódáskor vált előjelet a sebesség, így zérus közeli az értéke, ezért kicsi a csillapítás. A kétféle rugalmasságú és az elasztoplasztikus modell pedig a legnagyobb összenyomódáskor vált a két függvény közt, így ott egy csúcsa van az erő-deformáció függvénynek, ami szintén kis energiaelnyelést jelent. Ha teljes ütközési folyamatot nézünk terheletlen állapottól terheletlen állapotig, akkor mindegyik megoldás megfelelő. Azonban amikor egy halmazt modellezünk, akkor leggyakrabban a halmaz nyugalmi vagy ahhoz közeli állapotba kerül és a szemcsék közt állandó a kapcsolat. Ebben az esetben a kapcsolatokban nem tud lejátszódni a

terheletlen állapottól terheletlen állapotig tartó teljes ütközési folyamat. A valóságban nincs is ütközés a szemcsék közt, azok folyamatos kapcsolatban vannak és a deformáció stabilan tartja a szemcséket. A diszkrét elemek numerikus modellezése során azonban nem folytonos az idő, a szemcséket diszkrét időlépésekben modellezzük. Az egyes lépésekben az elemek közti átfedés nagysága változik, így a változó kapcsolati erő dinamikus hatásként lép fel a rendszerben, amit csillapítani kell, ha a számítás stabilitását növelni szeretnénk. Az időlépéseket igyekszünk a legnagyobbra választani, hogy csökkentsük a számítási igényt, ahogy növeljük az időlépést, a dinamikus hatás egyre nagyobb. Minden terhelés esetén megtalálhatjuk azt a kritikus időlépést, amely esetén a kapcsolati modellek csillapító hatása már nem képes a dinamikus hatást kompenzálni és a szimuláció instabillá válik. Ha a maximális időlépést növelni szeretnénk, a numerikus stabilitást kell növelnünk úgy, hogy ne változzon meg a modell helyessége. Olyan kapcsolati modellre van szükség amely alkalmas arra, hogy a összenyomott állapotban, kis mértékű deformáció esetén is megfelelő csillapítást adjon, de teljes ütközési folyamat esetén az ütközési tényező helyes értékét mutassa. Erre a bemutatott kapcsolati modellek egyike sem képes. A megoldása a problémának egy olyan kapcsolati modell, amely a teljesen összenyomott állapot közelébe koncentrálja az energiaeinyelést, az ütközési tényezőnek megfelelő értéket biztosítva.

4. A kutatások során alkalmazott módszerek

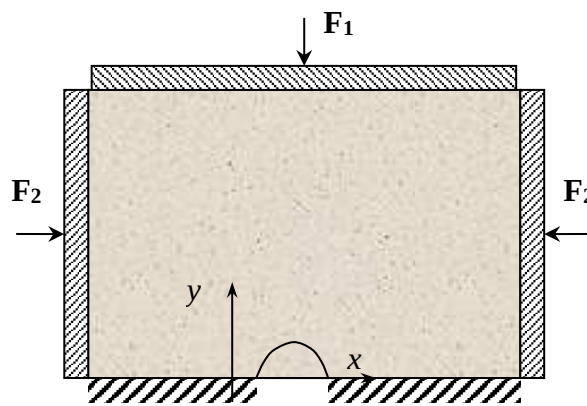
4.1. Boltozódási vizsgálatok

4.1.1. Berendezés leírása

Az eredeti boltozódási mérések célja a boltozat kialakulásának vizsgálata volt. A berendezést a MATE jogelőd intézményében a GATE Mechanika és Műszaki Ábrázolás Tanszékén tervezték meg és a laboratóriumban rendelkezésemre állt. A berendezés úgy van kialakítva, hogy azokat a tényezőket szabadon lehessen módosítani, amelyek a boltozat stabilitását befolyásolják. A jelenlegi vizsgálataink azonban a boltozat alakját leíró függvény típusára vonatkoznak, így a boltozódási mérések adatai közül csak az alakra vonatkozó eredményeket vizsgáltam.

A 12. ábrán látható boltozódásvizsgáló berendezéssel végeztük el a kísérleteket. A készülék célja, hogy síkalakváltozási állapotot hozzon létre, aminek az eredményeképp látható síkbeli boltozat alakul ki. Ennek érdekében két párhuzamos és függőleges átlátszó plexilap között van kialakítva egy téglalap alapú üreg. A plexilapra kívülről a boltozat méreteinek rögzítésére szolgáló négyzetrácsot helyezünk. A lapokkal határolt üreg szélessége kellően nagy ahhoz, hogy ne zavarja a közepén kialakuló boltozat feltételeit az a két oldalfal. Az alsó felület a feltöltés idejére teljesen lezárható, a vizsgálat során pálcákkal beállítható rést hozunk létre, amely szintén a síkmodell feltételeinek megfelelően állandó szélességű. Egy pálca szélessége 10 mm, a maximálisan beállítható legnagyobb részméret 220 mm.

A jelenlegi vizsgálataink szempontjából nem releváns, de a készülék oldalfalai mozgathatóak, így azokkal az oldalirányú terhelést módosítani lehet, a betöltött anyagra felülről terhelőlemez helyezhető, ami a függőleges terhelés beállítását teszi lehetővé. Az első és hátsó átlátszó fal rögzített, azokon a terhelés a másik kettő függvénye. A kísérletek során a nyomásviszonyok boltozódásra gyakorolt hatását lehet vizsgálni. A különböző feltételek esetünkben nem érdekesek, mert csak a kialakult boltozatok alakját vizsgáljuk. A berendezésben a céloknak megfelelően a síkbeli boltozatok jönnek létre, amelyek egy alapgörbével leírhatóak. Az alapgörbe az oldalfalon láthatóvá válik és annak geometriája rögzíthető.



12. ábra Boltozódásvizsgáló berendezés fényképe és vázlata

A kísérleteket a könnyű kezelhetőség miatt nedves homokkal végeztük el. Annak nedvességtartalma és ezzel együtt kohéziója könnyen változtatható, gyorsan homogenizálódik. Száraz, kohéziómentes homoknál nem alakul ki boltozat. A méréseket alul lezárt állapotban kezdtük, az adott nedvességtartalmú homok betöltésével, majd beállítottuk a megfelelő nyomásokat és utána nyitottunk megfelelő rést a szerkezet alján. Az akkori mérések elsődleges célja a nedvességtartalom, tömörítés, feszültségállapot függvényében a boltozat kialakulási feltételeinek vizsgálata volt. A mérések során regisztráltuk a boltozat alakját is. A boltozat kialakulásának vizsgálata nem tárgya a mostani vizsgálatoknak, így az azokhoz tartozó beállítások és eredmények ismertetését elhagyom. A mostani vizsgálatok szempontjából fontos kérdés az alakot leíró függvény típusa.

4.1.2. A kísérlet leírása

A mérésekhez a boltozat kialakulásához szükséges nedvességtartalmú homokot alkalmaztunk. A pontos nedvességtartalom méréséhez mintát vettünk. A nedvességtartalom megállapítása után megkezdhattuk a mérést.

A mérés menete:

- a berendezés aljának lezárása,
- a berendezés feltöltése homokkal legalább 500 mm magasságig,
- a mérőórák nullázása,
- a felső terhelés ráadása súlyokkal,
- az oldalirányú terhelés ráadása menetes orsókkal,
- a rés megnyitása, majd a zárólemezek fokozatos eltávolítása,
- a különböző résméretekhez tartozó mérőóraállások leolvasása,
- a boltozat megjelenése után méreteinek megállapítása különböző résméreteknél,
- a maximális rés elérése után a boltozat (ha még van) stabilitásának vizsgálata úgy, hogy a boltozat kis részeinek eltávolításával megzavarjuk a kialakult öntartó alakzatot.

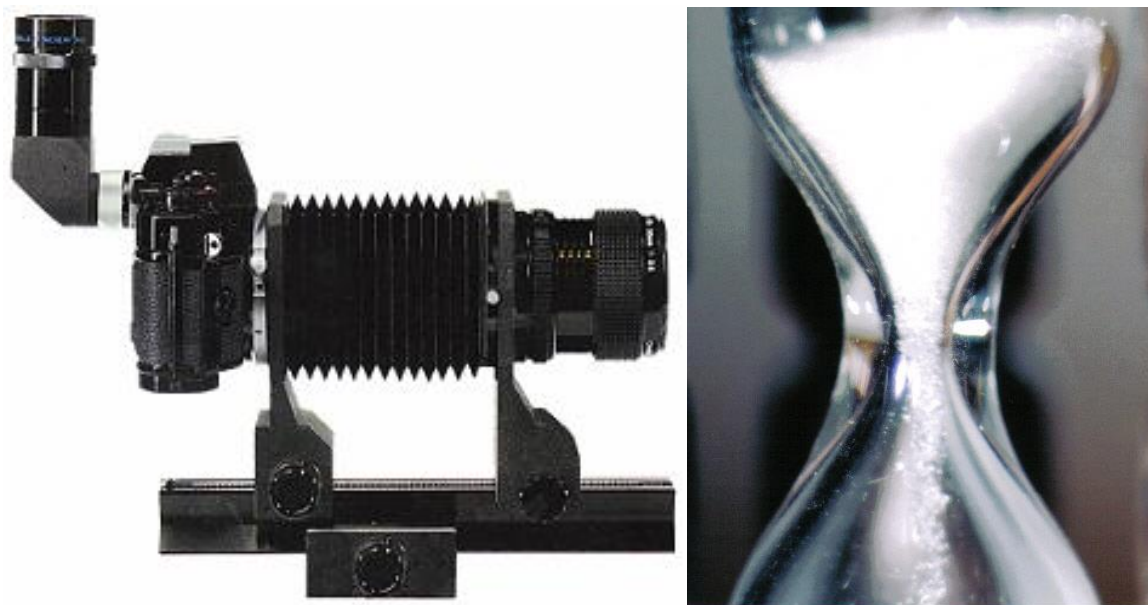
Minden mérést háromszor ismételtünk meg, a feltételek változtatása nélkül. A mérési körülményeket, terhelési és anyagminőségi adatokat mérési jegyzőkönyvben rögzítettük. A jelenlegi kutatásokban a boltozat alakját leíró adatokat használtam fel.

4.2. Kifolyási vizsgálatok

4.2.1. Kifolyás szemcseszintű vizuális vizsgálata

A kifolyás során azt vizsgáltam, hogy folytonos-e az áramlás (Johanson, 1965) vagy vannak elkülöníthető fázisai. Az 5.1 fejezetben bemutatott hipotézis szerinti jelenség kísérleti igazolása volt a cél. A kísérleteket ezért úgy kell elvégeznünk, hogy a látható legyen a szemcsék mozgása. A láthatóság egyik feltétele, hogy a tároló fala átlátszó. De hiába átlátszó, ha a halmaz önmaga eltakarja a folyamatot. Ennek elkerülésére kis méretű eszközre van szükség. Mindkét feltételt teljesíti egy homokóra (13. ábra).

A homokórában lévő áramlásról készítettem fényképeket. A mozgásokat villanófénnyel „befagyaszta” láthatóvá tehető a kifolyás egy-egy pillanata. A kísérletek során a szűkületben történő áramlásra makrofényképezéssel, harmonika kihuzat segítségével tudtam ránagyítani a megfelelő minőségben.



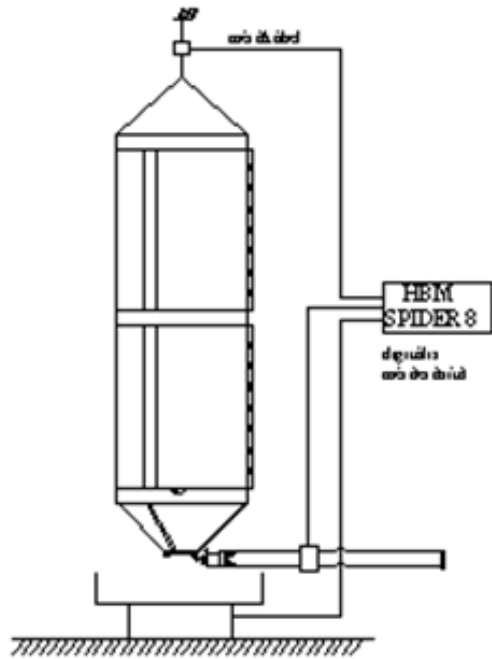
13. ábra Homokóra és fényképezőgép harmonika kihuzattal

4.2.2. Kísérleti silók

Nagy méretű hengeres modellsiló

A kifolyási kísérletek egy részéhez a 14. ábrán látható mérő és kiértékelő rendszerrel összeépített használtuk. OTKA TO25365 pályázat kísérleteihez az akkori Szent István Egyetem Mechanikai és Géptani Intézet laboratóriumában építették meg a berendezést. A modell méretei: 440 mm átmérőjű és 1250 mm magas, 0,18 m³ térfogatú hengeres siló, cserélhető kúpos garattal. Három garat készült 50mm és 100 mm között változtatható átmérőjű (kúpos toldattal) kifolyónyílással. A garatok félkúpszöge $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$. Két helyen mértük a kifolyást, a siló és a kifolyt anyagot felfogó tároló súlyát rögzítettük az idő függvényében.

A mérőberendezés átlátszó fala lehetővé tette a folyamat megfigyelését. A különböző garatokban térfogati és tölcséres kifolyási mód is megfigyelhető volt a mérések során.



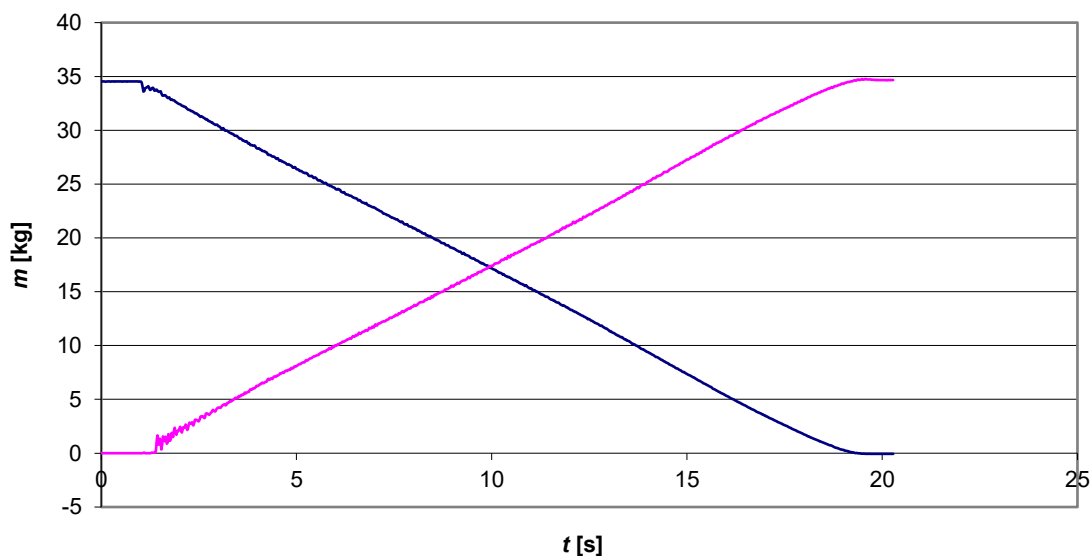
14. ábra Nagy méretű kísérleti hengeres silómodell

A mérések során 50 Hz mintavételi frekvenciát alkalmaztunk. Minden beállítás mellett háromszor ismételtük meg a mérést.

A kísérletek során megállapítottuk a kifolyás módját, amely az átlátszó falon keresztül vizuálisan történt. A fal menti mozgás megléte vagy hiánya és a halmaz felső szabad felületének alakja egyértelműen jelezte a kifolyás tölcéses vagy térfogati jellegét. Átmeneti mód is előfordult, minden mérés esetében ezt az egyéb adatokkal együtt rögzítettük a mérési jegyzőkönyvben.

A súlymérés alapján tömeg-idő értékpárokat hoztunk létre, amely alkalmas volt a kifolyás tömegáramának meghatározására. Ezeket a mérések során rögzítettük és a mérési jegyzőkönyvvel együtt a kiértékelés adatbázisát szolgáltatta.

A 15. ábrán két jellegzetes tömeg-idő függvényt mutatok be. A két eltérő színű görbe a silóban lévő és a mérőedényben lévő tömeget mutatja az idő függvényében. A csökkenő értékek a silóban tárolt anyag, a növekvő értékek a kifolyt anyag tömegét mutatják. A kifolyás legutolsó szakaszában a görbék jellege megváltozik, ennek oka, hogy az anyag fogyásával a garatban megváltozik az áramlás, ezt a szakaszt nem veszem figyelembe kiértékeléskor.



15. ábra A kifolyt (rózsaszín) és a silóban lévő (kék) anyag tömege az idő függvényében

A kifolyási vizsgálatok értékelése során felmerült az igény egy több állítási paraméterrel rendelkező, könnyebben, gyorsabban kezelhető silóra. A nagy méretű modellsilóban kukorica, zab, búza, polietilén granulátum és különböző darák kifolyási mérését végeztük el.

Kis méretű hengeres modellsiló

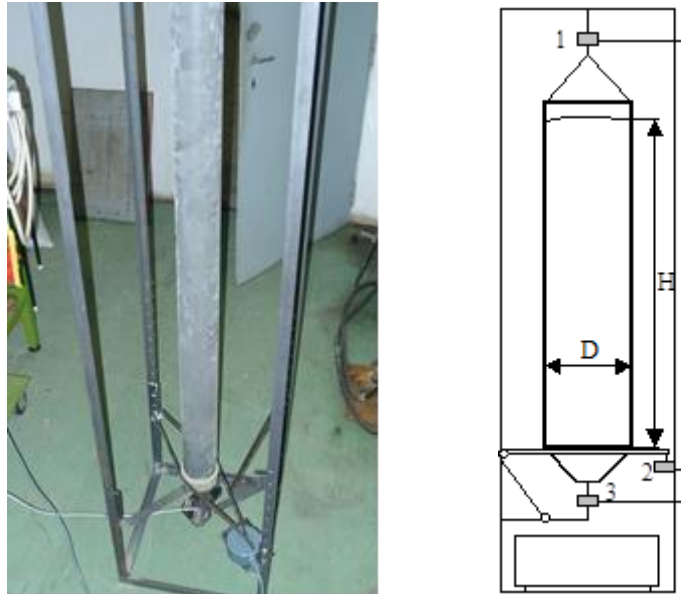
A második silómodellt saját PhD kutatásaim során úgy alakítottam ki, hogy a kifolyónyílás átmérője és a garat kúpszöge könnyen és gyorsan változtatható legyen. A siló átmérőjét kisebbre választottam, így könnyebben kezelhető és a mérések között a feltöltést gyorsabban, egy személy is elvégezheti (a nagyobb silót három személy tudta kezelni). A siló átmérője 100 mm, magassága 1500 mm. A garat cserélhető, és a kis méret lehetővé teszi a cserekúpok gyors gyárthatóságát és módosíthatóságát.

A kísérletek során két paramétert vizsgáltam, amely eltérő kialakítást igényelt.

- Kifolyónyílás átmérőjének hatása: ebben a kísérletsorozatban a kifolyónyílás átmérőjét 25, 30, 35, 40, 45, 60, 70, 80, 90, 100 mm-es méreteken változtattam, a méréseket búzával végeztem el háromszoros ismétléssel. A kifolyókúp félkúpszöge minden esetben 45° volt. Az átmérő legnagyobb értéke ebben az esetben már nem jelentett fizikailag garatot, mert megegyezett a 100mm-es silóátmérővel, így annak meghosszabbítása volt. A kísérletek során ugyanazt a garatot használtam, a kifolyónyílás lépésről lépésre történő felbővítésével.

- Félkúpszög hatása: vizsgálatához 10, 20, 30, 37,5, 45, 90°-os (síkfénék) félkúpszögű garatokat gyártottam, 20 mm-es kifolyónyílás átmérővel. A mért anyag búza. Ebben a vizsgálatban minden félkúpszög esetében külön garatot kellett gyártani.

Három erőmérőt építettem be (16. ábra), ezek a silón (1), a garaton (2) és az elzáró elemen (3) érzékelik az erőt. Kifolyási mérésekhez értelemszerűen csak az első kettőt használjuk. A mérőrendszer többi eleme nem változott a nagyobb modellhez képest.

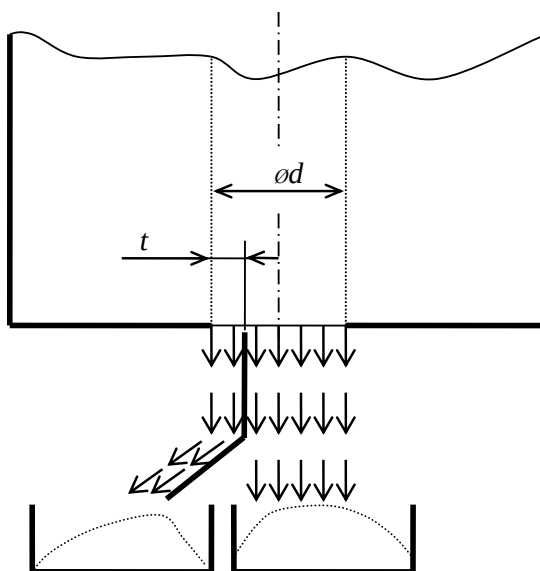


16. ábra Kis méretű hengeres silómodell

A kis méretű silóval vizsgáltam meg a korábbi modellek által le nem írt sebességeloszlást. Erre azért van szükség, mert a korábbi modellektől eltérően a silókifolyási modellem a kifolyónyílás mentén változó sebességet mutat. Ahhoz, hogy ezt ellenőrizni lehessen, szükség van a sebesség eloszlásának valamilyen jól kivitelezhető mérésére. A mérés elve, a silóból kiáramló anyag kétfelé osztása egy terelőlemez segítségével (17. ábra), amelynek a pozíciója állítható és meghatározza a rés méretét. A kettéosztott áramlással az adott felületen átáramlott tömegáram mérhető úgy, hogy nem befolyásolja az áramlást a silóban, az áramlást nem zavarom meg, mert a kifolyónyílás utáni áramlást osztom ketté. Ez bonyolultabb számítást igényel az eredmények kiértékelése során, viszont pontosabban mérhető.

A kísérletek során a tömegáramot mérem, amivel az adott résmérethez tartozó átlagos sebességet szeretném meghatározni, így az egyes mérések különbsége adja két résméret közti körszeletre vonatkozó tömegáramot, amiből számítható a réshez tartozó átlagos sebesség.

A terelőlemez mérés esetében a korábban használt anyagok szemcsemérete túl nagy lett volna, ezért ehhez a kísérletsorozathoz mákot alkalmaztam. Ez az anyag a kis szemcseméret miatt 31mm kifolyási átmérő esetén (ahol a rés mérete maximuma 15mm) is alkalmas volt a terelőlemez mérésekhez és jól mérhető eredményeket mutatott. A beállított rés méreteket 2 és 15mm közt 1mm-es lépésekkel változtattam, minden mérést háromszori ismétléssel végeztem el.



17. ábra Sebességeloszlás mérése

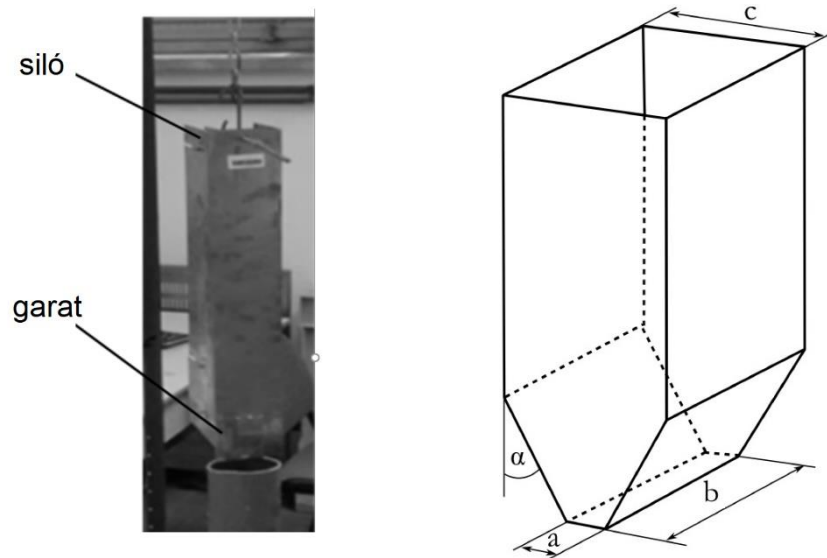
Síkáramlású modellsiló

A síkáramlást négyszög keresztmetszetű modellsilóval hoztuk létre, Safranyik Ferenc doktoranduszom PhD kutatási munkája során, a modell vázlata a 18. ábrán látható. A modell 0,3mm vastag acéllemezből készült. A garat ennél a modellenél is cserélhető, ahogy a korábbi hengeres siló esetében. Három különböző vizsgálathoz készült három különböző paraméterében változó készlet.

- A garat lejtésének vizsgálatához a szimmetrikus sík lejtő félnyílásszögét (18. ábra α méret) 10° és 70° között hét lépcsőben változtattuk. Ezekben az esetekben a kifolyónyílás állandó 20mm x 100mm méretű volt. A siló mérete 100mm x 100mm, így a kis hengeres siló mérettartományába esik. A szélességet nem változtattuk ezen kísérletek során.
- A második kísérletsorozat a silótest szélesség-mélység arányának vizsgálatára vonatkozott. Ekkor a siló c mérete állandó 100mm volt, a b méretet 25mm és 125mm

között fokozatmentesen állíthatóvá tettük. A garat félnyílásszöge állandó 60° volt. A siló arányai ebben vizsgálatban $c/b = 0,8 - 4$ között változtak.

- A harmadik kísérletsorozatban a modell alkalmazhatósági határainak vizsgálata volt a cél. Ebben az esetben azt vizsgálatuk, hogy mekkora minimális garat szükséges ahhoz, hogy az áramlások modellezésére a létrehozott modell még alkalmas legyen. A siló és a kifolyónyílás a/c arányát $0,15 - 1$ határok között változtattuk



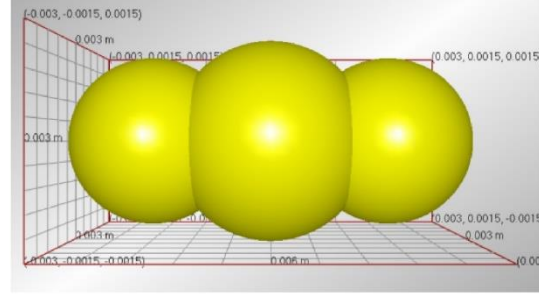
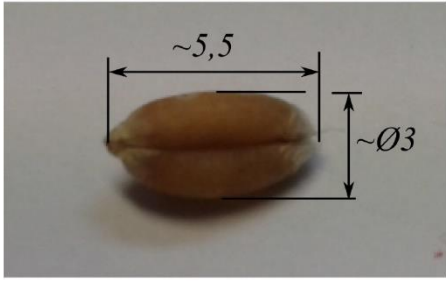
18. ábra Síkáramlású modellsiló

4.2.3. Silókifolyás diszkrét elemes modellje

A kifolyás áramlásának vizsgálatához felhasználtam a korábban silókifolyásra modellezésére létrehozott numerikus modell (Oldal, Safranyik, 2015) eredményeit is. A kifolyás modelljét a következő modellek alkalmazásával hoztuk létre.

Szemcse modellje

A silókifolyás modellezése során a mérésekhez is leggyakrabban alkalmazott búza anyagot választottuk. Ennek geometriai modelljét 50 búzaszem átlagos méretével alakítottuk ki, állandó méretű elemekből a 19. ábra szerint.



19. ábra Búzaszem átlagos mérete és diszkrét elemes (clump) modellje

A búzaszemek mért átlagos mérete 5,5mm hosszúságot és a szélesebb oldalán 3mm szélességet mutatott. Az eltérések kis mértékűek voltak, így a modellezéskor állandó méretű szemcséket alkalmaztunk. A modellezéshez használt búzaszemet három gömbből építettük fel, a középső nagy gömb 2,5 mm átmérőjű, a két kisebb 1,5 mm átmérőjű volt, a középső gömb középpontjától 1,5 mm távolságra eltolt középponttal, mindkét oldalon szimmetrikusan. A modellezés során a korábban búza szárítóban történő áramlásának modellezéséhez általunk használt (Keppler et al., 2012) szemcsétől csak kis mértékben tértünk el, így elengedő volt a szemcse sűrűségét kalibrálni a korábbi mikromechanikai paraméterek közül. A kalibrált szemcsesűrűség 1430 kg/m^3 a korábbi 1460 kg/m^3 helyett. Az így kapott szemcse tömege $0,0356 \text{ g}$, főtehetlenségi nyomatékai pedig $2,918 \cdot 10^{-11} \text{ kgm}^2$ és $7,654 \cdot 10^{-11} \text{ kgm}^2$.

Kapcsolati modell

A modellezés során a szemestermények esetében már korábban bevált (Keppler et al., 2012) Hertz-Mindlin csúszásmentes (no slip) szemcsekapcsolati modellt alkalmaztuk. A modell egy normális (a két szemcse érintkezési síkjára merőleges), egy tangenciális erőt és egy görbülési ellenállást jellemző nyomatékot alkalmaz a kapcsolat leírására.

A normál irányú erő a Hertz-elméleten (Hertz, 1882) alapuló rugalmas és egy ütközési tényezőn (Mindlin, Deresiewicz, 1953) alapuló sebességfüggő csillapító tag összege (Tsuji et al, 1992):

$$F_n = \frac{4}{3} E_0 \delta^{\frac{3}{2}} \sqrt{R_0} - 2 \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{\ln(k)}{\sqrt{\ln^2(k) + \pi^2}} \sqrt{E_0 m_0^4 \sqrt{R_0}} \sqrt{\delta} v_{nrel} \quad (18)$$

$$\frac{1}{E_0} = \frac{1 - \nu_1^2}{2(1 + \nu_1)G_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{2(1 + \nu_2)G_2} \quad (19)$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (20)$$

$$\frac{1}{m_0} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (21)$$

ahol:

- E_0 : az érintkező teste redukált rugalmassági modulusa a (19) alapján számítva,
- ν_1, ν_2 : a két szemcse Poisson-tényezője,
- G_1, G_2 : a két szemcse csúsztató rugalmassági modulusa,
- δ : az érintkező testek összenyomódása (a modell merev szemcsékkal dolgozik, így ebben az esetben a szemcsék átfedése),
- R_0 : redukált szemcsesugár a (20) alapján számítva,
- R_1, R_2 : az érintkező felületek sugarai,
- k : ütközési tényező,
- v_{nrel} : a két test relatív normál irányú sebessége,
- m_0 : redukált tömeg az érintkező szemcsékből (21) alapján számítva,
- m_1, m_2 : a kölcsönhatásban résztvevő szemcsék tömege.

Az érintő irányú erő (Tsuji et al, 1992) egy rugalmas és egy ütközési tényezőből származtatott csillapító tagból áll (22), ennek maximumát a Coulomb-súrlódás határozza meg (23):

$$F_t = -8G_0\sqrt{\delta R_0}\delta_t - 2\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{\ln(k)}{\sqrt{\ln^2(k) + \pi^2}}\sqrt{E_0 m_0^4 R_0}\sqrt{\delta}v_{trel} \quad (22)$$

$$F_t \leq \mu_0 F_n \quad (23)$$

$$\frac{1}{G_0} = \frac{2 - \nu_1}{G_1} + \frac{2 - \nu_2}{G_2} \quad (24)$$

ahol:

- G_0 : a szemcsék redukált csúsztató rugalmassági modulusa (24) alapján számítva,
- δ_t : a szemcsék érintő irányú összenyomódása,
- v_{trel} : a két testrelatív érintő irányú sebessége,
- μ_0 : nyugvó súrlódási tényező.

Az érintkezési erők mellett a kapcsolat a gördülési ellenállás fékező hatását is figyelembe veszi annak szemcsére gyakorolt nyomatékával:

$$M_r = -\mu_r F_n R_r \omega_r \quad (25)$$

ahol:

- μ_r : gördülési ellenállás tényezője,
- R_r : szemcse érintkezési pontja és tömegközéppontja közti távolság
- ω_r : szemcse szögsebességének irányvektora.

Mikromechanikai paraméterek

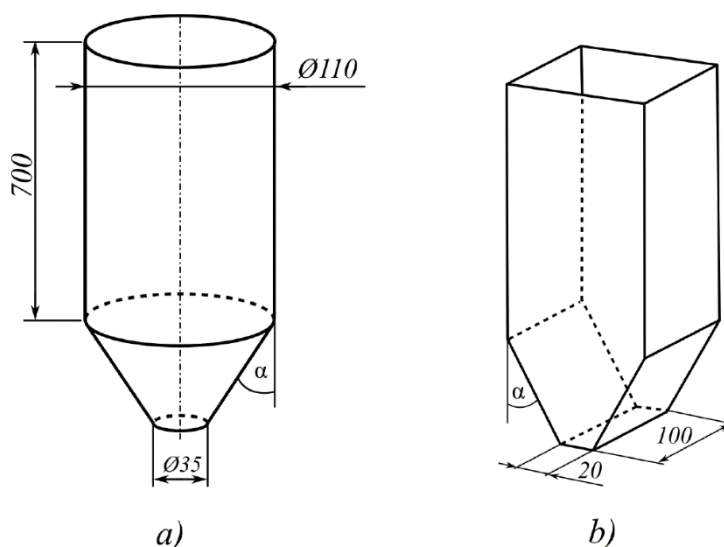
A korábban szárítóban történő áramlás modellezéséhez kalibráltunk búza alapanyagot (Keppler et al., 2012) az ott alkalmazott kalibrált paramétereket használtuk a siló esetében is. A búzaszem méretét korrigálva és az ebből adódó sűrűségváltozást figyelembe véve a silókifolyás modellezésére a következő mikromechanikai paramétereket alkalmaztuk:

1. táblázat Silómodellben alkalmazott mikromechanikai paraméterek

Mikromechanikai paraméter	búza	acél
Poisson-tényező (-)	0,4	0,3
Sűrűség (kg/m ³)	1460	7500
Csúsztató rugalmassági modulus (Pa)	$3,58 \cdot 10^8$	$8 \cdot 10^8$
Ütközési tényező (-)	búzára: 0,5 acélra: 0,6	búzára: 0,6
Súrlódási tényező (-)	búzára: 0,3 acélra: 0,25	búzára: 0,25
Gördülési ellenállás tényező (-)	búzára: 0,01 acélra: 0,01	búzára: 0,01

Silómodell geometriája

A diszkrét elemes modellezést a síkáramlás és a tengelyszimmetrikus esetre is elvégeztük, a modellezett geometria a kis méretű hengeres (20.a ábra) és a síkáramlású modellsiló (20.b ábra) esetén is a kísérletekhez használt silók méretei alapján határoztuk meg.

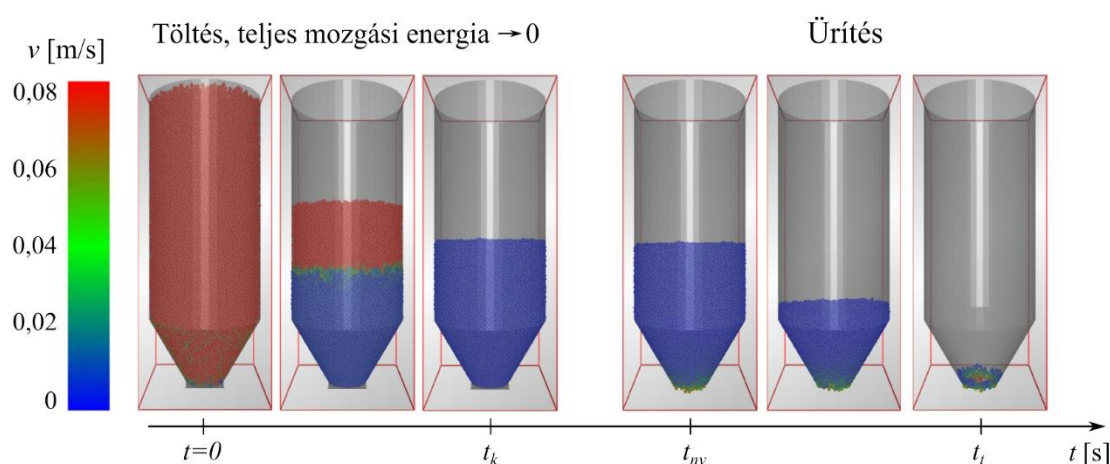


20. ábra Geometriai modellek silókifolyás diszkrét elemes modellezéséhez

A modellezés során a silóban történő áramlásokat vizsgálatuk, ezen kívül a kifolyási mód változását szeretnénk volna megfigyelni, ezért a garat szögét módosítottuk 10° - 70° között 10° -os lépésekkel, a többi méret állandó volt.

Szimuláció lépései

A kifolyás modellezésére EDEM Academic szoftvert alkalmaztunk, a modell térfogata a garat szögétől függően változik, ettől függően a modellben 45 000 – 65 000 szemcseszámmal dolgoztunk. A szimuláció egyes lépései a 21. ábrán láthatóak.



21. ábra A szimuláció lépései

Az összes kifolyási szimuláció során a következő lépésekben történt a modellezés:

1. a modell térfogatának feltöltése szemcsékkel véletlenszerű elhelyezkedéssel,
2. a gravitáció hatására a szemcsék összetömörödnek,
3. az összetömörödött halmaz a csillapítás hatására nyugalomba kerül,
4. nyugalmi állapotban a kifolyónyílást kinyitjuk,
5. létrejön az ürítés közel állandósult állapota, amely a vizsgálatok célja,
6. kiürül a halmaz a silómodellből, futtatás vége.

A vizsgálatok során a mozgási energia közel zérusra csökkenése jelentette a nyugalmi állapot elérését, az ehhez tartozó időt célszerű volt a lehető legrövidebbre venni, mivel a nyugalmi állapot és a nyitás közti időben a számítási időt feleslegesen növeli a várakozás.

4.3. Az új kontakt modell vizsgálatára alkalmazott DEM modell

Az új kontakt modellt MercuryDPM nyílt forráskódú diszkrét elemes modellező szoftverben hoztuk létre. A szoftver lehetővé teszi, hogy C++ programnyelv használatával új szemcsekapcsolati modellt hozzunk létre és azt a modellezés során alkalmazzuk. A szoftver

saját modellkönyvtárral rendelkezik, amelyben található viszkózus csillapítású Hertz (HertzianViscoelasticNormalModel) kapcsolati modell, amelyet az összehasonlításhoz használtunk.

$$F_n = \frac{4}{3} E_0 \delta^{\frac{3}{2}} \sqrt{R_0} - 2 \sqrt{\frac{5}{6} \frac{\ln(k)}{\sqrt{\ln^2(k) + \pi^2}}} \sqrt{\frac{4}{3} E_0 m_0^4 \sqrt{\delta R_0} v_{nrel}} \quad (26)$$

$$\frac{1}{E_0} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (27)$$

ahol:

- E_0 : az érintkező teste redukált rugalmassági modulusa a (27) alapján számítva,
- E_1, E_2 : a két szemcse rugalmassági modulusa,
- δ : az érintkező testek átfedése,
- R_0 : redukált szemcsesugár a (20) alapján számítva,
- k : ütközési tényező,
- v_{nrel} : a két test relatív normál irányú sebessége,
- m_0 : redukált tömeg az érintkező szemcsékből (21) alapján számítva.

2. táblázat Hertz-Mindlin modellhez alkalmazott mikromechanikai paraméterek

Mikromechanikai paraméter	értéke
Elem átmérője (mm)	2
Poisson-tényező (-)	0,3
Sűrűség (kg/m ³)	7850
Rugalmassági modulus (Pa)	$210 \cdot 10^9$
Ütközési tényező (-)	0,5

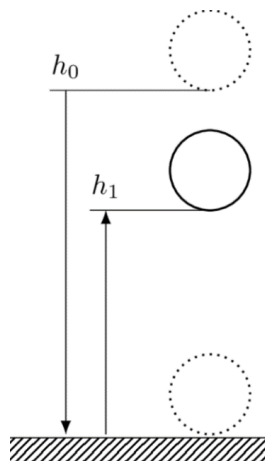
Az új kapcsolati modell a kutatásaim eredménye, ezért azt a 6. fejezetben mutatom be, a mikromechanikai paraméterek azonosak a Hertz-Mindlin kapcsolati modellben alkalmazottal. Az új modellt három esetben hasonlítottuk össze a Hertz-Mindlin modellel. Minden vizsgálat a t_R Rayleigh időlépésnél kisebb időlépéssel történt $0,1t_R - 0,5t_R$ tartományban annak érdekében, hogy a modell tulajdonságait az időlépés függvényében is meg tudjuk határozni.

4.3.1. Ejtési vizsgálat egy szemcsével

Az első vizsgálat célja, annak megállapítása, hogy az ütközési tényező hatása az új modell esetében nem változott-e meg. Ennek vizsgálatára egy szemcsét ejtettünk le $h_0 = 100\text{mm}$ kezdeti magasságból egy síkra. A visszapattanás és az időben történő mozgás

összehasonlításával megállapítható, hogy az új modell mennyire tér el a gyakorlatban bevált modelltől.

A vizsgálat vázlata a 22. ábrán látható.



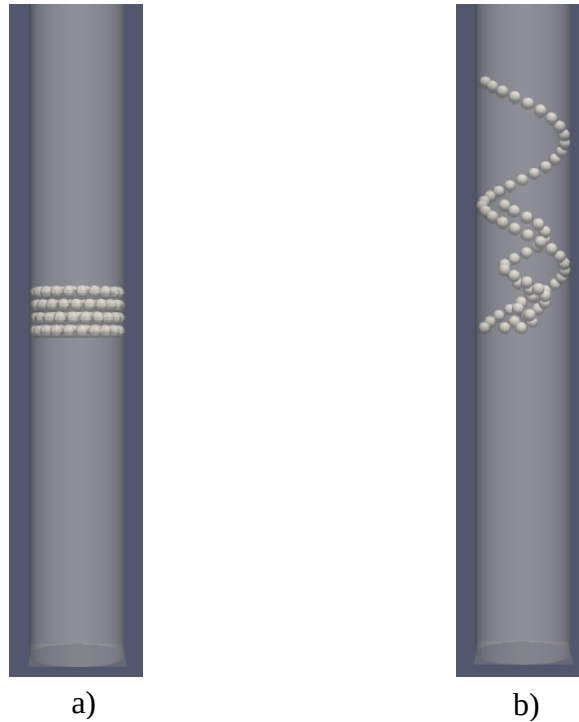
22. ábra Ejtésteszt vázlata

A vizsgálat eredményeképpen az egymás utáni h_0 és h_1 ütközés előtti és utáni maximális magasságok jelzik, hogy az ütközési tényező kezelése szempontjából az adott modell helyes-e.

4.3.2. Ejtési vizsgálat több szemcsével

A több szemcsével végzett vizsgálat célja annak megállapítása, hogy a többszörös ütközések esetén milyen hatása van az új modellben alkalmazott csillapításnak. Két beállítással történt a vizsgálat. Elsőként a szemcséket szorosan elrendezve, második esetben a szemcséket lazán, több spirál mentén elrendezve indítottuk. Mindkét esetben a szemcse minden tulajdonsága megegyezett az előző fejezetben bemutatott esettel, valamint ugyanazt a 2. táblázatban bemutatott paramétereket alkalmaztuk a modellezés során.

A vizsgálatokat egy 30mm átmérőjű és 300mm magas hengerben végeztük. A legalsó szemcsék kezdeti magassága 150mm volt, az első esetben szorosan elrendezve 4 sorban definiáltuk a szemcséket. A második esetben három különböző sugarú spirálban, nagy hézagokkal rendeztük el a szemcséket a 23. ábrán látható módon.



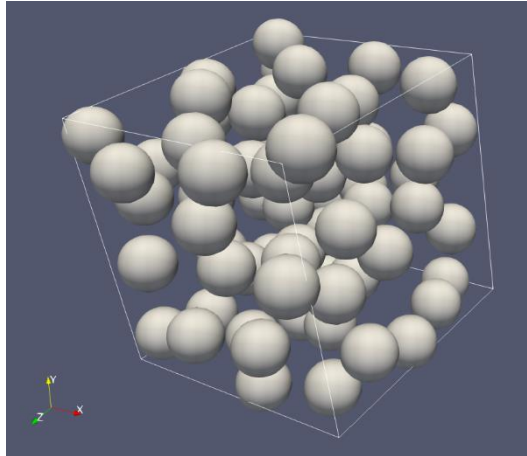
23. ábra Több szemcsével elvégzett ejtészvizsgálat geometriai modellje

A korábbi vizsgálat arra irányult, hogy a csillapítás módjának változását vizsgáljuk abból a szempontból, hogy az ütközési tényező azonos módon viselkedik-e, mint a bevált modell esetében. Ez a vizsgálat viszont az eltérésekre koncentrál, annak megállapítása érdekében, hogy vannak-e a szimuláció során megfigyelhető előnyei az új modellnek.

4.3.3. Izotróp nyomás

Az izotróp nyomás vizsgálatot annak megállapítására végeztük el, hogy a Hertz-Mindlin kapcsolati modell és az új kapcsolati modell numerikus stabilitását össze tudjuk hasonlítani. Ezt úgy értük el, hogy egy $0,095 \text{ m}^3$ térfogatú kockát véletlenszerű elrendezéssel kitöltünk az előző vizsgálatoknál is alkalmazott, 2. táblázatban bemutatott paraméterekkel rendelkező szemcsés anyaggal (24. ábra). Ezután egy olyan kinematikai peremfeltételt adtunk meg, amely a kocka minden lapját állandó $\dot{\epsilon} = 0,4 \text{ 1/s}$ deformációsebességgel összenyomja $\underline{\underline{\dot{A}}}$ mátrix szerint.

$$\underline{\underline{\dot{A}}} = \dot{\epsilon} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (28)$$



24. ábra Izotróp nyomás geometriája

Minden vizsgálat a t_R Rayleigh időlépésnél kisebb időlépéssel történt $0,1t_R - 0,5t_R$ tartományban annak érdekében, hogy a modell tulajdonságait az időlépés függvényében is meg tudjuk határozni.

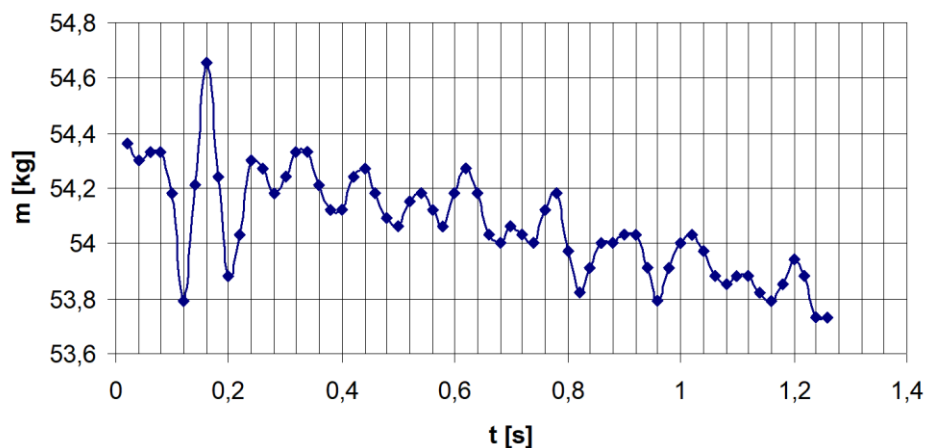
5. Silóból történő kifolyás új analitikus modellje

Az első kifolyási modell a PhD kutatásaim eredménye, amely a hengeres silók esetére érvényes analitikus modell. Ennek továbbfejlesztése sík falú silókra és helyességének ellenőrzése további kutatásokat igényelt. Ebben a fejezetben a modell alapját képező hipotézist, az ebből létrehozott kifolyási modelleket, valamint ezek igazolását mutatom be.

5.1. Instabil boltozatok hipotézise

5.1.1. Kifolyás új definíciója

A kifolyással kapcsolatban a boltozat kialakulását szokás vizsgálni. Ha boltozat alakul ki, akkor a kifolyás nem történik meg, az anyag a silóban reked. Ezt a boltozatot a megkülönböztetés végett stabil boltozatnak nevezem. Korábban már esett szó róla, hogy boltozati hatás viszont minden szemcsés anyagnál kialakul ha kis mértékben elmozdítjuk a támaszt (Kézdi, 1987). Ezt annyiban módosítom, hogy a boltozat a kifolyás esetében is kialakul, csak nem stabil formában. A kifolyás közben hipotézisem szerint a kifolyónyílás fölött instabil boltozatok alakulnak ki és omlanak össze folyamatosan. A kifolyt anyag az összeomlott boltozatok anyaga. Ennek két jele is felismerhető, az egyik a kifolyás dinamikája, ami sokkal nagyobb mértékű, mint a szemek által okozott dinamika. Ez a mérések során is megfigyelhető volt, a 25. ábrán látható, hogy a silóban tárolt anyag tömegmérésekor a nyitás dinamikus hatása hamar lecsillapodik, de marad egy rezgés, ami a kifolyás végéig jelen van és egy folyamatos gerjesztés jelenlétére utal.



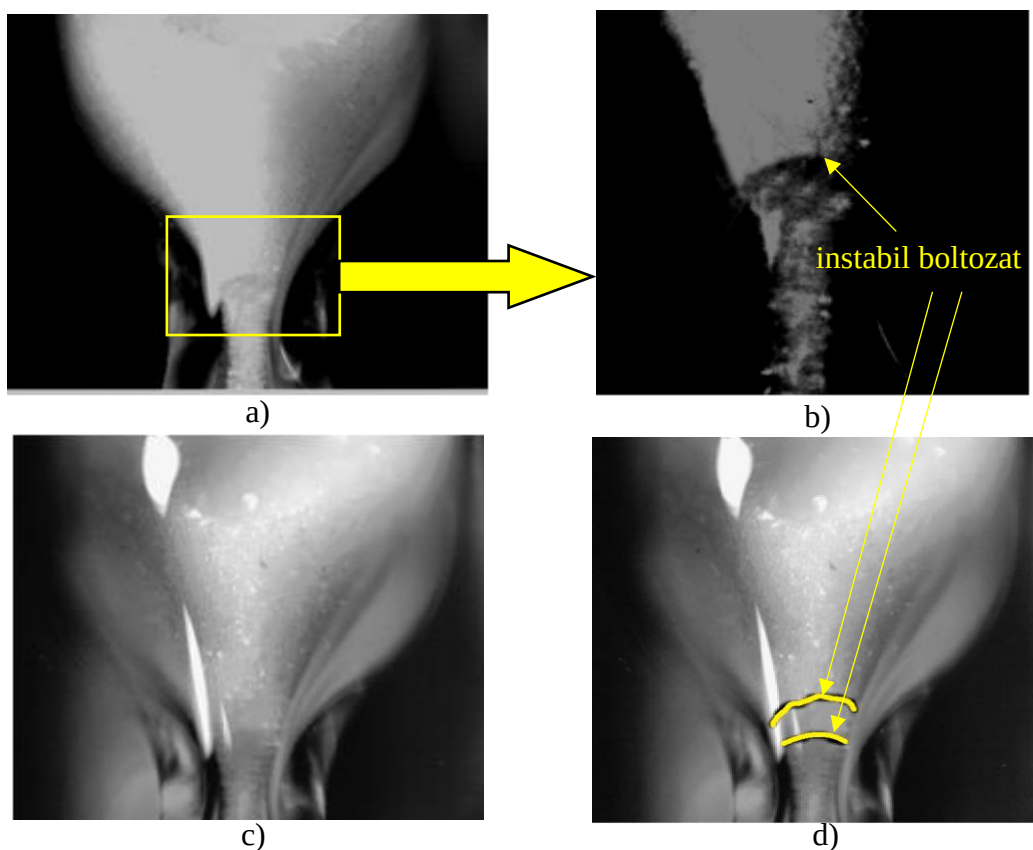
25. ábra Silóban tárolt anyag tömegének változása az idő függvényében

A szemcsés anyag kifolyása feltételezésem szerint folyamatosan kialakuló és összeomló boltozatok sorozataként jön létre. Így az anyag a kifolyónyílás fölött egy boltozat alakja által megadott pontról szabadeséssel hullik ki a silóból.

5.1.2. Kísérleti igazolás

Instabil boltozatok vizuális igazolása

A 4.2.1. fejezetben bemutatott kísérletek eredményei láthatóak a 26. ábrán. A 26.b ábrán (a 26.a részlete növelt kontraszttal) egy instabil boltozatot látunk, amely a többi felvételen nem látható, tehát csak adott időpillanatban létezett. A 26.c ábrán két boltozat egy kialakuló és egy összeomlott boltozat látható, de nagyon alacsony kontraszttal, így a 26.d ábrába berajzoltam a két boltozatot.

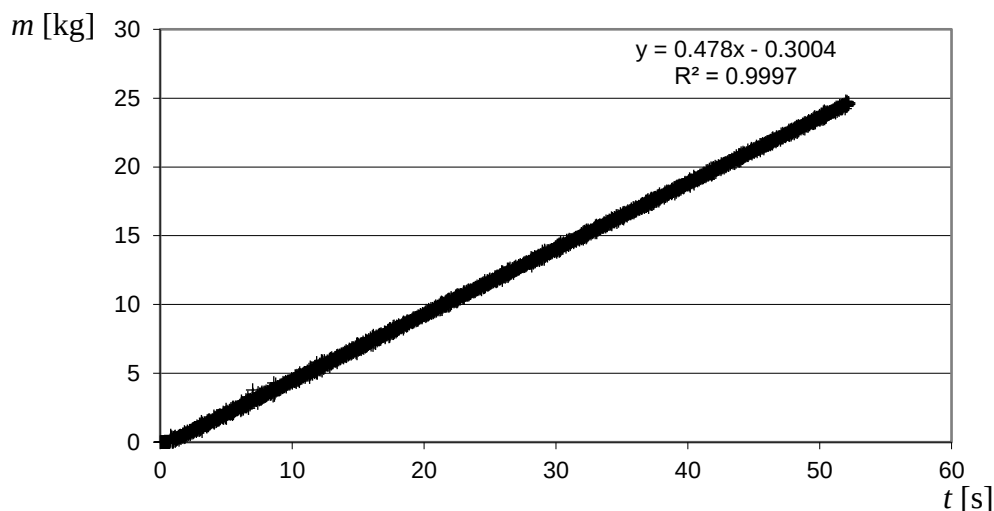


26. ábra Kifolyás közben kialakuló boltozatok

Az instabil boltozatok jelenlétét a kísérletek bizonyítják. Az a hipotézis, hogy azok folyamatos összeomlása és kihullása határozza meg a kifolyt anyag mennyiségét, az ezen alapuló számítási modell eredményeinek igazolásával bizonyítható.

5.1.3. Hipotézis következménye

A silóból való kifolyás tömegárama állandó, ez a szakirodalomban és a gyakorlatban is elfogadott. A tény ismert, de nincs rá magyarázat. A 4.2.2. fejezetben bemutatott méréseink is igazolják, a 27. ábrán látható egy mérés, a kifolyt tömeg az idő függvényében szinte tökéletesen ($R^2 = 0,9997$) lineáris, a kifolyás közbeni dinamikus hatás miatt nem teljes az illeszkedés. A folyamat legvégén, amikor már a garatban is kevés az anyag, a függvény már nem lineáris, de ez már nem a vizsgált tartomány, ekkor már a siló üres és csak a garatban van kevés anyag, ilyenkor már nem beszélhetünk a siló ürítéséről.



27. ábra Kifolyt anyag tömege az idő függvényében (nagy modellsiló)

A kifolyási tömegáram folyadékok esetében változó. A sebesség a folyadékszint függvényében változik, így ahogy ürül a tároló és csökken a folyadékoszlop magassága, csökken a sebesség is, vele együtt a tömegáram. Szemcsés anyagok esetében hiába folyik az anyag, a viselkedése alapvetően különbözik a folyadékok áramlásától. A hipotézisem szerint a kifolyás az instabil boltozatokon alapul. Ezek a boltozatok a kifolyónyílás fölött állandó peremfeltételeket biztosítanak, így a kifolyás minden paramétere állandó, a sebesség és a tömegáram is. Azaz a kifolyási tömegáram állandó, nem függ a siló töltöttségétől, független a szemcsés halmaz magasságától.

Összegezve: az instabil boltozatok következménye a kifolyási sebesség és tömegáram állandósága. Ezek meghatározásához a boltozatot leíró függvényre szükségünk van.

5.2. Boltozatalak meghatározása

Ha az 5.1. fejezetben igazolt hipotézis alapján kifolyási sebességet, térfogatáramot és tömegáramot akarunk számolni, akkor szükségünk van a boltozat alakját leíró függvényre. Az épített boltozatok alakját az építész dönti el, azonban esetünkben a boltozat önmagától alakul ki, így annak alakját ismernünk kell. Ennek meghatározására a 4.1. fejezetben bemutatott boltozódási kísérleteket végeztem el. Az alak pontos meghatározásához stabil boltozatra van szükség, ahol az alak vizsgálatára és leírására van idő és nem zavarja a vizsgálatot a kihulló anyag. Itt azzal a feltételezéssel éltem, hogy a természetes, azaz önmagától kialakuló boltozatok alakját leíró függvény típusa azonos stabil és instabil boltozatok esetében. Így tudtam a stabil boltozatok eredményeit a kifolyásra alkalmazni.

5.2.1. A természetes boltozódás

Természetes boltozatról akkor beszélünk, amikor a szemcsés halmaz alján van egy nyílás, amely felett üreg alakul ki. Ennek felső határfelülete egy ív (boltív), amely feletti halmaz öntartó és nem folyik ki a nyíláson. A természetes boltozat néhány alapvető pontban különbözik az épített boltozattól.

A különbségek az alábbiakban foglalhatók össze:

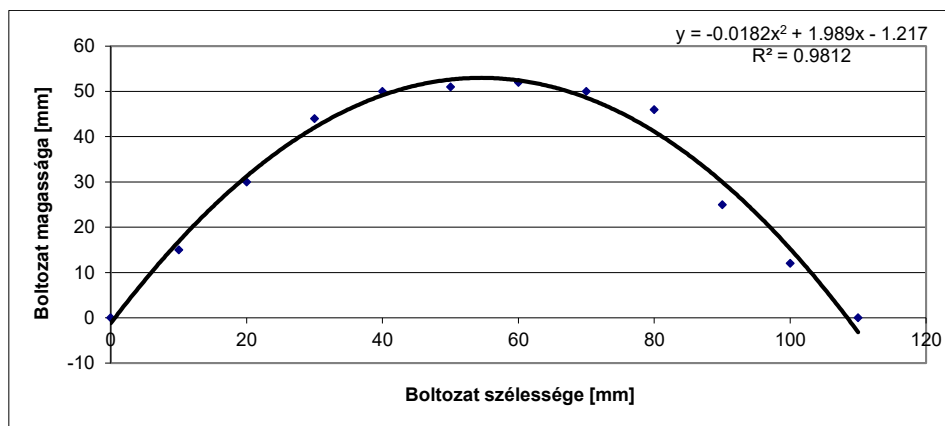
- a természetes boltozatnál nem előre meghatározott a boltozat íve;
- nem adott vastagságú réteg hordja a terhelést, hanem egy folytonos feszültségmező alakul ki, nem válik külön a terhelés és tartó, az egész közeg együtt viseli saját önsúlyát;
- az anyagtulajdonság változhat, a feszültségállapot függvényében az anyag megváltozik.

5.2.2. A boltozat alakjának mérési eredményei

A 4.1.1. fejezetben bemutatott berendezésen a boltozat alakját az oldalfalon elhelyezett négyzetrács segítségével rögzítettem. A kapott függvények az oldalfalra feltapadt és a leolvasás pontosságát csökkentő anyag ellenére alkalmasak az alak vizsgálatára. A pontonként rögzített alakot közelítő függvényekkel írtam le tíz mérés esetében.

Az egyes beállítások és anyagjellemzők függvényében a boltozat szélessége és magassága más és más értékeket mutatott, azonban a jelenlegi kutatásokban fontos jellemző, az alakra illeszthető függvény típusa azonos volt a mérések során.

A mérések során megállapítható volt, hogy az alak jól közelíthető másodfokú parabola függvénnyel. A 28. ábrán egy olyan mérési eredmény látható, ahol a másodfokú függvény determinációs együtthatója $R^2 = 0,9812$.



28. ábra. A boltozat alakjának közelítése másodfokú függvénnyel

Tíz mérés esetén az illeszkedés mértékét a 3. táblázatban foglaltam össze. A kisebb együttható oka a feltapadások miatt nagyobb az eltérések az elméleti függvénytől.

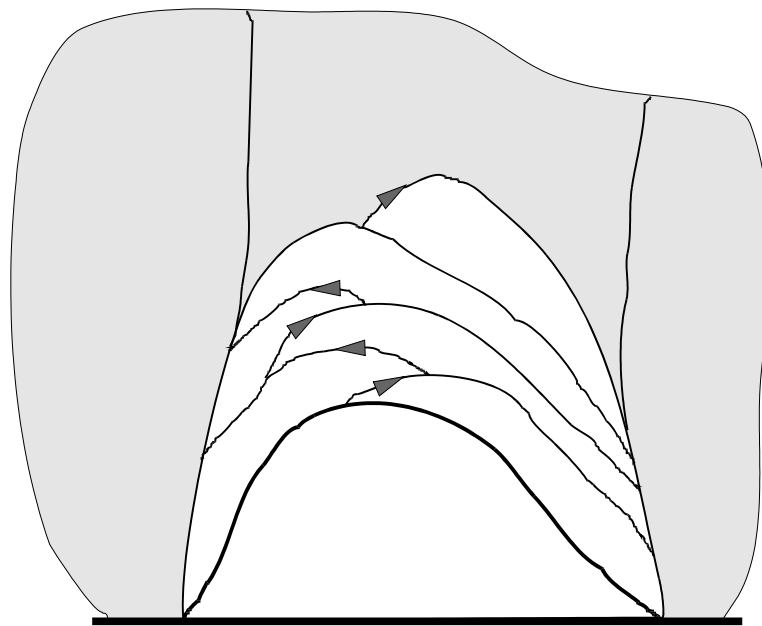
3. táblázat R^2 értékek mért boltozatalakok esetén

Mérés sorszáma	R^2	Mérés sorszáma	R^2
1	0,9945	6	0,9812
2	0,8844	7	0,9074
3	0,9141	8	0,958
4	0,8872	9	0,96
5	0,8258	10	0,884

5.2.3. A boltozódási mérések további eredményei

Stabil boltozatok összeomlása

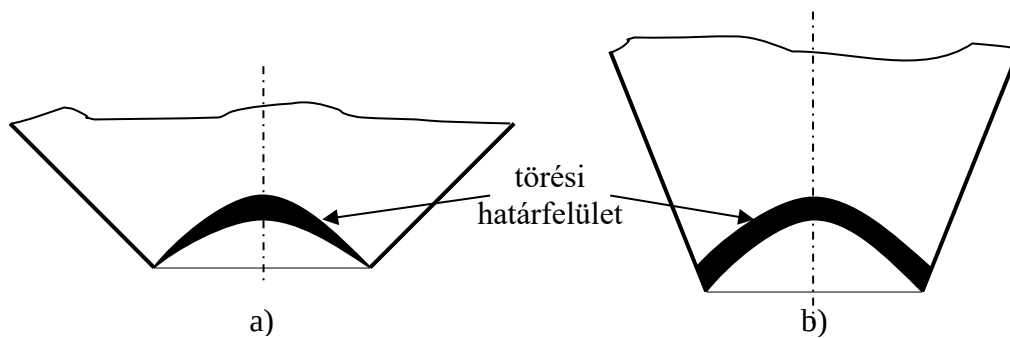
A kísérletek során előfordult, hogy sikerült olyan peremfeltételeket létrehozni, amikor átmeneti az instabil és stabil boltozat közti állapot alakult ki. Ez a boltozat egy kis ideig stabil, majd önmagától összeomlik, kialakul egy újabb stabil boltozat, majd kis idő múlva összeomlik. Az összeomlás a 29. ábrán bemutatott folyamatként zajlott. Hipotézisem szerint ehhez hasonló a kifolyás is, azzal a különbséggel, hogy nincs stabil boltozat és a hozzáfolyás miatt közel állandó helyen alakul ki az instabil boltozat.



29. ábra Stabil boltozat összeomlásának folyamata

Instabil boltozatok összeomlása és kifolyása

Az instabil boltozatokra a kifolyási mód hatással van. Tölcséres kifolyáskor az anyag önmagán csúszik el egy közel függőleges „szemcsecsatornában”. Ilyenkor a csatorna szélén az anyag nem mozog, így a boltozat szélei sem mozognak (30.a ábra), ami a számítások végrehajtásában előnyös, mert van olyan perem, ahol ismerjük a halmaz sebességét. Az ismert sebességű peremfeltétel hiányzik térfogati kifolyás esetében, ekkor az egész halmaz mozog (30.b ábra), a kifolyónyílás szélén sincs nyugalmi állapot. Ezért erre az esetre a modellem nem ad eredményt, módszeremmel csak a tölcséres kifolyási mód esetére kapok analitikus kifolyási modellt.



30. ábra Kihulló anyagrész különböző kifolyási módok esetén

5.3. Kifolyási tömegáram meghatározása hengeres silókra

5.3.1. Kifolyási sebesség számítása

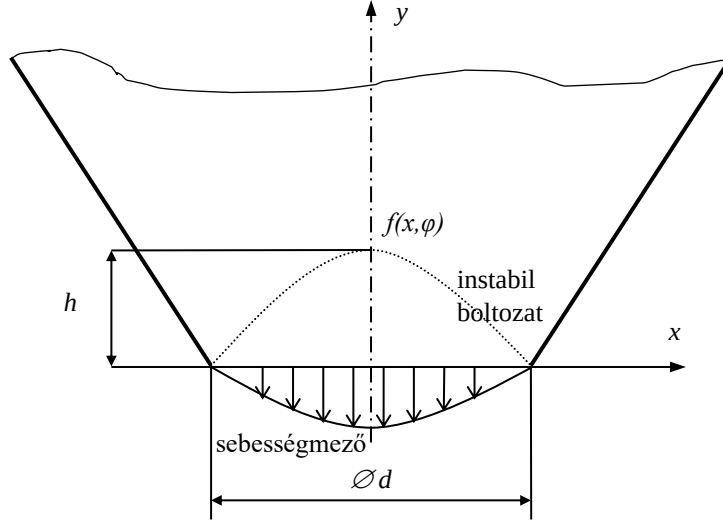
A kifolyt anyag az összeomlott instabil boltozat anyaga. A boltozat összetörése után az anyag szabadeséssel távozik a kifolyónyíláson (Oldal et al.: 2012). Ebből következik, hogy a boltozat alakja, mint a szabadesés kezdőpontja adja meg a kifolyás sebességét adott pontban. Tölcséres kifolyás esetén a boltozat szélső pontjai nem mozognak, így ebből kiindulva zérus kezdősebességű szabadesésként számítható a sebesség.

Hengeres silók esetében a siló, a garat és a kifolyónyílás is tengelyszimmetrikus. A számításhoz célszerű polárkoordinátákat használni. A boltozatalak mérési eredményei (5.2.2. fejezet) alapján másodfokú függvénnyel közelíthetjük. Tengelyszimmetrikus esetben $f(x, \varphi)$ függvény (31. ábra) egy forgási paraboloid:

$$f(x, \varphi) = h \left(1 - \left(\frac{2x}{d} \right)^2 \right) \quad (29)$$

ahol:

- h : a boltozat magassága,
- d : kifolyónyílás átmérője.



31. ábra Tengelyszimmetrikus kifolyási modell

Szabadesésként számítva a sebesség a kifolyónyílásnál:

$$v = \sqrt{2gh} \quad (30)$$

Ahol a h magasság minden (x, φ) koordináta esetén a boltozat határfelülete:

$$v(x, \varphi) = \sqrt{2g \cdot f(x, \varphi)} \quad (31)$$

A határfelület (29) függvényét helyettesítve (31)-be:

$$v(x, \varphi) = \sqrt{2g \cdot h \left(1 - \left(\frac{2x}{d} \right)^2 \right)} \quad (32)$$

(32) tartalmazza a boltozat h magasságát ami nem mérhető, ezért δ_b boltozati alaktényezőt bevezetve, amely feltételezésem szerint anyagjellemző, a boltozat magasság-szélesség arány

$$\delta_b = \frac{h}{d} \quad (33)$$

(33) helyettesítve (32)-be, és rendezve:

$$v(x, \varphi) = \sqrt{2g\delta_b d} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{d} \right)^2} \quad (34)$$

Ez a számítási mód leírja sebességeloszlást, a szakirodalomban található analitikus modellekkel ellentétben (Oldal et al.: 2012). Ebből $\bar{v}$ átlagsebesség számítható, amire a továbbiakban szükségünk lesz:

$$\bar{v} = \frac{4}{d^2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{2g\delta_b d} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{d}\right)^2} x d\varphi dx = \frac{2}{3} \sqrt{2g\delta_b d} \quad (35)$$

5.3.2. Térfogatáram meghatározása

Az átlagsebesség ismeretében a kifolyási keresztmetszettel szorozva Q térfogatáram értéke meghatározható:

$$Q = \bar{v} \cdot A = \frac{2}{3} \sqrt{2g\delta_b d} \cdot \frac{d^2\pi}{4} \quad (36)$$

A kifolyónyílás effektív mérete nem egyezik meg a geometriai mérettel, a kifolyás során a peremen lévő szemcsék lecsökkentik az átmérőt, egyfajta kontrakciót okoznak az áramlásban. Ezt úgy veszem figyelembe, hogy a kifolyónyíláson körben átlagosan fél szemcsényivel, összesen egy szemcsemérettel csökkentem az átmérőt (hasonlóan Beverloo módszeréhez):

$$Q = \frac{\pi\sqrt{2g}}{6} \sqrt{\delta_b} (d - d_p)^{\frac{5}{2}} \quad (37)$$

(36)-ban szerepel δ_b anyagjellemző.

5.3.3. Tömegáram meghatározása

Gyakorlati szempontból az előző számítási eredmények kevésbé hasznosak, a kifolyási tömegáram az a paraméter, amire a silók tervezésekor szükség van. A halmazsűrűség és a térfogatáram ismeretében kiszámítható, de a halmaz sűrűsége a szabadesés során változik, fellazul a halmaz. Az biztosan állítható, hogy ez a változás a sebességgel arányos, ami pedig a boltozat magasságával arányos.

A térfogatáram számítási összefüggésében szerepel δ_b boltozati alaktényező, amely a sűrűségváltozást is befolyásolja, ezért nem külön konstansként kezelem, hanem a sűrűségváltozást is az alaktényezővel veszem figyelembe. Külön mérni sem tudjuk a kettőt, így külön konstansként felesleges megjelenie a számításban. A modellben ezért a tömörítetlen halmaz ρ_h halmazsűrűségét alkalmazom.

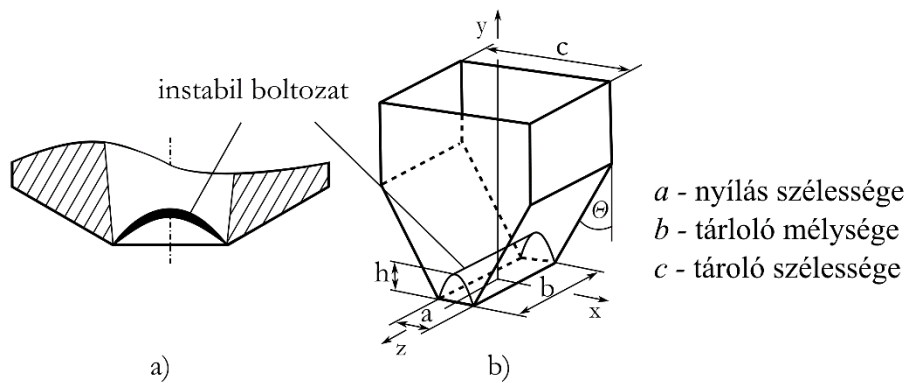
$$W = \frac{\pi\sqrt{2g}}{6} \rho_h \sqrt{\delta_b} (d - d_p)^{\frac{5}{2}} \quad (38)$$

Az összefüggés tölcséres kifolyás esetén fennálló feltételek mellett nyerte el azt a formát, ezért térfogati áramlás esetén nem alkalmazható.

5.4. Kifolyási tömegáram meghatározása síkáramlású silókra

5.4.1. Kifolyási sebesség számítása

Síkáramlás olyan silókban következik be, amely síklapokkal határolt és két szemközti oldalfala függőleges (32.b ábra). A függőleges falakon a szemcsék lecsúsznak, annak kifolyásra gyakorolt hatását elhanyagolhatjuk, így csak a másik két oldalon meglévő ferde sík garaton támaszkodik a halmaz.



32. ábra Síkáramlású siló vázlata és az instabil boltozat helye

Ebben az esetben a párhuzamos falak síkjában mozog az egész halmaz és így síkbeli mozgást végez. Az instabil boltozat feltételezésünk szerint ebben a típusú silóban hasonló alakot vesz fel, mint a 12. ábrán látható boltózódásvizsgáló berendezésben, ennek metszete látható a 32.a ábrán.

Sík áramlás esetében $f(x, z)$ függvény írja le az instabil boltozat alakját (32. ábra), amely egy parabola alapú hasáb egyszer görbült felülete:

$$f(x, z) = h \left(1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right) \quad (39)$$

ahol:

- h : a boltozat magassága,
- a : kifolyónyílás szélessége.

Szabadeséskor a kifolyónyílásnál a sebesség általános (30) összefüggésébe helyettesítve az alakfüggvényt:

$$v(x, z) = \sqrt{2g \cdot f(x, z)} \quad (40)$$

A határfelület (39) függvényét helyettesítve (40)-be:

$$v(x, z) = \sqrt{2g \cdot h \left(1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right)} \quad (41)$$

Felhasználjuk δ_b boltozati alaktényezőt, (33) helyettesítve (41)-be, és rendezve:

$$v(x, z) = \sqrt{2g\delta_b a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2} \quad (42)$$

5.4.2. Térfogatáram meghatározása

A sebesség ismeretében az 5.3. fejezetben már alkalmazott lépéseket megismételjük, a sebesség felhasználásával számított Q térfogatáram ekkor:

$$Q = \int_A v(x, z) dA = \sqrt{2g\delta_b a} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2} dx dz \quad (43)$$

$$Q = \frac{\pi}{4} \sqrt{2g\delta_b a} \cdot ab \quad (43)$$

A korábbi feltételezés itt is érvényes, azaz a kifolyónyílás effektív mérete nem azonos a siló kifolyónyílásának méretével, mivel nem zérus közeli egy szemcse mérete. Síkáramlás esetén a siló szélességi méretét korrigáljuk. Ekkor:

$$Q = \frac{\pi}{4} \sqrt{2g\delta_b (a - d_p)^3} \cdot b \quad (44)$$

5.4.3. Tömegáram meghatározása

A tengelyszimmetrikus esethez hasonlóan a technológiai paramétert, a tömegáramot a térfogatáramból határozzuk meg:

$$W = \frac{\pi \sqrt{2g}}{4} \rho_h b \sqrt{\delta_b} (a - d_p)^{\frac{3}{2}} \quad (45)$$

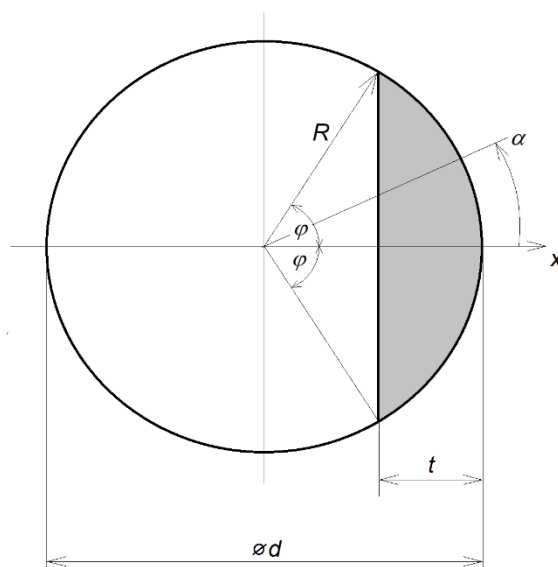
A peremfeltételek tölcséres áramlás esetén teljesülnek, hasonlóan (38)-hoz, ez sem alkalmazható térfogati áramlás esetén.

5.5. Sebességeloszlás eredmények

A korábbi analitikus silókifolyási modellek a kifolyónyílás menti sebességet állandónak tekintik. Az analitikus modellem ezzel ellentétben a kifolyónyílás mentén változó sebességet mutat. A valós viszonyok vizsgálatát két módon végeztük el. Egyrészt az 4.2.2. fejezetben bemutatott kis hengeres silónál alkalmazott, 17. ábrán látható elvű méréssel, másrészt a 4.2.3. fejezetben bemutatott kalibrált DEM silómodell segítségével.

5.5.1. Sebességeloszlás kísérleti vizsgálata

A kifolyónyílásnál az áramlást kettéosztottuk a 17. ábrán látható módon. Az áramlásosztó pozícióját a 31mm átmérőjű kifolyónyílás széléhez képest 2mm-től a kifolyónyílás közel feléig, 15mm-ig növeltük 1mm-es lépésekben. Az analitikus sebesség összefüggésből a körszeletre számítható a kifolyt tömegáram.



33. ábra Körszelet paraméterei és koordinátái

A körszeleten integrálva polárkoordinátákkal $-\varphi$ és φ valamint a szelő sugárban számított határától R -ig és a halmazsűrűséggel megszorozva kapjuk a körszeletre számított tömegáramot.

$$W_t = \rho_h \int_{-\varphi}^{\varphi} \int_{\frac{R \cos \varphi}{\cos \alpha}}^{2\pi} \sqrt{2g\delta_b d} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{d}\right)^2} x dx d\alpha \quad (46)$$

ahol φ a t résmérethez tartozó középponti szög fele:

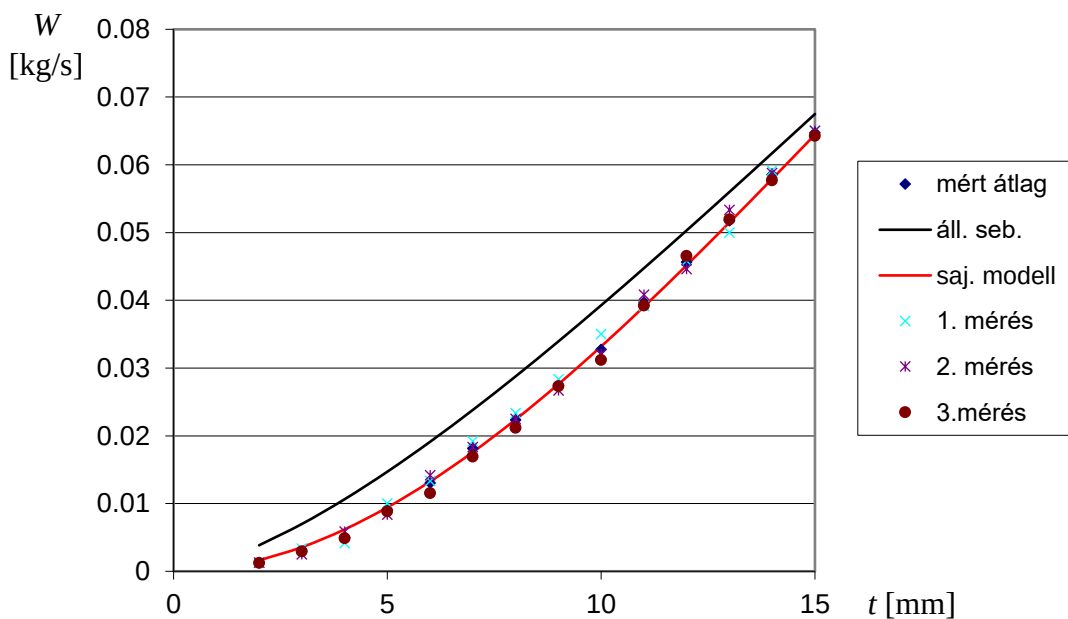
$$\varphi = \arccos\left(1 - \frac{t}{R}\right) \quad (47)$$

Az állandó sebességgel számított tömegáram értékek a körszeletre az átlagos tömegáramból számíthatók:

$$W_t = \bar{W} \frac{A_{k\ddot{o}r}}{A_{k\ddot{o}rszelet}} \quad (48)$$

ahol:

- $\bar{W}$: az átlagos tömegáram (a többi analitikus modellnél a számított tömegáram),
- $A_{k\ddot{o}r}$: a kör alakú kifolyónyílás felülete,
- $A_{k\ddot{o}rszelet}$: a terelőlemezzel meghatározott t résmérethez tartozó körszelet területe.

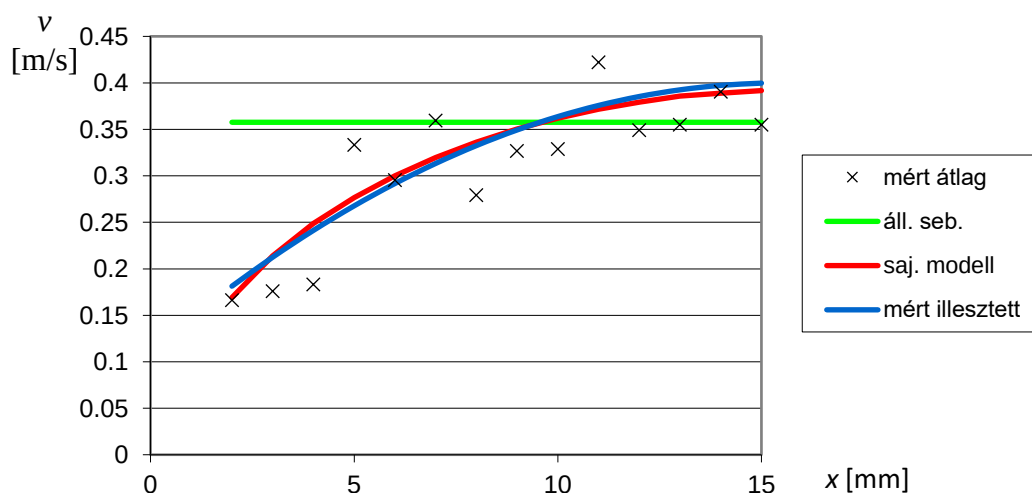


34. ábra Tömegáram a résméret függvényében

A 34. ábrán látható a különböző modellek és a mérési eredmények összehasonlítása. A vizsgált anyag mák volt, mivel a résméret 1mm-es változtatási lépcsője miatt a búzánál, kukoricánál kisebb szemcséjű anyaggal mért eredmények kisebb szórást mutattak. A két folytonos görbe az állandó sebességgel és a saját analitikus modellel számított tömegáramokat mutatja a résméret függvényében. A pontok a háromszori ismétléssel mért eredményeket és azok átlagát ábrázolja. Az eredmények azt mutatják, hogy a sebességváltozás figyelembe vételével a mérési eredményekkel jobban egyező tömegáramokat számoltunk.

Közvetlenül a sebességeloszlásra vonatkozó eredményeket úgy nyertem a mérésekből, hogy a különböző résméretekkel mért eredmények különbségét képeztem, így a t résmérethez tartozó körszeletek eredményeiből 1mm széles szeletekre vonatkozó tömegáramokat kaptam. Az ehhez tartozó átlagsebességek már jól mutatták a sebesség változását a kifolyónyílás mentén. A kisebb terület és a különbségképzés miatt megnőtt a mért eredmények szórása, ezért ebben az esetben már csak az átlagokat ábrázoltam. A mért értékek nagyobb szórása miatt az elméleti modellből származó görbével nehezebb az egyezőségét megállapítani, ezért a mérésekre közelítő függvényt illeszttem. A két folytonos görbe közvetlen összehasonlításra sokkal alkalmasabb volt ebben az esetben.

A 35. ábrán láthatóak a sebességeloszlás mért és számított eredményei. Zöld folytonos vonallal a korábbi modellek állandó sebességű konstans függvénye. Az adott részhez tartozó mérések átlaga x jelölővel, az ezekre illesztett görbe kék folytonos vonallal. A saját modellem számított értékeit piros folytonos vonallal ábrázoltam.



35. ábra Számított és mért sebességek a kifolyónyílásnál

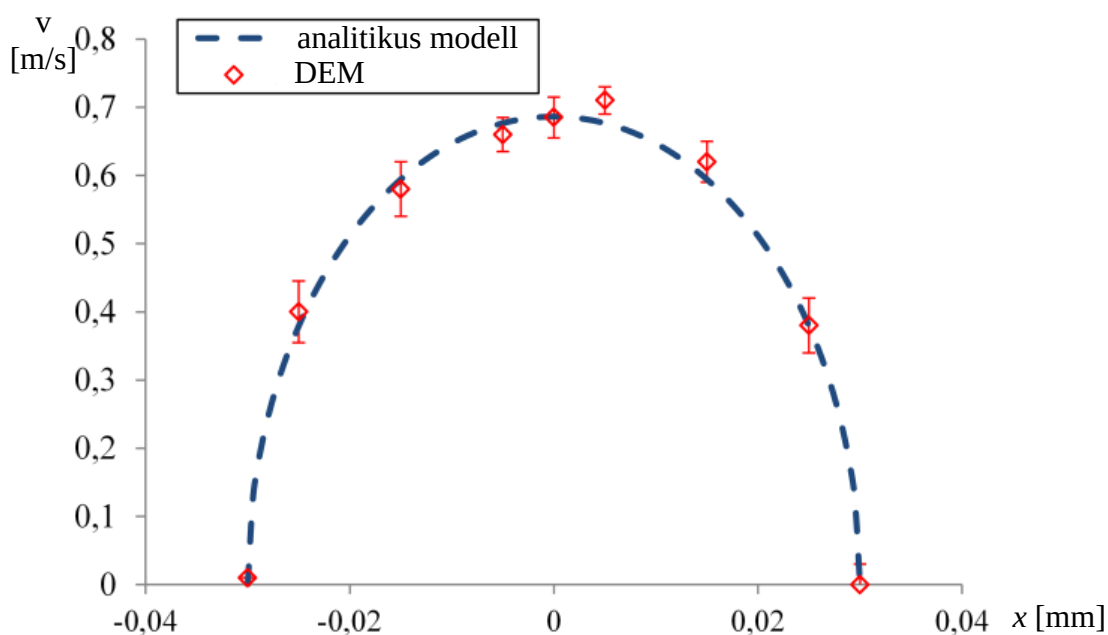
Megfigyelhető, hogy a mért értékek nagy szórásai ellenére a mérésekre illesztett görbe jó egyezést mutat a modellem eredményeivel. Így megállapítható, hogy a korábbi modellek állandó sebességű megközelítése a valós sebességviszonyoktól jelentősen eltér és az új, instabil boltozatokra alapozott analitikus modell a sebességviszonyokat jól leírja.

5.5.2. Sebességeloszlás numerikus vizsgálata

Az előző fejezetben a hengeres siló esetére elvégzett kísérleti eredményeket mutattam be, síkáramlású siló esetére nem kísérleti úton, hanem számítógépes modellezés eredményeivel

hasonlítottuk össze az analitikus modell eredményeit. A 4.2.3. fejezetben bemutatott DEM silómodellek közül a szögletes silómodell segítségével vizsgáltuk a sebességeloszlás kérdését. Mivel ebben az esetben nem okozott gondot a mérések szórása, így nem volt szükség a kis szemcseméretű mák anyag alkalmazására. Diszkrét elemes modellezésnél inkább előny a nagyobb szemcse, mert kisebb számítási igényt jelent. A vizsgálatokhoz ezért a több esetben is igazolt búza modellt használtuk. Az új modell tölcséres kifolyásra ad jó eredményeket, a numerikus modellezés lehetővé tette, hogy ezt is ellenőrizzük. A szimulációkat 60° félnyílásszögű garattal végeztük el, ahol tölcséres kifolyási mód alakul ki.

A kapott eredményeket a 36. ábrán mutatom be. A síkáramlásra kiterjesztett analitikus modellel számított sebességeloszlás kék szaggatott vonallal jelenik meg. A diszkrét modellezést háromszoros ismétléssel végeztük el, így azoknak átlagát és szórását is meghatároztuk. A 60° -os garat esetében kapott eredményeket (átlag és szórás) piros színnel ábrázoltuk.



36. ábra Számított sebességek a kifolyónyílás mentén

Az eredmények szerint a sebességeloszlást síkáramlás esetén is jól leírja a modell. A szimuláció eredményei jól illeszkednek az analitikus modellel meghatározott görbére.

5.6. Tömegáram eredmények

Az analitikus silómodell elsődleges gyakorlati alkalmazhatóságát a tömegáram becslésére vonatkozó pontossága adja. A vizsgálatokat három területen végeztem el.

Az anyagra vonatkozó eredmények esetében azt vizsgáltam, hogy a halmazsűrűség mellett szükség van-e másik anyagjellemzőre. A modellemben a levezetés során egy boltozati alaktényező vezettem be, mint anyagjellemző konstans. Ha ennek értéke állandó, akkor a korábbi modellek pontosságán nem javít ennek bevezetése, ha értéke anyagonként különböző, akkor ennek alkalmazása javít a modell pontosságán. A korábbi modellek a halmazsűrűség, mint egyetlen anyagjellemző alkalmazásával implicit azt feltételezték, hogy a térfogatáramok azonosak különböző anyagok esetében. A modellemben a boltozati alaktényező vizsgálatával ezt a kérdést meg tudjuk vizsgálni. Ha különböző anyagokra értéke nem változik, akkor a korábbi modellek helyesen feltételezték, hogy a térfogatáramok azonosak és nincs szükség másik anyagjellemzőre. Ha értéke anyagonként változik, akkor ez hibát okoz a korábbi modellek esetében.

A kifolyási keresztmetszet vizsgálatát két céllal végeztem el. Az egyik, hogy a tengelyszimmetrikus és a síkáramlási esetekre kapott nem megszokott (bár a korábbi empirikus modellekkel a tengelyszimmetrikus esetben egyező) kitevők a mérések során egyezést mutatnak-e a kísérleti eredményekkel. A másik cél annak megállapítása, hogy milyen határa van a modell alkalmazhatóságának.

A harmadik terület a garat meredekségének vizsgálata. Ebben az esetben áttételesen a kifolyási mód hatását vizsgáljuk. Ennek célja az alkalmazhatóság kifolyási módtól függő határainak megkeresése, pontosabban igazolása annak a feltételezésnek, hogy az analitikus modell csak tölcséres kifolyás esetére érvényes.

5.6.1. Alapanyag hatásának vizsgálata

A 4.2.2. fejezetben bemutatott nagy méretű hengeres silómodellel 100 mm átmérőjű kifolyónyílás mellett 60°-os félkúpszögű garattal történt mérések alapján meghatároztam a boltozati alaktényező értékét a vizsgálat anyagokra. (Kivéve a mák alapanyagot, azt a kis méretű modellel.) A mért anyagjellemzők a 4. táblázatban láthatóak.

4. táblázat Mért boltozati alaktényezők

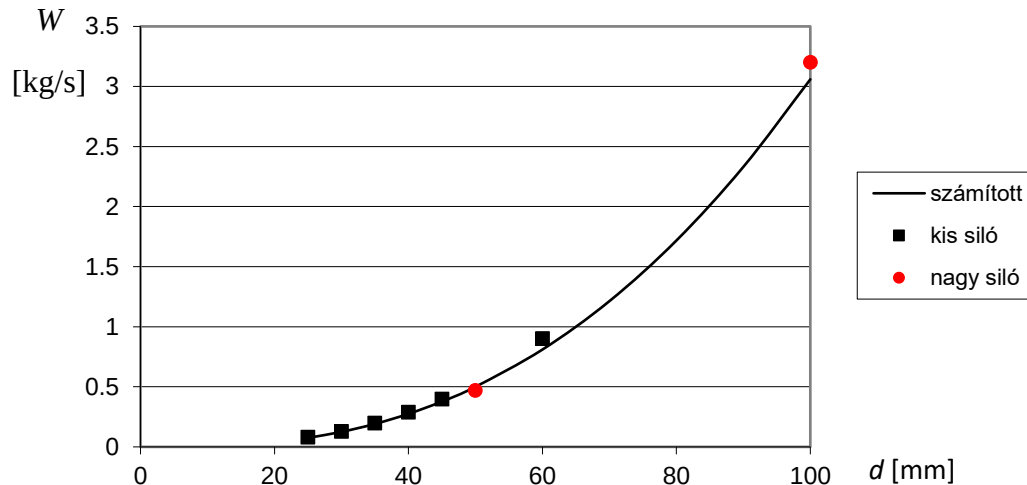
Anyag	búza	kukorica	zab	mák	PE-LD
δ_b	0,4	0,3	0,3	0,46	0,3

Azt láthatjuk, hogy az alaktényező értéke, ha nem is tág határok közt, de változik.

5.6.2. Kifolyónyílás méretének hatása

Tengelyszimmetrikus siló

Az átmérő hatásának vizsgálatát a kis modell esetén 25, 30, 35, 40, 45, 60, 70, 80, 90, 100 mm-es átmérőjű kifolyónyílású garattal, búzával végeztem el. A nagy modell esetén 50 mm és 100 mm átmérőjű kifolyónyílást alkalmaztunk. Minden esetben háromszoros ismétléssel mértünk.

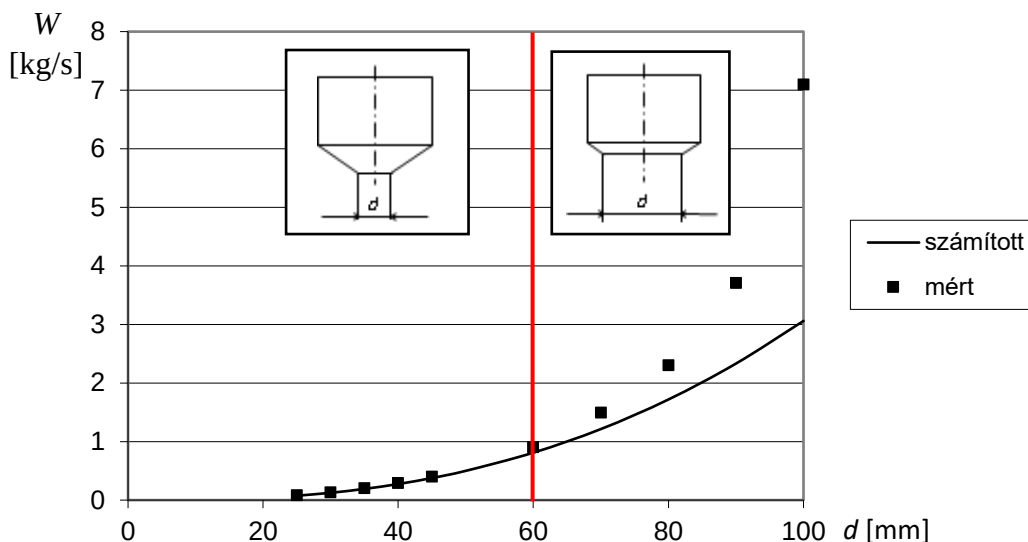


37. ábra Kifolyónyílás átmérőjének függvényében mért tömegáramok (búza)

A 37. ábrán láthatjuk, hogy a (38) szerinti 2,5 kitevő az átmérőben a mérésekkel igazolható, mind a kis, mind a nagy silómodellen végzett mérések illeszkednek a számított értékekre. Ez egyben azt is jelenti, hogy a ebben a tartományban a siló átmérőjének nincs hatása a kifolyásra. Az elméletem szerint csak a kifolyónyílás közvetlen környezete határozza meg a kifolyást, ezek a mérések ezt igazolják. A kis modell eredményeit csak 60 mm-ig ábrázoltam. Ennek oka, hogy amikor elérjük a kifolyónyílással a silóátmérő 60%-át, akkor arányaiban a siló fala is a kifolyónyílás közvetlen környezetébe kerül, azaz hatást kezd kifejteni a kifolyásra.

A modell alkalmazhatóságának határát átmérő esetében a 38. ábrán mutatom be. Ha a kis siló esetén az átmérőt tovább növeltem 60 mm felett, egészen a 100 mm-es silóátmérőig, akkor a számított értékektől egyre nagyobb mértékben eltérő kifolyási tömegáramot mértem. Ennek okaként azt állapítottam meg, hogy a silóátmérőt egyre jobban megközelítve az eredeti feltételezésem a zérus sebességű peremmel létrejövő instabil boltozat egyre kevésbé valósul meg. A silóátmérő 60%-nál az instabil boltozat mellett oldalanként 20% garatrész van, amin a boltozat meg tud támaszkodni. Az átmérőt tovább növelve az arány egyre kisebb lesz, azaz eltűnik a perem, amire a boltozat fel tudna támaszkodni. Ennek megfelelően azt látjuk a 38.

ábrán, hogy a mért értékek a modellel számított értékektől egyre távolodnak. Az utolsó pont, ahol a mérések illeszkednek a számított görbére, a silóátmérő 60%-a, így ezt tekintem a modellem alkalmazhatósági határának.



38. ábra Számított tömegáramok érvényességi határa

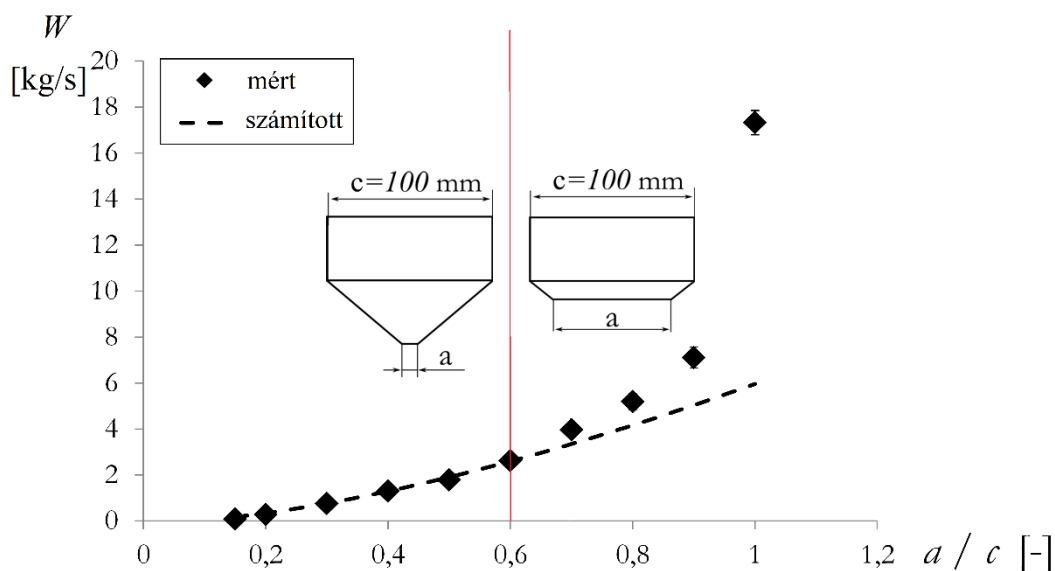
A 38. ábrán 60 mm feletti átmérő melletti eltérések a silóátmérő és a kifolyónyílás arányából következnek. Ez bizonyítja a 37. ábrán látható 100 mm kifolyónyílás mellett a nagy modellsilón végzett mérés, amely jól illeszkedik a számított értékekre, mert ott a 100 mm-es kifolyónyílás a 440 mm silóátmérő 23%-a, azaz messze van a 60%-os határtól.

Síkáramlású siló

A síkáramlású siló esetén nem egy mérete van a kifolyónyílásnak, mint a tengelyszimmetrikus esetben. A síkáramlás esetében a 32. ábrán látható jelölésekkel az a méret a kifolyónyílás szélessége. Ennek hatása várhatóan az átmérő hatásával fog hasonlóságot mutatni, mert ezen méret és a c siló szélessége közti részen támaszkodik a boltozat. A b méret a siló mélysége, a két függőleges silófal távolsága. Ennek hatása annyiban kérdés, hogy meddig hanyagolható el, azaz milyen c/b arány mellett lesz még jó közelítéssel síkbeli áramlás.

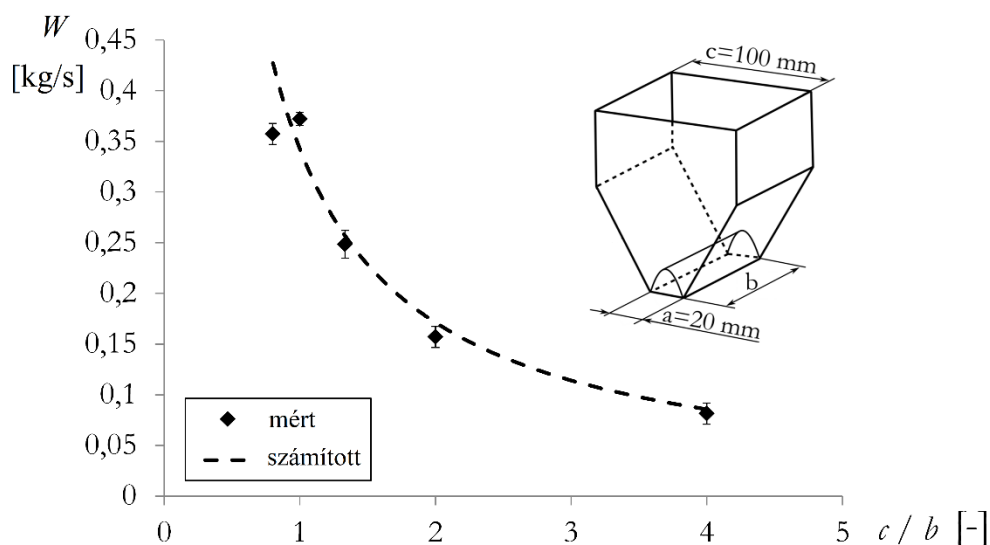
(45) szerint a nyílás szélessége 1,5 kitevővel van hatással a tömegáram értékére. A 39. ábrán a szélesség hatását mutatom be. Mivel hasonló eredményt várok, mint a tengelyszimmetrikus esetben, így a szélességi méretet eleve a siló szélességének arányában ábrázolom, hogy az illeszkedés és az érvényességi határ is látható legyen. A viselkedés a tengelyszimmetrikus esettel azonos tulajdonságot mutat. Amíg a garat elég támasztási felületet ad, addig a mért eredmények illeszkednek a számított tömegáramokra. Ugyanúgy a siló szélességének 60%-a az

a határ, ahol még nincs zavaró hatása a perem csökkenésének. A 60% feletti nyílás esetében a perem támasztó hatása egyre kisebb, a számítási hiba pedig egyre nagyobb. Megállapíthatjuk tehát, hogy a tengelyszimmetrikus és síkáramlás esetében is a kifolyónyílás fő mérete a silóméret 60%-ig ad az analitikus modellünkkel jó eredményeket a kifolyási tömegáramra.



39. ábra Kifolyónyílás szélességének hatása a tömegáramra síkáramlás esetén

A síkáramlású modell esetében a b mélység hatása a (45) szerint számítva a 40. ábrán látható. Mivel a kérdés az megfelelő illeszkedés mellett az alkalmazhatóság határa, így ebben az esetben is a siló szélességének arányában vizsgáljuk.



40. ábra A b szélesség hatása a tömegáramra síkáramlás esetén

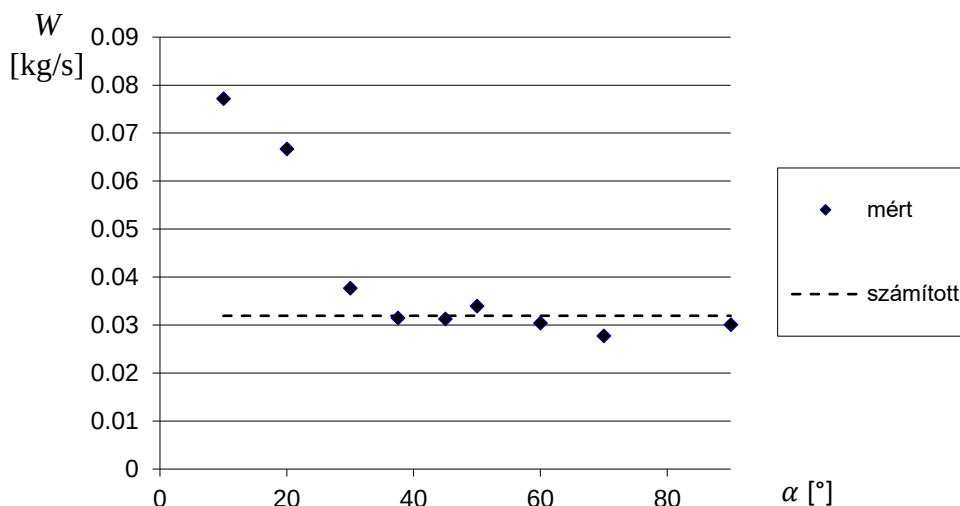
Itt a mélység kettős szerepben van a síkmodell miatt. Egyrészt a kifolyónyílás mélysége, másrészt a siló mélysége is. Ezért a határ bármelyik hatásból következhet vagy a kifolyónyílás vagy a siló szélesség hatása okozhatja a modell hibáját. A 40. ábrán látható, hogy a siló szélességénél nagyobb mélység esetén jó eredményt ad a modell, 1:1 arány alatt már hibát mutat. Mivel az a kifolyónyílás 20 mm, így valószínűleg a siló arányai okozzák az eltérést. Azaz ha a szögletes siló két mérete azonos, akkor az áramlások elkezdene térbelivé válni, így a síkmodell alkalmazásával már hibát követünk el.

5.6.3. Garat nyílásszögének hatása

A garat tengelyszimmetrikus esetben egy kúp, síkáramlás esetében trapéz alapú hasáb. A félnyílásszög mindkét esetben elsősorban a kifolyási módot határozza meg. Az analitikus modellem nem tartalmazza a szöget, így annak a modell szerint tölcséres kifolyás esetén nincs hatása a kifolyási tömegáramra. Ennek vizsgálatára azonos méretű kifolyónyílás mellett különböző garatokkal végeztünk kísérleteket.

Tengelyszimmetrikus siló

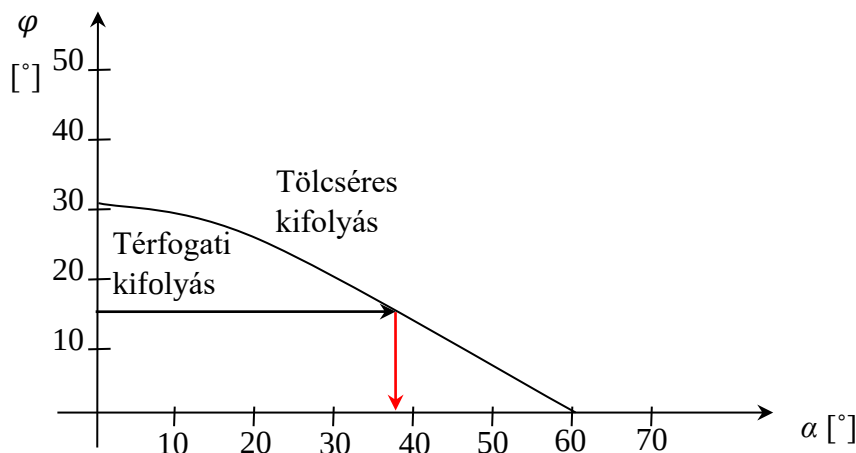
Hengeres siló esetén a kísérletekhez $\alpha = 10, 20, 30, 37,5, 45, 90^\circ$ -os (síkfenék) félkúpszögű kifolyókúpokat használtam. Az alkalmazott modell a kis méretű hengeres silómodell, a kifolyási átmérő 20 mm minden esetben. A mérésekhez búzával végeztem el.



41. ábra Félkúpszög hatása a kifolyási tömegáramra hengeres siló esetén

A 41. ábrán a mért tömegáram értékek esetében jól látható két eltérő viselkedés. Kisebb szögek esetében a garat félkúpszögétől függő értékeket mértem, míg a nagyobb szögek esetében közel állandó értékek adódtak. Feltételezem, hogy a kifolyási mód változása okozza az eltérést

a viselkedésben. Ennek ellenőrzésére a kifolyási mód meghatározására a 3.3.2. fejezetben bemutatott módszert alkalmazom, amelynek a méréseinkre vonatkozó alkalmas diagramot a 42. ábrán mutatok be, bejelölve a modellsiló és búza adatait.



42. ábra Kifolyási mód a garat félkúpszögének (α) és falsúrlódás félkúpszögének (φ) függvényében búzára (Schulze, 2008.)

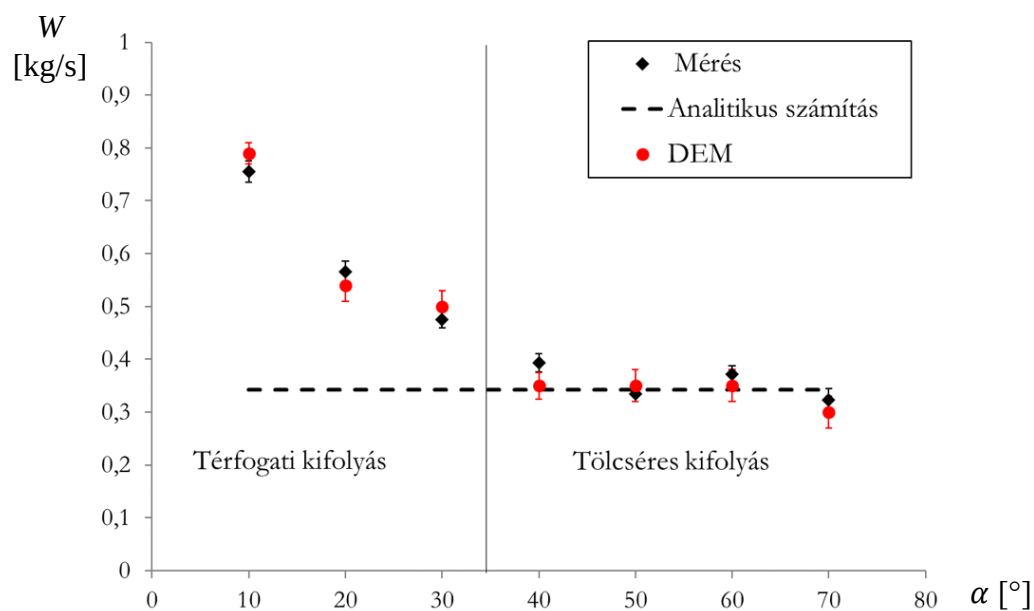
A 42. ábrán látható, hogy a tölcséres és a térfogati kifolyás közti átmenet ugyanannál a garatszögnél következik be, mint a 41. ábrán látható tömegáram jellegének változása. A mérések alapján tehát igazolható az a feltétel, hogy az analitikus modellem tölcséres kifolyási mód esetére érvényes. A modell kiterjeszthető a térfogati kifolyás esetére, ha a δ_b anyagállandót térfogati kifolyásnál a szög függvényében módosítom, azonban ez már nem analitikus, hanem empirikus megoldás lenne.

Síkáramlású siló

Síkáramlás esetén is hasonló eredményt várható, mivel azonos elven határoztuk meg az analitikus modellt. A modell eredményeit a 4.2.3. fejezetben bemutatott DEM modell eredményeivel is összehasonlítom. Az eredményeket a 43. ábrán mutatom be.

A mért és a diszkrét elemek módszerével kapott számított eredmények jó egyezést mutatnak a teljes vizsgálati tartományon, ami azt is jelenti, hogy a DEM a kifolyási mód változását is jól követi. A kifolyási mód a 3.3.2. fejezetben leírtak szerint elsősorban a falsúrlódás és a garat meredeksége függvényében változik, valamint kisebb mértékben az anyag belső súrlódási szöge befolyásolja. A diszkrét elemes modell ezek mindegyikét modellezi, így a megfelelő paraméterek mellett a kifolyási módot is követnie kell, ahogyan azt a modellünk teszi. A két eredmény a szórásokon belül azonosnak tekinthető.

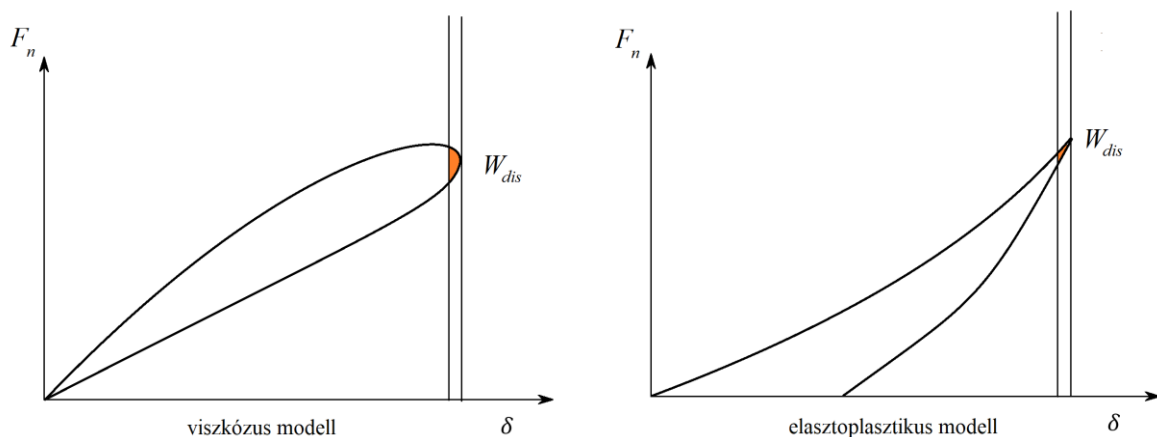
Az analitikus modell határainak megállapítása így a mérés és a DEM számítás alapján is ugyanazt a következtetést vonhatjuk le. A várható módon a síkáramlású siló esetében is azt mutatják az eredmények, hogy az analitikus modell csak tölcséres (sík esetben jobb elnevezés a magkifolyás vagy részleges kifolyás) kifolyási mód esetén alkalmas a tömegáram számítására.



43. ábra Félnyílásszög hatása a kifolyási tömegáramra síkáramlású siló esetén

6. Új elvű csillapítási modell DEM alkalmazásra

Célom egy olyan kontakt modell létrehozása, amely energiaelnyelése az ütközési tényezőn alapul és az eddigieknél numerikusan stabilabb és kisebb számítási igényű. Hipotézisem szerint a numerikus stabilitást úgy növelhetjük, hogy az energiaelnyelés maximumát is a maximális összenyomódás és erő közelébe koncentráljuk. Az eddigi csillapító modelleket a viszkózus, az elasztoplasztikus és a változó meredekségű elven működő modelleket vizsgáljuk, a teljes összenyomódás közelében kicsi az energiaelnyelés (44. ábra). A viszkózus modell esetében a görbült szakasz miatt kis mértékben nagyobb a csillapítás a maximum közelében, mint a csúcsban végződő elasztoplasztikus és változó meredekségű modellek esetében (ezek közül csak az egyiket ábrázoltam, mert mindkettő csúcsban végződik, így a vizsgált szempontból hasonló).



44. ábra Energiaelnyelés a legnagyobb összenyomódási szakaszon

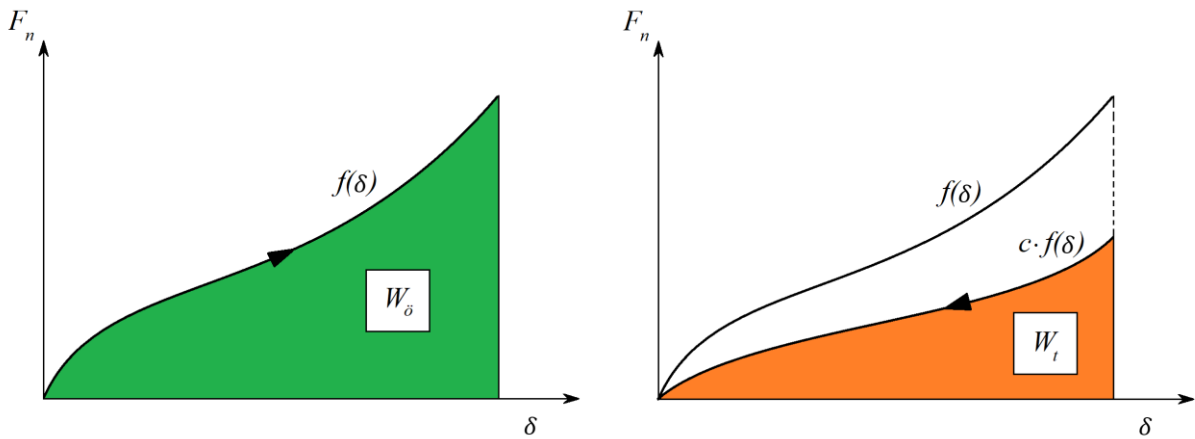
A kisebb számítási igényt egyrészt a numerikus stabilitás okozza (növelhető az időlépés), valamint ha egyszerű, azaz kevés tagból áll a függvény. Az új csillapítási modellt a normális irányú összetevőre alkalmazom, de természetesen a tangenciális tagra is alkalmazható.

6.1. Elvi megoldás és általános formula

Az új modell elveti a korábbiak azon tulajdonságát, hogy a függvény folytonos legyen. Mivel a diszkrét elemes modellezéskor eleve időlépésekben modellezünk, ez nem igényli a folytonos modellt, de ennek elhagyásával elérhető az a cél, hogy az energiaelnyelés a legnagyobb összenyomódás és erő közelében legyen a maximális.

A modell hasonló a korábbi különböző meredekségű fel- és leterhelési szakaszból álló modellekhez, azzal a különbséggel, hogy a maximális összenyomódás után a táulás

(visszarugózás) egy másik pontból, másik meredekség szerint történik, amely így nem kapcsolódik a terhelési szakaszhoz, nem folytonos. Az így definiált modell bármilyen függvényre érvényes összefüggést ad, nem korlátozódik a használhatóság a lineáris függvényekre. A 45. ábrán látható az új modell elve, a c konstans kell úgy megválasztani, hogy a k rugalmassági modulus a teljes függvényre érvényes legyen.



45. ábra Új csillapítási modell elvi vázlata

Az ütközési tényező számítható az erő-elmozulás függvényekből számított munkákból az összenyomódási (W_0) szakaszon és tágulási (W_t) szakaszon (M. Csizmadia, Nándori, 1997.):

$$k = \sqrt{\frac{W_t}{W_0}} = \sqrt{\frac{\int c f(\delta) d\delta}{\int f(\delta) d\delta}} = \sqrt{\frac{c \int f(\delta) d\delta}{\int f(\delta) d\delta}} = \sqrt{c} \quad (49)$$

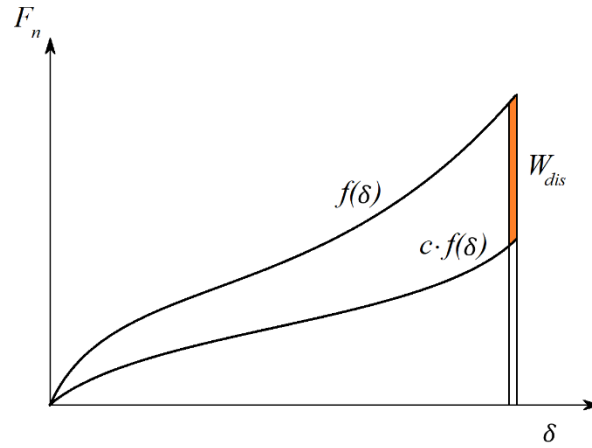
azaz a konstans értéke az ütközési tényezőtől számítható:

$$c = k^2. \quad (50)$$

Mivel (49) alapján a függvény integrálja kiesik, így bármilyen rugalmas függvény (lineáris, nemlineáris) esetében ez adódik. Így ezt a módszert bármely rugalmas kapcsolati modellel együtt alkalmazhatjuk, bármely rugalmas modellből az ütközési tényezőt egzakt módon leíró modellt alkothatunk.

Összehasonlítva a korábbi csillapítási modellek 44. ábrán ábrázolt energiaelnyelését a legnagyobb összenyomódás közelében, látható, hogy az új modell (46. ábra) energiaelnyelése sokkal nagyobb mértékű ezen a szakaszon. Természetesen mindegyik modell esetében a teljes folyamat során elnyelt energia azonos, különben nem értelmezhető ugyanaz az ütközési tényező.

Az elv a gyakorlatban akkor lesz jól használható, ha a lehető legegyszerűbb matematikai formában írjuk fel. Ha két modellt adunk meg és a programnak kell kiválasztani, hogy melyiket alkalmazza a terhelés irányának megfelelően, az is alkalmazható, de ennél jobb, ha zárt alakban írjuk fel a függvényt, amely összenyomódási és a tágulási szakaszra egyaránt érvényes.



46. ábra Energiaelnyelés a legnagyobb összenyomódási szakaszon az új modell szerint

Ezt úgy érjük el, hogy két részre bontjuk a függvényt, egy irányfüggetlen a és egy irányfüggő b konstans segítségével:

$$f(\delta) = (c_1 + c_2)f(\delta) \quad (51)$$

$$k^2 \cdot f(\delta) = (c_1 - c_2)f(\delta) \quad (52)$$

A konstansokra felírhatjuk:

$$c_1 + c_2 = 1 \quad (53)$$

$$c_1 - c_2 = k^2 \quad (54)$$

ekkor:

$$c_1 = \frac{1 + k^2}{2} \quad (55)$$

$$c_2 = \frac{1 - k^2}{2} \quad (56)$$

A modellünk így a következő alakban írható fel:

$$F_n(\delta) = \left(\frac{1 + k^2}{2} + \text{sign}(v_{nrel}) \frac{1 - k^2}{2} \right) f(\delta) \quad (57)$$

ahol:

- $F_n(\delta)$: a disszipációt leíró normális irányú erő-elmozdulás függvény,
- δ : összenyomódás,
- k : ütközési tényező,
- $sign$: előjelfüggvény,
- v_{nrel} : a két test normális irányú relatív sebessége,
- $f(\delta)$: tetszőleges rugalmas erő-elmozdulás függvény.

Az (57) formában felírt kapcsolati függvény az alakjából és a definíciója szerint a következő elvárásoknak felel meg:

- bármilyen rugalmas függvényre alkalmazható,
- az ütközési tényező elvi helyes alkalmazását teszi lehetővé,
- a csillapítás arányos az összenyomódással,
- egyszerű felépítésű,
- nem torzítja az eredeti függvényt, mint a viszkózus taggal kiegészített függvények,
- várhatóan nagyobb numerikus stabilitás,
- várhatóan kisebb számítási igény.

6.2. Új kapcsolati függvény alkalmazása

A 4.3. fejezetben bemutatott MercuryDPM DEM szoftver és az abban található (26) Hertz-Mindlin kapcsolati függvényt választottuk az alkalmazásra és az összehasonlításra. Az új függvény esetében elhagyjuk a sebességfüggő viszkózus tagot és csak a Hertz, rugalmas tagot hagyjuk meg, így az új modell a Hertz-függvényre alkalmazva:

$$F_n = \frac{4}{3} \left(\frac{1 + k^2}{2} + sign(v_{nrel}) \frac{1 - k^2}{2} \right) E_0 \sqrt{R_0} \delta^{\frac{3}{2}} \quad (58)$$

ahol az alkalmazott konstansok azonosak a 4.3. fejezetben bemutatott Hertz-Mindlin (26) modellben szereplő konstansokkal. Mivel a programban nincs előjelfüggvény, ezért azt a sebesség értékéből képeztük:

$$sign(v_{nrel}) = \frac{v_{nrel}}{|v_{nrel}|} \quad (59)$$

6.2.1. Egy szemcse ejtésének eredményei

A 4.3.1. fejezetben leírt szimulált kísérletet futtattuk le a Hertz-Mindlin és az új (58) kapcsolati függvény alkalmazásával. Ebben az esetben az volt a cél, hogy megállapítsuk az új modell alkalmasságát az ütközési tényező modellezésére összehasonlítva azt a gyakorlatban

elterjedt modellel. Az ejtési kísérlet eredményei közül a szemcse magasságának időbeli alakulását vizsgálatuk (47. ábra), és hasonlítottuk össze a két modell esetén.

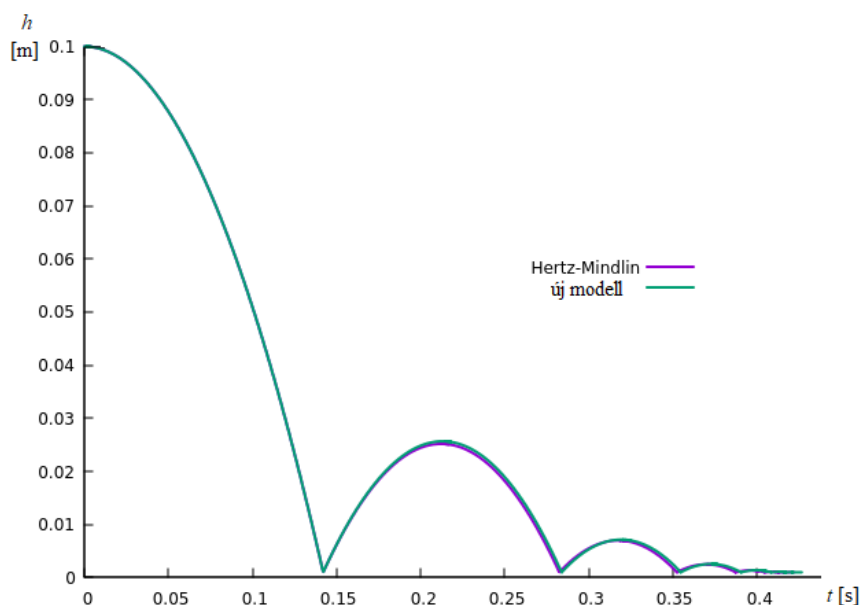
A vizsgálatok időlépéseit a t_R Rayleigh-időlépés (a szemcsén áthaladó mechanikai hullám áthaladási ideje) alapján választottuk ki:

$$t_R = \frac{\pi r}{\beta} \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (60)$$

ahol:

- r : szemcse sugara,
- $\beta \approx 0.8776 + 0.163\nu$, számított konstans,
- ν : Poisson-tényező,
- G : szemcse anyagának csúsztató rugalmassági modulusa.

A Rayleigh-időlépés 10% és 20%-nál elvégezve nem volt észrevehető különbség a két modellel számított eredmények között, a továbbiakban számított eredményeket vizsgálom.



47. ábra Egy szemcse ejtésének eredményei $0,2t_R$ időlépés esetén

A 47. ábrán látható, hogy a két modell bár teljesen eltérő módon alkalmazza a csillapítás számítására az ütközési tényezőt, a végeredmény azonosan jó. Ezzel az új kapcsolati modell alkalmasságát bizonyítottuk az ütközési tényező helyes leírására.

A kapcsolati erő esetében az új modell nem torzítja el az eredeti Hertz-formulát a csillapító taggal, így szemcsés anyagok egyéb tulajdonságainak a leírásához várhatóan nem lesznek alkalmazhatóak ugyanazok a mikroparaméterek, azonban a kutatás jelenlegi fázisában még nem

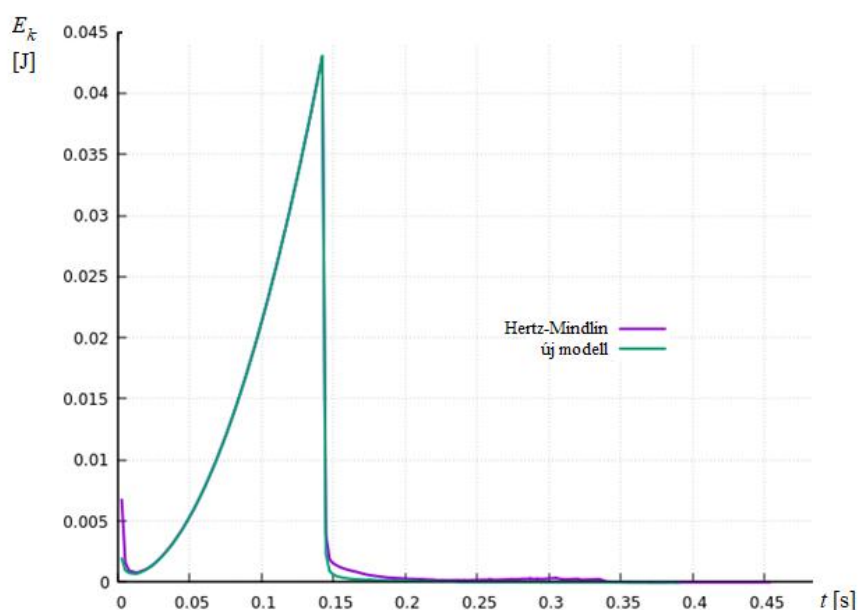
erre koncentrálnak. A fenti eredmény azt mutatja, hogy az új modellel számított kapcsolati erő magasabb (a Hertz-elmélet szerint helyes) maximális értéke nem okoz problémát a teljes ütközési folyamat leírásában a kis időlépések esetén, $0,3t_R$ feletti időlépések esetén már tapasztaltunk eltérést.

6.2.2. Több szemcse ejtésének eredményei

A 4.3.2. fejezetben meghatározott ejtéstesztet végeztük el mindkét kapcsolati modell alkalmazásával. A 23. ábrán látható két különböző kiindulási állapotból két eltérő eredményt kaptunk. Ennek a vizsgálatnak a célja már a modell stabilitásának vizsgálata volt. Így azt vizsgáltuk, hogy a halmaz mozgási energiája hogyan alakul az idő függvényében. Mivel mind a két modell esetében azonos volt az ütközési tényező, azonos eredményeket is mutathatott volna, mint a 6.2.1. fejezetben az egy szemcse ejtésekor.

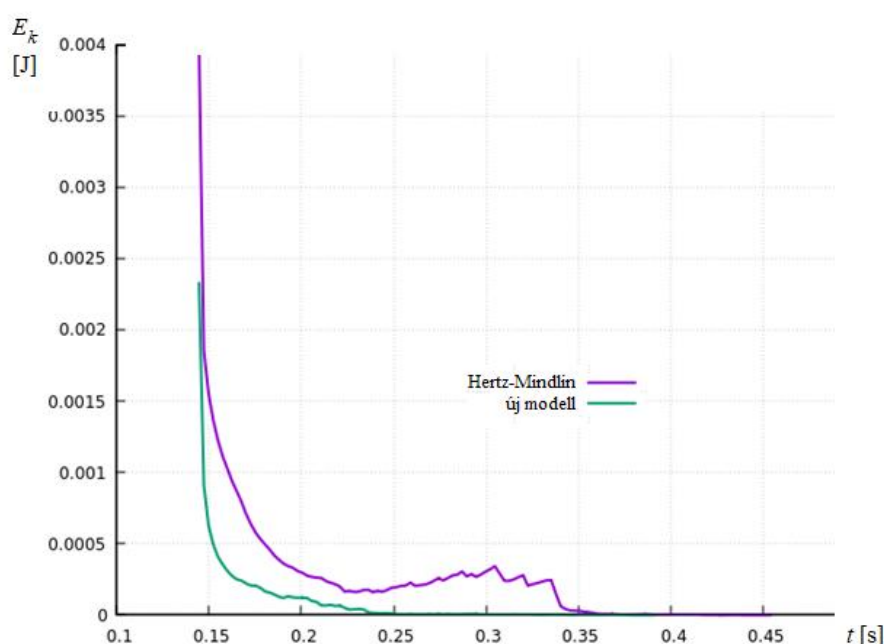
Szorosan elhelyezett szemcsékkel végzett ejtés eredményei

A szabályosan, szorosan elrendezett kezdeti helyzetből (23. a ábra) indítva a halmazt, több időlépéssel is elvégeztük a számításokat. A Rayleigh-időlépés 10, 20, 30, 40, 50, 60% esetén is végeztünk szimulációt. Ebben az esetben ismétlést nem végeztünk, mivel azonos pozícióból indultak a szemcsék, így azonos eredményt adott volna az ismételt vizsgálat. Az eredmények közül a 60%-os időlépéshez tartozókat vizsgáljuk meg részletesen, mivel ekkor volt a legnagyobb a különbség.



48. ábra A szoros halmaz mozgási energiája az idő függvényében $0,6t_R$ időlépés esetén

A 48. ábrán a szemcsehalmaz mozgási energiáját mutatja az idő függvényében. Az ejtés első szakaszában, amíg a halmaz a gravitáció hatására növekvő sebességgel halad a fal felé, folyamatosan nő a mozgási energia. A szoros halmaz miatt az ütközések nagyon nagy számban szinte egyszerre következnek be, így az energia nagyon gyorsan lecsökken. A különbség a csökkenő szakaszon látható, amikor már a sebességek kicsik. A viszkózus csillapítás hatásossága a kis sebességek és a nagyobb időlépés miatt lecsökken, az új elvű csillapítás a nehezebb feltételek mellett jobban működik. A különbségek jobban láthatóak, ha a kezdeti nagy energiájú szakaszt levágjuk és csak az utolsó szakaszt ábrázoljuk (49. ábra).



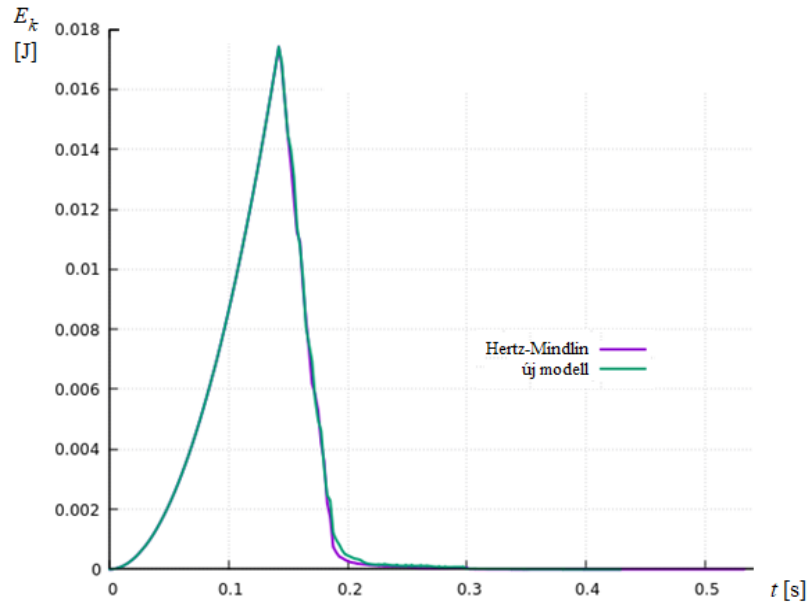
49. ábra A szoros halmaz mozgási energiája az idő függvényében $0,6t_R$ időlépés esetén az utolsó szakaszon

A 49. ábrán azt látjuk, hogy kis sebességek esetében az új modell hamarabb csillapítja a halmaz energiáját és kb. 0,1 másodperccel hamarabb kerül nyugalmi állapotba az ábrán látható tartományban. A modellezés során 10^{-7} J, volt a nyugalmi állapot energiaszintje, ami ebben a nagyításban nem látszik az ábrán, de azt az állapotot is 0,1 másodperccel hamarabb érte el az új csillapítási modell alkalmazásával a halmaz.

Laza halmazzal végzett ejtés eredményei

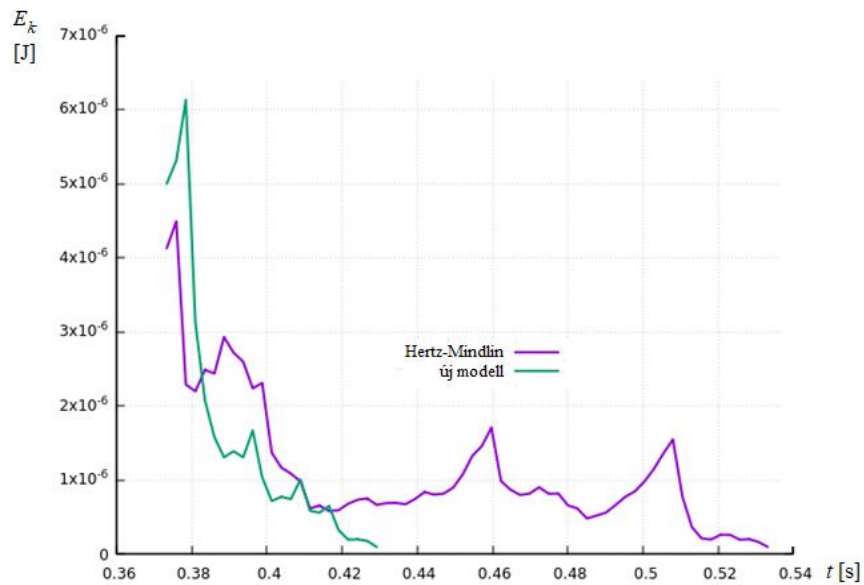
A 23.b ábra szerinti elrendezésből indítva a halmazt ugyanazt a vizsgálatot végeztük el, mint a szorosan indított halmaz esetében. A vizsgálatokat ugyanazokkal az időlépésekkel végeztük, mint az előző esetben. Hasonlóan a legnagyobb különbségek $0,6t_R$ időlépés mellett alakultak ki, így ezt vizsgáljuk. Az eredményeket az 50. ábrán mutatom be. Az eredmények

hasonlóak a 48. ábrán bemutatotthoz, a fő különbség a csillapodási fázisban van, mivel a halmaz lazább, így időegység alatt kevesebb ütközés következik be, így kevésbé meredek az energia csökkenése.



50. ábra A laza halmaz mozgási energiája az idő függvényében $0,6t_R$ időlépés esetén

A halmaz mozgási energiája a szimuláció 0,2 másodperce körül magasabb az új modell esetében, azonban az utolsó szakaszon (51. ábra) ahol a sebességek lecsökkennek még erről a magasabb szintről is hamarabb éri el a nyugalmi állapotot.



51. ábra A laza halmaz mozgási energiája az idő függvényében $0,6t_R$ időlépés esetén az utolsó szakaszon

Ebben az esetben is 10^{-7} J mozgási energiához rendeltük a nyugalmi állapotot. Az 51. ábrán látható, hogy ezt 0,1 másodperccel hamarabb érte el a halmaz az új csillapítási modell esetén.

6.2.3. Izotróp nyomóvizsgálat eredményei stabilitásra

A 4.3.3. fejezetben bemutatott vizsgálatokat végeztük el az új modell numerikus stabilitásának vizsgálata céljából. Ebben a vizsgálatban a halmaz véletlenszerű elrendezéssel indítottuk, ebben az esetben szükség volt ismétlésekre. A szimulációkat hússzoros ismétléssel futtattuk. A nyomóvizsgálat a korábbi ejtési szimulációkhoz képest más úton vizsgálja a modell stabilitását. Mivel állandó deformációsebességgel mozog a perem, így bármelyik modell gyorsan eljut abba a fázisba, ahol a szimuláció stabilitása megszűnik. A nyomás az idő múlásával egyre fokozódik, ez a valós halmaz esetében egyre kisebb mozgási energiát okoz, a halmazt alkotó valós szemcsék képlékenyen alakváltoznak, összetörnek, és a valóságban nem is lehet megvalósítani olyan eszközt, ami képes minden határon túl összenyomni a halmazt. A modellezés során azonban a falak állandó deformációval mozognak és a halmaz rugalmas. A rugalmas szemcsékben nagyon nagy rugalmas energia halmozódik fel és mivel időlépésekben történik a mozgásegyenletek számítása így a szemcsék két időlépés között képesek olyan nagy mozgási energiát felhalmozni, amit a csillapítás már nem képes kezelni. Ez a mozgási energia nagymértékű növekedésében lesz felismerhető, ami annak a következménye, hogy a halmazt alkotó szemcsék a falakon átjutnak, azaz a halmaz „felrobban”.

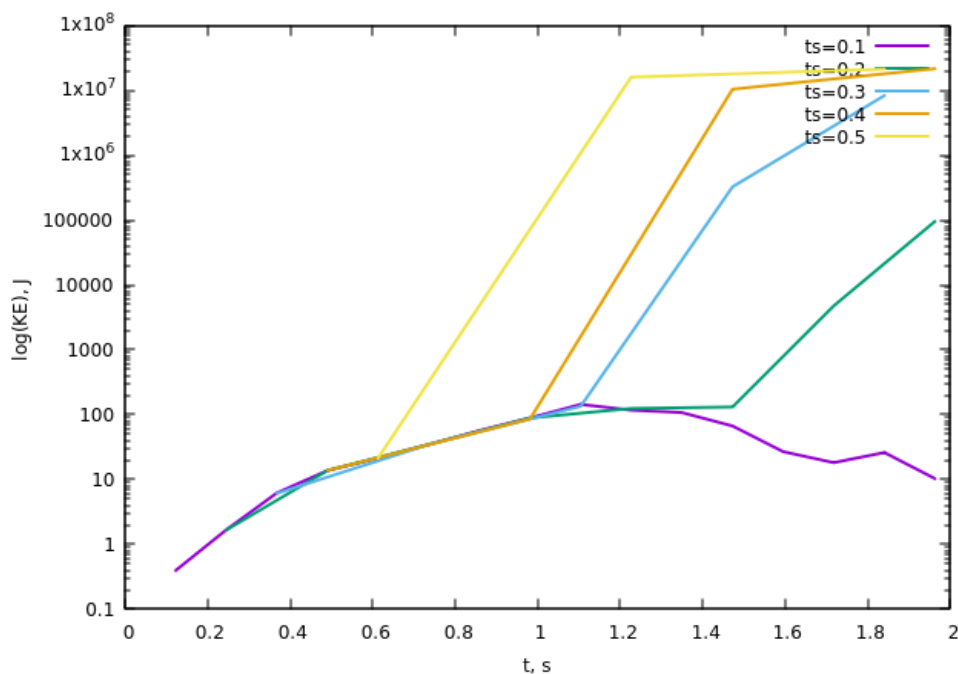
A vizsgálatokat a Rayleigh-időlépés 10, 20, 30, 40, 50%-a nagyságú időlépések mellett végeztük el. A próbafuttatások alapján állapítottuk meg a szimulációk időtartamát, amely az eredmények stabilitásától függetlenül két másodperc volt.

A halmazokat addig tekintettük stabilnak, amíg a teljes mozgási energia nagyságrendje el nem érte a 100 J értéket. Ha a szimuláció során ezt túllépte a halmaz, akkor már nem volt képes stabilitást elérni, utána már exponenciálisan növekedett a kinetikus energia. (Az ábrákon logaritmikus lépték van, hogy a kis energiaszintek és a stabilitását veszített halmaz energiája is látható legyen.)

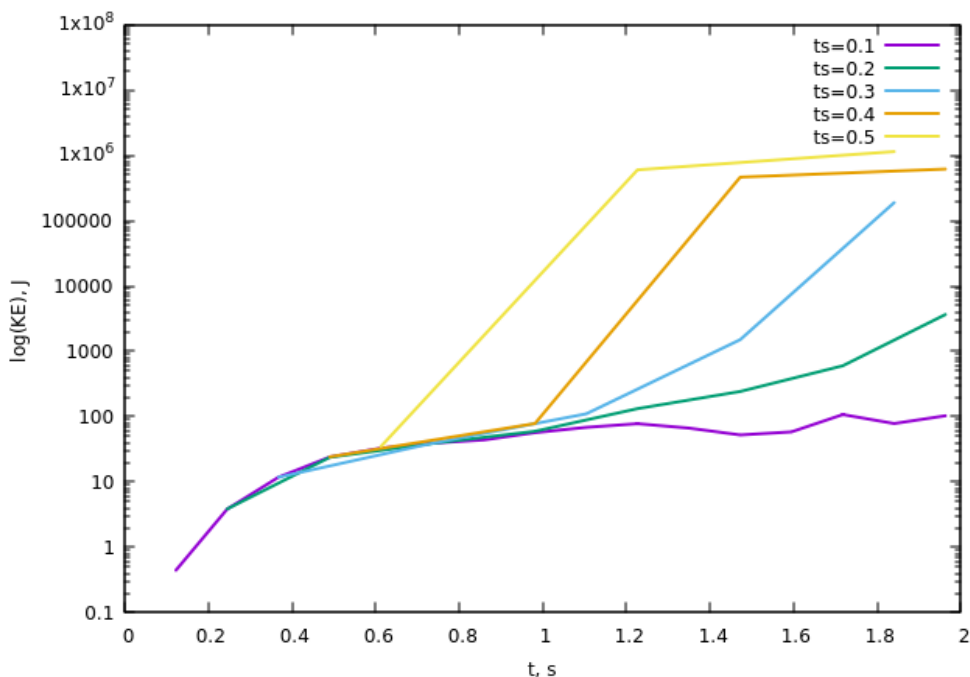
Az adatok áttekinthetősége érdekében a két modell eredményeit külön ábrán mutatom be egymás alatt. Mindkét modell esetében az egyes görbék adott időlépések mellett számított mozgási energia értékeit mutatják. Lila színű $0,1t_R$, a zöld $0,2t_R$, a kék $0,3t_R$, a narancs $0,4t_R$ és a citromsárga görbe a $0,5t_R$ időlépés esetén számított mozgási energia értékeket mutatja a

szimulációs idő függvényében. Az 52. ábrán a Hertz-Mindlin kapcsolati modellel számított, az 53. ábrán az új modellel számított eredményeket mutatom be.

A kinematikai peremfeltétel miatt két másodperc alatt minden esetben azonos térfogatra nyomódtak össze a falak, minden beállítás mellett ötszörös ismétlés átlagait vizsgálom.



52. ábra Hertz-Mindlin kapcsolati modell esetében számított mozgási energia az idő függvényében



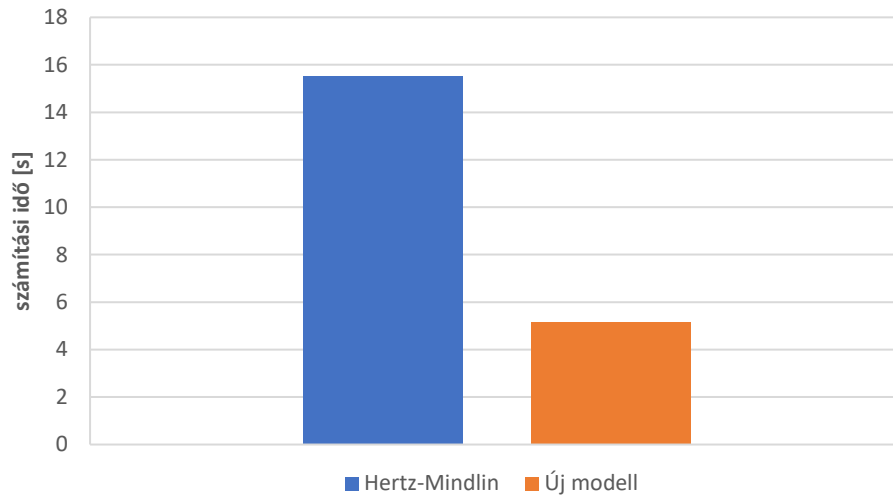
53. ábra Új kapcsolati modell esetében számított mozgási energia az idő függvényében

- A legkisebb időlépés esetében mindkét modell mellett stabil maradt a halmaz a szimuláció végéig.
- $0,2t_R$ időlépés esetén egy kicsivel laposabb az új modell görbéje 1,5 és 2 s között, de előtte nincs jelentős különbség.
- $0,3t_R$ esetén a Hertz-Mindlin modellel az energia 1,2 s után kezd exponenciális növekedésbe, az új modellel csak 1,5 s után.
- $0,4t_R$ időlépés mellett mindkét modellel 1 s után veszti el a stabilitását a halmaz. Az új modellel nagyságrenddel kisebb energiát ér el a halmaz a stabilitás elvesztése után, ami gyakorlati szempontból kevésbé érdekes, de mutatja az új modell nagyobb csillapítását még ezen a tartományon is.
- $0,5t_R$ időlépés mellett ismét nagyobb a különbség, a Hertz-Mindlin modell esetén a halmaz energiája 0,6 s időpontban kezd exponenciálisan növekedni és 0,7 s már elveszti stabilitását. Az új modell csak jóval később, a szimuláció 1,2 s időpontjánál veszti el stabilitását.

Ezen vizsgálatok alapján megállapítható, hogy az új modell néhány esetben, főleg kisebb időlépéseknél hasonló stabilitást mutatott a Hertz-Mindlin modellhez. Azonban a legtöbb esetben és főleg az időlépés növelésekor az új modell nagyobb stabilitást mutatott. Olyan eset nem fordult elő, ahol az új modell kisebb stabilitást mutatott.

6.2.4. Izotróp nyomóvizsgálat eredményei számítási időre

Az izotróp nyomóvizsgálat nemcsak a kapcsolati modell szimulációra gyakorolt hatásának vizsgálatára alkalmas. A 6.1. fejezet utolsó pontjában a függvény egyszerűbb formájából arra a következtetésre jutottam, hogy alkalmazása esetén várható a számítási időigény csökkenése. A korábbi vizsgálatok alapján mindkét modell esetében a stabil szimulációhoz tartozó maximális $0,12t_R$ időlépést választottunk a számítási igény megállapítására. A számítási igény átlagát és szórását húsz szimuláció eredményeiből számítottam.



54. ábra Számítás időigénye

Az eredmények összehasonlíthatósága érdekében a számításokat egy magon futtattuk hússzoros ismétléssel. Az eredmény az 54. ábrán látható. A Hertz-Mindlin kapcsolati modell alkalmazása esetén a számítás Intel(R) Core(TM) i7-7500U CPU @ 2.70GHz processzoron, egy magon 15,537 s $\pm$ 0,284 s időt vett igénybe. Az új modell esetében ugyanez 5,169 s $\pm$ 0,085 s volt. Az új modell előnyei közül gyakorlati szempontból ez a legjelentősebb, mert a diszkrét elemes modellezések esetén nagyon gyakori probléma a nagy a számítási időigény.

7. Új tudományos eredmények

1. tézis: Általánosított, instabil boltozódáson alapuló kifolyási modellel analitikusan leírható a síkmodellel közelíthető silók (tengelyszimmetrikus, síkalakvázolás) kifolyási sebessége és tömegárama tölcséres kifolyási mód esetén (Oldal et. al, 2012) (Safranyik, Oldal, 2021)

Az instabil boltozat alakja másodfokú függvénnyel közelíthető, a kifolyónyílás mérete és δ_b alaktényező alkalmazásával. Ekkor a kifolyási sebesség tengelyszimmetrikus (hengeres siló) esetben:

$$v(x, \varphi) = \sqrt{2g\delta_b d} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{d}\right)^2}$$

síkmozgás esetében:

$$v(x, z) = \sqrt{2g\delta_b a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{a}\right)^2}$$

A tömegáram tengelyszimmetrikus esetben:

$$W = \frac{\pi\sqrt{2g}}{6} \rho_h \sqrt{\delta_b} (d - d_p)^{\frac{5}{2}}$$

síkmozgás esetében:

$$W = \frac{\pi\sqrt{2g}}{4} \rho_h b \sqrt{\delta_b} (a - d_p)^{\frac{3}{2}}$$

összefüggésekkel számítható.

A modell alkalmazhatósági határai a kifolyónyílás d és a méretére:

$$7d_p \leq d \leq 0,6D$$

$$7d_p \leq a \leq 0,6c$$

Ahol:

- g : gravitációs gyorsulás,
- δ_b : boltozat alaktényezője,
- d : kifolyónyílás átmérője (hengeres siló),
- x : sugár polárkoordináta (hengeres siló), szélességi koordináta (síkmozgás),
- a : kifolyónyílás szélessége (síkmozgás),
- ρ_h : halmazsűrűség,
- d_p : átlagos szemcseméret,
- b : siló mélysége (síkmozgás),
- D : silóátmérő (hengeres siló),

- c : siló szélessége (síkmozgás),
- φ : szög polárkoordináta (hengeres siló),
- z : mélység koordináta (síkmozgás).

Az új modell előnyei a korábbiakhoz képest:

- tölcséres kifolyás esetére csak empirikus modellek léteztek korábban,
- a korábbi modellek állandó sebességet feltételeztek a kifolyónyílás mentén, az új modell nemcsak ettől tér el, hanem bizonyítottan jól írja le a sebességeloszlást.

2. tézis: Új csillapítási elven alapuló szemcsekapcsolati modell, amely alkalmazható bármely rugalmas függvényre (Oldal, 2024)

A modell a következő alakban írható fel:

$$F_n(\delta) = \left(\frac{1 + k^2}{2} + \text{sign}(v_{nrel}) \frac{1 - k^2}{2} \right) f(\delta)$$

ahol:

- $F_n(\delta)$: a disszipációt leíró normális irányú erő-elmozdulás függvény,
- δ : összenyomódás (átfedés),
- k : ütközési tényező,
- sign : előjelfüggvény,
- v_{nrel} : a két test normális irányú relatív sebessége,
- $f(\delta)$: tetszőleges rugalmas erő-elmozdulás függvény.

Az új modell előnyei a korábbiakhoz képest, amely magából a levezetésből következik, külön bizonyítást nem igényel:

- bármilyen rugalmas függvényre alkalmazható,
- az ütközési tényezőt egzakt módon alkalmazza,
- a csillapítás arányos az összenyomódással,
- egyszerű felépítésű,
- nem torzítja az eredeti függvényt.

3. tézis:   j típusú szemcsekapcsolati modell Hertz-függvényre való alkalmazása

(Oldal István; Safranyik Ferenc; Keppler István, Tóth János: High stability damping model for discrete element method: applications (bírálat alatt))

A modell a k  vetkezo  alakban írható fel:

$$F_n = \frac{4}{3} \left(\frac{1 + k^2}{2} + \text{sign}(v_{nrel}) \frac{1 - k^2}{2} \right) E_0 \sqrt{R_0} \delta^{\frac{3}{2}}$$

ahol:

- F_n : a disszipációt leíró normális   r  -elmozdulás függvény,
- δ : az   rintkezo  testek átfedése,
- k :   tk  z  si tényező,
- sign : előjelfüggvény,
- v_{nrel} : a két test normális   r  ny   relatív sebessége,
- E_0 : az   rintkezo  teste redukált rugalmassági modulusa a (27) alapján számítva,
- R_0 : redukált szemcse sugár a (20) alapján számítva.

A modell szimulációval történő ellenőrzése alapján a k  vetkezo  tulajdonságokat igazoltuk:

- az ütközési tényezőt jól modellezi $0,2t_R$ id  l  p  sig egy szemcse esetében,
- gravitációval terhelt halmaz $0,1t_R$ és $0,6t_R$ időlépés tartományban a viszkózus csillapítású modellel jó egyezést mutat a halmaz laza állapotában, az összetömörödött, nyugalmi állapothoz közelítve az új modell minden esetben nagyobb stabilitást mutatott,
- izotróp nyomás esetében $0,1t_R$ és $0,5t_R$ időlépés tartományban az új függvény hasonló vagy nagyobb stabilitást mutatott, mint a viszkózus csillapítású modell, nagyobb időlépések esetén az új modell nagyobb stabilitást mutatott,
 - izotróp nyomás esetén az új modellel azonos feltételek mellett kevesebb, mint egyharmad számítási gépidőt   g  nyelt a viszkózus csillapításhoz képest.

8. Összefoglalás

A PhD megszerzése után a szemcsés anyagok modellezésének analitikus és numerikus területén is végeztem kutatásokat. A disszertációban két területen elért eredményeimet foglaltam össze. Az egyik terület, a silók ürítésének analitikus leírása a másik terület a diszkrét elemek módszerén belül a szemcsekapcsolati modellek csillapítása és annak modellezése.

Szemcsés anyagok silóból történő kifolyására a szakirodalomban térfogati kifolyás esetére találunk analitikus számítási modellt, tölcséres kifolyásra nem, arra a kifolyási módra csak empirikus számítási modelleket találunk. Ezen kívül az összes számítási modell állandó sebességet feltételez a kifolyónyílás mentén, ami hibás, mert sem a mérések sem a numerikus modellek nem mutatnak állandó sebességet. A kifolyás új megközelítését még a PhD munkám során elkezdtem, azonban annak általánosítását síkmodellekre később dolgoztuk ki. A modell az instabil boltozatok hipotézisének alapján leírja a kifolyási sebességet a kifolyónyílás mentén tengelyszimmetrikus és síkmozgású silók esetében. Ezek a sebességek kísérleti vizsgálatokkal és numerikus modellekkel igazolva megfelelnek a valós viszonyoknak. A sebesség alapján meghatározható a kifolyási tömegáram értéke, amely mind a tengelyszimmetrikus, mind a síkáramlás esetére mérésekkel igazoltan helyes. Összességében ezen a területen létrehoztam egy korábban nem létező elméleten alapuló analitikus modellt, amely általánosan síkmodellel leírható silóból való kifolyás modellezésére alkalmas.

Diszkrét elemek módszerének egyik alap modellje a szemcsekapcsolati modell. Ezt a modellt a csillapítás szempontjából vizsgáltam. Kohéziómentes rugalmas anyagokra három alaptípust találtam a szakirodalomban, az elterjedtebb modell a viszkózus csillapítás és az elasztoplasztikus modell, a harmadik modell két eltérő meredekségű egyenest alkalmaz a csillapítás leírására. Mindegyiknek megvannak az előnyei és a hátrányai, ebben a kutatási munkában a hátrányokkal és azok megoldásával foglalkoztam. A két eltérő meredekségű egyenessel modellezett csillapítás nagymértékben leszűkíti az alkalmazhatóságot, mivel a valós szemcsék érintkezése nemlineáris, ezen kívül nem a zérusba tér vissza a második szakasz, így ez további megoldandó feladat. Viszkoelasztikus modell bonyolultabb és több paramétert igényel. A viszkózus csillapítás sebességfüggő tagot ad a rugalmas kapcsolatot leíró modellhez. Ennek két fő hátránya van. Az egyik, hogy eltorzítja az alapfüggvényt, a másik, hogy kis sebességek esetén (a legtöbb halmaz modellezésekor kvázi nyugalmi helyzet van, így ez sűrűn előforduló eset) romlik a csillapítás hatása. A problémák megoldására egy olyan csillapítási modellt dolgoztam ki, ami az eredeti rugalmas modellt nem módosítja az összenyomódási szakaszon, csak a tágulási szakasz módosításával modellezi a csillapítást. Ez nem ad plusz tagot a modellhez, így egyszerű formája van, kevés paramétert alkalmaz. Az így felírt modell mentes az alap modell torzításától és igazoltan stabilabb kis sebességek esetén valamint kisebb a számítási igénye, mint a viszkózus modellnek.

Dolgozatomban a bemutatott eredményeket három tézispontban foglaltam össze.

9. Summary

After obtaining my PhD, I conducted research in both the analytical and numerical modeling of granular materials. In my dissertation, I summarized the results achieved in two areas. The first area focuses on the analytical description of silo discharge, while the second pertains to damping in particle contact models within the framework of the discrete element method and its modeling.

In the literature, an analytical calculation model is available for the massflow discharge of granular materials from silos, but no such model exists for funnel flow, where only empirical calculation models are found. Additionally, all existing calculation models assume a constant velocity along the discharge opening, which is incorrect, as neither measurements nor numerical models show a constant velocity. I began developing a new approach to describe discharge during my PhD work, but its generalization to planar models was developed later. Based on the hypothesis of unstable arches, the model describes the discharge velocity along the outlet for axisymmetric and planar silos. These velocities have been validated through experimentals and numerical models, demonstrating consistency with real-world conditions. The velocity profile allows for the determination of the mass flow rate, which has been experimentally verified to be accurate for both axisymmetric and planar flows. Overall, I developed an analytical model based on a previously non-existent theoretical framework, which is suitable for modeling silo discharge in a generalized manner using planar models.

One of the fundamental models of the discrete element method is the contact model of particles. I examined this model from the perspective of damping. For cohesionless elastic materials, I identified three basic types in the literature. The more widespread models are the viscous damping model and the elastoplastic model, while the third model uses two linear segments with different slopes to describe damping. Each has its advantages and disadvantages. In this research, I focused on the disadvantages and their solutions. Damping modeled with two linear segments significantly limits applicability, as the real contact between particles is nonlinear. Additionally, the second segment does not return to zero, presenting another issue to address. The viscoelastic model is more complex and requires more parameters. The viscous damping model introduces a velocity-dependent term to the elastic contact model. This has two main drawbacks: first, it distorts the fundamental function; second, at low velocities (a common scenario in most granular material simulations, as they are typically in a quasi-static state), the damping effect deteriorates. To address these problems, I developed a damping model that does not modify the original elastic model during the compression phase but models damping by altering the expansion phase. This approach does not add extra terms to the model, giving it a simple form and requiring few parameters. The resulting model is free from distortions of the base model, is demonstrably more stable at low velocities, and has lower computational demands compared to the viscous model.

In my dissertation, I summarized the presented results in three thesis points.

10. Köszönetnyilvánítás

A kutatási munkában nyújtott segítségéért köszönetet mondok néhai Dr. M. Csizmadia Bélának, aki PhD témavezetőmként elindított a kutatói pályán, Dr. Safranyik Ferencnek silókifolyás analitikus modelljének kiterjesztésében valamint a diszkrét elemes modellezésben nyújtott munkájáért, Dr. Keppler Istvánnak és Dr. Tóth Jánosnak az adatfeldolgozásban és programozásban nyújtott munkájukért.

11. Felhasznált irodalom

1. Adams, M. J.; Lawrence, C. J.; Urso, M. E. D.; Rance, J.: Modelling collisions of soft agglomerates at the continuum length scale Powder Technology, Volume 140, Issue 3, 2004. pp. 268-279
2. Alizadeh, E.; Bertrand, F.; Chaouki, J.: Development of a granular normal contact force model based on a non-Newtonian liquid filled dashpot Powder Technology, Volume 237, 2013. pp. 202-212
3. Ao, Y.; Jia, B.; Sun, C.; Chen, D.; Pu, Y.: Rockburst proneness analysis of rock materials based on the discrete element method, Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 169, Part B, 2024. 106047
4. Bagi Katalin: A diszkrét elemek módszere. BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék, 2007.
5. Bagi Katalin: Analysis of microstructural strain tensors for granular assemblies, International Journal of Solids and Structures 43 2006. pp. 3166–3184
6. Bagi Katalin: Stress and strain in granular assemblies, Mechanics of Materials, Volume 22, Issue 3, March 1996. pp. 165-177
7. Bagi Katalin: Szemcsehalmozok modellezése klasszikus kontinuumként: problémák és ellentmondások, Szemcsés anyagok mikromechanikája, Procs. Mátraháza, 2000. 05. 31. - 06. 02., Műegyetem Kiadó, 2000, Budapest, pp. 21-24.
8. Bao, M.; Wanrong Wu, Guangtian Tian, Binghui Qiu: Research on discrete element parameter calibration of ore particles based on Tavares breakage model in a SAG mill, Particuology Volume 96, 2025. pp. 44-56
9. Beverloo, W. A.; Leniger, H. A.; Van der Felde, J.: The flow of granular solids through orifices, Chem. Engineering Sciences 15. 1961. pp. 260-269.
10. Carleton, A. J.: The effect of fluid drag forces on the discharge of free flowing solids from hoppers. Powder Tehcnology 6. 1972. pp. 91-96.
11. Crewdson, B. J.; Ormond, A. L.; Nedderman, R. M.: Air-impeded discharge of fine particles from a hopper. Powder Technology 16. 1977., pp. 197-207.
12. Cundall, P.A. - Strack, O.D.L.: A discrete numerical model for granular assemblies Geotechnique, Vol. 29, 1979., pp. 47-65
13. Dong, H.; Moys, M.H.: Experimental study of oblique impacts with initial spin Powder Technol., 161 2006. pp. 22-31
14. Dong, J.; Tao Cui, Dongxing Zhang, Li Yang, Xiantao He, Maosheng Jing, Chuan Li, Shulun Xing, Yeyuan Jiang, Tianpu Xiao, Haoyu Wang: Development of a low-damage maize threshing system based on discrete element technology to effectively improve maize harvest quality and yield, Powder Technology Volume 448, 2024. 120297
15. Durda, D.D.; Movshovitz, N.; Richardson, D.C., Asphaug, E., Morgan, A.; Rawlings, A.R.; Vest, C.: Experimental determination of the coefficient of restitution for meter-scale granite spheres Icarus, 211 2011. pp. 849-855
16. Eliáš J. Simulation of railway ballast using crushable polyhedral particles. Powder Technology 264, 2014. pp.458–465.
17. Falcon, E.; Laroche, C.; Fauve, S.; Coste, C.: Behavior of one inelastic ball bouncing repeatedly of the ground Eur. Phys. J. B, 3 (1998), pp. 45-57
18. Foerster, S.F.; Louge, M.Y.; Chang, H.; Allia, K.: Measurements of the collision properties of small spheres Phys. Fluids, 6 (3) 1994. pp. 1108-1115

19. Ghanbarzadeh, A.; Hassanpour, A.; Neville, A.: A numerical model for calculation of the restitution coefficient of elastic-perfectly plastic and adhesive bodies with rough surfaces Powder Technology, Volume 345, 2019. pp. 203-212
20. Gorham, D.A.; Kharaz, A.H.: The measurement of particle rebound characteristic Powder Technol., 112 (3) 2000. pp. 193-202
21. Grasselli, Y.; Bossis, G.; Goutallier, G.: Velocity-dependent restitution coefficient and granular cooling in microgravity EPL Europhys. Lett., 86 (6) 2009. p. 6007
22. Guo, H.; Xiaodong Yang, Zihang Tian, Teng Li, Xiaoxing Liu: DEM modeling of the dilute-to-dense transition of granular flow in silos, Powder Technology Volume 436, 2024. 119472
23. Hagen, E.: Druck und Bewegung des trockener Sandes. In: Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1852. pp. 35-42.
24. Harmens, A.: Flow of granular material through horizontal apertures Chem. Eng. Sci., 18 1963. pp. 297-306.
25. Hertz, H.: Ueber die Berührung fester elastischer Körper, J. Reine Angew. Math. 92, 1882. pp. 156–171.
26. Hlosta, J.; Žurovec, D.; Rozbroja, J.; Ramírez-Gómez, Á.; Nečas, J.; Zegzulka, J.: Experimental determination of particle–particle restitution coefficient via double pendulum method, Chemical Engineering Research and Design Volume 135, 2018. pp. 222-233
27. Holland, J.; Miles, J.E.P.; Schofield, C.; Shook, C.A.: Fluid drag effects in the discharge of granules from hoppers Trans. Inst. Chem. Engrs., 47 1969. p. 154
28. Horabik, J.; Beczek, M.; Mazur, R.; Parafiniuk, P.; Ryżak, M.; Molenda, M.: Determination of the restitution coefficient of seeds and coefficients of visco-elastic Hertz contact models for DEM simulations Biosystems Engineering Volume 161, 2017. pp. 106-119
29. Horabik, J.; Piotr Parafiniuk, Joanna Wiącek, Rafał Kobyłka, Marek Molenda, Mateusz Stasiak: DEM modelling of the influence of initial stress state on the discharge rate of spherical particles from a model silo, Powder Technology Volume 403, 2022. 117402
30. Hu, G.; Hu, Z.; Jian, B.; Liu, L.; Wan, H.: On the determination of the damping coefficient of non-linear spring-dashpot system to model Hertz contact for simulation by discrete element method Journal of Computers, 6 (5) 2011. pp. 984-988
31. Huang, S.; Wang, P.; Lai, Z.; Yin, Z-Y.; Huang, L.; Xu, C.: Machine-learning-enabled discrete element method: The extension to three dimensions and computational issues, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 432, Part B, 2024. 117445
32. Imre, B.; Rabsamen, S.; Springman, S.M.: A coefficient of restitution of rock materials Comput. Geosci., 34 (2008), pp. 339-350
33. Janssen, H.A.: Getreidruck in silozellen, Z. Ver. Dt. Ing. 39, 1895. pp. 1045-1049
34. Jenike, A.W.: A theory of flow of particulate solids in converging and diverging channels based on a conical yield function, Powder Technology 50 (3), 1987., pp. 229-236.
35. Johanson, J. R.: Method of calculating rate of discharge from hoppers and bins. Trans. Min. Engineers AIME 232. 1965. pp. 69-80.
36. Kharaz, A.H.; Gorham, D.A.; Salman, A.D.: An experimental study of the elastic rebound of spheres Powder Technol., 120 (3) 2001. pp. 281-291

37. Kibriya, G.; Botzheim, J., Orosz, Á.; Bagi, K.: Automatic calibration of a discrete element model of a masonry arch by swarm intelligence methods, *Computers and Structures* 299 2024. 107401
38. King, H.; White, R.; Maxwell, I.; Menon, N.: Inelastic impact of a sphere on a massive plane: nonmonotonic velocity dependence of the restitution coefficient *EPL Europhys. Lett.*, 93 (1) 2011. p. 14002
39. Kézdi Árpád: *Talajmechanika I.*, Tankönyvkiadó, Budapest 1969.
40. Kézdi Árpád: *Talajmechanikai praktikum*, Tankönyvkiadó, Budapest 1987.
41. Krull, F.; Hesse, R.; Breuninger, P.; Antonyuk, S.: Impact behaviour of microparticles with microstructured surfaces: Experimental study and DEM simulation *Chemical Engineering Research and Design* 135 2018. pp. 175–184
42. Kuwabara, G.; Kono, K.: Restitution coefficient in a collision between two spheres *Jpn. J. Appl. Phys.*, 26 (1–8) 1987. pp. 1230-1233
43. Labous, L.; Rosato, A.D.; Dave, R.N.: Measurements of collisional properties of spheres using high-speed video analysis *Phys. Rev. E*, 56 (5) 1997. pp. 5717-5725
44. Lifshitz, J.; Kolsky, H.: Some experiments on anelastic rebound *J. Mech. Phys. Solids*, 12 (1) 1964. pp. 35-43
45. Ligier, K.; Vrublevskyi, O.; Napiorkowski, J.: Optimisation of calibration parameters for a discrete element method (DEM) model of plant-origin grains with a low elasticity modulus, *Powder Technology* Volume 444, 2024. 120009
46. Liu, W.; Guozhong Zhang, Hongchang Wang, Haopeng Liu, Qixin Kang, Zhuangzhuang Zhao, Lei Pei, Zihan Li: Microscopic deformation and fragmentation energy consumption characteristics of soils with various moisture contents using discrete element method, *Soil and Tillage Research*, Volume 241, 2024. 106131
47. Liu, X.; Tao, W.; Liu, B.; Wang, S.; Deng, W.; Fan, Y.: Study on direct shear mechanical characteristics of grouted-filled jointed coal using discrete element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Volume 169, Part B, 2024. 106048
48. Lorenz, A.; Tuozzolo, C.; Louge, M.: Measurements of impact properties of small, nearly spherical particles *Exp. Mech.*, 37 1997. pp. 292-298
49. Louge, M.Y.; Adams, M.E.: Anomalous behavior of normal kinematic restitution in the oblique impacts of a hard sphere on an elastoplastic plate *Phys. Rev. E*, 65 (2) 2002. p. 021303
50. Luding, S.: Collisions and contacts between two particles H.J. Herrmann, J.-P. Hovi, S. Luding (Eds.), *Physics of Dry Granular Media*, Kluwer Academic Publs., Dordrecht 1998. pp. 285-304
51. Luding, S.: Cohesive, frictional powders: contact models for tension, *Granul. Matter* 10 2008. pp. 235–246
52. M. Csizmadia Béla, Nándori Ernő: *Mechanika Mérnököknek Mozgástan*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 1997.
53. Ma, H.; Wang, X.; Xia, R.; Li, B.: Calibration method of discrete element parameters of crushed coal based on mechanical and engineering tests, *Advances in Engineering Software*, Volume 197. 2024. 103759
54. Marshall, J. S.: Modeling and sensitivity analysis of particle impact with a wall with integrated damping mechanisms *Powder Technology*, Volume 339, November 2018, pp. 17-24
55. Mindlin, R.D.; Deresiewicz, H.: Elastic spheres in contact under varying oblique forces, *J. Appl. Mech.* 20, 1953. pp. 327–344

56. Ming Bao, Wanrong Wu, Guangtian Tian, Binghui Qiu: Research on discrete element parameter calibration of ore particles based on Tavares breakage model in a SAG mill, *Particuology*, Volume 96, 2025. pp. 44-56.
57. Montaine, M.; Heckel, M.; Kruelle, C.; Schwager, T.; Poschel, T.: Coefficient of restitution as a fluctuating quantity *Phys. Rev. E*, 84 2011. 041306
58. MSZ ENV 1991-4:2006 Eurocode 1: A tervezés alapjai és a tartószerkezeteket érő hatások 4. rész: A silókat és tartályokat érő hatások, 2006.
59. Mu, T.; Yiming Li, Quan Chen, Ran Li, Hui Yang: Measurement of acceleration and angular velocity of particles during a 3D silo discharge, *Particuology* Volume 92, 2024. pp. 61-71
60. Mueller, P.; Antonyuk, S.; Stasiak, M.; Tomas, J.; Heinrich, S.: The normal and oblique impact of three types of wet granules *Granul. Matter*, 13 2011. pp. 455-463
61. Mueller, P.; Boettcher, R.; Russell, A.; Truee, M.; Tomas, J.: A novel approach to evaluate the elastic impact of spheres on thin plates *Chem. Eng. Sci.*, 138 2015. pp. 689-697
62. O'Sullivan, C.; Bray, J. D.: Selecting a suitable time step for discrete element simulations that use the central difference time integration scheme, *Engineering Computations* 21.2/3/4 2004. pp. 278-303
63. Orosz Ákos, Bagi Katalin: Comparison of contact treatment methods for rigid polyhedral discrete element models, *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences* 170, 2023. 105550
64. Otsubo, M.; O'Sullivan, C.; Shire, T.: Empirical assessment of the critical time increment in explicit particulate discrete element method simulations, *Computers and Geotechnics*, Volume 86. 2017. Pages 67-79
65. Schulze, D.: Storage, Feeding, Proportioning, Powder Technology and Pharmaceutical Processes, *Handbook of Powder Technology* Vol. 9, Elsevier Amsterdam - London - New York - Tokyo 1994, pp. 285-317.
66. Schulze, D.: *Powders and Bulk Solids*, Springer, Berlin, 2008. p. 298.
67. Shinohara, K.; Idemitsu, Y.; Gotoh, K.; Tanaka, T.: Mechanism of gravity flow of particles from a hopper *Ind. Eng. Chem. Process Design Develop.*, 7 1968. p. 378
68. Shook, C.A.; Carleton, A.J.; Flain, R.J.: Effect of fluid drag on the flowrate of granular solids *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, 48 1970. p. 173
69. Sitkei György: *A mezőgazdasági anyagok mechanikája*, Akadémia Kiadó, Budapest 1981.
70. Smilauer V, Catalano E, Chareyre B, et al. *Yade Documentation*. second ed. The Yade Project; 2016.
71. Sondergaard, R.; Chancy, K.; Brennen, C.E.: Measurements of solid spheres bouncing off flat plates *J. Appl. Math. Mech.*, 112 (90) 1990. pp. 694-699
72. Sorace, C.M.; Louge, M.Y.; Crozier, M.D., Law, V.H.C.: High apparent adhesion energy in the breakdown of normal restitution for binary impacts of small spheres at low speed *Mech. Res. Commun.*, 36 (3) 2009. pp. 364-368
73. Stevens, A.B.; Hrenya, C.: Comparison of soft-sphere models to measurements of collision properties during normal impacts *Powder Technol.*, 154 (2-3) 2005. pp. 99-109
74. Stronge, W.J.: Planar impact of rough compliant bodies *International Journal of Impact Engineering*, 15 1994. pp. 435-450
75. Stronge, W.J.; James, R.; Ravani, B.: Oblique impact with friction and tangential compliance *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A359 2001. pp. 2447-2465

76. Tamás, K.: The role of bond and damping in the discrete element model of soil-sweep interaction *Biosystems engineering* 169 2018. pp. 57-70
77. Tamás, K.: Modelling the interaction of soil with a passively-vibrating sweep using the discrete element method *Biosystems engineering* 245 2024. pp. 199-222
78. Thakur, S.C.; Ooi, J.Y.; Ahmadian, H.: Scaling of discrete element model parameters for cohesionless and cohesive solid, *Powder Technology* 293 2016. pp. 130–137
79. Thornton, C.: Coefficient of restitution for collinear collisions of elastic–perfectly plastic spheres *Transactions of the ASME Journal of Applied Mechanics*, 64 1997. pp. 383-386
80. Thornton, C.; Cummins, S.J.; Cleary, P.W.: An investigation of the comparative behaviour of alternative contact force models during inelastic collisions, *Powder Technology* Volume 233, 2013. pp. 30-46
81. Thornton, C.; Cummins, S.J.; Cleary, P.W.: On elastic-plastic normal contact force models, with and without adhesion *Powder Technology* 315 2017. pp. 339–346
82. Tomar, V.; Bose, M.: Anomalies in normal and oblique collision properties of spherical particles *Powder Technology*, Volume 325, 2018. pp. 669-677
83. Tsuji, Y.; Tanaka, T.; Ishida, T.: Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe *Powder Technology*, 71 1992. pp. 239-245
84. Vlogman, T. G.; Jain, K.: Efficient coupled lattice Boltzmann and Discrete Element Method simulations of small particles in complex geometries, *Computers & Mathematics with Applications*, Volume 175. 2024. pp. 313-329
85. Walton, O.R.: Application of molecular dynamics to macroscopic particles *International Journal of Engineering Science*, 22 1983. pp. 1097-1107
86. Walton, O.R.; Braun, R.L.: Viscosity, granular-temperature, and stress calculations for shearing assemblies of inelastic, frictional disks *Journal of Rheology*, 30 1986. pp. 949-980
87. Walton, O.R.: Numerical simulation of inclined chute flows of monodisperse, inelastic frictional spheres *Mechanics of Materials*, 16 1993. pp. 239-247
88. Wang, Q.; Quan Chen, Ran Li, Gang Zheng, Ren Han, Hui Yang, Shape of free-fall arch in quasi-2D silo, *Particuology* Volume 55, 2021. pp 62-69
89. Wang, Z.; Junlin Li, Tao Yu, Qinkun Cheng, Feng Li, Zhenxin Li: Sampling dynamic analysis and discrete element simulation on a deep layer regolith drill for extraterrestrial celestial bodies, *Acta Astronautica* Volume 225, 2024. pp. 141-157
90. Weir, G.; Tallon, S.: The coefficient of restitution for normal incident, low velocity particle impacts *Chem. Eng. Sci.*, 60 (13) 2005. pp. 3637-3647
91. Williams, J. C.: The rate of discharge of coarse granular materials from conical massflow hoppers. *Chem. Engineering Sciences* 32. 1977., pp. 247-255.
92. Williams J.R., O’Connor R.: Discrete element simulation and the contact problem, *Arch. Comput. Methods Eng.*, 6 (4) 1999. pp. 279-304
93. Wojtkowski, M.; Pecen, J.; Horabik, J.; Molenda, M.: Rapeseed impact against a flat surface: Physical testing and DEM simulation with two contact models *Powder Technology*, 198 (1) 2010. pp. 61-68
94. Wu, C-Y.; Thornton, C.; Li, L-Y.: Coefficients of restitution for elastoplastic oblique impacts *Advanced Powder Technol.*, Vol. 14, No. 4, 2003. pp. 435-448
95. Wu, C-Y.; Li, L-Y.; Thornton, C.: Energy dissipation during normal impact of elastic and elastic-plastic spheres *International Journal of Impact Engineering* 32 2005. pp. 593-604

96. Yang, X.; Hui Guo, Lijie Cui, Xiaomin Ding, Kezhen Lv, Xiaoxing Liu: DEM investigation on the dynamic characteristics of wall normal stress and particle flow during silo discharge, Powder Technology Volume 448, 2024. 120234
97. Ye, Y.; Zeng, Y.: A size-dependent viscoelastic normal contact model for particle collision International Journal of Impact Engineering 106 2017. pp. 120-132
98. Zanker, A.: Estimating the flow of solids through openings. Process Engineering 1975. pp. 66-67.
99. Zdancevičius, E.; Kačianauskas, R.; Zabulionis, D.: Improvement of Viscoelastic Damping for the Hertz Contact of Particles Due to Impact Velocity, Procedia Engineering Volume 172, 2017. pp. 1286-1290
100. Zhang, X.; Vu-Quoc, L.: Modeling the dependence of the coefficient of restitution on the impact velocity in elasto-plastic collisions International Journal of Impact Engineering 27 2002. pp. 317–341
101. Zhou, Y.; Shahin, M. A.; Xu, C.; Zhu, H.; Ding, Z.; Sun, S.: Development and calibration of discrete element model for layered gravel soils in forested areas, Powder Technology Volume 449, 2025. 120405
102. Zhou, Y.C.; Wright, B.D.; Yang, R.Y.; Xu, B.H.; Yu, A.B.: Rolling friction in the dynamic simulation of sandpile formation Physics A, 269 1999. pp. 536-553

12. A témához kapcsolódó saját publikációk

2007. PhD védés utáni publikációk

1. Keppler István; Hudoba Zoltán; Oldal István; Fenyvesi László: Rezgő talajművelő szerszámok modellezése diszkrét elemek módszerével, XII. Magyar Mechanikai Konferencia Miskolc, Magyarország : Miskolci Egyetem Műszaki Mechanikai Intézet 2015. pp. 140-140.
2. Keppler, István; Hudoba Zoltán; Oldal István; Csátár Attila; Fenyvesi László: Discrete element modeling of vibrating tillage tools, ENGINEERING COMPUTATIONS 32 : 2 2015. pp. 308-328.
3. Keppler István; Kocsis László; Oldal István; Csátár Attila: Determination of the discrete element model parameters of granular materials, HUNGARIAN AGRICULTURAL ENGINEERING 23 2011. pp. 30-32.
4. Keppler István; Kocsis László; Oldal István; Farkas István; Csátár Attila: GRAIN VELOCITY DISTRIBUTION IN A MIXED FLOW DRYER, ADVANCED POWDER TECHNOLOGY 23 : 6 2012. pp. 824-832.
5. Keppler István; Oldal István: Silóürítés analitikus és diszkrét elemes modellje, XI. Magyar Mechanikai Konferencia : az előadások összefoglalói, Miskolc, Magyarország: Miskolci Egyetem 2011. pp. 141-141
6. Keppler István; Oldal István; Safranyik Ferenc; Bablena Adrienn: Calibration of discrete element models, MECHANICAL ENGINEERING LETTERS: R AND D: RESEARCH AND DEVELOPMENT 14 2016. pp. 140-151.
7. Keppler I; Oldal I; Csátár A: Determination of granular assemblies' discrete element material parameters by modelling the standard shear test, MECHANICAL ENGINEERING LETTERS: R AND D: RESEARCH AND DEVELOPMENT 4 2010. pp. 212-219.

8. Keppler I ; Safranyik F ; Oldal I: Shear test as calibration experiment for DEM simulations: a sensitivity study, *ENGINEERING COMPUTATIONS* 33 : 3 2016. pp. 742-758.
9. M. Csizmadia B. szerk.; Bojtár G ; Csátár A ; Égert J ; Keppler I ; Csizmadia B ; Oldal I: Sajátos anyagmodellek és alkalmazásuk a mezőgépezésben, Gödöllő, Magyarország : FVM Mezőgazdasági Gépesítési Intézet (MGI) 2009. , 145 p. ISBN: 9789635132157
- 10.Oldal István: High stability damping model for discrete element method, *MECHANICAL ENGINEERING LETTERS: R AND D: RESEARCH AND DEVELOPMENT* 25 2024. pp. 172-181
- 11.Oldal István; Keppler István: The effect of arching on the outflow properties of silos, *MECHANICAL ENGINEERING LETTERS: R AND D: RESEARCH AND DEVELOPMENT* 3 : 2 2009. pp. 166-179.
- 12.Oldal István; Keppler István; Bablena Adrienn; Safranyik Ferenc; Varga Attila: On the Discrete Element Modeling of Agricultural Granular Materials, *MECHANICAL ENGINEERING LETTERS: R AND D: RESEARCH AND DEVELOPMENT* 11 2014. pp. 8-17.
- 13.Oldal István; Keppler István; Csizmadia Béla; Fenyvesi László: Outflow properties of silos: The effect of arching, *ADVANCED POWDER TECHNOLOGY* 23 : 3 2012. pp. 290-297.
- 14.Oldal István; Safranyik Ferenc: Extension of silo discharge model based on discrete element method, *JOURNAL OF MECHANICAL SCIENCE AND TECHNOLOGY* 29 : 9 2015. pp. 3789-3796.
- 15.Oldal István; Safranyik Ferenc; Keppler István: Reducing computational time of cohesionless discrete simulations based on particle clusters *ENGINEERING COMPUTATIONS* 34 : 2 2017. pp. 648-663.
- 16.Safranyik, Ferenc; Oldal István; M. Csizmadia Béla: Gerjesztett silók kifolyásának modellezési lehetőségei, *FMTÜ XIX. Nemzetközi Tudományos Konferencia Kolozsvár, Románia : Erdélyi Múzeum Egyesület (EME) 2014. pp. 353-356.*
- 17.Safranyik, Ferenc; Oldal István; M. Csizmadia Béla: Effect of vibration on silo flow of cohesionless granular materials, *Proceedings of 32nd Danubia-Adria Symposium on Advances in Experimental Mechanics Zilina, Szlovákia : EDIS Zilina University Publishers 2015.*
- 18.Safranyik Ferenc; Oldal István; Csizmadia Béla: Gerjesztett silók kísérleti elemzése, *MEZŐGAZDASÁGI TECHNIKA* 56 : 3 2015. pp. 2-5.
- 19.Safranyik Ferenc; Oldal István: Discrete element model of particle outflow, *Synergy 2013, Gödöllő, Magyarország: Szent István Egyetem Gépészmérnöki Kar 2013. p. 4*
- 20.Safranyik Ferenc; Oldal István: 3D discrete element model of silo discharge, *POLJOPRIVREDNA TEHNIKA / AGRICULTURAL ENGINEERING* 38 : 2 2013. pp. 23-34.
- 21.Safranyik Ferenc; Oldal István: Numerical modeling of silo discharge, In: *International Student Scientific Conference of Recent Advances in Agriculture, Mechanical Engineering and Waste Policy Nitra, Szlovákia: Slovak University of Agriculture in Nitra 2013. pp. 275-280.*
- 22.Safranyik Ferenc; Oldal István: Analytical approach of funnel flow discharge, *JOURNAL OF MECHANICAL SCIENCE AND TECHNOLOGY* 35 : 2 2021. pp. 635-640.
- 23.Safranyik Ferenc; Oldal, István: A silóürítés gyakorlatban alkalmazható diszkrét elemes modellje, *FMTÜ XVIII. Nemzetközi Tudományos Konferencia, Kolozsvár, Románia: Erdélyi Múzeum Egyesület (EME) 2013. pp. 351-354.*

- 24.Safranyik Ferenc; Varga Attila; Oldal István; Keppler István: Optimal and effective technique for particle packing, ADVANCED POWDER TECHNOLOGY 31 : 8 2020. pp. 3222-3235.
- 25.Talafha, Muath, S.; Oldal István: The Effect of Triple Particle Sizes on the Mechanical Behaviour of Granular Materials using Discrete Element Method (DEM), FME TRANSACTIONS 50 : 1 2022. pp. 139-148.
- 26.Talafha, Muath, S.; Oldal István: The Combined Effect of Normal Stress and Mechanical Vibration on Wheat Packing Density, JOURNAL OF ENGINEERING MECHANICS 150 : 1 Paper: 04023111 2024.
- 27.Talafha, Muath, S.; Oldal István: Evaluation the effect of particle sphericity on direct shear mechanical behavior of granular materials using discrete element method (DEM), INTERNATIONAL JOURNAL FOR ENGINEERING MODELLING 34 : 1 2021. pp. 1-18.
- 28.Talafha, Muath; Oldal István ; Garneoui, Seifeddine: Study the particle size impact on the mechanical behaviour of granular material by discrete element method, FME TRANSACTIONS 50 : 3 2022. pp. 473-483.
- 29.Zachár András; Keppler István; Oldal István: Investigation of the applicability and efficiency of different mathematical modeling and numerical simulation methods for soil tool interaction, JOURNAL OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MECHANICS 11 : 1 pp. 2016. 77-94.