

Válasz Frankl Péter opponensi véleményére

Először is szeretném megköszönni Frankl Péternek igen alapos opponensi munkáját. A bírálat első bekezdésében említettekre ugyanaz a válaszom, mint Gyárfás András megjegyzésére. A disszertáció megírásánál az a szempont vezetett, hogy egy közös motívumra felfűzhető eredményeket gyűjtssem egybe.

Válasz az első kérdésre. A partíció-kritikus hipergráfokról szóló kérdésre a disszertáció megírása óta sikerült valamilyen értelemben választ találni. Jelölje

$$f(n, k) := \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} + \dots + \binom{n-1}{0}$$

a 2.5.5 Tételben bizonyított felső korlátot. Ekkor a rendezett 3-kritikus hipergráfok maximális méretére adott $\binom{n}{k-1}$ korlát nagyságrendje $f(n, k) - O(n^{k-3})$. Füredi Zoltánnal közös nemrégiben közlésre benyújtott cikkünkben sikerült több konstrukciót is adnunk olyan partíció kritikus hipergráfra, melynek élszáma $f(n, k) - O(n^{k-4})$ amennyiben k rögzített és $n \rightarrow \infty$. Ez bizonyítja, hogy a partíció-kritikus feltétel ténylegesen gyengébb, mint a rendezetten 3-kritikus feltétel. Az egyik konstrukció az n elemű halmaz részhalmaz hálójának egy Greene és Kleitman által adott rendkívül elegáns szimmetrikus lánc felbontásán alapul.

Az $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_t \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ lánc *szimmetrikus* ha $|A_i| + 1 = |A_{i+1}|$ $i = 1, 2, \dots, t-1$ és $|A_1| + |A_t| = n$. Egy n hosszúságú jobb- és balzárójelekből álló sorozatot rendelünk minden $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ részhalmazhoz. Jobbzárójel áll az i -ik pozíción ha $i \in A$, balzárójel áll az i -ik helyen, ha $i \notin A$. Ezeket a zárójeleket a szokásos módon párosítjuk, amíg van olyan párosítatlan balzárójel, amelyik párosítatlan jobbzárójel előtt áll. A párosítás végeztével a párosítatlan zárójelek sorozata néhány jobbzárójelel kezdődik, majd balzárójelekkel folytatódik. Azok a halmazok alkotnak egy szimmetrikus láncot, melyekben pontosan ugyanazok a zárójel párok vannak párosítva.

Ezt a konstrukciót a $\{2, 3, \dots, n\}$ alaphalmazon használjuk, $\{1, 2, \dots, n\}$ helyett. Az $A \subset \{2, 3, \dots, n\}$, $|A| = k - 2$ részhalmazhoz jelölje $p(A)$

azt a 2 elemű részhalmazát $\{2, 3, \dots, n\}$ -nek, amelyre teljesül, hogy $A \cup p(A)$ halmaz a k elemű részhalmaz A zárójeles konstrukcióval kapott szimmetrikus láncában. A partíció kritikus hipergráf $\mathcal{E}$ élhalmaza három halmaz diszjunkt uniója lesz $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{k-1} \cup \mathcal{E}_{k-2} \cup \mathcal{E}_{k-3}$. $\mathcal{E}_{k-1} = \{A \cup \{1\} : A \subset \{2, 3, \dots, n\}, |A| = k-1\}$, $\mathcal{E}_{k-2} = \{A \cup p(A) : A \subset \{2, 3, \dots, n\}, |A| = k-2 \text{ és } |A \cap \{2, 3, \dots, k+2\}| \leq 1\}$. Végezetül, $\mathcal{E}_{k-3}$ a $\{5, 6, \dots, n\}$ alaphalmaz azokból k elemű részhalmazzaiból áll, amelyek ezen alaphalmaz részhalmazainak szimmetrikus láncfelbontásában azon $k-2$ elemű részhalmazok láncában vannak, amelyek tartalmazzák az 5 elemet. Így minden $E \in \mathcal{E}_{k-i}$ élnek van egy saját $k-i$ -elemű $f(E)$ részhalmaza, nevezetesen $E \in \mathcal{E}_{k-1}$ esetén $f(E) = E \setminus \{1\}$, $E = A \cup p(A) \in \mathcal{E}_{k-2}$ esetén $f(E) = A$, végül $E \in \mathcal{E}_{k-3}$ esetében ha a $k-2$ -elemű G részhalmaz szimmetrikus láncában van, $f(E) = G \setminus \{5\}$. A partíció kritikus tulajdonsághoz tartozó felbontások a következők. $E \in \mathcal{E}_{k-i}$ esetén $E = f(E) \cup (E \setminus f(E))$ és az $[n]$ alaphalmaz E élhez tartozó partíciója $[n] = ([n] \setminus (E \setminus f(E))) \cup (E \setminus f(E))$. Az éleket úgy rakjuk sorba, hogy $E \in \mathcal{E}_{k-i}$ előbb jön mint $F \in \mathcal{E}_{k-j}$ ha $i < j$, egy osztályon belüli élek sorrendje tetszőleges.

Tegyük fel, hogy $|A| = k-2$ és $|A \cap \{2, 3, \dots, k+2\}| \leq 1$. Ekkor $p(A) \subset \{2, 3, \dots, k+2\}$. Továbbá, $p(A) \cap \{2, 3, 4\} \neq \emptyset$.

Valóban, legfeljebb egy A elemeinek megfelelő jobb zárójel áll az első $k+1$ helyen. Továbbá, legfeljebb $k-2$ bal zárójelet párosítottunk A jobb zárójeleihez. Ez összesen legfeljebb $k-1$ zárójel pozíciót foglal el az első $k+1$ helyen, tehát van legalább 2 párosítatlan bal zárójel, amit sorban jobbra lehet fordítani, hogy megkapjuk $p(A)$ -t. A második állítás bizonyítása egyszerű.

A $([n] = \{1, 2, \dots, n\}, \mathcal{E} = \mathcal{E}_{k-1} \cup \mathcal{E}_{k-2} \cup \mathcal{E}_{k-3})$ hipergráf a fentebb definiált partíciókkal partíció kritikus.

Valóban, tekintsük az $E, F \in \mathcal{E}$ éleket ahol E előbb van az élek sorrendjében, mint F . Azt kell látnunk hogy az $[n]$ alaphalmaz F élhez tartozó partíciója nem vágja szét az E élet előírt módon. Ha mindkét él $\mathcal{E}_{k-1}$ -beli vagy mindkét él $\mathcal{E}_{k-3}$ -beli, akkor ez könnyen látható. Ha mindkét él $\mathcal{E}_{k-2}$ -be tartozik, akkor legyen $E = A \cup p(A)$ és $F = B \cup p(B)$. A definíció alapján $p(A) \not\subset B$ tehát $E \cap f(F) = E \cap B \neq p(A)$. Másfelől, világos, hogy $E \cap f(F) = E \cap B \neq A$, tehát az F -hez tartozó partíció nem az előírt módon vágja szét E -t. Ha $E \in \mathcal{E}_{k-i}$ és $F \in \mathcal{E}_{k-j}$ ahol $i < j$, akkor $|f(E)| > |f(F)|$, tehát $E \cap f(F) \neq f(E)$. Másfelől, $([n] \setminus f(F)) \cap E$ tartalmaz $E \setminus f(E)$ -beli elemet, mégpedig. ez az elem 1, ha $i = 1$, és 2, 3, 4 egyike, ha $i = 2$.

A hipergráf mérete $|\mathcal{E}_{k-1}| + |\mathcal{E}_{k-2}| + |\mathcal{E}_{k-3}|$, ahol $|\mathcal{E}_{k-1}| = \binom{n-1}{k-1}$, $|\mathcal{E}_{k-2}| =$

$$\binom{n-1}{k-2} - \sum_{l=2}^{k-2} \binom{k+1}{l} \binom{n-k-2}{k-2-l}, |\mathcal{E}_{k-3}| = \binom{n-5}{k-3}. \text{ Így}$$

$$f(n, k) - |\mathcal{E}| = \sum_{l=2}^{k-2} \binom{k+1}{l} \binom{n-k-2}{k-2-l} + \binom{n-3}{k-3} - \binom{n-5}{k-3} + \sum_{j=4}^k \binom{n-1}{k-j}.$$

A jobboldal nagyságrendje $O(n^{k-4})$ rögzített k -ra.

Válasz a második kérdésre. A kérdésben felvetett diszjunkt halmazhármásokra való bontás a Kneser-gráf csúcshalmazának felbontását jelentené csúcdiszjunkt háromszögekre, úgy, hogy a háromszögek között valamilyen metszési feltételekből adódó megszorítás van, hasonlóan a 4.3.25 Tételhez. Minden megszorítás nélkül Corrádi és Hajnal 1963-ban bizonyította, hogy ha egy n csúcsú gráf minimális fokszáma legalább $\frac{2}{3}n$, és n osztható hárommal, akkor ilyen felbontás létezik. Ha diszjunkt halmaz t -esekre akarnánk bontani, akkor a kiinduló pont az a 1970-ből való Hajnal-Szemerédi tétel lenne, miszerint $\frac{t-1}{t}n$ minimális fokszám esetén ha $t|n$, akkor a csúcshalmaz páronként diszjunkt t méretű klikkekre bontható. Amíg azonban a 4.3.25 Tétel Dirac tételének viszonylag egyszerű bizonyításába „építi bele” az extra metszetfeltételt, addig itt a Corrádi-Hajnal, illetve Hajnal Szemerédi tételek rendkívül bonyolult bizonyítását kéne adaptálni olyan esetre, amikor egy másik gráf, a metszet feltételek gráfja is adott, és az kizárja bizonyos klikkek együttes választását. Ilyen szempontból nem tartom esélyesnek a kérdésben felvetett kiterjesztést. Noha Kostochka és Kirstead 2008-ban adott egy „rövid” bizonyítást a Hajnal-Szemerédi tételre, az a mi szempontunkból még mindig túl bonyolult. Egy további „érv” a kiterjesztés esélytelensége mellett, hogy ha t -t egészen n/k -ig növeljük, akkor a Baranyai-tételt kéne élesítenünk olyan értelemben, hogy az ott szereplő különböző partícók egyes osztályai között valamilyen metszet feltételt is kikötnénk.

Mégegyszer szeretném megköszönni Frankl Péternek a pozitív véleményét és a disszertációm bírálatára szánt idejét.

Budapest, 2010 december 1.

Sali Attila