

Sali Attila: Extremal Theorems for Matrices (MTA doktori értekezés)

A disszertáció a magyar bevezetőtől eltekintve angolul íródott, és három részből áll. Az olvasónak - így az opponensnek is - könnyebbség, hogy a fejezetek nem cikkmásolatok. A szerző 17 cikkéből válogatta disszertációja anyagát, ebből 16 társszerzős (legnagyobb [8] multiplicitással Ansteevel).

1. A disszertáció eredményeiből.

1.1 Tiltott részkonfigurációk. Ebben - mátrixokra fogalmazva - azt a problémát tárgyalja, hogy legalább hány él kell legyen egy egyszerű m pontú H hipergráfban ahhoz, hogy tartalmazzon egy fix (nem szükségképpen egyszerű) F hipergráfot nyomként (trace), azaz H hipergráfot megszorítva pontjainak valamely részhalmazára, F -el izomorf hipergráfot kapjunk. Másként fogalmazva, mennyi $\text{forb}(m, F)$, a legtöbb él egy olyan hipergráfban, melyben F tiltott konfiguráció? A fejezet társszerzőkkel (Anstee egy híján mindenben benne van) írott hét cikkén alapul. A részfejezetek kiemelnek néhány tipikus eredményt, módszert, kapcsolatot.

A 2.2.3 sejtés Anstee és Sali sejtése $\text{forb}(m, F)$ nagyságrendjéről. Legfeljebb három sorú tiltott mátrixokra a 2.3.1, 2.3.2 és 2.3.5 tételek, néhány más mátrixra a 2.3.11 tétel bizonyítja a sejtést. Továbbá táblázatszerűen fel van sorolva sok pontos eredmény legfeljebb három sorú ill. 4×2 -es tiltásokra. Az utóbbiak közül kettő bizonyítással szerepel (2.4.4 és 2.4.8 tételek). Külön fejezetben kerül bemutatásra a 2.3.11 tétel egy mellékhatása, a 2.5.5 tétel, ami Lovász csúcsszínezésre 3-kritikus uniform hipergráfok élszámkorlátjának általánosítása.

1.2 Antilánckok VC-dimenziója. Ez a fejezet két cikk alapján (Anstee ill. Anstee-Rónyai társszerzőkkel) a VC-dimenzió és Frankl egy sejtése körül mozog. Egy S halmazt szétzúz (shattered, traced fordítása) egy hipergráf, ha S minden részhalmazát megkapjuk S és valamely hiperél metszeteként. A szétzúzott halmazok vizsgálatának új lendületet adott Alain Pajor francia funkcanalista megjegyzése, miszerint egy (egyszerű) hipergráf legalább annyi halmazt zúz, amennyi éle van. Ez bizonyításával együtt bekerült az Anstee-Rónyai-Sali cikkbe.

Ugyanebben a cikkben az $\mathcal{H}$ hipergráf által zúzott $sh(\mathcal{H})$ és a Bollobás-Radcliffe által definiált $st(\mathcal{H})$ strongly traced család közé iktatott $osh(\mathcal{H})$ családot definiálják, melynek fontosságát a több oldalról motivált 3.1.6 tétel adja, mely szerint $|osh(\mathcal{H})| = |\mathcal{H}|$. További érdekes, a fogalom hasznosságát mutató elég nehéz tétel a 3.3.5 tétel, mely az $osh(\mathcal{H})$ halmazrendszert jellemzi abban az esetben, ha $\mathcal{H}$ antilánc.

A 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5 tételek Frankl egy sejtésének (ha egy antilánc nem zúz k pontú halmazt, akkor legfeljebb $\binom{n}{k-1}$ éle van) speciális eseteit bizonyítják.

1.3 Adatbázis mátrixok. A fejezet relációs adatbázis modellek által sugallt kombi-

natorikai problémákat mutat be mintegy 10 cikk alapján. A 4.1 és 4.2 alfejezetek ismertetik a 70-es években keletkezett modellt néhány, a 80-as években vizsgált problémával együtt (Demetrovics, Katona, Füredi). Ez igen jól sikerült, olvasóbarát rész.

A 4.3 alfejezet a funkcionális függőség egy általánosításával, a (p, q) -függőséggel foglalkozik három Demetrovics-Katona-Sali és egy Sali-Sali cikk alapján. Érdekes kombinatorikai problémák vetődnek fel, nekem különösen a 4.3.25 tétel és bizonyítása tetszett.

A 4.4 alfejezet Katona-Sali-Schewe Armstrong kodok létezésével kapcsolatos eredményeiből, és azok javításaiból ad izelítőt (Sali-Székely). Végül a 4.5 alfejezetet egy kétdimenziós adattárolási modellből absztrahált Latin négyzetekkel kapcsolatos problémát ismertet egy Anstee-Sali és egy Anstee-Demetrovics-Katona-Sali cikk alapján.

2. Észrevételek, kérdések.

A tiltott konfigurációk mátrix nyelvezete szerintem sok esetben nem olvasóbarát. Például F_8 mátrix tiltása azt jelenti, hogy bármely két metsző él uniója fedi a hipergráf csúcshalmazát. Vagy a 2.4.8 tételben F_{2110} tiltása azt jelenti, hogy a hipergráf legalább két pontban metsző élpárjai tartalmazkodók. Ilyen és hasonló fordítások nélkül csak mátrixagyú olvasókhoz szólnak az eredmények.

Kissé zavaró, hogy az csúcsszám (n) és élszám (m) szokásos jelölése meg van cserélve.

Füredi egyszerű de szép bizonyítását a 2.1.5 tételre - mivel a vizsgálatoknak ez az alapja - érdemes lett volna beemelni a dolgozatba, ahogy a hivatkozott Anstee-Griggs-Sali cikkbe.

2.3.3 rész második sorában D_{12} mátrix definíciója homályos, pl. nincs megadva, hány sora van.

A 2.4.1 tételnél nincs megemlítve, hogy az Anstee eredménye (az Anstee-Sali cikk csak idézi, úgyhogy a referencia rossz).

Theorem 2.4.2 -nél a megadott érték hibás.

A 2.4.8 felső korlát bizonyításban az indukció F_{1110} konfigurációra hivatkozik, ami úgy tűnik nincs definiálva a disszertációban.

Theorem 2.3.2 és 2.3.5 tételben az " F has at least one configuration from " zavaró - F egyetlen mátrix, gondolom " F is a configuration from " a helyes.

Azt a DKS98 Demetrovics-Katona-Sali cikkben szereplő állítást, hogy a 4.3.25 tételhez tartozó $n_0(2, 3)$ korlátfüggvény pontos értéke 452, nem tudom elhinni. Nem arról van szó, hogy a bizonyítás alsó korlátja a 452?

3. A disszertáció értékelése.

A disszertáció egyik referenseként nemrégiben az volt a feladatom, hogy Attila 6 legjobb (pontosabban Attila által 6 legjobbnak tartott) cikkéből méltassak tételeket a doktori bizottság számára. Akkor kiválasztottam két szép és fontos tételt (egy Füredi-Kahn sejtés visszavezetését hipergráf problémára - önálló tétel - és az önkomplementer gráfok egy meglepő tulajdonságára vonatkozót - Simonyival közös tétel). Sajnos ezek - a top 6 lista két további cikkével együtt - nem kerültek be a disszertációba, úgyhogy most az értékelésnél csak annyit említhetek: a jelöltnek vannak látványos, a disszertációba be nem vett eredményei is.

A disszertációba bevett eredményekre a látványosság kevésbé jellemző. A tiltott részkonfigurációk esetén az alapos, körültekintő vizsgálatot, katalogizálást látom a fő erénynek. A pontos eredmények 23 tételt kódoló táblázata imponáló és a két részletesen tárgyalt további tétel (2.4.4, 2.4.8) szintén érdekes. A 2.3.5 tétel is kínálkozik kiemelésre, mely klasszifikálja a három-sorú tiltott konfigurációkhöz tartozó korlát függvények nagyságrendjét - de nehéz áttekinteni a sok esetet. A bizonyítási módszerek - bár nem egyszerűek - szerintem még nem teljesen kiforrottak. Kivétel a 2.5 fejezet, ezt találtam legérdekesebbnek.

Az adatbázis mátrixok témájában tetszik, hogy sokféle, alkalmazással motivált, tetszetős probléma bukkan fel a kombinatorika különböző területeiről, pl. strongly balanced gráfok, kódok, latin négyzetek, orthogonal double covers, stb.

4. Konklúzió. Sali Attila disszertációja - bár vizsgálatai nincsenek az extrémális kombinatorika centrumában - igen értékes hozzájárulás a hipergráfok témaköréhez.

Sali (Anstee-vel) a Vapnik-Chervonenkis-dimenzió alaptételének környékén kezdeményezett vizsgálatokat. Sejtést fogalmazott meg arról, hogy mitől függ egy tiltott mátrix extrémális függvényének nagyságrendje és azt nagyon sok esetben pontosan vagy aszimptotikus értelemben be is látta. Jó szemmel vette észre az egyes esetek mögött megbújó - sokszor újszerű - problémákat, ennek legszebb példája a 2.5 fejezet anyaga a particiókritikus hipergráfokról. Bevezette a rendezett szétzúzás fogalmát, melynek fontosságát a 3.1.6 és 3.3.5 tételek mutatják. Bekapcsolódott a (Demetrovics és Katona által kezdeményezett) relációs adatbázisok kombinatorikájába is, mely érdekes eredményekhez - esetenként újszerű vizsgálatokhoz - vezetett. Kiemelem a (p, q) -reprezentálhatóság elégséges feltételeire vonatkozó eredményeket a 4.3.1 alfejezetből, az Armstrong kódok létezésére vonatkozó 4.4.5 tételt, a kis diszkrepanciájú latin négyzetekre vonatkozó 4.5.4 tételt, a Kneser gráf egy érdekes tulajdonságú perfekt (páratlan pontszám esetén majdnem perfekt) párosításáról szóló 4.3.25 tételt.

Az értékezés nyilvános vitára tűzését és a doktori cím megadását javaslom.

Budapest, 2010 július 19.

Gyárfás András