

# KIKÖTÖTT ÁRBOCOK NAGY ELMOZDULÁSAI

Kandidátusi értekezés

Készítette:

*Domokos Gábor*

Tudományos vezető:

*Gáspár Zsolt, a műszaki tudomány doktora*

Budapest, 1989.

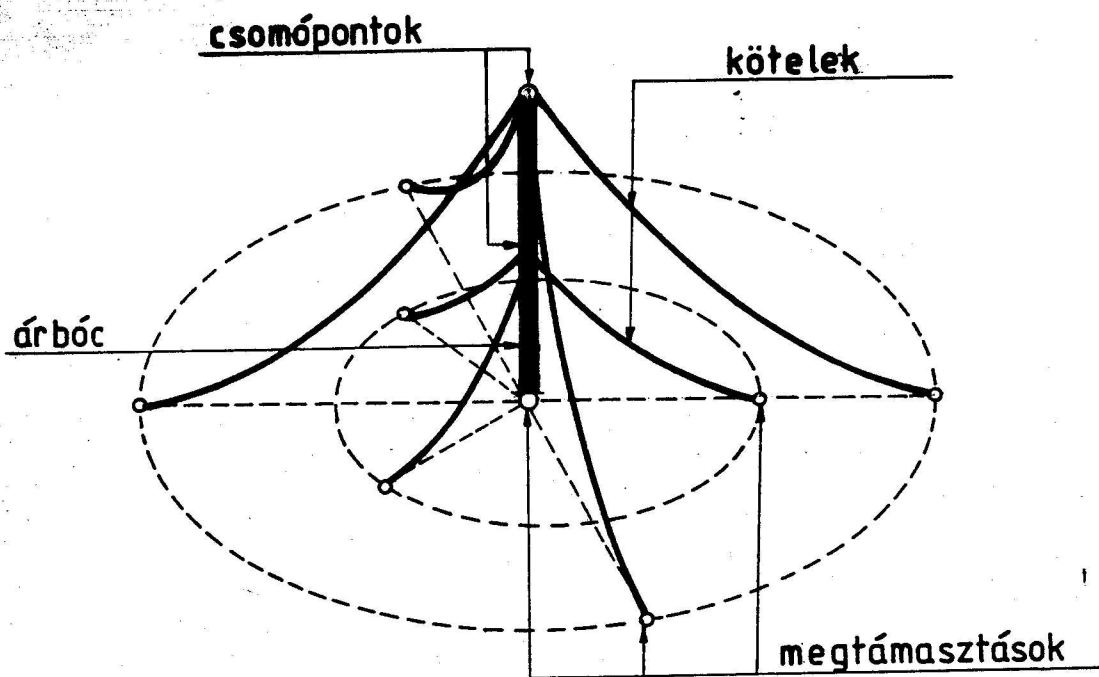
# Tartalom

Bevezetés	4
<b>1 A differenciálegyenletek származtatása</b>	<b>10</b>
1.1 Az általános egyenlet	10
1.1.1 A statikai egyenlet	10
1.1.2 Az alakváltozási egyenlet	13
1.2 Speciális esetek	16
1.2.1 A kötél-egyenletek	19
1.2.2 Az Euler-egyenlet	22
1.2.3 A gerenda-egyenletek	23
1.2.4 A csak a végein terhelt rúd	25
1.3 Összefoglaló megjegyzések	27
<b>2 Egyensúlyi utak globális vizsgálata</b>	<b>29</b>
2.1 Általános összefüggések	30
2.1.1 A Peano-féle unicitási tétel	30
2.1.2 A peremek vizsgálata	30
2.2 Példák	34
2.2.1 A nyomatékkaal terhelt konzol: $d = 1$	34
2.2.2 A nyomott konzol: $d = 2$	35
2.2.3 A nyomott csuklós rúd: $d = 3$	36
2.3 Összefoglaló megjegyzések	39

<b>3</b>	<b>Ciklikusan szimmetrikus szerkezetek vizsgálata</b>	<b>40</b>
3.1	Tenzorok szimmetria-invarianciája . . . . .	41
3.1.1	Skalárok . . . . .	41
3.1.2	Általános konzervatív tenzorok . . . . .	47
3.2	Példák . . . . .	51
3.2.1	A potenciális energia: $m = 0$ . . . . .	51
3.2.2	A merevségi operátor: $m = 1$ . . . . .	52
3.2.3	A feszültségi tenzor: $m = 2$ . . . . .	54
3.3	Összefoglaló megjegyzések . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Árbocok számítása</b>	<b>58</b>
4.1	Az egyensúly feltétele . . . . .	58
4.2	Numerikus módszerek és eredmények . . . . .	61
4.2.1	A peremérték feladatok . . . . .	61
4.2.2	Korlátozottan nagy elmozdulások . . . . .	61
4.2.3	Korlátlanul nagy elmozdulások . . . . .	67
4.3	Összefoglaló megjegyzések . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Fontosabb új eredmények</b>	<b>75</b>
	<b>Irodalom</b>	<b>77</b>
	<b>Függelék</b>	<b>82</b>

# Bevezetés

A kikötött árbocok rendkívül karcsú szerkezetek, használati állapotban (tehát olyan terhelés hatására, amelyre méretezték őket) más magasépítési szerkezeteknél nagyságrenddel nagyobb elmozdulásokat végeznek. Ilyen típusú szerkezetet illusztrál az első ábra:



1. ÁBRA: A SZERKEZET ELRENDEZÉSE

A kikötött árbocok tönkremenetelének okait tárja fel LAIHO (1987) 30 évre visszatekintő adatgyűjteménye, melyben több, mint 40 árboc tönkremenetelének okát és körülményeit közli időrendi sorrendben, táblázatosan. Mivel LAIHO (1987) táblázata nehezen hozzáférhető, ezért (függelékben) közöljük. LAIHO adatai arra mutatnak, hogy a tönkremenetel okai (a gyakoriság sorrendjében): jegesedés, belengés, statikus szél és kötél átvágása. Ezek a hatások természetesen kombinálódhatnak is. A felsoroltak alapján megállapíthatjuk, hogy a statikus teher hatására bekövetkező tönkremenetel a gyakorlat szempontjából igen lényeges. Egyelőre nem ismert, hogy az ilyen okból összeomlott tornyok vajon stabilitás-vesztéssel, vagy más módon mentek tönkre. Ennek felderítése, illetve önmagában a megengedhető statikus teher nagyságának megállapítása a mindenképpen a pontos (har-

madrendű) elmélet alkalmazását teszi szükségessé, hiszen, mivel már használati állapotban elég nagy elmozdulások jöhetnek létre, a stabilitási határig olyan nagyságrendű eltolódások és elfordulások is felléphetnek, amelyek másodrendű elmélettel sem kezelhetők. Érdekes szerkezet-tervezési kérdés az árbocok tökéletlenség-érzékenysége, melyhez ugyancsak a stabilitási határ megállapítása szükséges.

Az IASS (Int. Ass. for Shell and Space Structures) ajánlása (lásd (LAIHO, 1987) alatt) alapján az egyes nemzeti szabványok (FINNORSZÁG, 1980; CSEHSZLOVÁKIA, 1982) is egymás után vezetnek be azt a méretezési előírást, mely szerint a több ponton megfogott árbocok esetén egy kötél elszakadása esetén is igazolni kell a szerkezet állékonyságát. Ezen előírás oka, hogy LAIHO adatgyűjtésében számos beszántott, illetve repülőgép által elszakított kötél hatására összedőlt árboc szerepel. A kötél szakadás utáni állapotot a szabványok szerint statikai és dinamikai szempontból egyaránt meg kell vizsgálni. A statikai vizsgálatnál várható, hogy a rendkívül nagy koncentrált vízszintes terhelés hatására az árboc olyan nagy elmozdulásokat végez, melyek ismét csak harmadrendű elmélettel követhetők. Nem érdektelen, hogy a fizikai nemlinearitás milyen mértékben módosítja a szerkezet erőjátékát. Ezt a problémát vizsgálja korlátozott elmozdulások esetén ZÜLEV et.al.(1986)

A harmadrendű elmélet alkalmazására példa más szerkezeten kötélnálók állapotváltozásának vizsgálata (ROLLER (1965), valamint SZABÓ és KOLLÁR (1974)). Az utóbbi könyvben a teljes szerkezet számítására „vegyes” módszert vezetnek be a szerzők, amely szerint a kisebb elmozdulásokat végző peremet másodrendű, a kötélnálót pedig harmadrendű elmélettel számolják. Ezt az eljárást a kikötött árbocoknál nem lenne célszerű alkalmazni, mert itt az árboc nagy elmozdulásaira is fel kell készülnünk. Az értekezés egyik célja kikötött árbocok nagy elmozdulásainak, illetve teljes egyensúlyi útjának számítása harmadrendű elmélettel. A „tisztá” harmadrendű elmélet alkalmazása azonban több nehézségbe is ütközik.

A kikötött árbocok két eltérő típusú szerkezeti elemből állnak: kötelekből és az árbocból. Ezen elemek modellezésére a harmadrendű elméletben a teljes geometriai nemlinearitást figyelembe vevő differenciálegyenleteket kell alkalmazni. Bár mindkét szerkezeti elem leírására voltak ilyen típusú egyenletek, a statika ezeket külön fejezetben tárgyalta és nem volt tisztázott az egyenletek közötti kapcsolat, ez pedig alapvető feltétele egy elmentmondásmentes matematikai modellnek. További probléma, hogy az említett differenciálegyenletek fizikai nemlinearitást nem vesznek figyelembe. A fentiek illusztrálására röviden áttekintjük a témakör irodalmát.

Vonalkontinuumok nemlineáris vizsgálatával J. BERNOULLI (1694) kezdett foglalkozni, meghatározván a síkbeli, hajlított (húzás-nyomásra és nyírásra merev) rúd egyenletét. Az ebben az egyenletben található téves konstansot D. BERNOULLI javaslatára EULER (1744) korigálta, levezetvén az „elasztika” egyenletet. Az elasztika egyenlet egyik legátfogóbb numerikus vizsgálatát SAALSCHÜTZ (1880) végezte el. Később KIRCHHOFF (1897) rámutatott a matematikai inga és az elasztika közötti analógiára. LOVE (1927) részletesen elemezte az analógiát, és e szempont szerint osztályozta az elasztika integrálgörbéit. A KIRCHHOFF által felfedezett és LOVE által részletesen feltárt analógia alapján EL NASCHIE (1989) mutatott rá, hogy a káosz jelenségek nem csak időben (dinamikai rendszerek), hanem térben is létrejöhetnek. A káoszelmélet ma még főként di-

namikai rendszerek megjósolhatatlan viselkedését vizsgálja (DEVANEY, 1987), és megmutatja (MOON, 1987), hogy ilyen jelenséggel már olyan rendkívül egyszerű rendszerben is találkozhatunk, mint az imént említett matematikai inga. A KIRCHHOFF-analógia és EL NASCHIE elmélete nyomán mód nyílt ezen érdekes jelenségek időtől független, térbeli vizsgálatára, ha a speciális tökéletlenségekkel rendelkező elasztika egyenletet megoldó numerikus apparátus a kezünkben van (DOMOKOS, 1988b és 1989f). Az elasztikával kapcsolatos újabb vizsgálatok irodalmát elemzi EISLEY (1963). Ezek többségükben konzoltartó lehajlását vizsgálják. Az újabb irodalomból külön figyelmet érdemel STERN (1979) és (1984) munkája, melyben az elasztika különböző megoldásait elemzi. STERN nem hivatkozik SAALSCHÜTZ (1880) könyvére, és részben ehhez igen hasonló ábrákat közöl. Vizsgálatai azonban túlmutatnak SAALSCHÜTZ művén, ugyanis egyrészt számítógépre támaszkodva közöl rendkívül alaposan kidolgozott összehasonlító számításokat, másrészt a numerikus eredményeket fényképpel is dokumentált kísérletekkel veti össze. A szerző nem figyel fel a két rúdvégi csukló fedésbe kerülésekor keletkező szingularitásra. Ezt a problémát a 2.2.3 alponthban fogjuk megvizsgálni.

PFLÜGER (1950) az elasztikánál némileg általánosabb problémát vizsgál: csak nyírásra tekinti merevnek a síkbeli rudat. Az egyensúlyi feltételt két másodrendű, implicit differenciálegyenlet formájában fogalmazza meg, majd az elfordulás mint változó bevezetésével egy másodrendű, explicit alakra hozható egyenletre jut. Szintén nyírásra merev rudakat vizsgál CLEMENS (1983), elsősorban stabilitás szempontjából. Részletesen foglalkozik a forgatómátrix szerkezetével, de nem világít rá a különböző dimenziókban értelmezett forgatómátrixok közötti kapcsolatra. A rúd geometriáját klasszikus differenciálgeometriai módszerrel tárgyalja. A rúd összenyomhatóságának hatását elemzi numerikusan KOKARAKIS és BERNITSAS (1987). Korlátozottan nagy elmozdulások esetén hasonlítja össze a különböző közelítő módszereket a PFLÜGER által közölt általánosított elasztika numerikus megoldásával KOUNADIS és MALLIS (1988).

A vonalkontinuum másik speciális esete a kötél. A láncgörbe egyenlete már LAGRANGE (1788) előtt ismert volt. Ő ennél jóval általánosabb problémát is vizsgált: levezette az általános teherrel terhelt, térbeli, tökéletesen hajlékony, nyírásra merev, tengelyirányban rugalmas kötél egyensúlyi feltételét az anyagegyenlet részletesebb megadása nélkül. Az egyensúlyi feltételt variációs elven írta fel, a lánc esetében az ívhossz nyújthatatlanságát a róla elnevezett multiplikatorttal vette figyelembe. Megállapítja, hogy a variációs feladat alapját képező funkcionál a rugalmas kötél és a lánc esetében analóg. A rugalmas kötélnél a terhet a megnyúlt ívhossz szerint tekinti adottnak. Erre az esetre nem vezet le a variációs feladathoz tartozó differenciálegyenletet. A LAGRANGE által vizsgált problémának mérnöki szempontból érdekes speciális esete, amikor a kötelet csak saját súlya terheli. Ekkor egyetlen skalár differenciálegyenlettel megadható az egyensúlyi alak. Ennek az egyenletnek egy partikuláris megoldását mutatja be EGERVÁRY (1954), magát az egyenletet azonban nem adja meg. Ugyanest a megoldást vizsgálja numerikusan VERMES (1986). Implicit, ívhossz szerinti differenciálegyenlet-rendszer formájában tárgyalja a feladatot DICKEY (1976), és kvalitatíve osztályozza a megoldásokat. A csekély hajlítómerevséggel rendelkező, tengelyirányban merev kötelet elemzi numerikusan WANG és WATSON (1982). Kötelekkel merevített szerkezetek rezgésével kapcsolatban vizsgálja a feszítőkötelek nemlineáris viselkedését KOLLÁR (1972) másodrendű elmélettel.

Az elasztika és a rugalmas kötél egyenleténél jóval általánosabb problémát tárgyal könyvében CLEBSCH (1862). Annyi megszorítást tesz csupán, hogy feltételezi a fizikai linearitást, és a vonalkontinuum kezdeti alakját és önfeszültségeit csak meglehetősen speciális esetben tudja figyelembe venni. Feltételezi továbbá, hogy a fajlagos merevségi mátrix diagonális. CLEBSCH nem vizsgálja az általa levezetett egyenletrendszer kapcsolatát a kötél-egyenletekkel. A CLEBSCH-egyenleteknél elemzi a hőmérséklet-változás hatását KLINGER (1942). Ugyanezen egyenleteket általánosítja később kismértékben SCHRÖTER (1972), megengedvén, hogy a csavarási középpont ne essék egybe a súlyponttal. Munkájában numerikus eredményeket és számítógépi program-részleteket is közöl rudak számításával kapcsolatban. (A továbbiakban az " $n$  dimenziós vektorra vonatkozó" jelző helyett az " $n$  dimenziós" jelzőt használjuk.) Az általa általánosított differenciálegyenleteket a 3 dimenziós esetben egy elsőrendű, 12 dimenziós differenciálegyenletben foglalja össze, amely lényegében a CLEBSCH-féle egyenletek átírásának tekinthető. Kötelekkel vizsgálataival - CLEBSCH-hez hasonlóan - nem foglalkozik.

SCHRÖTER-hez hasonlóan AHRENS (1969) is 12 dimenziós, elsőrendű differenciálegyenletre jut. Részletesen foglalkozik a rugalmas ágyazással. Csak lineárisan rugalmas anyagot vizsgál, és a rúd kezdeti alakjára illetve önfeszültségeire korlátozásokat tesz. Kötelekkel ő sem foglalkozik. BÜRGERMEISTER, STEUP és KRETZSCHMAR (1957) eredményeit továbbfejlesztve GÁSPÁR (1976) az átviteli mátrixok módszerét alkalmazza vonalkontinuumok vizsgálatára. Dolgozatában csak a végein terhelt rúdra írja fel a differenciálegyenletet. Módszerének előnye CLEBSCH vizsgálataival szemben, hogy a kezdeti alakot korlátozás nélkül figyelembe tudja venni, az alkalmazott szimbolika révén az összefüggések tetszőleges dimenzióban igazak, a fajlagos hajlékonysági mátrix nem szükségszerűen diagonális és a feladat numerikusan (számítógéppel) lényegesen könnyebben kezelhető. GÁSPÁR egyszerűsítő feltételezése (csak rúdvégi koncentrált teher) révén elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre jutott szemben CLEBSCH másodrendű egyenleteivel.

Az 1. fejezet célja GÁSPÁR apparátusának kiterjesztése a CLEBSCH által vizsgált problémára oly módon, hogy elvileg a fizikai nemlinearitás is figyelembe vehető legyen. Külön feladat a lineárisan rugalmas anyag esetére felírható összefüggések vizsgálata. A kitűzött célok érdekében be fogjuk vezetni az ismert átviteli mátrix ívhossz szerinti deriváltját, ezzel általánosítva az eddig csak véges távolságokra alkalmazott átviteli mátrix fogalmát. Meg szeretnénk vizsgálni, hogy az alkalmazott differenciálegyenletek rendjének van-e mechanikai tartalma, vagyis a fizikai megértés szempontjából közömbös-e, hogy egy  $d$ -dimenziós másodrendű egyenletet, vagy annak CAUCHY-átírásával kapott (matematikailag ekvivalens)  $2d$ -dimenziós elsőrendű egyenletet vizsgálunk.

Az elemi statika és szilárdságtan többségében olyan problémákat tárgyal, amelyek egy explicit, skalár differenciálegyenlettel megadhatók, és amelyekből ráadásul az ívhossz ki is van küszöbölve. További célja az 1. fejezetnek, hogy ezen ismert egyenletek és az általános egyenlet közötti összefüggést tisztázza. Megkíséreljük levezetni a síkbeli, tengelyirányban rugalmas kötél egyenletét is. Célunk, hogy ezzel megmutassuk, miszerint a rudak és kötelek (az elemi szilárdságtanban) egységes elmélettel kezelhetők, tehát az itt levezetett egyenletekből felépített matematikai modell ellentmondásmentes. Az egyes speciális eseteknek az általános egyenletből való levezetése többek között egyértelművé teszi, hogy melyik

egyenlet milyen közelítést tartalmaz. Az általunk használt (tehát az elemi szilárdságtan feltételezéseit elfogadó) modell és más, általánosabb rúdmodellek kapcsolatát mutatja be ANTMAN (1976).

A harmadrendű elmélet alkalmazásával kapcsolatos további probléma, hogy a nagy elmozdulások leírására olyan apparátusra van szükség, mely az egyensúlyi utat egy véges dimenziós térben vizsgálja. Ezt az irodalomban általában úgy valósították meg (THOMPSON és HUNT, 1983), hogy a vizsgált függvény harmonikus sorfejtésének első véges sok tagját tekintették. Arra azonban, hogy hány tagot kell tekinteni, ha globálisan vizsgáljuk az egyensúlyi utat, nincs matematikailag alátámasztott, általános érvényű szabály. A 2. fejezet célja egy olyan apparátus kiépítése, mely matematikai garanciával lehetővé teszi az 1. fejezetben tárgyalt vonalkontinuumok egyensúlyi útjainak globális leírását véges dimenziós térben.

Az első két fejezetben kiépített matematikai modell nem vizsgálja a szerkezet elrendezéséből adódó lehetőségeket és problémákat. A kikötött árbocok egyik legszembeötlőbb tulajdonsága, hogy diszkrét forgási szimmetriával rendelkeznek. Az ilyen jellegű szerkezetek számításánál gyakran az okozza a gondot, hogy a szerkezetre jellemző valamely függvény (pl. merevségi operátor) csonkolt TAYLOR-sora nem tükrözi az eredeti szerkezet szimmetria-tulajdonságait (HATHOUT et al., 1979). A 3. fejezet azt vizsgálja, hogy milyen feltételek szabhatók a figyelembe veendő TAYLOR-tagok rendjére, ha a csonkolt sortól is elvárjuk az eredeti szerkezet szimmetriáit. A levezetett tételeket ebben a fejezetben egyéb szerkezeteken, analitikus példákon illusztráljuk.

A 4. fejezetben kerül sor az első három fejezetben kidolgozott apparátus alkalmazására az árbocok számításánál.

A szakirodalomban számos munka foglalkozik kikötött árbocokkal. A méretezési gyakorlatban elterjedt, rugalmasan ágyazott, tengelyirányban merev, hajlékony tartó modelljét már FAURE (1931) is használja, elsőként azonban BLEICH (1933) tárgyalja kimerítően. Művében három- vagy négyszeres szimmetriával rendelkező szerkezeteket vizsgál. A kötélvégek nemlineáris erő-eltolódás diagramját egy egyszerűsített síkbeli modell alapján vezeti le. A hőmérséklet-változásból származó igénybevételeket is figyelembe veszi. Harmadrendű ciklikus szimmetriával rendelkező, több ponton megfogott árbocot vizsgál ugyanezen modell alapján kimerítően ZIESEL (1958). A kikötött árbocok gyakorlati tervezésével kapcsolatos statikai számításokat foglalja össze a másodrendű elmélet alapján PETERSEN (1970). A köteleket parabolával közelíti és a rudat egyesnek tekinti SCHEER és ULLRICH (1978). A kábelek merevségi tulajdonságait vizsgálja nemlineáris elmélettel SKOP (1979). Harmadrendű elméletet alkalmaz, de a vizsgálatokat a síkbeli modell korlátozott elmozdulásaira szűkíti ROSENTHAL és SKOP (1980). Véges-elemes megközelítést alkalmaz GODBOLE, KRISHNA és KHANDEKAR (1985). Az utóbbi években előtérbe került a stabilitás és a posztkritikus viselkedés vizsgálata is. A köteleket lineáris rugókkal helyettesíti CHAJES és CHEN (1979). Meghatározza a 3 ill. 4 kötéllal egy csomópontban megfogott szerkezet lineáris kritikus terhét. A köteleket húzott állapotban szintén lineáris rugókkal modellezi HEGEDŰS (1988). Figyelembe veszi a kötelek rugalmatlan elernyedését is, és a síkbeli (2 köteles) modell viselkedését tárja fel a kezdeti posztkritikus viselkedésig. Az lineáris rugókkal megtámasztott merev rúd viselkedését több munka is tárgyalja. A 3 szimmetriku-



san elhelyezett rugó esetét THOMPSON és GÁSPÁR (1977) , az  $n$  rugós esetet GÁSPÁR (1978) elemzi a katasztrófaelmélet alapján. Ugyancsak a katasztrófaelmélet szemszögéből végzi vizsgálatait SAMUELS (1980) , de nem követeli meg a rugók szimmetrikus elrendezését. Kezdeti posztkritikus viselkedést vizsgál egy csomópontban megfogott árbocok esetén FISCHER (1988).

A 4. fejezetben először a rúdszerkezetek egyensúlyi feltételét fogalmazzuk meg a harmadrendű elmélet szerint, majd számpéldákat mutatunk be nagy elmozdulások nyomkövetésére az 1., 2. és 3. fejezetben kidolgozott apparátus segítségével. A bemutatandó általános, harmadrendű számítási modell lehetőséget biztosít az imént felsorolt, különböző közelítéseket tartalmazó módszerek hibáinak ellenőrzésére.

# 1. fejezet:

## A differenciálegyenletek származtatása

A kötelek és az árboc modelljéül szolgáló egydimenziós (vonal-) kontinuumok differenciálegyenleteinek származtatásánál az elemi szilárdságtan szokásos feltételezéseiből indulunk ki:

- A kontinuumot infinitezimális vastagságú merev szeletek rugalmasan kapcsolt láncolataként kezeljük.
- A szeleteket kapcsoló rugók dolgozhatnak húzás-nyomás, nyírás, hajlítás vagy csavarás ellen.
- A rugók linearitását nem követeljük meg.

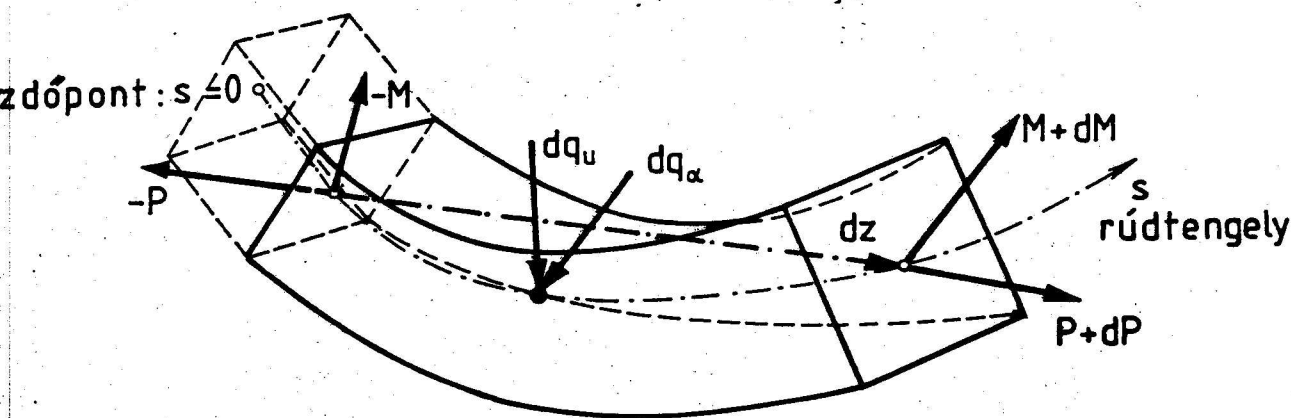
### 1.1 Az általános egyenlet

Célunk olyan egyenlet levezetése, mely 1, 2 és 3 dimenzióban egyaránt alkalmazható. Az egyik lehetőség az volna, hogy mindent 3 dimenzióban vezetünk le és később a megfelelő változókat elhagyjuk. A másik lehetőség, hogy  $n$ -dimenziós ( $n \leq 3$ ) egyenletet vezetünk le, melybe bármely  $n$  behelyettesíthető. Az utóbbi módszer előnye, hogy talán jobban feltárja a különböző dimenzióban felírt egyenletek közös vonásait és szükségtelenné teszi az ismert, de hosszadalmas 3 dimenziós képletek közlését, mivel a későbbiekben elsősorban 2 dimenziós eseteket fogunk tárgyalni.

#### 1.1.1 A statikai egyenlet

Egy merev test mozgási szabadságfoka az  $n$ -dimenziós euklideszi térben  $\binom{n+1}{2}$ , ugyanis  $\binom{n}{1} = n$  eltolódási és  $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n)$  elfordulási szabadságfokkal rendelkezik. Ennek megfelelően a vonalkontinuum helyzetét egy  $n$ -dimenzós  $z_u(s)$  eltolódás-vektor és egy  $\binom{n}{2}$ -dimenziós  $z_\alpha(s)$  elfordulás-vektor rögzíti, ahol  $s$  a kezdőponttól mért nyúlásmentes

ív-hosszat jelenti. A megnyúlt ív-hosszat  $S$ -sel jelöljük. A terhet analóg módon az  $n$ -dimenziós  $q_u(s)$  erő-vektor és az  $\binom{n}{2}$ -dimenziós  $q_\alpha(s)$  nyomaték-vektor írja le. Ezek a vektorok a kezdőponttól az  $s$  pontig mért teher integrálját jelentik, tehát a szokásos teher-intenzitást a  $\dot{q}_u$  és  $\dot{q}_\alpha$  nyúlásmentes  $s$  ív-hossz szerinti deriváltak szolgáltatják. A  $\frac{d}{ds}$  operátort ezután mindig felső ponttal jelezzük. Az egyes tehervektorok természetesen csak a saját komponenseiből származó integrálokat tartalmazzák, tehát a nyomatéki teherbe nem számít bele az erő jellegű teher nyomatéka. Ennek az integrálos megadásnak az a célja, hogy a különböző vetületekben adott terheket a későbbiekben mint ugyanazon vektor különböző változók szerinti deriváltjait kezelhessük. A kontinuum belső erőit úgy értelmezzük, mint a kezdőpontot tartalmazó darabra az átmetszés helyén ható  $n$ -dimenziós  $P$  erő-vektort és  $\binom{n}{2}$ -dimenziós  $M$  nyomaték-vektort. Megjegyezzük, hogy háromnál magasabb dimenzióban a nyomatékot már nem lehet vektorként értelmezni, ugyanis ekkor egy kétdimenziós altérnek nincsen egyértelmű normálisa. A kontinuum akkor van egyensúlyban, ha elemei is egyensúlyban vannak. Az egyensúly feltételét tehát az ívelemre ható dinámrendszer alapján írjuk fel, amelyet a 2. ábra illusztrál 3 dimenzióban:



2. ÁBRA: AZ IVELEMRE HATÓ DINÁMOK

Az egyensúlyi feltételt az

$$\begin{aligned} 1./ & \quad dP = -dq_u \\ 2./ & \quad dM = dz_u \times P - dq_\alpha \end{aligned} \quad (1.1)$$

egyenletrendszer szolgáltatja. A fenti egyenletrendszerről, amely csak differenciálokat tartalmaz, tehát a megnyúlt és nyúlásmentes állapotban egyaránt igaz, célszerűen a nyúlásmentes  $s$  ív-hossz szerinti deriváltakat tartalmazó

$$\begin{aligned} 1./ & \quad \dot{P} = -\dot{q}_u \\ 2./ & \quad \dot{M} = \dot{z}_u \times P - \dot{q}_\alpha \end{aligned} \quad (1.2)$$

egyenletrendszerre térünk át. A (1.2/2) egyenletben szereplő vektoriális szorzat egy, a  $P$  vektorra alkalmazott  $\dot{B}_M$  lineáris operátornak is tekinthető:

$$\begin{array}{l} 1./ \quad \dot{P} = -\dot{q}_u \\ 2./ \quad \dot{M} = \dot{B}_M P - \dot{q}_\alpha. \end{array} \quad (1.3)$$

A fenti egyenletrendszer tovább tömöríthető, ha bevezetjük a SZABÓ és ROLLER (1978) által javasolt  $B$  átviteli hipermatrixot, melynek szerkezete  $n$  dimenzióban a következő:

$$B = \begin{bmatrix} E_{(1)}^{(n)} & 0 \\ B_M & E_{(2)}^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

ahol  $E_i$  az  $i$ -edrendű egységmatrixot jelöli. Az igénybevételeket, terheket és elmozdulásokat is hipervektorokba írhatjuk:

$$D = \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_u \\ q_\alpha \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_u \\ z_\alpha \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Az (1.4) és (1.5) egyenletek a koordinátás tárgyalást feltételezik, míg erre az (1.3) egyenletben nem volt szükségünk. Visszahelyettesítve az (1.4) és (1.5) alakokat az (1.3) egyenletrendszerbe a

$$\dot{D} = \dot{B}D - \dot{q} \quad (1.6)$$

tömör összefüggést nyerjük. A koordinátás tárgyalásmódban minden vektort egy külső, globális descartes-i koordináta-rendszerben adunk meg. A későbbiekben szükségünk lesz ugyanezen vektoroknak a rúd keresztmetszetéhez illesztett, lokális koordináta-rendszerben számítható komponenseire. A lokális rendszert mindig a globális rendszer merevtest-szerű elforgatásával származtatjuk. A nyomatéki- és erő-vektor komponensei külön-külön az ortogonális forgató-csoport egyik elemével transzformálódnak. Ez a transzformáció-csoport Lie-csoport, és ezért egy infinitezimális generátor segítségével egy differenciálegyenlettel adható meg. Ez a generátor BOERNER (1967) szerint nem más, mint az egyes tengelyek körüli virtuális szögsebességekből alkotott ferdén szimmetrikus  $A$  mátrix, melynek  $a_{ij} = -a_{ji}$  eleme az  $[ij]$  síkban értelmezett virtuális szögsebesség. E mátrix segítségével az elforgatott  $u$  vektorra az

$$\frac{du}{dt} = Au \quad (1.7)$$

differenciálegyenletet írhatjuk fel, melynek megoldása a szokásos értelemben vett  $T_{(1)}^{(n)}$  ill.  $T_{(2)}^{(n)}$  forgatómatrix, aszerint, hogy az erő- vagy nyomaték-vektort forgatjuk. Az (1.7) egyenlet megoldását síkbeli rúd esetében a következő pont elején illusztráljuk. A 3 dimenziós esetet SNEDDON (1976) tárgyalja. A  $T_{(1)}^{(n)}$  és  $T_{(2)}^{(n)}$  mátrixok ismeretében könnyen megadható a  $T$  hipermatrix, amely a teljes  $D$  belsőerő-dinámot forgatja:

$$T = \begin{bmatrix} T_{(1)}^{(n)} & 0 \\ 0 & T_{(2)}^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

### 1.1.2 Az alakváltozási egyenlet

Az alakváltozások meghatározásához szükségünk van a vonalkontinuum kezdeti formájára, térbeli helyzetére azonban nem, ugyanis ez már kezdetiértékeket is tartalmaz, mi pedig csak a differenciálegyenletet szeretnénk felírni. A kezdeti formát leíró vektort azonban a teljes kezdeti térbeli helyzetet leíró

$$v(s) = \begin{bmatrix} v_u(s) \\ v_a(s) \end{bmatrix}$$

$\binom{n+1}{2}$  dimenziós hipervektorból vezetjük le, melyet a  $z(s)$  hipervektorral teljesen analóg módon a globális koordinátarendszerben értelmezünk. Célunk, hogy a formát olyan  $\binom{n+1}{2}$  skalár függvénnyel adjuk meg, mely a vonalkontinuum fizikai,  $n$  dimenziós térben értelmezett ortogonális koordináta-transzformációkra, tehát a párhuzamos eltolásra és a forgatásra nézve invariáns.

A  $v(s)$  vektor  $\dot{v}(s)$  deriváltja az  $\binom{n+1}{2}$  dimenziós térben értelmezett párhuzamos eltolásokra nézve invariáns. Bennünket ebből csak az első  $\binom{n}{1} = n$  mozgási szabadságfok érdekel, hiszen a maradék  $\binom{n}{2}$  csupán matematikai értelemben jelent eltolódást, fizikailag a keresztmetszetek és a rúdtengely által bezárt szögek változtatásával egyenértékű. Az  $n$  dimenziós fizikai térben való elforgatásra így tehetjük invariánssá az első  $n$  komponenset, ha őket a maradék  $\binom{n}{2}$  komponens által rögzített helyzetű koordináta-rendszerben értelmezzük. Így az első  $n$  komponens kódját a maradék  $\binom{n}{2}$  komponens alapján lehet megfejteni, tehát a dekódoláshoz szükségtelen a külső koordinátarendszer. Ezek szerint tehát a  $\dot{v}(s)$  vektort a lokális koordináta-rendszerbe transzformáljuk:

$$\tilde{v} = \tilde{T} \dot{v} \quad (1.9)$$

Ebben az egyenletben  $\tilde{T}$  a korábban definiált  $T$  forgatómátrixszal azonos szerkezetű, de nem a  $z_a$ , hanem a  $v_a$  szögek szögfüggvényeit tartalmazza. Ezt jelzi a transzformált vektor feletti hullámvonal. A  $\tilde{v}$  vektort  $\tilde{T}^{-1}$ -gyel szorozva nem a  $\dot{v}$  vektort nyernénk vissza. Erre a visszaforgatott vektorra később egy új jelölést fogunk bevezetni.

A kezdeti állapot ívhosszát  $s_0$ -lal jelölve könnyű megmutatni, hogy a  $\tilde{v}$  vektor tengelyirányú  $\tilde{v}_z$  komponense

$$\tilde{v}_z = \dot{s}_0, \quad (1.10)$$

speciálisan, ha a kezdeti ívhossz egyben nyúlásmentes is, akkor  $\tilde{v}_z = 1$ .

A lokális koordináta-rendszerben való megadás igen élesen mutatja, hogy a vizsgált vonalkontinuumok csak kvázi-egydimenziósak. Egydimenziós sokaságok ugyanis mindig euklideszi belső geometriával rendelkeznek, tehát a magasabb dimenziójú euklideszi térbe végtelentül sok eltérő formában ágyazhatók be. A vizsgált vonalkontinuumot leginkább

úgy képzelhetjük el, mint egy egydimenziós sokaságot, melyhez egy  $\delta$  sugarú magasabb dimenziós környezetet is definiálunk, amelybe a sokaság be van ágyazva. A környezet és a sokaság együttesen már természetesen megőrzi formáját. Iménti tárgyalásunkban a sokaságot az első  $n$  koordináta, a beágyazó környezetet a maradék  $\binom{n}{2}$  koordináta jelentette.

Az igénybevételek és alakváltozások között az  $f$  anyagegyenlet rögzíti a kapcsolatot:

$$\bar{D} = f(T\dot{z}, \tilde{T}\dot{v}). \quad (1.11)$$

Feltéve, hogy a kezdeti alak feszültségmentes és az anyag lineárisan rugalmas, ez speciálisan így írható:

$$\bar{D} = \bar{F}^{-1}(T\dot{z} - \tilde{T}\dot{v}).$$

Ahol  $\bar{F}^{-1}$  a rúd fajlagos merevségi mátrixa. A fajlagos hajlékonysági mátrixot  $\bar{F}$ -fel fogjuk jelölni, és a két mátrixot egymás inverzének tekintjük. Szinguláris mátrixok esetén kis zavarással érhetjük el az invertálhatóságot, ezt azonban a levezetésekben a rövidség kedvéért nem fogjuk jelezni.

A továbbiakban mindig a lineárisan rugalmas anyagú, kezdetben (ill. terheletlen állapotban) feszültségmentes esetet vizsgáljuk, de megjegyezzük, hogy az (1.6) és (1.11) egyenletek segítségével számítógépen kényelmesen nyomonkövethető fizikailag sem lineáris, önfeszültségi állapotban lévő rúd viselkedése is. Az egyszerűség kedvéért bevezetjük továbbá a

$$T^{-1}\tilde{T}\dot{v} = \dot{z}_0 \quad (1.12)$$

jelölést, melynek segítségével anyagegyenletünk a

$$\bar{D} = \bar{F}^{-1}T(\dot{z} - \dot{z}_0) \quad (1.13)$$

alakot ölti. Figyelembe véve, hogy

$$\bar{D} = TD. \quad (1.14)$$

a (1.13) összefüggés így írható:

$$D = T^{-1}\bar{F}^{-1}T(\dot{z} - \dot{z}_0). \quad (1.15)$$

Ez viszont nem más, mint

$$D = F^{-1}(\dot{z} - \dot{z}_0), \quad (1.16)$$

ahol  $F^{-1}$  a globális koordináta-rendszerben értelmezett fajlagos merevségi mátrix, hiszen a fajlagos merevségi mátrix egy koordináta-invariáns vektor-vektor függvény reprezentációja.

Az (1.6) és (1.16) egyenlet együttesen meghatározza az általános alakváltozási egyenletet. A numerikus vizsgálatok szempontjából kedvezőbb ez a szétválasztott alak, de az áttekinthetőség szempontjából nem. Ezért behelyettesítjük az (1.16) egyenletet (1.6)-ba:

$$[F^{-1}(\dot{z} - \dot{z}_0)]' = \dot{B}F^{-1}(\dot{z} - \dot{z}_0) - \dot{q}. \quad (1.17)$$

Elvégezve a kijelölt deriválást:

$$F^{-1}\ddot{z} - F^{-1}\ddot{z}_0 + F^{-1}\dot{z} - F^{-1}\dot{z}_0 = \dot{B}F^{-1}(\dot{z} - \dot{z}_0) - \dot{q}, \quad (1.18)$$

illetve explicit alakra hozva

$$\ddot{z} = (F\dot{B}F^{-1} - FF^{-1})'(\dot{z} - \dot{z}_0) + \ddot{z}_0 - F\dot{q}. \quad (1.19)$$

Mivel  $FF^{-1} = E$ , ezért a szorzat deriválási szabálya szerint

$$(FF^{-1})' = \dot{F}F^{-1} + FF^{-1}' = 0.$$

Ez szerint tehát

$$FF^{-1}' = -\dot{F}F^{-1}, \quad (1.20)$$

amit az (1.19) egyenletbe helyettesítve a

$$\ddot{z} = (F\dot{B}F^{-1} + \dot{F}F^{-1})'(\dot{z} - \dot{z}_0) + \ddot{z}_0 - F\dot{q}. \quad (1.21)$$

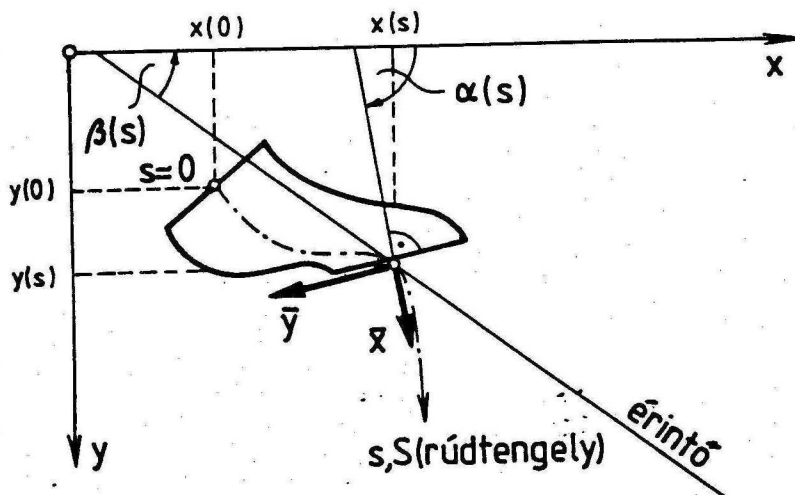
alakot kapjuk. Ez a másodrendű, közönséges,  $\binom{n+1}{2}$  dimenziós explicit differenciálegyenlet a lineárisan rugalmas anyagú vonalkontinuumok általános alakváltozási egyenletének egy célszerű alakja. A további levezetések szempontjából hasznos lesz az ezzel egyenértékű

$$\ddot{z} = (F\dot{B} + \dot{F})D + \ddot{z}_0 - F\dot{q} \quad (1.22)$$

alak, melyet (1.16)-nek (1.21)-be való helyettesítésével nyertünk. A fenti egyenletet az itt leírtól kissé eltérő módon vezeti le DOMOKOS (1988a).

## 1.2 Speciális esetek

Ebben a pontban elsősorban (az utolsó alpont kivételével) síkbeli feladatokkal foglalkozunk, ezért most előljáróban levezetjük az ekkor érvényes speciális összefüggéseket. Koordináta-rendszeinket a 3. ábra illusztrálja:



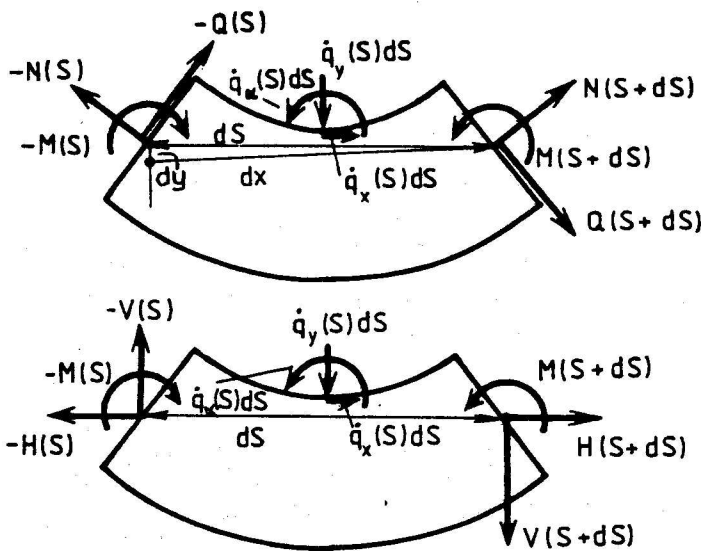
3. ÁBRA: KOORDINÁTA-RENDSZEREK

A rúd alakját a

$$z(s) = \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ \alpha(s) \end{bmatrix}$$

vektor rögzíti. A keresztmetszetenként értelmezett  $\bar{x}\bar{y}$  lokális koordináta-rendszert, qlymódon illesztettük a kezdőpontot tartalmazó rúd-részhez, hogy az  $\bar{x}$  tengely a keresztmetszet külső normálisa legyen. A rúdtengely érintőjének irányszögét  $\beta$ , a keresztmetszet külső normálisának irányszögét  $\alpha$  jelöli, és, mint az ábrán is látható, általános esetben  $\alpha \neq \beta$ . A koordináta-rendszerrel összhangban értelmezzük az ívelemre ható belsőerő-komponenseket is, amit a 4. ábra mutat.





4. ÁBRA: A SIKBELI IVELEMRE HATÓ DINÁM-KOMPONENSEK

A továbbiakban minden olyan mennyiséget, amelyet ugyanaz a betű jelöl a globális és lokális rendszerben, felülvonással tüntetünk ki, ha a lokális rendszerben értelmezzük.

Az egyensúlyi egyenlet felírásához meg kell határoznunk a  $\dot{B}$  hipermátrixot. A  $\dot{B}_M$  mátrix a vektoriális szorzat determináns-kifejtése alapján

$$\dot{B}_M = [-\dot{y}, \dot{x}] \tag{1.23}$$

alakú, és az (1.4) képlet szerint

$$\dot{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{y} & \dot{x} & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.24}$$

Az (1.6) hipermátrix-egyenlet ezek szerint síkban az alábbi három skalár egyenletre bomlik:

$$\begin{aligned} 1./ & \quad \dot{H} = -\dot{q}_x \\ 2./ & \quad \dot{V} = -\dot{q}_y \\ 3./ & \quad \dot{M} = -\dot{y}H + \dot{x}V - \dot{q}_\alpha \end{aligned} \tag{1.25}$$

Ebben a három egyenletben összesen 8 függvény szerepel, melyek közül ha a terheket adottnak tekintjük, 5 marad ismeretlen. 3 egyenlet lévén, a megoldhatóság feltétele, hogy az 5 függvény közül kettőt ismerjünk, vagy amennyivel kevesebbet ismerünk, annyi kiegészítő egyenlet adjunk meg. (Megoldhatóságon egy legalább numerikusan integrálható differenciálegyenlet felírását értjük.) A furcsa aszimmetriát, mely szerint 3 belsőerő, de csak 2

elmozdulás-komponens van, az eredményezi, hogy a statikai vizsgálatok szempontjából a keresztmetszet elfordulását leíró  $\alpha$  szög érdektelen, "belső" változó. Ugyanezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy adott teher esetén egy merev rúd igénybevételei párhuzamos eltolásra invariánsak, de forgatásra nem. A továbbiakban különböző változatokat vizsgálunk az (1.25) egyenletrendszer megoldhatóságára, és ezáltal a statika ismert differenciálegyenleteihez fogunk jutni.

Mielőtt azonban rátérnénk a megígért esetekre, levezetjük a forgatómátrix képletét az (1.7) egyenletből. Síkban  $n = 2$ , tehát a  $T_2$  és  $T_1$  mátrixok képletét keressük. A  $T_2$  mátrix meghatározásához a  $2 \times 2$ -es ferdén szimmetrikus mátrixra van szükségünk. A síkbeli forgatáskor fellépő egyetlen szögsebességet  $\omega$ -val jelöljük:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

A fenti egyenletből  $u_y$  kiküszöbölésével a

$$\frac{d^2 u_x}{dt^2} = -\omega^2 u_x \quad (1.27)$$

egyenletet kapjuk, melynek általános megoldása KORN és KORN (1968) szerint

$$u_x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t). \quad (1.28)$$

Az  $u_y = \frac{1}{\omega} \frac{du_x}{dt}$  helyettesítéssel

$$u_y = -C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t). \quad (1.29)$$

Az (1.28) és (1.29) egyenletet együttesen így írhatjuk:

$$u = T_2 C \quad (1.30)$$

ahol

$$u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Az integrálási konstansokat azzal a triviális kezdeti feltétellel küszöbölhetjük ki, hogy  $\omega t = 0$  elforgatási szög esetén az  $u$  vektor koordinátái a kezdeti  $u_0$  vektor koordinátaival egyeznek meg. Ezek alapján

$$u = T_2 u_0. \quad (1.31)$$

A  $T_1$  mátrix meghatározása egyszerű feladat, hiszen az  $1 \times 1$ -es ferdén szimmetrikus mátrix egyetlen zérus elemből áll. Ezt behelyettesítve az (1.7) egyenletbe a triviális  $T_1 = 1$  összefüggéshez jutunk. Az (1.8) képlet alapján felírhatjuk a  $T$  hipermatrixot is:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

Ugyanezt a mátrixot pusztán szemlélet alapján is le lehet vezetni, a fenti absztraktabb tárgyalásmód célja mindössze a különböző dimenziókban érvényes forgatómátrixok közötti kapcsolat bemutatása.

### 1.2.1 A kötél-egyenletek

Elsőként a statikai kötél-egyenletekkel foglalkozunk. A kötelek elméletében abból szoktak kiindulni, hogy

$$M = 0, \quad (1.33)$$

azonban a statikai kötél-egyenletek levezetéséhez elegendő az

$$\dot{M} = 0 \quad (1.34)$$

feltétel. Mivel így 3 egyenletünk lesz 4 ismeretlennel, várható, hogy egy ismeretlen függvény fog szerepelni a megoldásban. További szokásos feltételezés, hogy

$$\begin{array}{l} 1./ \quad \dot{q}_x = 0 \\ 2./ \quad \dot{q}_\alpha = 0, \end{array} \quad (1.35)$$

ami csupán a megoldást egyszerűsíti, de annak nem feltétele. Az (1.34) feltétel és (1.25/3) alapján:

$$V = H \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = H y' \quad (1.36)$$

ahol a ' a  $\frac{d}{dx}$  operátort jelöli. Deriváljuk a fenti egyenletet:

$$\dot{V} = \dot{H} y' + H \dot{y}' \quad (1.37)$$

Az (1.35/1) feltétel és (1.25/1) alapján azonban a jobboldalon az első tag eltűnik:

$$\dot{V} = H \dot{y}' \quad (1.38)$$

A jobboldalt tovább alakíthatjuk:

$$\dot{V} = H \dot{x} y'' \quad (1.39)$$

a baloldalon pedig (1.25/2) miatt a függőleges teher áll:

$$-\dot{q}_y = H\dot{x}y'' \quad (1.40)$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dS} \frac{dS}{ds} = \dot{S} \cos(\beta) = \frac{\dot{S}}{\pm\sqrt{1+y'^2}}$$

Ennek alapján (1.40) a

$$y'' = -\frac{\dot{q}_y}{H\dot{S}} (\pm\sqrt{1+y'^2}) \quad (1.41)$$

formában írható. A szokásos esetekben  $\dot{x} > 0$ , vagyis a kötélt saját kezdőpontjától jobbra helyezkedik el, ekkor a zárójelben a + jel veendő figyelembe:

$$y'' = -\frac{\dot{q}_y}{H\dot{S}} \sqrt{1+y'^2} \quad (1.42)$$

Várakozásunknak megfelelően tehát egy olyan egyenletet kaptunk, amely egy ismeretlen  $\dot{S}$  függvény erejéig leírja a kontinuum alakját. A statikai számításokban fel szokták tételezni, hogy a kötélt (ív hossz) nyújthatatlan, tehát  $\dot{S} = 1$ , ekkor az (1.42) egyenlet az ismert

$$y'' = -\frac{\dot{q}_y}{H} \sqrt{1+y'^2} \quad (1.43)$$

összefüggéssé alakul. Ennek a másodrendű, egy paraméteres differenciálegyenletnek a megoldása a láncgörbe  $\dot{q}_y = konstans$  esetén. Ezek után foglalkozunk a nyújtható kötélt esetével.

Meghatároztuk tehát a rugalmas kötélt „elvi“ egyenletét, az (1.42) egyenletet, melyben az  $\dot{S}$  függvényt nem rögzítettük.

A kötelek rugalmas tulajdonságaival kapcsolatban a szokásos feltételezés szerint,

$$\bar{F} = \left\langle \frac{1}{EA}, 0, 0 \right\rangle, \quad (1.44)$$

ennek megfelelően annak érdekében, hogy ne jöhessenek létre végtelen fajlagos alakváltozások, fel kell tételeznünk, hogy

$$M = Q = 0. \quad (1.45)$$

Megemlítjük, hogy a statikai kötélt-egyenleteknél az ennél gyengébb  $\dot{M} = 0$  feltételezéssel éltünk. Az (1.13) összefüggés felhasználásával az

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{N}{EA} \quad (1.46)$$

egyenletet nyerjük, a másik két egyenlet határozatlan,  $0 \times \infty$  alakú mennyiségeket tartalmaz. Felhasználva, hogy

$$\bar{x}_0 = ds, \quad \bar{x} = dS,$$

azt kapjuk, hogy

$$\dot{S} = 1 + \frac{N}{EA}. \quad (1.47)$$

A normálerőnek az (1.14), (1.32), (1.44) és (1.45) egyenlet alapján nyert

$$N = \frac{H}{\cos(\alpha)} = \pm H\sqrt{1+y'^2} \quad (1.48)$$

alakját behelyettesítve az (1.47) egyenletbe és ezt visszahelyettesítve az (1.42) egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y'' = -\frac{\pm \dot{q}_y EA \sqrt{1+y'^2}}{EAH \pm H^2 \sqrt{1+y'^2}}. \quad (1.49)$$

A  $\pm$  jeleket, hasonlóan a korábbiakhoz, azszal a szokásos kikötéssel tüntethetjük el, hogy a kötél saját kezdőpontjától jobbra helyezkedik el. Ekkor a  $+$  jel veendő figyelembe:

$$y'' = -\frac{\dot{q}_y EA \sqrt{1+y'^2}}{EAH + H^2 \sqrt{1+y'^2}}. \quad (1.50)$$

Az (1.50) egyenlet konstans  $\dot{q}_y$  mellett integrálható, és az

$$y' = sh\left(\frac{\dot{q}_y}{H}(C-x) - \frac{H}{EA}y'\right) \quad (1.51)$$

elsőrendű, implicit differenciál-egyenletre vezet, ahol  $C$  integrálási konstans. A fenti egyenlettel a lineárisan rugalmas feszítő kábelek tesszölegesen nagy elmozdulásai követhetők.

Ezek után még egy speciális feladatot vizsgálunk, melyet általában a statikai feladatok között szoktak tárgyalni, mivel pusztán statikai megfontolások alapján levezethető az egyensúlyi egyenlet. Látni fogjuk azonban, hogy legalább olyan jogos a feladatot a „nyújtható” kötelek közé sorolni.

Gyakran vizsgálják azt az esetet, amikor a függőleges teher vízszintes vetületre vonatkoztatva adott. Ez nem-konzervatív terhelést jelent, tehát nem a kötél egyes pontjaiban megadott teher hatására felvett egyensúlyi alakot keressük, hanem egy olyan alakot, amely egy külső koordinátarendszerben rögzített teherre egyensúlyban van. A vízszintes vetületre vonatkoztatott terhet a tehervektor  $x$  szerinti  $q'_y$  deriváltja szolgáltatja. Ezzel fejezzük ki a régi terhet:

$$\dot{q}_y = \dot{x}q'_y \quad (1.52)$$

A fenti egyenletet az (1.40) összefüggésbe helyettesítve  $\dot{x}$ -tal egyszerűsíthetünk és az ismert

$$y'' = -\frac{q'_y}{H} \quad (1.53)$$

összefüggést nyerjük. Az (1.53) egyenlet a kötél rugalmas tulajdonságaitól függetlenül igaz. Elsősorban a grafo-analitikus módszereknél és közelítő számításoknál van jelentősége.

Megjegyezzük, hogy a kötél statikai egyenletének levezetéséhez csak azt tettük fel, hogy a nyomaték konstans. Azért viseli a kötél nevet, mert a hajlékony kötelek alakját is ezen egyenlet megoldásai között kell keresnünk.

### 1.2.2 Az Euler-egyenlet

Célunk, hogy az EULER (1744) által levezetett elasztika egyenletet az (1.21) egyenlet speciális eseteként vezessük le. EULER feltételezi, hogy a rúd összenyomhatatlan és nyírásra is merev. Ezért a fajlagos hajlékonysági mátrix az

$$\bar{F} = \langle 0, 0, -\frac{1}{EI} \rangle \quad (1.54)$$

alakot ölti. (A negatív előjel a síkgörbék görbületére vonatkozó előjel-szabályból következik.) A rudat kezdetben egyenesnek tételezzük fel, tehát

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.55)$$

és így (1.12) alapján

$$z_0 = T^{-1}\tilde{v} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.56)$$

A tehernek függőleges és vízszintes komponense egyaránt lehet, csak a nyomatéki terhet zárjuk ki:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.57)$$

Mivel a lokális és globális fajlagos hajlékonysági mátrix ebben az esetben speciálisan megegyezik, ezért a fenti egyenletet az (1.21) egyenlettel ekvivalens (1.22) egyenletbe helyettesítve az alábbi mátrix-egyenletre jutunk:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{y} & -\dot{x} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} H \\ V \\ M \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Ezt három skalár egyenletre bonthatjuk:

$$\begin{aligned} 1./ \quad & \ddot{x} = \cos(\alpha) \\ 2./ \quad & \ddot{y} = \sin(\alpha) \\ 3./ \quad & \ddot{\alpha} = \frac{1}{EI}(\dot{y}H - \dot{x}V) \end{aligned} \quad (1.59)$$

A rúd nyújthatatlansága miatt  $\dot{x} = \cos(\beta)$ ,  $\dot{y} = \sin(\beta)$ . Ha EULER nyomán feltesszük, hogy a keresztmetszetek merőlegesek a rúdtengelyre, tehát  $\alpha = \beta$ , akkor az (1.59)/1 és /2 egyenlet azonosság. A /3 egyenlet pedig (1.25/3) alapján

$$\ddot{\alpha} = -\frac{\dot{M}}{EI} \quad (1.60)$$

alakra hozható. Az elasztika megszkott alakját az (1.60) egyenlet integrálásával nyerjük:

$$\dot{\alpha} = -\frac{M}{EI} + C. \quad (1.61)$$

Az anyagegyenlet /3 összefüggése miatt  $C = 0$ .

Megjegyezzük, hogy ha nem az (1.21) egyenlet illusztrálása lett volna részben a célunk ebben az alponban, akkor némi okoskodással az anyagegyenlet /3 összefüggését behelyettesíthettük volna a statikai egyenletrendszer /3 összefüggésébe.

### 1.2.3 A gerenda-egyenletek

Ebben az alponban a gerendák elsőrendű elméletében használatos differenciálegyenleteket szeretnénk levezetni az általános egyenletekből. Elsőként a gerenda-igénybevételekkel foglalkozunk, és azt a változatot vizsgáljuk, amikor az (1.25) egyenletben az alakot leíró  $y(s)$  és  $x(s)$  függvények (illetve ezek deriváltjai) adottak és az igénybevételeket keressük. Ez az eset fordul elő például, ha az elsőrendű elméletnek megfelelően a megmerevítés elvét alkalmazzuk, vagyis az egyensúlyi összefüggéseket a kezdeti alakban írjuk fel. Az (1.14) egyenletet az (1.25)-tel egyenértékű (1.6)-ba helyettesítve a láncszabály alkalmazásával a következő összefüggést nyerjük:

$$\dot{T}^{-1}\bar{D} + T^{-1}\dot{\bar{D}} = \dot{B}T^{-1}\bar{D} - T^{-1}\dot{\bar{q}}. \quad (1.62)$$

Ezt kifejtve az alábbi egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned}
 1./ \quad & \dot{N} \cos(\alpha) - \dot{Q} \sin(\alpha) + N \dot{\cos}(\alpha) - Q \dot{\sin}(\alpha) = -\dot{q}_x \cos(\alpha) + \dot{q}_y \sin(\alpha) \\
 2./ \quad & \dot{N} \sin(\alpha) + \dot{Q} \cos(\alpha) + N \dot{\sin}(\alpha) + Q \dot{\cos}(\alpha) = -\dot{q}_x \sin(\alpha) - \dot{q}_y \cos(\alpha) \\
 3./ \quad & \dot{M} = Q(\dot{y} \sin(\alpha) + \dot{x} \cos(\alpha)) - N(\dot{y} \cos(\alpha) - \dot{x} \sin(\alpha)) - \dot{q}_\alpha
 \end{aligned} \quad (1.63)$$

Az elsőrendű gerenda-elméletben

a rúdtengely egyenes

$$1./ \quad \alpha = \text{konstans},$$

a rúd nyújthatatlan, tehát

$$2./ \quad \dot{y} = \sin(\beta), \quad \dot{x} = \cos(\beta), \quad (1.64)$$

a keresztmetszetek merőlegesek a rúdtengelyre, tehát

$$3./ \quad \alpha = \beta,$$

és a nyomatéki teher zérus, tehát

$$4./ \quad \dot{q}_\alpha = 0.$$

A fenti összefüggések közül a 2./ egyenlet az (1.25) egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele, a többi összefüggés csupán a megoldást teszi egyszerűbbé. Behelyettesítve az (1.64) összefüggéseket az (1.63) egyenletbe a jólismert képleteket nyerjük:

$$\begin{aligned}
 1./ \quad & \dot{N} = -\dot{q}_x \\
 2./ \quad & \dot{Q} = -\dot{q}_y \\
 3./ \quad & \dot{M} = Q.
 \end{aligned} \quad (1.65)$$

Az (1.65) egyenletrendszerhez 5 kezdeti feltétel tartozik. Három ezek közül a belsőerőket rögzíti a rúd kezdőpontjában (támaszreakciók), a maradék kettő pedig a kezdőpont helyzetét a síkon, ugyanis az (1.64/2) feltétel csak a deriváltakat tartalmazta. Az (1.65) egyenletből következik a szintén ismert

$$\ddot{M} = -\dot{q}_y \quad (1.66)$$

összefüggés is.

Röviden kitérünk a gerendák alakváltozását leíró egyenletre is. A gerendák kis lehajlásainak elméletében fel szokták tételezni, hogy

$$\begin{aligned}
 1./ \quad & \dot{\alpha} \simeq y'' \\
 \text{és} & \\
 2./ \quad & dx \simeq ds.
 \end{aligned} \quad (1.67)$$

A fenti két feltételt figyelembe véve az (1.61) és (1.66) egyenlet egy negyedrendű differenciálegyenletet határoz meg:

$$y^{IV} = \frac{q_y'}{EI}. \quad (1.68)$$



### 1.2.4 A csak a végein terhelt rúd

GÁSPÁR (1976) munkájában hasonló apparátussal a csak a végein koncentrált dinámmal terhelt rúd nagy elmozdulásait vizsgálja. Célunk, hogy megmutassuk, mi szerint a GÁSPÁR által használt elsőrendű differenciál-egyenlet az (1.21) egyenlet speciális esete. Ennek érdekében az (1.3) statikai egyenletrendszerből indulunk ki. Zérus megoszló teher esetén ez így alakul:

$$\begin{array}{l} 1./ \quad \dot{P} = 0 \\ 2./ \quad \dot{M} = \dot{B}_M P. \end{array} \quad (1.69)$$

Az első egyenletet integrálva és a másodikba helyettesítve az

$$\dot{M} = \dot{B}_M C_P \quad (1.70)$$

alakot kapjuk, ahol  $C_P$  egy  $n$  dimenziós integrálási konstans. Ezután (1.70) már integrálható:

$$M = B_M C_P + C_M. \quad (1.71)$$

Felhasználva az (1.4) jelölést a  $B$  hipermátrixra és az (1.5) hipervektorokat, eredményünket a

$$D = BC \quad (1.72)$$

hipermátrix-egyenletben foglalhatjuk össze, ahol

$$C = \begin{pmatrix} C_P \\ C_M \end{pmatrix}. \quad (1.73)$$

Felhasználva, hogy  $B(0) = E$ , kiküszöbölhetjük az integrálási konstansokat:

$$D(0) = EC = C, \quad (1.74)$$

és így (1.72)-be helyettesítve a

$$D = BD(0) \quad (1.75)$$

összefüggést nyerjük. Érdeemes megfigyelni, hogy bár az (1.75) egyenlet deriválásával megkapható az (1.6) egyenlet, az utóbbi egészben kezelve nem integrálható, csak a szétbontott (1.3) változatban. Ez a hipermátrix-egyenletek alkalmazásának egyik nehézségére utal. Megjegyezzük, hogy a  $D(0)$  dinám ellentettje hat a rúd kezdőpontjára kívülről. Az (1.75) egyenletbe helyettesítve az (1.16) anyagegyenletet a

$$\dot{z} = \dot{z}_0 + FBD(0) \quad (1.76)$$

elsőrendű differenciálegyenletet nyerjük. Ez tartalmilag azonos (GÁSPÁR, 1976) (2. 72) egyenletével. A formai azonosságot úgy érhetjük el, hogy GÁSPÁR jelöléseit átvesszük, melyek a következők:

$$D(0) = \underline{s}, \quad \dot{z}_0 = T^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\xi}_0 \\ g_0 \end{pmatrix}, \quad F = \underline{T}^{-1} \underline{F} \underline{T}.$$

A GÁSPÁR-egyenlet speciális eseteként tárgyalható a lineáris rugó.

Elsőként egy vízszintes helyzetű, két végén vízszintes  $P$  húzóerővel terhelt lineáris rugó alakváltozási egyenletét mutatjuk be az általános egyenlet alapján. Ennek a közel triviális példának az a szerepe, hogy az általános egyenlet levezetése előtt a dimenzió számával kapcsolatban tett megjegyzésünket illusztrálja. A rugó ugyanis alakváltozás után is egyenes marad, tehát az egyenlet minden mátrixa skalárrá egyszerűsödik. Csak rúdvégi teherről lévén szó, használhatjuk a GÁSPÁR-féle egyenletet a következő helyettesítésekkel:

$$B = 1, \quad F = \frac{1}{EA}, \quad D(0) = P, \quad \dot{z}_0 = 1, \quad (1.77)$$

és ennek alapján a jólismert

$$\dot{z} = 1 + \frac{P}{EA} \quad (1.78)$$

összefüggést nyerjük.

Teljesen analóg módon juthatunk az egyenes csavarrugó egyenletére is. Ezt a későbbiek miatt részletezzük. Az egyetlen elmozdulás- komponens ekkor a  $\varphi$  elcsavarodási szög, a rugó végeit  $M_{cs}$  csavarónyomaték terheli. Ezek szerint a GÁSPÁR-egyenletbe a következő skalárok kerülnek:

$$B = 1, \quad F = \frac{1}{GJ}, \quad D(0) = M_{cs}, \quad \dot{\varphi}_0 = 0, \quad (1.79)$$

és ennek alapján a szintén ismert

$$\dot{\varphi} = \frac{M_{cs}}{GJ} \quad (1.80)$$

összefüggést nyerjük.

### 1.3 Összefoglaló megjegyzések

Ebben a fejezetben levezettük a rugalmas vonalkontinuumok általános egyensúlyi egyenleteit az átviteli mátrixok módszerével, és ezzel a CLEBSCH-féle egyenleteknél elméletileg általánosabb, gyakorlatilag (numerikusan) könnyebben alkalmazható matematikai eszköz-höz jutottunk. Megmutattuk, hogy nem csak az elemi szilárdságtan, hanem a statika ismert egyenletei is leszámaztathatóak az általános egyenletből.

Érdeemes megfigyelni, hogy ezek a speciális egyenletek sokszor az általános egyenletétől eltérő számú integrálási konstans tartalmazznak.

Például az (1.43) egyenlethez látszólag 3 integrálási konstans tartozik. (A vízszintes erő maga is az (1.25/1) egyenletnek az (1.35/1) feltétellel való integrálásából adódó konstans.) Szemléletből viszont tudjuk, hogy egy kötél két végét rögzítve a köté alakját meghatároztuk. Mivel a kötélvégek síkbeli mozgási szabadságfoka 2, ezért szemléletünk alapján 4 integrálási konstansra lenne szükségünk a peremérték-feladat megoldásához. Ezzel összhangban van, hogy az (1.25) egyenletrendszer a nyomaték-függvény (1.33) megadásával 4 ismeretlen függvény deriváltját tartalmazza. A negyedik, „bújtatott“ integrálási konstans az ívhossz, hiszen a teher az ívhossz függvényében van megadva, ezért rögzítenünk kell, hogy a baloldali (kezdeti) peremnél az ívhossz milyen értéket vesz fel. Természetesen az egyetlen józan feltételezés az, hogy itt az ívhossz zérus, de ez matematikailag nem szükségszerű. A láncgörbével kapcsolatban BIEBERACH (1923) vizsgálja az integrálási konstansokat, de a hiányzó negyedik konstansra nem utal.

Másik példaként említjük, hogy az (1.68) differenciálegyenlethez 4 integrálási konstans tartozik. Szemléletből könnyen megállapíthatjuk azonban, hogy a valóságban 6 peremfeltétel van, ugyanis szabadon megválaszthatjuk mindkét rúdvég síkbeli helyzetét ( $2 \times 2 = 4$ ) és elfordulását ( $2 \times 1 = 2$ ). Azt is megállapíthatjuk, hogy az (1.21) másodrendű, 3 dimenziós differenciálegyenlet-rendszernek 6 integrálási konstansa van. Felmerülhet a kérdés, hogy vajon az (1.67) közelítések okozták-e az integrálási konstansok (és ezzel az előírható peremfeltételek) számának csökkenését, vagy más? Hasonlóan az (1.43) egyenlet kapcsán megállapítottakhoz itt is az ívhossz kiküszöbölése csökkentette a peremfeltételek számát. Eredetileg ugyanis az (1.21) egyenletnél az  $s$  ívhossz konstans értékei jelölték ki a peremeket, amelyeken az  $x, y$  és  $\alpha$  változók és azok deriváltjainak értékét előírhattuk. A kiküszöbölés után az  $x$  változó konstans értékei jelentik a peremeket, de nem szabad elfelejtenünk, hogy ezeken a peremeken az ívhossz értékét is elő kell írunk, hogy fizikailag értelmes feladatot vizsgálhassunk. Az (1.67) feltételezések éppen az ívhossz kiküszöbölését jelentik.

A peremfeltételek számának szempontjából érdekes az (1.76) egyenlet. Ez egy elsőrendű differenciálegyenlet, mely síkban csak 3 integrálási konstanssal rendelkezik, tehát csak merevtest-szerű elmozdulásokat enged meg. Vegyük azonban figyelembe, hogy a  $D(0)$  vektor maga is integrálási konstans, tehát a vektor komponenseit változtatva valóban létrejön a 6 szabadságfok. Végül megemlítjük, hogy a merev rúd alakját leíró triviális

$$\dot{z} = \dot{z}_0 \quad (1.81)$$

differenciálegyenlet (amelyet  $F = 0$  helyettesítéssel kapunk (1.76)-ból, és amely nem kapcsolatos a statikai alapegyenlettel, hiszen az alakot és igénybevételeket írja le együttesen) valóban csak 3 integrálási konstanssal rendelkezik, amelyek éppen a rúd merevtest-szerű mozgását jellemzik.

A fenti példákkal az (1.21) általános egyensúlyi egyenlet fizikai tartalmát szerettük volna illusztrálni. Megjegyezzük, hogy megítélésünk szerint szoros összefüggés van ezen egyenlet másodrendű volta, és azon tény között, hogy a rugalmas vonalnak két vége van. Ezt az állítást a peremfeltételekkel kapcsolatos előző szemléletes érvelés támasztja alá. Ez természetesen nem azt jelenti, hogy az általános egyenletből származtatott nem másodrendű egyenletek helytelenek, csak talán kevésbé tükrözik a vizsgált jelenség fizikai tartalmát.

Az általános egyenlet fizikai létjogosultságára és a másodrendűség jelentőségére mutat a KIRCHHOFF analógia is.

Ha a rudat az (1.60) egyenletben csak egy rúdvégi vízszintes  $P$  nyomóerő terheli, akkor  $M = Py$ , illetve  $M = P \sin(\alpha)$ , és az egyenlet a

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} EI = -P \sin(\alpha) \quad (1.82)$$

formát ölti. Ez teljesen analóg a matematikai inga mozgásegyenletével, ha az ívhossz helyett időt, az erő helyett súlyt, a hajlítási merevség helyett a tömegpontnak a forgásközéppontra vonatkoztatott inerciáját írjuk.

Láthatjuk, hogy az elasztika megszokott alakját egyszer deriválni kell, hogy a KIRCHHOFF analógia teljes legyen, de ha az általános alakváltozási egyenletből vezetjük le ezt az esetet, akkor közvetlenül az analóg alakot kapjuk.

## 2. fejezet:

# Egyensúlyi utak globális vizsgálata

Ennek a fejezetnek a célja az 1. fejezetben levezetett differenciálegyenletekkel leírható, lineárisan rugalmas vonalkontinuumok egyensúlyi útjainak globális vizsgálata.

Az egyensúlyi út fogalmát több módon lehet definiálni. Minden definíció megegyezik azonban abban, hogy az egyensúlyi út a  $\lambda$  teherparaméterből és alkalmasan megválasztott  $x_i, (i = 1, 2, \dots, n)$  koordinátákból alkotott  $u(\lambda, x_i)$  vektor által az  $R^{n+1}$  euklideszi térben kijelölt  $\mathfrak{R} \subset R^{n+1}$  ponthalmazhoz a szerkezet geometriai helyzeteinek  $\Omega$  halmazát rendeli hozzá. Ez tehát szükséges feltétel, gyakorlati szempontból viszont aligha elégséges, hiszen a „hozzárendelés“ módját nem írtuk körül. Ad absurdum eleget tesz a fenti definíciónak egy skalár intervallum, amely a teherparaméter vizsgált tartományát határozza meg (tehát  $n = 0$ ), és egy harmadrendű elmélet alapján működő univerzális programcsomag, amely a teherparaméter minden értékéhez előállítja a szerkezet egyensúlyi konfigurációit. Definíciónkat ezért tovább élesítjük, és kikötjük, hogy a  $\mathfrak{R} \iff \Omega$  hozzárendelés kölcsönösen egy-egy értelmű legyen. Ekkor azt mondjuk, hogy az  $R^{n+1}$  dimenziós térben az egyensúlyi út *egyértelműen leírható*.

Kontinuumok esetén az jelenti a problémát, hogy a szerkezet alakját általában csak végtelen sok skalár paraméterrel lehet rögzíteni, és ezért az egyensúlyi út tetszőlegesen nagy elmozdulások esetén ebben a tárgyalásmódban egy végtelen dimenziós térben halad. Ezen úgy szoktak segíteni, hogy a kontinuum alakját leíró függvény valamely sorfejtésének véges sok kezdőtagját veszik figyelembe. Leggyakrabban a Fourier-sort használják erre a célra. Ennek a módszernek az az előnye, hogy az egyensúlyi út egy (de nem minden) koordináta  $n$ -eshez csak egy teherparamétert rendel (ez nem volt követelmény), és a kontinuum alakja szemléletből viszonylag könnyen rekonstruálható. További előny, hogy felület-kontinuumok vizsgálatára is alkalmazható. A módszer hátránya, hogy matematikailag nem bizonyított, hogy tetszőlegesen nagy elmozdulások (globális vizsgálat) esetén van-e a figyelembe veendő tagok számára felső korlát.

Vizsgálataink céljára más módszert javaslunk, ugyanis globális elemzést szeretnénk végrehajtani.

## 2.1 Általános összefüggések

### 2.1.1 A Peano-féle unicitási tétel

A PEANO-féle unicitási tétel értelmében (BIEBERACH, 1923), ha a differenciálegyenlet eleget tesz a LIPSCHITZ-feltételnek, akkor a CAUCHY-problémában a kezdeti feltételek egyértelműen meghatározzák a megoldást. A LIPSCHITZ-feltétel automatikusan teljesül, ha a legmagasabb derivált az alacsonyabb deriváltaknak és a független változónak legalább egyszer deriválható, folytonos függvénye. Lineárisan rugalmas vonalkontinuumok esetén ezt fizikai megfontolások alapján feltételezhetjük. A CAUCHY-problémában a kezdeti feltételek külön-külön írják elő az egyes alacsonyabb deriváltak és függvények értékét a kezdőpontban (Például síkban  $x(0), y(0), \alpha(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{\alpha}(0)$  értékeit kell külön-külön megadni.)

A fentiek alapján tehát a vonalkontinuum egyensúlyi útja leírható a CAUCHY-féle kezdeti feltételek és a teherparaméter terében, amelynek dimenziója független a vizsgálat pontosságától és globális vagy lokális jellegétől. A fentiek alapján érvényes a következő

Tétel:

*Konzervatív,  $k$  paraméteres teherrel terhelt vonalkontinuumok egyensúlyi útja a  $d = 2\binom{n+1}{2} + k$  dimenziós térben egyértelműen leírható, ahol  $n$  a vonalkontinuum fizikai terének dimenziója.*

(2.1)

### 2.1.2 A peremek vizsgálata

Nem közömbös, hogy ismerünk-e a kezdeti feltételekre vonatkozó előírásokat, hiszen ezek segítségével a (2.1) tétel várhatóan tovább élesíthető. Mechanikai feladatokban mindig található ilyen előírás, ugyanis mindig vannak peremfeltételek. Mivel az (1.21) egyenlet egy másodrendű,  $\binom{n+1}{2}$  dimenziós vektor-differenciálegyenlet, ezért mindkét peremen pontosan  $\binom{n+1}{2}$  feltétel írható elő. Például az  $s = 0$  peremen:

$$\begin{aligned} f_1 & ( z_1(0), z_2(0), \dots, z_{\binom{n+1}{2}}(0), \dot{z}_1(0), \dot{z}_2(0), \dots, \dot{z}_{\binom{n+1}{2}}(0) ) = 0 \\ f_2 & ( z_1(0), z_2(0), \dots, z_{\binom{n+1}{2}}(0), \dot{z}_1(0), \dot{z}_2(0), \dots, \dot{z}_{\binom{n+1}{2}}(0) ) = 0 \\ & \vdots \\ f_{\binom{n+1}{2}} & ( z_1(0), z_2(0), \dots, z_{\binom{n+1}{2}}(0), \dot{z}_1(0), \dot{z}_2(0), \dots, \dot{z}_{\binom{n+1}{2}}(0) ) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

ahol a  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \binom{n+1}{2}$ ) mennyiségek a  $z$  vektor komponenseit jelölik.

Definíció:

Ha található olyan  $\binom{n+1}{2}$  skalár  $p_i$  paraméter ( $i = 1, 2, \dots, \binom{n+1}{2}$ ), amelyek értékeit megadva a (2.2) egyenletrendszer  $2\binom{n+1}{2}$  változója (tehát a CAUCHY-feladat) egyértelműen

meghatározható, akkor a peremet CAUCHY-peremnek nevezzük.

(2.3)

Legegyszerűbb CAUCHY-peremként azt az esetet említjük, amikor a  $z(0)$  vektor komponensei ismertek (teljes befogás), ekkor  $p_i = \dot{z}_i(0)$ . Előfordulhat az is, hogy az  $s = l$  peremen előírt feltételekből egyértelműen kiszámíthatók az  $s = 0$  peremen a CAUCHY-féle kezdeti értékek, ez a CAUCHY-perem speciális esete. Ekkor előre tudjuk, hogy az egyensúlyi út nem ágazhat el. A definícióban azért szerepel a „paraméter“ megjelölés a „változó“ helyett, mert a (2.2) egyenletrendszer változói (mint később látni fogjuk) paramétereiktől is függhetnek. Ez azt jelentheti például, hogy egy ilyen paramétert megadva egyszerre több változó is kiszámíthatóvá válhat. Az imént említett egyszerű példában a változók (speciálisan) önmaguktól, mint paramétereiktől függöttek. A CAUCHY-peremeket röviddel később módszeresen át fogjuk tekinteni.

A (2.3) definíció és a (2.1) tétel alapján adódik az alábbi


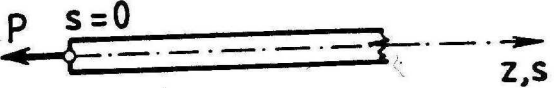
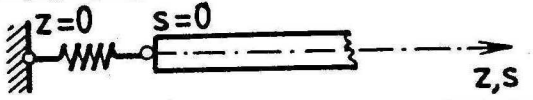
Tétel:

*Konzervatív,  $k$  paraméteres teherrel terhelt, CAUCHY-peremmel rendelkező vonalkontinuumok egyensúlyi útja a  $d = \binom{n+1}{2} + k$  dimenziós térben egyértelműen leírható, ahol  $n$  a vonalkontinuum fizikai terének dimenziója.*

(2.4)

Mechanikai feladatokban többnyire CAUCHY-peremek fordulnak elő, de ezt általánosan nem bizonyítjuk. Egyrészt azért nem, mert ehhez a „mechanikai feladat“ fogalmát matematikailag definiálni kellene, másrészt mert a fenti tétel akkor válik érdekessé, amikor konkrét példákon tovább lehet élesíteni. A továbbiakban csupán illusztrálni szeretnénk, hogy a megszokott mechanikai peremek valóban CAUCHY-peremek. Ennek érdekében elsőként a  $d=1$  dimenziós feladatokat vesszük szemügyre.

Egy dimenzióban a (2.4) tétel szerint az egyensúlyi út egyparaméteres ( $\lambda$ ) teher és CAUCHY-perem esetén a  $[\lambda, p_1]$  síkon fog haladni, hiszen  $d = \binom{1+1}{2} + 1 = 2$ . Az egy dimenzióban mechanikailag lehetséges változatokat, és a CAUCHY-feladat meghatározásához szükséges egyetlen  $p_1$  paramétert az 1. táblázatban rögzítettük.

Sorszám	Elrendezés	Peremfeltételek	$p_1$ paraméter
1		$z(0) = \text{const.}$	$\dot{z}(0)$
2		$\dot{z}(0) = \text{const.}$	$z(0)$
3		$f(z(0), \dot{z}(0)) = 0$	$z(0)$

## 1. TÁBLÁZAT:EGYDIMENZIÓS PEREMEK

A megjelölt  $p_1$  paraméterek helyett természetesen esetenként mást is választhatunk. A rúdvégi  $P$  erő és a  $z_0$  mennyiség között az (1.78) egyenlet teremt kapcsolatot.

Ezután a diagonális  $\bar{F}$  mátrixszal rendelkező síkbeli rudakat vizsgáljuk. A síkbeli esetben a CAUCHY-feltételek megadásához CAUCHY-perem esetén  $\binom{2+1}{2} = 3$  paraméterre ( $p_1, p_2, p_3$ ) van szükségünk. Egyelőre csak merev megtámasztásokat tekintünk. Ha az  $\bar{F}$  mátrix diagonális, akkor az első két egyenlet feltételei kapcsolatosak, tehát a 3 feltételből kettőnek az első két egyenletre, egynek az utolsó egyenletre kell vonatkoznia. Ennek alapján matematikailag kiszűrhetők a lehetséges változatok. A mechanikailag elképzelhető peremeket a 2. táblázat szemlélteti.

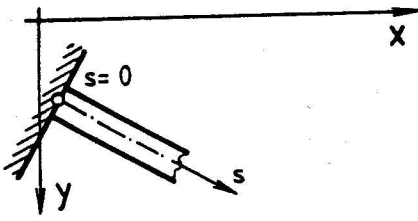
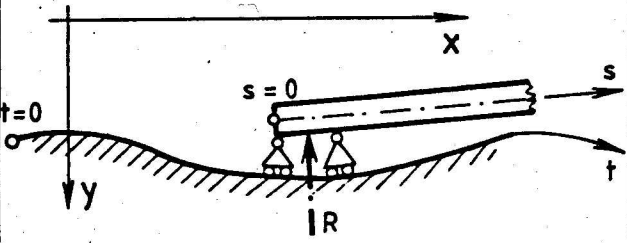
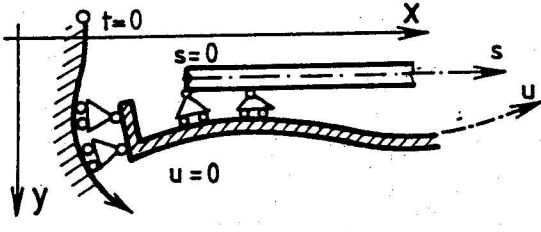
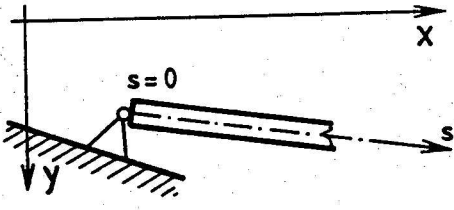
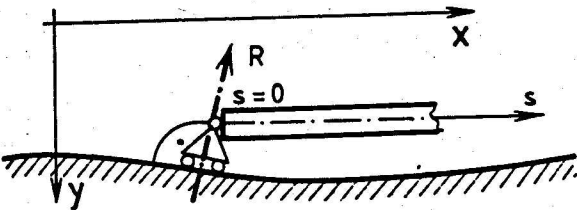
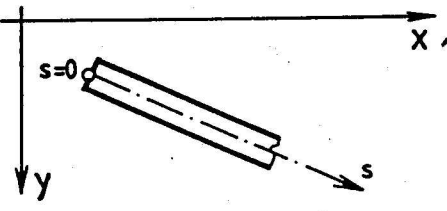
A táblázatban szereplő  $R$  paraméter a felületre merőleges reakció előjeles nagyságát jelöli. A 2. táblázatról leolvasható, hogy minden esetben található olyan  $(p_1, p_2, p_3)$  paraméterhármas, melynek megadása esetén a peremfeltételekből a CAUCHY-féle kezdeti feltételek egyértelműen kiszámíthatók.

Megjegyezzük, hogy a táblázat „Peremfeltételek” rovatában az implicit formában felírt (2.2) egyenletrendszert explicit formában írtuk fel, és ahány új, (a CAUCHY-problémában nem szereplő) paramétert szerepeltettünk, annyiival több egyenletnek kell lennie.

Rugalmas megtámasztásokat ott alkalmazhatunk, ahol szabad elmozdulás-komponensek vannak  $(x, y, \alpha)$ . A lehetséges peremek száma jelentősen megnő ugyan, de, ha a rugalmas megtámasztásokban ébredő erő a gátolt elmozdulás-komponensek egyértelmű függvénye, akkor az összes ilyen módon létrehozható perem is CAUCHY-perem. Az elmozdulás-komponenseket ugyanis a  $(p_1, p_2, p_3)$  paraméterekből egyértelműen meghatároztuk, és a rugalmas kényszerekből adódó többlet-erők ezekből kiszámíthatók.

Bemutattuk tehát, hogy a mechanikai peremérték-feladatok egy gyakorlatilag érdekes osztályában csak CAUCHY-peremek fordulnak elő. A továbbiakban olyan esetekkel foglalkozunk, amikor a (2.4) tételben meghatározott  $d$  dimenziószám tovább csökkenthető.



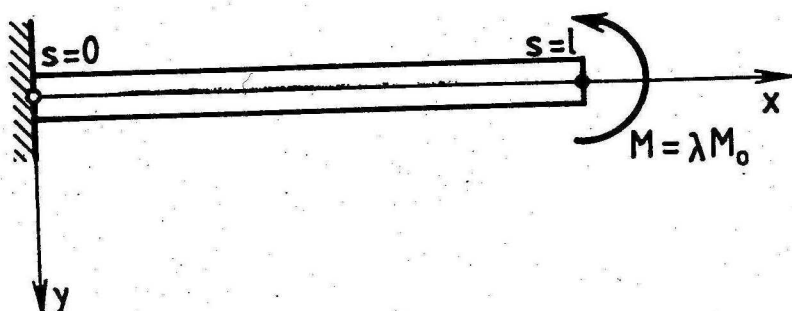
Sorszám	Elrendezés	Peremfeltételek	paraméterek
1		$x(0) = const.$ $y(0) = const.$ $\alpha(0) = const.$	$p_1 = \dot{x}(0)$ $p_2 = \dot{y}(0)$ $p_3 = \dot{\alpha}(0)$
2		$x(0) = f_1(t)$ $y(0) = f_2(t)$ $\dot{x}(0) = f_3(t, R)$ $\dot{y}(0) = f_4(t, R)$ $\alpha(0) = f_5(t)$	$p_1 = t$ $p_2 = R$ $p_3 = \dot{\alpha}(0)$
3		$\dot{x}(0) = f_1(t, u)$ $\dot{y}(0) = f_2(t, u)$ $x(0) = f_3(t, u)$ $y(0) = f_4(t, u)$ $\alpha(0) = f_5(t, u)$	$p_1 = t$ $p_2 = u$ $p_3 = \dot{\alpha}(0)$
4		$x(0) = const.$ $y(0) = const.$ $\dot{\alpha}(0) = const.$	$p_1 = \dot{x}(0)$ $p_2 = \dot{y}(0)$ $p_3 = \alpha(0)$
5		$x(0) = f_1(t)$ $y(0) = f_2(t)$ $\dot{x}(0) = f_3(t, R)$ $\dot{y}(0) = f_4(t, R)$ $\dot{\alpha}(0) = const.$	$p_1 = t$ $p_2 = R$ $p_3 = \alpha(0)$
6		$\dot{x}(0) = const.$ $\dot{y}(0) = const.$ $\dot{\alpha}(0) = const.$	$p_1 = x(0)$ $p_2 = y(0)$ $p_3 = \alpha(0)$

2. TÁBLAZAT: KÉTDIMENZIÓS PEREMEK

## 2.2 Példák

2.2.1 A nyomatékkal terhelt konzol:  $d = 1$ 

A vizsgált szerkezetet a 5. ábra mutatja:



5. ÁBRA: A NYOMATÉKKAL TERHELT KONZOL

Az  $s = 0$  peremen a

$$z(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \alpha(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

előírás érvényes. Az (1.75) egyenlet alapján

$$D(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda M_0 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Az  $\bar{F}^{-1}$  mátrixról feltételezzük, hogy diagonális:

$$\bar{F}^{-1} = \left\langle EA, \frac{GA}{\rho}, -EI \right\rangle, \quad (2.7)$$

és a rúd kezdeti alakját (1.12) alapján a

$$\dot{z}_0 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

függvény írja le. Mivel  $\alpha(0) = 0$ , ezért  $T(0) = E$ , és a  $D(0)$  vektort a (2.6) egyenletben ( $z$ -től függetlenül) megadtuk, az (1.15) lineáris egyenletrendszerből a  $\dot{z}(0)$  vektor elemei könnyen kifejezhetők:

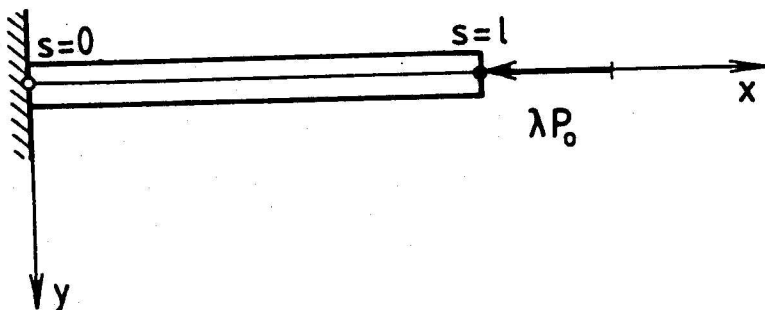
$$\dot{z}(0) = \begin{bmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \\ \dot{\alpha}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\lambda M_0}{EI} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

A (2.5) és (2.7) egyenletből kitűnik, hogy a CAUCHY-feladathoz tartozó kezdeti feltételek a  $\lambda$  teherparaméterből egyértelműen kiszámíthatók a kezdetiérték-feladat megoldása előtt, vagyis a  $z(s)$  vektor ismerete nélkül. Ezek szerint a (2.4) tételben megadott  $d = 4$  felső korlát itt speciálisan  $d = 1$ -re csökkenthető, tehát az egyensúlyi út azonos a  $\lambda$  tengellyel. (Nem ábrázoljuk.)

Megjegyezzük, hogy egyrészt a konzol kezdeti alakja (a  $z_0$  vektor) ezt a tényt nem érinti, másrészt, hogy az egyensúlyi út a térbeli esetben is  $d = 1$  dimenziós.

### 2.2.2 A nyomott konzol: $d = 2$

A vizsgált szerkezetet a 6. ábra mutatja:



6. ÁBRA: AZ ERŐVEL TERHELT KONZOL ( $\lambda < 0$ )

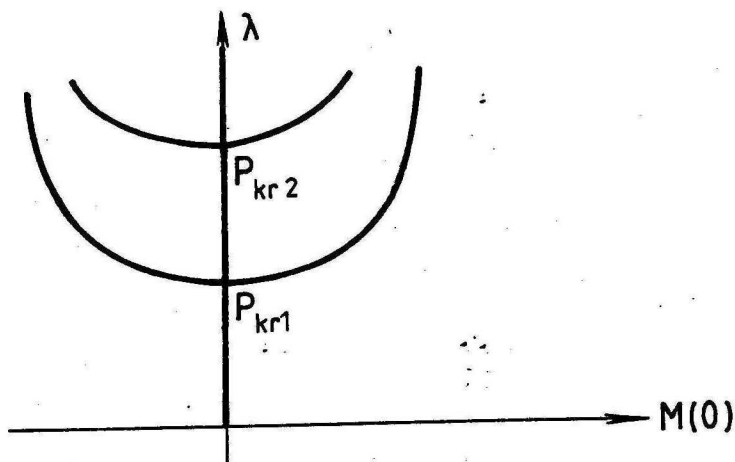
Az  $s = 0$  peremen itt is a (2.5) előírás érvényes. Az (1.75) egyenlet alapján

$$D(0) = \begin{bmatrix} \lambda P_0 \\ 0 \\ M(0) \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

ahol  $M(0)$  a deformáció utáni  $y(l)$  koordinátától függ, tehát ismeretlen. Az  $\bar{F}^{-1}$  mátrixot most is a (2.7) egyenlet adja meg, a kezdeti alakot pedig a (2.8) összefüggés. Most is igaz, hogy  $T(0) = E$ , és így (1.15) alapján könnyen meghatározható a  $\dot{z}(0)$  vektor:

$$\dot{z}(0) = \begin{bmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \\ \dot{\alpha}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\lambda P_0}{EA} \\ 0 \\ -\frac{M(0)}{EI} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

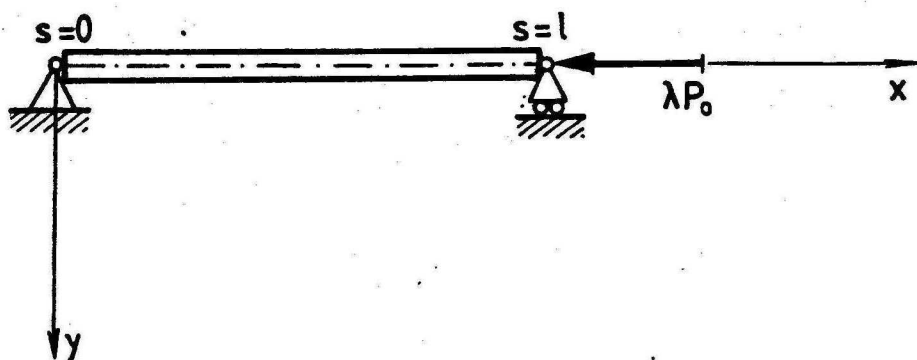
Mint látjuk, a CAUCHY-feladathoz tartozó kezdeti feltételek egyértelműen kiszámíthatók a  $\lambda$  és  $M(0)$  értékek birtokában, ezért az egyensúlyi út a  $[\lambda, M(0)]$  síkon egyértelműen ábrázolható. Az egyensúlyi út „ki is használja” a  $d = 2$  dimenziót, hiszen elágazások sorozata jön létre. Az egyensúlyi utat a 7. ábra illusztrálja:



7. ÁBRA: AZ ERŐVEL TERHELT KONZOL EGYENSÚLYI ÚTJA

### 2.2.3 A nyomott csuklós rúd: $d = 3$

A vizsgált szerkezetet (az EULER-feladatot) a 8. ábra mutatja ( $\lambda < 0$ ):



8. ÁBRA: AZ ERŐVEL TERHELT CSUKLÓS RÚD

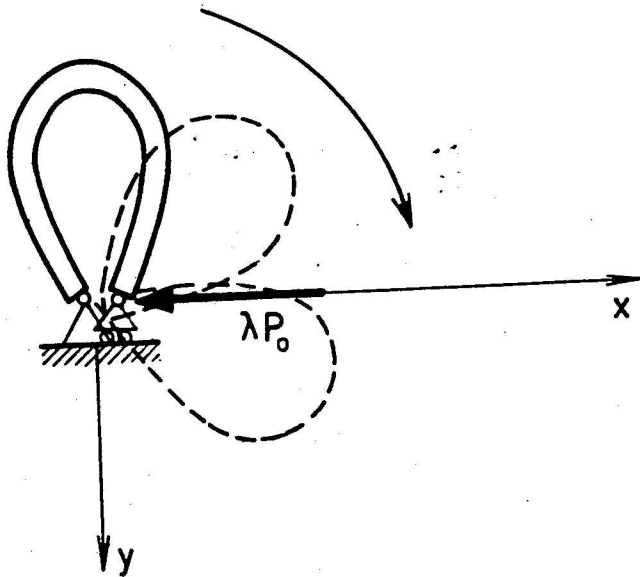
Az  $s = 0$  peremen az

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ \dot{\alpha}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

előírás érvényes. Az (1.75) egyenlet alapján

$$D(0) = \begin{bmatrix} \lambda P_0 \\ V(0) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

A  $V(0)$  vertikális támaszerő a terhelési folyamat kezdeti szakaszán zérus, de ha a 9. ábrán látható helyzetbe kerül a rúd, akkor az origó körül az egész szerkezet körbeforgatható.



### 9. ÁBRA: AZ ERŐVEL TERHELT CSUKLÓS RÚD HURKOLT HELYZETE

A forgás közben a rúdvégeket összenyomó erő abszolút értéke nem változik ugyan, de iránya, és komponensei is változnak. Ekkor tehát  $V(0) \neq 0$ . A rúd kezdeti alakját (2.8) szolgáltatja. Mivel most az  $s=0$  perem elfordulhat, tehát  $T(0) \neq E$ , ezért az (1.15)-ből származó lineáris egyenletrendszer megoldása nem olyan kézenfekvő mint a konzoltartónál volt. Bevezetve a

$$\begin{aligned} \cos(\alpha(0)) &= a \\ \sin(\alpha(0)) &= b \end{aligned} \quad (2.14)$$

jelöléseket, az (1.15) egyenlet az alábbi formát ölti:

$$\begin{bmatrix} \lambda P_0 \\ V(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GA}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(0) - a \\ \dot{y}(0) - b \\ \dot{\alpha}(0) \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Ezt kifejtve az alábbi lineáris egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} (\dot{x}(0) - a)B_1 + (\dot{y}(0) - b)B_3 &= \lambda P_0 \\ (\dot{x}(0) - a)B_3 + (\dot{y}(0) - b)B_2 &= V(0) \\ -\frac{\dot{\alpha}(0)}{EI} &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

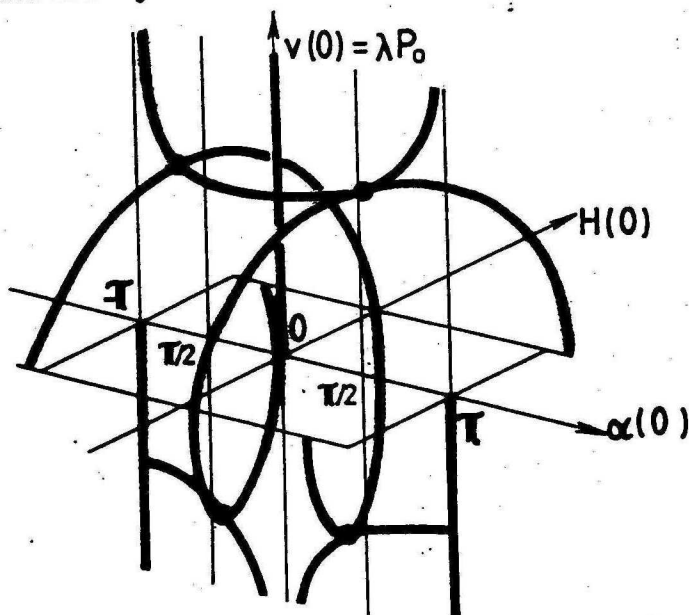
ahol

$$\begin{aligned} B_1 &= A(a^2 E + b^2 \frac{G}{\rho}) \\ B_2 &= A(a^2 \frac{G}{\rho} + b^2 E) \\ B_3 &= abA(E - \frac{G}{\rho}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

A (2.16) egyenlet-rendszer harmadik egyenlete nem mond újat, az első két egyenletből  $\dot{x}(0)$  és  $\dot{y}(0)$  kifejezhető:

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= a - \frac{B_3 V(0) - B_2 \lambda P_0}{B_1 B_2 - B_3^2} \\ \dot{y}(0) &= b - \frac{B_1 V(0) - B_3 \lambda P_0}{B_3^2 - B_1 B_2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Beláttuk tehát, hogy a CAUCHY-feladathoz tartozó 6 változó közül 3 konstans (2.12), 2 pedig a  $\lambda$  és  $V(0)$  paraméterekkel kifejezhető (2.18). Harmadik paraméterként célszerűen a hiányzó  $\alpha(0)$  változót bevezetve az egyensúlyi út a  $[\lambda, \alpha(0), V(0)]$  térben ábrázolható. Az egyensúlyi utat a 10. ábra mutatja:



10. ÁBRA: AZ ERŐVEL TERHELT CSUKLÓS RÚD EGYENSÚLYI ÚTJA

Megjegyezzük, hogy az  $\alpha(0)$  tengely  $2\pi$  szerint periodikus, és a kettős spirál egy körhenger palástján halad, melynek tengelye az  $\alpha(0)$  tengely.

## 2.3 Összefoglaló megjegyzések

Az előző alpontok tételeivel és példáival bemutattuk, hogy lehetséges a vonalkontinuumok egyensúlyi útjának globális leírása véges dimenziós térben. A CAUCHY-perem definíciójával a tér dimenzióját (síkbeli feladatoknál)  $d = 4$ -ben maximáltuk. A példákon bemutattuk, hogy ez a szám tovább csökkenthető. Ennek az eredménynek hasznát láthatjuk a szerkezetek stabilitásvizsgálata során.

A rugalmas szerkezetek stabilitásvizsgálatához a katasztrófaelmélet többek között az az érdekes megállapítással járult hozzá, mely szerint a szerkezet (legfeljebb 5 paraméteres) potenciál-függvénye bármely kritikus pont környezetében transzformálható olyan alakra, amelyben tipikusan legfeljebb két változó aktív (GÁSPÁR, 1983). Ez gyakorlati szempontból azt jelenti, hogy a stabilitás illetve a posztkritikus viselkedés vizsgálatát a passzív változók (adott algoritmus szerint történő) leválasztása után az aktív változókra korlátozhatjuk.

Az említett leválasztási algoritmus gyakorlatilag csak véges sok változó esetén hajtható végre, elvileg is legfeljebb megszámlálhatóan végtelen változóra alkalmazható. Iménti vizsgálataink arra mutatnak, hogy kontinuum szabadságfokkal rendelkező mechanikai rendszerek esetén van lehetőség „előzetes” leválasztásra. „Előzetes”-en azt értjük, hogy mielőtt egy-egy konkrét kritikus pont környékét megvizsgálánánk és alkalmaznánk a katasztrófaelmélet eredményeit, megkíséreljük a potenciál-függvény azon változóinak elkülönítését, amelyek egyál talán (vagyis a teljes terhelési folyamat során) a katasztrófaelmélet értelmezése szerint aktívvá válhatnak.

Másképpen ezt úgy is fogalmazhatnánk, hogy a katasztrófaelmélet által tárgyalt jelenségek, tehát a posztkritikus viselkedés különböző esetei, mindig a potenciál-függvény egyensúlyi halmasan játszódhatnak le. Ha ezen halmason egy ismert (ismert módon koordinátázott) véges dimenziós euklideszi térbe beágyazható, (ezt mutattuk meg ebben a fejezetben), akkor a posztkritikus viselkedés is tárgyalható ebben a térben. A stabilitási problémákat azonban csak topológiai értelemben vizsgálhatjuk itt, tehát arra kaphatunk választ, hogy hol, milyen irányban és hány egyensúlyi út halad. Ezen utak stabilitását azonban közvetlenül nem elemezhetjük, csak következtethetünk rá. Ennek az az oka, hogy az egyensúly véges dimenziós tárgyalásánál kihasználtuk, hogy ismerjük a variációs feladathoz tartozó EULER-LAGRANGE differenciálegyenletet, amit úgy mondhatnánk, hogy a végtelen változóban felírt potenciális energia első deriváltja véges sok változó (a peremfeltételek) kivételével eleve zérus volt. Nem áll viszont rendelkezésünkre ilyen, „végtelen változó-pár szerinti parciális deriváltakat” eltüntető eszköz a stabilitást leíró Hesse-mátrix esetén, ezért a kapott egyensúlyi utak stabilitását közvetlenül nem ellenőrizhetjük. Itt láthatjuk azonban hasznát a katasztrófa-elmélet eszköztárának, amely a kritikus pontok környezetét éppen topológiai tulajdonságaik alapján osztályozza.

A felsorolt példák közül külön érdeklődésre tarthatnak számot azok az esetek, amikor az egyensúlyi utat beágyazó tér dimenzióját 3 alá szorítottuk. Ez ugyanis azt jelenti, hogy globális megfontolásokkal bizonyítottuk, hogy lokálisan nem jöhetnek létre egyes katasztrófa-típusok.

### 3. fejezet:

## Ciklikusan szimmetrikus szerkezetek vizsgálata

Az eddigi két fejezetben a vonalkontinuumokkal modellezett szerkezeti elemek (kötél, árboc) matematikai modelljét építettük ki, tekintet nélkül arra, hogy ezek az elemek milyen módon kapcsolódnak szerkezeté. Ezáltal olyan eredményekre jutottunk, amelyek nem csak a kikötött árbocok szerkezeti elemeire, hanem minden vonalkontinuummal modellezhető szerkezeti elemre vonatkoznak.

Ebben a fejezetben éppen ellentétes megközelítést alkalmazunk. A vizsgált szerkezetek ugyanis különböző rendű diszkrét forgási szimmetriával rendelkeznek, és most a matematikai modell kiépítésénél csak ezt a szimmetriát vesszük alapul. Ezáltal olyan eszközhöz jutunk, mely minden diszkrét forgási szimmetriával rendelkező szerkezet számítására alkalmas, tekintet nélkül arra, hogy a szerkezet vonalkontinuumokból épül-e fel vagy sem. Ezt a tényt a fejezet második részében felsorolt analitikus példákkal fogjuk illusztrálni.

Az előző kettő és ezen fejezet „metszetét“ képezik a kikötött árbocok, melyek számításával a következő fejezet foglalkozik. Ott kerül majd sor az első három fejezetben bemutatott módszerek numerikus alkalmazására.

A ciklikusan szimmetrikus szerkezetek számításával kapcsolatban számos speciális eredményt értek el és módszert dolgoztak ki. Statikailag határozott rácsostartók rúderőinek meghatározásával foglalkozik BÉRES, LOVASS-NAGY és SZABÓ (1958), valamint HEGEDŰS (1978). A hengeres rácsok statikai és kinematikai jellemzőit vizsgálja TARNAI (1980). Hengeres rácsok dinamikai vizsgálatával foglalkozik TORNYOS (1985). Hengeres rács példáján illusztrálja eredményeit GÁSPÁR és TORNYOS (1986).

Ciklikusan szimmetrikus szerkezetek számításánál sokszor az jelenti a gondot, hogy a szerkezet mechanikai jellemzőit leíró függvények (potenciális energia, merevségi operátor, feszültségi tenzormező) csonkolt TAYLOR-sora nem tükrözi a szerkezet, illetve a sorba fejtett függvény diszkrét forgásszimmetriáját, hanem folytonos körszimmetriát mutat. (Például a négyzet keresztmetszetű rúd inerciája minden súlyponti tengelyre azonos.) A továbbiakban azt szeretnénk megvizsgálni, hogy adható-e szükséges és elégséges feltétel a TAYLOR-sor figyelembe veendő tagjainak darabszámára, ha feltételül szabjuk, hogy a



csonkolt sor megőrizze az eredeti függvény szimmetria-tulajdonságait, vagyis a csonkolásra mint operációra szimmetria-invariáns legyen. Ezen fejezet eredményeit részben (DOMOKOS, 1989d) és (DOMOKOS, 1989e) tartalmazza.

### 3.1 Tenzorok szimmetria-invarianciája

Ebben a pontban csak síkbeli tenzormezőkkal foglalkozunk.

#### Definíció:

Konzervatív tenzormezőnek nevezünk egy olyan  $m$ -edrendű  $D_m$  tenzormezőt, melynek  $2^m$  koordinátája egy  $[xyz]$  derékszögű koordinátarendszerben értelmezett  $z = F(x, y)$  skalármező  $m$ -edrendű,  $2^m$  darab parciális deriváltjával egyezik meg.

(3.1)

A koordináták egy  $m$ -dimenziós egységkocka csúcaiban helyezkednek el, tehát minden koordináta egy  $m$  hosszúságú bináris (0,1 elemekből álló) sorozattal azonosítható. A parciális deriválás sorrendje felcserélhető, ezért minden olyan csúcspontban, amely  $k$  darab 0-ból és  $m - k$  darab 1-esből álló sorozattal azonosítható, a

$$\frac{\partial^m F}{\partial x^k \partial y^{m-k}}$$

derivált áll. Tenzormező koordináta-invariáns tárgyalásával és mechanikai interpretációjával DOMOKOS (1984) foglalkozik behatóbban.

A továbbiakban csak konzervatív tenzormezőkkal foglalkozunk, ezért általában a „konzervatív” jelzőt elhagyjuk. Speciálisan  $m = 0$  esetén nulladrendű konzervatív tenzormezőhöz jutunk, mely magával a  $z = F(x, y)$  skalármezővel azonos.

#### 3.1.1 Skalárok

##### Definíció:

Egy transzformációkból álló halmazt akkor nevezünk csoportnak, ha tartalmazza bármely két transzformáció szorzatát bármely transzformáció inverzét és az identitás-transzformációt. A halmazban található eltérő transzformációk száma a csoport rendje. (BIRKHOFF és MACLANE, 1965)

(3.2)

##### Definíció:

Az  $u_k = \frac{2k\pi}{n}$  szögekkel történő síkbeli forgatásokból álló  $C_n$  transzformáció-csoportot  $n$ -

edrendű ciklikus csoportnak nevezzük (COXETER, 1969). A körszimmetria  $\infty$ -rendű folytonos csoportját  $C_\infty$ -nel jelöljük.

(3.3)

Definíció:

Az  $\mathfrak{R}$  halmazt a  $C_n$  csoportra nézve invariánsnak nevezzük, ha a csoport bármely transzformációjára nézve invariáns. Az  $\mathfrak{R}$  halmazt akkor nevezzük egy transzformációra nézve invariánsnak, ha a transzformált halmazt az eredetitől nem lehet megkülönböztetni. Ha  $n$  az a legnagyobb természetes szám, melyre igaz, hogy  $\mathfrak{R}$  invariáns  $C_n$ -re nézve, akkor ezt a  $C(\mathfrak{R}) = n$  módon fogjuk jelölni.  $C_n$ -et  $\mathfrak{R}$  szimmetria-csoportjának nevezzük.

(3.4)

Definíció:

A kétdimenziós  $z = F(x, y)$  skalármező  $n$ -edrendű TAYLOR-közelítését a  $P(0, 0)$  pontban  $F^n(x, y)$  fogja jelölni. Az  $F^n$  TAYLOR-közelítést akkor nevezzük szimmetria-invariánsnak, ha  $C(F) = C(F^n)$ .

(3.5)

Tétel:

$$C(F^n) = C(F) \quad \text{csak akkor, ha} \quad n \geq C(F). \quad (3.6)$$

Bizonyítás:

Az  $F$  skalármező egyenletét fejezzük ki hengerkoordinátákkal úgy, hogy a henger tengelye a  $z$  tengellyel legyen azonos. Az alábbi helyettesítéseket alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\varphi). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ha ugyanezt a transzformációt alkalmazzuk az  $F^n$  felületre, akkor a

$$F^n = \sum_{i=0}^n r^i \sum_{j=0}^i a_{ij} \cos^j(\varphi) \sin^{i-j}(\varphi) \quad (3.8)$$

kifejezéshez jutunk. Ha az  $F$  felületet egy  $r = \text{konstans}$  hengerrel elmetsszük, akkor egy olyan

$$z = f(\varphi) \quad (3.9)$$

függvény lesz a metszészvonal, melyre teljesül, hogy

$$f(\varphi) = f\left(\varphi + \frac{2\pi}{C(F)}\right). \quad (3.10)$$

Definíció:

Az  $F$  felület  $k$ -adrendű  $H_k$  harmonikusának nevezzük azt a felületet, melynek hengeres metszete a

$$h_k(\varphi) = a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi) \quad (3.11)$$

formában írható. Az  $a_k$  és  $b_k$  számok az  $f(\varphi)$  függvény  $k$ -adik FOURIER-komponensének együtthatói. Ha  $|a_k| + |b_k| = 0$  (tehát  $H_k = 0$ ), akkor azt mondjuk, hogy a  $k$ -adrendű  $H_k$  harmonikus eltűnik, ebben az esetben  $C(H_k) = \infty$ . Az egyszerűség kedvéért bevezetjük azt a konvenciót, hogy a  $\infty$  minden természetes számmal osztható. Az  $F^n$  felület  $H_k^n$  harmonikusait hasonló módon értelmezzük.

Definíció:

A legkisebb (ill. legnagyobb) olyan  $i$  indexet, melyre  $H_i^n \neq 0$ ,  $i_{min}^n$ -nel (ill.  $i_{max}^n$ -szal) jelöljük.

$$(3.12)$$

Definíció:

Az  $I_1, I_2, \dots, I_k$  természetes számok legnagyobb közös osztóját  $G(I_1, I_2, \dots, I_k)$ -val jelöljük.

$$(3.13)$$

A fenti definíciók alapján, mivel

$$G(C(H_i^n)) = C(F^n), \quad (i = 1, 2, \dots, \infty) \quad (3.14)$$

és

$$C(H_i^n) = i \text{ ha } H_i^n \neq 0, \quad (3.15)$$

megállapíthatjuk, hogy

$$C(F^n) \leq i_{min}^n. \quad (3.16)$$

Definíció:

Az  $x_1, x_2$  változóiban felírt  $n$ -edfokú polinomot  $P^n(x_1, x_2)$ -vel fogjuk jelölni.

$$(3.17)$$

Ezek után metsszük el az  $F^n$  közelítő felületet is ugyanazzal a hengerrel, mint amivel az  $F$  felületet metszettük korábban. A metszévonal egyenlete ekkor (3.8) alapján a

$$f^n(\varphi) = P^k(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \quad (n \geq k) \quad (3.18)$$

formában írható. Ezen függvény FOURIER-komponenseinek megkeresésére a komplex számokra vonatkozó MOIVRE-tételt használjuk fel, melynek alapján

$$\begin{aligned} \cos(k\varphi) &= P_1^k(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \\ \sin(k\varphi) &= P_2^k(\cos(\varphi), \sin(\varphi)). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Az  $P_1^k$  és  $P_2^k$   $k$ -adfokú, homogén polinomok együtthatóit (KORN és KORN, 1968) tartalmazza.

A (3.19) egyenletből következik, hogy az  $n$ -edrendű sorfejtésnek legfeljebb  $n$ -edrendű harmonikus komponense lehet, tehát

$$i_{max}^n \leq n. \quad (3.20)$$

Figyelembe véve, hogy

$$i_{min}^n \leq i_{max}^n, \quad (3.21)$$

a (3.16) és (3.20) egyenlőségből a

$$C(F^n) \leq n \quad (3.22)$$

összefüggésre jutunk. Beépítve ebbe a (3.6) tételben megkövetelt  $C(F) = C(F^n)$  egyenlőséget, a tétel állításához jutunk.

Q.e.d.

A fentiekben a sorfejtés rendjét jelentő  $n$  számra egy szükséges feltételt láttunk be. Ezt a feltételt annak alapján tudtuk megfogalmazni, hogy ismertük az  $F$  felület szimmetria csoportjának  $C(F)$  rendjét. Nem meglepő, hogy ha több információ áll rendelkezésünkre, akkor a szükséges feltétel tovább élesíthető. Azt az esetet fogjuk vizsgálni, amikor, valamilyen megfontolás alapján, előre tudjuk a henger palástján futó  $f(\varphi)$  függvényről, hogy mely FOURIER-komponensei tűnnek el, és melyek nem. Mint a későbbiekben látni fogjuk, ez a gyakorlatban előforduló eset.

Mielőtt a tételt kimondanánk, egy lemmát kell belátnunk:

Lemma:

Ha  $H_i = 0$ , akkor  $H_i^n = 0$ . ( $n = 1, 2, \dots$ )

(3.23)

Bizonyítás:

Ez a lemma azt mondja ki, hogy az  $F^n$  TAYLOR-sornak nem lehet olyan harmonikus komponense, amely az eredeti  $F$  függvényből hiányzik. Mint a (3.25) tételben látni fogjuk, az állítás megfordítva nem igaz: a TAYLOR-sorfejtés rendjét fokozatosan növelve átmenetileg hiányozhatnak olyan harmonikusok, amelyeket a sorba fejtett függvény tartalmaz. Mivel  $n = \infty$  esetén analitikus függvényekre  $F^n = F$ , erre az esetre a (3.23) lemma állítása triviális.

Véges  $n$  esetén elsőként a (3.20) egyenletre hivatkozunk. Ott ugyanis beláttuk, hogy a TAYLOR-sor  $k$ -adrendű tagjainak csak  $(k \leq n)$ -ed rendű harmonikusai lehetnek. Tételizzük fel ezután, hogy van olyan  $n < \infty$ , melyre a (3.23) lemma állítása nem teljesül. Mivel  $n = \infty$ -re az állítás mindig teljesül, ezért kell lennie a magasabb  $(m > n)$  rendű tagok között olyanoknak, melyek alacsonyabb  $(k < m)$  rendű harmonikusai az  $n$ -edrendű tag nemkívánatos harmonikusait lenullázzák. Ehhez az szükséges, hogy az  $m$ -edrendű és  $n$ -edrendű tagok együtthatóinak arányát előírassuk  $r$  (a sugár) minden értékére. Az  $m$ -edrendű tagok együtthatóit  $r^m$ -mel, az  $n$ -edrendű tagok együtthatóit  $r^n$ -nel kell szorozni a (3.8) képlet tanúsága szerint, tehát  $r$  minden értékéhez új feltételt kell szabnunk. Mivel az  $n$ -nél magasabb rendű tagok együtthatóinak száma megszámlálhatóan végtelen,  $r$  pedig kontinuum számosságú értéket vehet fel, ezért a feltétel nem teljesíthető. Ezzel indirekt módon beláttuk a (3.23) lemma állítását.

Q. e. d.

Tétel:

Ha  $s(F)$  az a legkisebb természetes szám, amelyre  $G(C(H_1), C(H_2), \dots, C(H_{s(F)})) = C(F)$ , akkor a  $C(F^n) = C(F)$  egyenlőség szükséges feltétele, hogy  $n \geq s(F)$ .

(3.24)

Bizonyítás:

Ha  $i \geq s(F)$  esetén  $C(F)$  a harmonikusok frekvenciáinak legnagyobb közös osztója, akkor ez azt jelenti, hogy az  $s(F)$ -ed rendű harmonikusig kell elmenni az  $F$  függvény „hengeres” FOURIER-sorfejtésében, hogy a csonkolt FOURIER-sor szimmetria-invariáns maradjon. A (3.23) lemmában beláttuk, hogy az  $F$  függvényből hiányzó alapharmonikus az  $F^n$  sorfejtésben sem fordulhat elő, tehát a TAYLOR-sorral addig kell haladnunk, hogy  $H_{s(F)}^n$  létrejöhessen. Ehhez viszont a (3.20) egyenlet alapján  $n \geq s(F)$  szükséges.

Q. e. d.

Megjegyezzük, hogy  $H_{C(F)} \neq 0$  esetén  $s(F) = C(F)$ , és így a (3.6) és (3.24) tételekben szabott szükséges feltétel megegyezik.

Az eddigiek azt a látszatot gerjeszthették, mintha az  $F(x, y)$  függvény TAYLOR-sorfejtése és az  $f(\varphi)$  függvény FOURIER-sorfejtése között nagyon szoros lenne a kapcsolat. Erre

azonban bizonyos mértékig rá fogunk cáfolni, ugyanis azt fogjuk megmutatni, hogy a szimmetria-invariancia feltétele mellett a TAYLOR-sorfejtés  $n$  rendjére még a (3.24) tételben definiált  $s(F)$  szám ismeretében sem adható elégséges feltétel. Állításunkat, negatív jellegénél fogva, elegendő, ha  $C(F)$  és  $s(F)$  egyetlen, konkrét értékére igazoljuk. Az egyszerűség kedvéért a  $C(F) = s(F) = 1$  esetet vizsgáljuk.

Tétel:

Tetszőleges  $n$  természetes számhoz konstruálható olyan  $F(n, x, y)$  felület, melyre

$$s(F) = 1, \quad C(F) = 1 \quad \text{és} \quad C(F) \neq C(F^n). \quad (3.25)$$

Bizonyítás:

Tekintsük a

$$F(n, x, y) = x^{2n+1} \quad (3.26)$$

felületet. Szemléletből igazoltnak tekinthetjük, hogy  $C(F) = 1$ . Mivel a  $(2n + 1)$ -nél alacsonyabb rendű deriváltak a  $P(0, 0)$  helyen eltűnnek, ezért  $F^n = 0$ , vagyis  $C(F^n) = \infty$ . Ezzel beláttuk, hogy  $C(F) \neq C(F^n)$ . A továbbiakban azt fogjuk megmutatni, hogy  $s(F) = 1$  is teljesül. Ha az  $F$  függvényre alkalmazzuk a (3.7) transzformációt és elmetsszük egy  $r = 1$  hengerrel, akkor a

$$f(\varphi) = \cos^{(2n+1)}(\varphi) \quad (3.27)$$

függvényre jutunk. Azt szeretnénk belátni, hogy  $f(\varphi)$  FOURIER-sorából nem hiányozhat  $2\pi$  periódusú tag. Ezen harmonikus  $a_1$  együtthatója KORN és KORN (1968) alapján közvetlenül kiszámítható:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2(n+1)} \varphi d\varphi = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n+2)} \neq 0.$$

Ezzel a tétel állítását beláttuk.

Q.e.d.

A továbbiakban  $n$ -edfokú polinomok szimmetria- viszonyait vizsgáljuk meg.

Korollárium a (3.6) tételhez:

$$C(P^n(x, y)) \leq n \quad (3.28)$$

Bizonyítás:

Mivel minden  $P^n(x, y)$  polinom egyben önmaga  $n$ -edrendű TAYLOR-közelítése, ezért a korollárium állítása egyenes következménye a (3.6) tételnek, hiszen ezt átrendezve a  $C(F^n) \leq n$  összefüggést nyerjük.

Q.e.d.

Tétel:

A  $C(P^n(x, y))$ -ra adható legkisebb felső korlát egyenlő  $n$ -nel.

(3.29)

Bizonyítás:

Ha tudunk mutatni egy olyan  $Z^n(x, y)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) polinom-családot, melyre (bármely  $n$  esetén)  $C(Z^n) = n$ , akkor a tétel állítását beláttuk. Ilyen polinom-családot úgy is nyerhetnénk, hogy a  $H_i$  harmonikusokra alkalmazzuk a (3.7) transzformáció inverzét, de talán érdekesebb, ha közvetlen geometriai konstrukció útján jutunk el a  $Z^n$  felületekhez.

Egy szabályos  $n$ -szög alapú gúla oldallapjainak síkjai lineáris  $P_i^1(x, y)$ ; ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) polinomoknak tekinthetők. Hozzuk fedésbe a gúla szimmetria-tengelyét a  $z$  tengellyel és feketessük alaplapját az  $[xy]$  síkra. Képezzük a

$$Z^n = \prod_{i=1}^n P_i^1(x, y) \quad (3.30)$$

szorzatot, mely egy  $n$ -edfokú polinomot ad meg, amely szemlélet alapján is invariáns a  $C_n$  csoportra nézve. Mivel a  $Z^n$  felület az  $[xy]$  síkot  $n$  darab egyenesben metszi, ezért magasabb szimmetriával nem rendelkezhet.

Q. e. d.

A (3.28) korollárium és a (3.6) tétel analóg módon igazolható síkgörbökként értelmezett polinomokra is.

### 3.1.2 Általános konzervatív tenzorok

Definíció:

A  $D_m$   $m$ -edrendű, konzervatív tenzormező  $n$ -edrendű TAYLOR-közelítését  $D_m^n$ -nel fogjuk jelölni.

(3.31)

A  $D_m^n$  közelítés a  $D_m$  tenzormező  $2^m$  darab skalár koordinátájának  $n$ -edrendű TAYLOR-közelítéséből áll.

Tétel:

$$C(D_m^n) = C(D_m) \quad \text{csak akkor, ha} \quad n \geq C(D_m) - m. \quad (3.32)$$

Bizonyítás:

Azok az  $F$  felületek, amelyek  $m$ -edrendű deriváltja  $D_m$ , egymástól egy  $(m - 1)$ -edrendű polinomban különbözhetnek. Válasszuk ki közülük azt az  $F_0$  felületet, amelynél az említett polinom minden együtthatója zérus, vagyis a TAYLOR-sor az  $m$ -edrendű tagokkal kezdődik. Erre nyilván teljesül a

$$C(F_0) = C(D_m) \quad (3.33)$$

összefüggés.

Vegyük figyelembe, hogy az  $n$ -edrendű  $D_m^n$  TAYLOR-közelítés maga is  $m$ -edrendű tenzormező, hiszen azonos az  $F_0$  felület  $(n + m)$ -edrendű TAYLOR-közelítésének  $m$ -edrendű kovariáns deriváltjával. Ilymódon a (3.33) egyenletet a csonkolt TAYLOR-sorra is alkalmazhatjuk:

$$C(D_m^n) = C(F_0^{n+m}). \quad (3.34)$$

A (3.6) tétel alapján:

$$C(F_0^{n+m}) = C(F_0) \quad \text{csak akkor, ha} \quad n + m \geq C(F_0). \quad (3.35)$$

A (3.33) és (3.34) egyenletet a (3.35) egyenletbe helyettesítve a

$$C(D_m^n) = C(D_m) \quad \text{csak akkor, ha} \quad n \geq C(D_m) - m. \quad (3.36)$$

összefüggésre jutunk.

Q. e. d.

Megjegyezzük, hogy a (3.32) tétel nem zárja ki, hogy  $C(D_m) - m$  negatív értéket vegyen fel. Ebben az esetben biztosak lehetünk benne, hogy a szükséges és elégséges feltétel nem azonos. Van rá azonban mód, hogy a negatív értékeket kizárjuk a (3.32) feltételből. Ennek igazolásához a CSEBISEV-polinomokat használjuk fel (SZÁSZ, 1951):

Definíció:

A  $\cos(\varphi) = u$  helyettesítés mellett

$$\cos(n\varphi) = T^n(u), \quad (3.37)$$

ahol  $T^n(u)$  racionális egész függvény, melyet elsőfajú,  $n$ -edrendű CSEBISEV-polinomnak nevezünk.

Bevezetve a



$$a = \begin{bmatrix} \cos(0\varphi) \\ \cos(1\varphi) \\ \cos(2\varphi) \\ \vdots \\ \cos(n\varphi) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

jelöléseket, a CSEBISEV-polinomokat a

$$a = \Theta b \quad (3.39)$$

lineáris transzformációban foglalhatjuk össze. A  $\Theta$  együtthatómátrixról (SZÁSZ, 1951) 400. 3\* rekurziós képlete alapján megállapítható, hogy speciális szerkezetű alsó háromszögmátrix:

$$\Theta = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ X & 0 & X & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & X & 0 & X & 0 & 0 & \dots \\ X & 0 & X & 0 & X & 0 & \dots \\ 0 & X & 0 & X & 0 & X & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

A (3.40) sémában  $X$ -szel jelöltük a nem zérus elemeket. A fenti mátrix a páros és páratlan oszlopok és sorok egymás mellé- és alá rendezésével hiperdiagonál alakra hozható, melynek főátlójában csupa zérustól különböző elem áll, tehát a mátrix invertálható. Az inverz mátrix ismét hiperdiagonál lesz, és a sorok és oszlopok visszarendezése után megállapíthatjuk, hogy ha  $\Theta_{ij} = 0$  akkor  $\Theta_{ij}^{-1} = 0$  is teljesül. Másképp fogalmazva a  $\Theta^{-1}$  mátrix szerkezete megegyezik a (3.40) sémában mutatottal, azzal a különbséggel, hogy az  $X$ -szel jelölt elemek nem-zérus voltát nem igazoltuk, de ezt nem is fogjuk kihasználni. Mivel a  $\Theta^{-1}$  mátrix a  $\cos^n(\varphi)$  függvények FOURIER-együtthatóit tartalmazza, ezért a séma alapján beláttuk, hogy páros rendű TAYLOR-tagok csak páros, páratlan rendű TAYLOR-tagok csak páratlan rendű (nem-zérus) harmonikusokkal rendelkeznek. Egy  $m$ -edrendű  $D_m$  tenzor TAYLOR-sora az  $F_0$  felület TAYLOR-sorának  $m$ -nél magasabb rendű tagjait tartalmazza. A fentiekből következik, hogy ha

$$[C(D_m) \bmod 2] = [m \bmod 2] \quad (C(D_m) \leq m),$$

akkor a konstans (0-adrendű) TAYLOR-sornak is lehetnek elvileg  $C(D_m)$ -edrendű harmonikus komponensei, egyébként legalább a lineáris (elsőrendű) TAYLOR-tagokig el kell menni. Ezek szerint  $C(D_m) \leq m$  esetén a szükséges TAYLOR-tagok rendje 0 vagy 1. A (3.32) tétel állítását ezzel a megfontolással kiegészítve a 3. táblázat illusztrálja:

$m \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C(D_m) \downarrow$										
$\infty$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
2	2	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	3	2	1	0	1	0	1	0	1	0
4	4	3	2	1	0	1	0	1	0	1
5	5	4	3	2	1	0	1	0	1	0
6	6	5	4	3	2	1	0	1	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0	1	0
8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

### 3. TÁBLÁZAT: A TAYLOR-SORFEJTÉS SZÜKSÉGES RENDJE

Ezek után a (3.24) tételhez hasonlóan egy élesebb szükséges feltételt fogalmazunk meg, melynél ismét az  $s(F_0)$  szám ismeretére támaszkodunk. Az  $F_0$  felület harmonikusait  $H_{0,i}$ -vel jelöljük.

#### Tétel:

*Ha  $s(F_0)$  az a legkisebb természetes szám, amelyre  $G(C(H_{0,1}), C(H_{0,2}), \dots, C(H_{0,s(F_0)})) = C(D_m)$ , akkor a  $C(D_m) = C(D_m^n)$  egyenlőség szükséges feltétele, hogy  $n \geq s(F_0) - m$ .*

(3.41)

#### Bizonyítás:

Gondolatmenetünk hasonló lesz a (3.24) tételnél alkalmazotthoz. Ennek alapján nem nehéz formálisan is belátnunk a (3.41) tétel állítását. A (3.24) tétel alapján, ha  $k$  az a legkisebb természetes szám, amelyre

$$G(C(H_{0,1}), C(H_{0,2}), \dots, C(H_{0,k})) = C(F_0), \quad (3.42)$$

akkor a

$$C(F_0^{n+m}) = C(F_0) \quad (3.43)$$

egyenlőség szükséges feltétele, hogy

$$n + m \geq k. \quad (3.44)$$

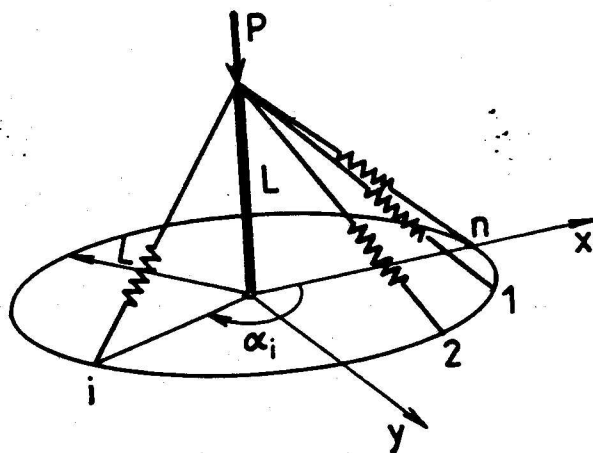
Ha a fenti összefüggésekbe helyettesítjük a (3.33) és (3.34) egyenletet, akkor a (3.41) tétel állításához jutunk.

Q. e. d.

## 3.2 Példák

### 3.2.1 A potenciális energia: $m = 0$

A  $V$  potenciális energia skalár mennyiség, vagyis nulladrendű tenzor. A (3.6) tétel állítása szerint ekkor legalább a  $C(V)$ -edrendű tagokig kell menni a TAYLOR-sorfejtésben, hogy a szimmetria rendje ne változzon. Illusztrációként GÁSPÁR (1977) munkáját említjük, melyben egy  $n$  ( $n \geq 3$ ) szimmetrikusan elhelyezett lineáris rugóval megtámasztott merev rúd viselkedését vizsgálja. A szerkezetet a 11. ábra illusztrálja:



11. ÁBRA: AZ  $n$  RUGÓVAL MEGTÁMASZTOTT RÚD

GÁSPÁR megállapítja, hogy a szerkezet potenciális energiájának ötödrendű TAYLOR-közelítése a

$$V^5 = KL^2 \left( \frac{1}{8} r^2 + \frac{1}{8} C_3 r^3 + \frac{15}{512} r^4 + \frac{5}{64} C_4 r^4 + \frac{7}{128} C_5 r^5 \right) + PL \left( -\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{8} r^4 \right) - \frac{1}{4} KL^2 r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (3.45)$$

formában írható, ahol

$K, L, P$  konstansok

$$C_3 = \begin{cases} \frac{1}{4} \cos(3\varphi) & \text{ha } n = 3 \\ 0 & \text{ha } n \neq 3 \end{cases}$$

$$C_4 = \begin{cases} \frac{1}{8} \cos(4\varphi) & \text{ha } n = 4 \\ 0 & \text{ha } n \neq 4 \end{cases}$$

$$C_5 = \begin{cases} \frac{5}{16} \cos(3\varphi) & \text{ha } n = 3 \\ \frac{1}{16} \cos(5\varphi) & \text{ha } n = 5 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$r_0, \varphi_0$  tökéletlenségek.

Szemléletből megállapíthatjuk, hogy  $n$  rugó esetén a tökéletes ( $r_0 = 0$ ) szerkezeten

$$C(V) = n. \quad (3.46)$$

A (3.45) képletből viszont leolvasható, hogy (ugyancsak  $n$  rugó esetén)

$$C(V^n) = n. \quad (3.47)$$

A fenti egyenletbe behelyettesítve a (3.46) egyenletet a

$$C(V^{C(V)}) = C(V) \quad (3.48)$$

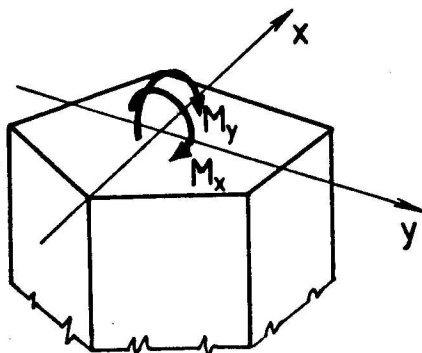
összefüggésre jutunk, amely szerint a (3.6) tételben megfogalmazott szükséges feltétel itt egyben elégséges is.

### 3.2.2 A merevségi operátor: $m = 1$

A  $K$  merevségi operátor az  $u$  elmozdulás-vektorhoz a  $q$  tehervektort rendeli hozzá:

$$K(u) = q. \quad (3.49)$$

A  $K$  operátor tehát egy vektormezőt, vagy másképp kifejezve, egy elsőrendű tenzormezőt definiál. A (3.32) tétel szerint ekkor legalább a  $(C(K) - 1)$ -edrendű tagokig kell elmennünk a TAYLOR-sorfejtésben, hogy a szimmetria rendje ne változzék. Illusztrációként az elemi szilárdságtan hipotézisei alapján modellezett, tisztán hajlított rudak keresztmetszeteit vizsgáljuk. Egy ilyen keresztmetszetet mutat a 12. ábra:



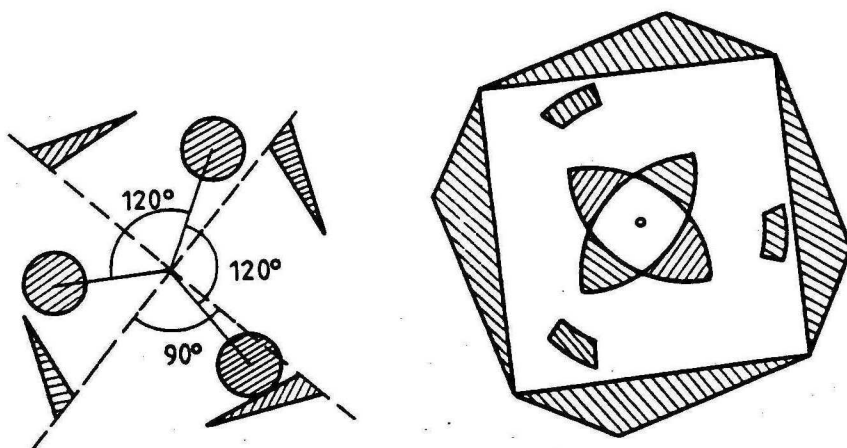
## 12. ÁBRA: A HAJLITOTT RÚD KERESZTMETSZETE

Az elemi szilárdságtan hipotézisei szerint a keresztmetszetek a deformáció után is síkok, vagyis lineáris polinomok maradnak. Ez azt jelenti, hogy az elemi szilárdságtanban az  $\alpha$  keresztmetszet  $K$  merevségi operátora helyett eleve annak lineáris  $K^1$  közelítését használjuk, amely az ismert

$$K^1 = \begin{bmatrix} I_x & D_{xy} \\ D_{xy} & I_y \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

formában írható. Szintén ismert tény, hogy ha  $C(\alpha) \geq 3$ , akkor  $C(K^1) = \infty$ , vagyis a szabályos sokszög alakú keresztmetszetek inerciája minden tengelyre megegyezik. Ez alátámasztja a (3.32) tétel állítását, mely szerint, mely szerint  $n_{\text{szükséges}} = C(\alpha) - 1$ .

Igéretünkhöz híven most a (3.41) tételt is megpróbáljuk egy példán illusztrálni. Továbbra is a hajlított rudaknál maradva vizsgáljuk a HACAR (1987) által bemutatott keresztmetszeteket:



13. ÁBRA: A HACAR ÁLTAL BEMUTATOTT KERESZTMETSZETEK

A fent bemutatott keresztmetszetekre szemléletből igaz, hogy  $C(\alpha) = 1$ , de a lineáris szuperpozíció alapján azt is könnyű belátni, hogy  $C(K^1) = \infty$ . Ekkor tehát a (3.32) tételben meghatározott  $n = C(\alpha) - 1 = 0$ -adrendű közelítés nem elégséges, sőt, mint láttuk, az elsőrendű sem. Mit állapít meg a (3.41) tétel szükséges feltételként? Ennek kiszámításához ismernünk kell a harmonikus komponenseket. Szemléletre támaszkodva:

$$H_{0,1} = H_{0,2} = 0 \quad \text{és} \quad H_{0,3} \neq 0 \quad H_{0,4} \neq 0. \quad (3.51)$$

Ennyi harmonikus ismerete elegendő, hiszen  $G(3,4) = 1 = C(\alpha)$ . Ezek szerint esetünkben  $s(F_0) = 4$ , ezért (3.32) alapján  $n_{\text{szükséges}} = 3$ . Itt nem vizsgáljuk, hogy ez az érték elégséges-e. A következő fejezetben ezt egy numerikus példán illusztráljuk.

Megjegyezzük, hogy feszített árbocok merevségi operátorát vizsgálva HATHOUT et al. (1979) megállapítják, hogy a  $C_3$  szimmetriával rendelkező szerkezet linearizált  $K^1$  operátorára  $C(K^1) = \infty$  teljesül. A (3.32) tétel által kimondott szükséges feltétel elégségességét illusztrálja szintén hajlított rudakra (de természetesen nem elemi rúdelmélettel) BUZANO et al. (1985).

### 3.2.3 A feszültségi tenzor: $m = 2$

A feszültségi tenzor a vizsgált test minden pontjában egy irányhoz egy feszültségvektort rendel hozzá, tehát másodrendű tenzor. Illusztrációként a membránhéjak feszültségállapotát vizsgáljuk egy CSONKA (1981) által közölt példa alapján. CSONKA a vetületi  $\bar{N}_x$ ,  $\bar{N}_{xy}$ ,  $\bar{N}_y$  membránérőkkel dolgozik. Ezek az  $F(x,y)$  feszültségfüggvény második parciális deriváltjaiként állnak elő, tehát az  $N_2$  membrántenzor eleget tesz a konzervatív tenzormező (3.1) definíciójának.

Szabályos háromszög alaprajzú, tehát  $C_3$  szimmetriával rendelkező, egyenletesen megoszló terheléssel terhelt héjakra CSONKA (1981, 5.1.(4), p.281) az alábbi membránérőket közli:

$$\begin{aligned}\bar{N}_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{\bar{p}_0 a_0}{h_0} (a_0 - x) \\ \bar{N}_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = -\frac{\bar{p}_0 a_0}{h_0} y \\ \bar{N}_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\bar{p}_0 a_0}{h_0} (a_0 + x).\end{aligned}\tag{3.52}$$

Mint látjuk, a vetületi feszítőerők kivétel nélkül az  $x$  és  $y$  változók lineáris függvényei, tehát

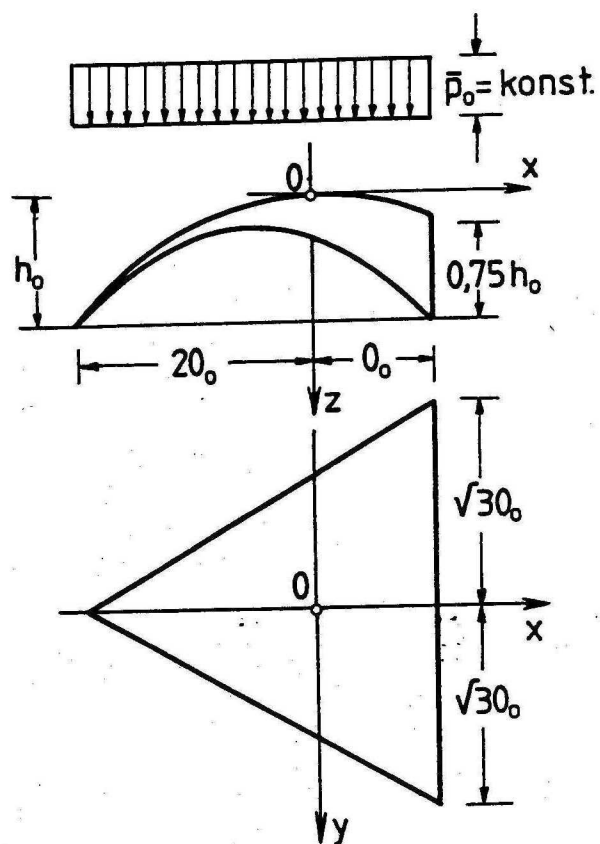
$$N_2 = N_2^1,\tag{3.53}$$

amiből természetesen

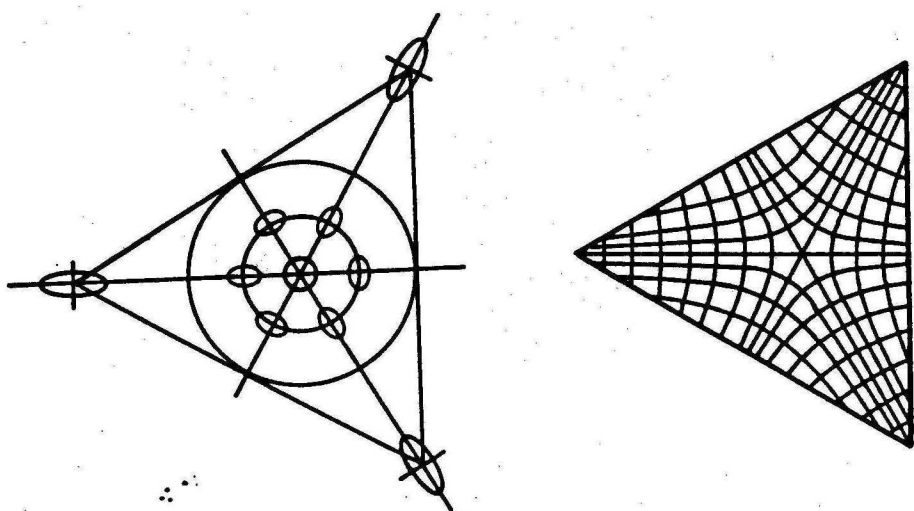
$$C(N_2) = C(N_2^1)\tag{3.54}$$

is következik. Mivel  $C(N_2) = 3$  és  $m = 2$ , ezért a (3.32) tétel szerint  $n_{\text{szükséges}} = 1$ . A (3.54) egyenlőség azt mutatja, hogy ez az érték egyben elégséges is.

CSONKA könyvében más szimmetrikus héjak is illusztrálják a (3.32) tétel állítását. Az  $N_2$  tenzormező  $C_3$  szimmetriáját CSONKA könyvéből átvett ábrákkal próbáljuk szemléltetni. Elsőként a feladatot mutatjuk be (14/a ábra, CSONKA 5.1.2 ábrája alapján), majd a számítási eredményeket (14/b ábra, CSONKA 5.1.5-5.1.14. ábrái alapján).



14/a. ÁBRA: A VIZSGÁLT HÉJ



14/b. ÁBRA: MEMBRÁNFESZÜLTSEGEK  $C_3$  SZIMMETRIÁJA



### 3.3 Összefoglaló megjegyzések

A mérnöki gyakorlatban általánosan elterjedt az a feltételezés, hogy a TAYLOR-sorfejtés rendjét növelve a vizsgálat eredménye egyre pontosabb lesz, ez csak kvantitatív információt nyújt.

Vizonylag kevés olyan tétel van azonban, amely a TAYLOR-sor egy adott  $n$  rendjéhez a matematikai modellben jelentkező minőségi ugrást rendel hozzá. Talán a legismertebb ilyen jellegű megállapítás, hogy az elsőrendű ( $n = 1$ ) elmélettel nem lehet kritikus terhet, a másodrendű ( $n = 2$ ) tagok figyelembevételével pedig nem lehet posztkritikus viselkedést számolni. Közvetlenül az utóbbi megállapításhoz csatlakozik THOM (1975) tétele. THOM legfeljebb 5 paraméterig osztályozza a potenciális energia függvény kritikus pontjait. Minden esetre megadja a lokális vizsgálatához (tehát a kezdeti posztkritikus viselkedés meghatározásához) elégséges  $n$  értéket.

Ebben a fejezetben azt mutattuk meg, hogy a diszkrét forgási szimmetriával rendelkező konzervatív tenzormezők, illetve az ezek által leírt mechanikai jelenségek sok esetben véges sok tagból álló TAYLOR-sorokkal helyettesíthetők anélkül, hogy a szimmetria-csoport rendje megváltozna. Attól függően, hogy mennyi információ áll rendelkezésünkre a vizsgált függvényről, különböző élességű szükséges feltételeket fogalmastunk meg  $n$ -re. Ezzel azt mutattuk meg többek között, hogy van olyan  $n$ , amelyet átlépve a csontolt sor szimmetriájának rendje megváltozik, amit joggal nevezhetünk minőségi ugrásnak. Megmutattuk, hogy a vizsgált függvényről viszonylag bőségesen rendelkezésre álló információ birtokában is lehetetlen elégséges feltételt adni  $n$ -re. A bizonyított tételek alapján meghatároztuk a kétváltozós polinomok szimmetria-csoportja rendjének legkisebb felső korlátját.

## 4. fejezet:

# Árbocok számítása

### 4.1 Az egyensúly feltétele

Ebben a pontban (4.1) a „vonalkontinuum“ megjelölés helyett a „rúd“ megjelölést használjuk a rövidség kedvéért. Első célunk a rugalmas rúdszerkezetek általános egyensúlyi feltételének megfogalmazása, melyet aztán kikötött árbócokra vizsgálunk részletesebben.

A vizsgált rúdszerkezetek két peremmel rendelkező, rugalmas rudakból, merev rudakból, és a peremekhez kapcsolódó, infinitezimális méretű merev testekkel modellezett csomópontokból állnak. „Csomóponti elmozduláson“ ezen utóbb említett merev testek elmozdulásait értjük, tehát *nem* a csomópontba befutó rúdvégek elmozdulásait. Ezek szerint például egy síkbeli csomópontnak három elmozdulás-komponense van.

#### Definíció:

Triviálisnak nevezünk egy csomópontot, ha oda csak egyetlen rúd fut be.

(4.1)

A következőkben bevezetjük a csomópontok szabadságfokát, célunk, hogy az ezeknek megfelelő elmozdulás-komponensek megadásával a rúdszerkezet egyértelműen szétbontható legyen az egyes rudakra felírt peremérték-feladatokra. Definíció:

Az  $i$ -edik csomópont  $c_i$  szabadságfoka egyenlő azon csomóponti  $v_{i,j}$  ( $j = 1, 2, \dots, c_i$ ) elmozdulás-komponensek számával, melyeket megadva a csomópontba befutó rugalmas rudak peremfeltételeit (ezen csomóponthoz tartozó peremükön) egyértelműen rögzítettük.

(4.2)

A csomópontba befutó rudak peremfeltételei között vannak eleve adottak, vagyis olyanok, amelyek a szerkezet deformációjától függetlenek. (Például egy többszörös csuklónál minden rúdvégen előírt a nyomaték) Ezeket a peremfeltételeket nem számítjuk a csomóponti

szabadságfokok közé. A csomópont szabadsági foka az ezek kiegészítéséhez szükséges elmozdulás-komponenseket jelenti. A triviális csomópontok szabadságfoka éppen ezért zérus, hiszen ezek maguk peremek, tehát nincs szükség kiegészítő feltételekre.

A szerkezet egyensúlyának feltételét a potenciális energia állandó értékűségének tétele alapján fogalmazzuk meg. Ez a tétel kimondja, hogy egyensúlyi helyzetben (és csak ott) a konzervatív teherrel terhelt rugalmas szerkezet teljes  $V$  potenciális energiájának gradiense zérus. Ez az összes általánosított elmozdulás-koordináta szerinti parciális derivált egyidejű eltűnésével egyenértékű. Rúdszerkezeteknél az általánosított koordinátákat célszerűen két csoportra bonthatjuk:

#### 1. csoport:

- az egyes rugalmas rudak alakját a csomópontok rögzített helyzetében leíró  $u_{i,j}$  koordináták ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots$ ), ahol  $n$  a rudak számát jelöli. Az  $u_{i,j}$  koordináta értelmezhető például úgy, mint a RAYLEIGH-RITZ eljárásban az  $i$ -edik rúd  $j$ -edik bázisfüggvényének együtthatója.

#### 2. csoport:

- a csomóponti szabadságfokoknak megfelelő  $v_{i,j}$  csomóponti koordináták ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, c_i$ ), ahol  $m$  a csomópontok számát,  $c_i$  pedig az  $i$ -edik csomópont szabadsági fokát jelöli.

A fenti felosztás alapján az egyensúlyi feltételt a

$$1./ \quad \frac{\partial V}{\partial u_{i,j}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, \infty) \quad (4.3)$$

$$2./ \quad \frac{\partial V}{\partial v_{i,j}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, c_i)$$

egyenletrendszer fejezi ki. Ha a rudak alakját eleve az őket leíró differenciálegyenlet megoldásai között keressük, (tehát rendelkezésünkre áll az egyenlet és egy peremértékfeladatot megoldó algoritmus) akkor a (4.3/1) feltétel automatikusan teljesül. Ezt másképpen úgy is mondhatjuk, hogy a konstans peremekkel felírt variációs feladatot az EULER-LAGRANGE differenciálegyenlet segítségével kielégítettük. Ezek után az egyensúlyi feltételét a (4.3/2) egyenletrendszer szolgáltatja.

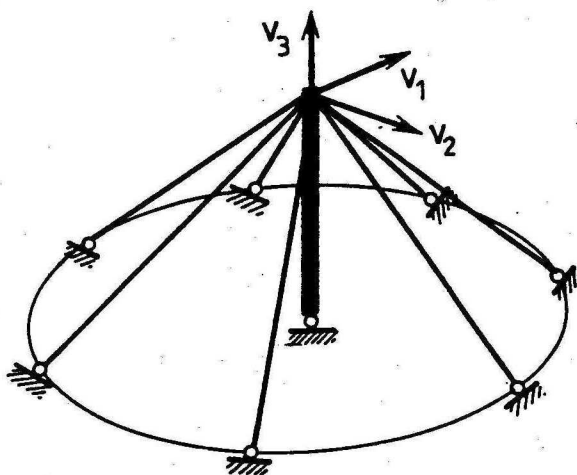
Megjegyezzük, hogy ebben a tárgyalásmódban eltűnik a különbség a hagyományosan „véges“ és „végtelen“ szabadságfokúnak nevezett szerkezetek között. Az első megnevezést akkor szokták alkalmazni, ha a szerkezet merev rudakból és lineáris rugókból áll. Az 1. fejezetben azonban bemutattuk, hogy ezen speciális vonalkontinuumok egyenlete (1.78, 1.80 és 1.81) ugyanabból az egyenletből vezethető le, mint a bonyolultabb esetek (kötél, hajlékony rúd). A „véges“ szabadságfokú szerkezeteket mindössze az tűnteti ki, hogy az egyensúlyi egyenlete egyszerű szerkezetéből adódóan a peremérték-feladatok zárt képlettel megoldhatók, míg a „végtelen“ szabadsági fokú szerkezeteknél ehhez általában numerikus

módszereket kell alkalmazni. A „véges“ szabadságfokú szerkezetek egyensúlyi feltételeinek megfogalmazásánál a (4.3/1) egyenletrendszer teljesülését szintén hallgatólagosan feltételezzük. Megemlítjük, hogy egyetlen rúdból álló szerkezet esetén a (4.3/2) egyenletek is eltűnnek, hiszen mindkét rúdvég a (4.1) definíció szerint triviális perem. Ebben az esetben az egyensúlyi feltétel tehát „automatikusan“ teljesül, ami összhangban van azzal a korábbi megállapításunkkal, hogy eleve csak a differenciálegyenlet megoldásait vizsgáljuk.

Speciálisan egy csuklós csomópontban megfogott kikötött árbocok esetén a (4.3/2) egyenletrendszer a

$$\frac{\partial V}{\partial v_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.4)$$

formát ölti. A szerkezetet a 15. ábra mutatja:



15. ÁBRA: EGY CSOMÓPONTBAN MEGFOGOTT ÁRBOC

Mint látjuk a  $v_i$  koordináták a nem-triviális felső csuklós csomópont eltolódásait jelölik. A (4.4) egyensúlyi feltétel másképpen a

$$g(x, \lambda) = 0 \quad (4.5)$$

formában is írható, ahol

$g$  a csomópontban ható kiegyensúlyozatlan erő  
 $x^* = [v_1, v_2, v_3]$  a csomópont helyzetét leíró vektor és  
 $\lambda$  a teherparaméter.

## 4.2 Numerikus módszerek és eredmények

### 4.2.1 A peremérték feladatok

Az egyensúlyi feltétel megfogalmazásánál feltételeztük, hogy a differenciálegyenletek mellett peremérték-feladat megoldó algoritmus is rendelkezésünkre áll. Ez egyenértékű azzal a művelettel, amellyel a (4.5) egyenletben a  $g$  vektormező tetszőleges  $x$  helyvektorhoz tartozó elemét kiszámítjuk. A következőkben az itt alkalmazott numerikus módszereket ismertetjük röviden.

A feszítőkábelek alakjának meghatározására a (1.51) differenciálegyenletet használtuk. Ez az implicit egyenlet egy  $y'_i$  számsorozat rekurzív megadásaként is felfogható. Ezt a sortozatot iteráció céljára használtuk fel a  $y'_1 = 0$  kezdeti értéktől indítva. Ilyen típusú iterációs módszerek globális konvergencia-feltételeit vizsgálja DOMOKOS (1989c).

A differenciálegyenlet integrálására a SIMPSON-módszert alkalmaztuk. A szükséges osztásközök számát a ROMBERG-eljárással határoztuk meg.

A rúd alakjának meghatározására az (1.6) és (1.16) egyenleteket alkalmaztuk. A differenciálegyenletet az EULER-módszerrel integráltuk, a szükséges osztásközt itt is önosztó módszerrel és a RICHARDSON-extrapolációval állapítottuk meg.

A peremérték-feladatot mindkét egyenlet esetében paraméteres kezdetiérték-feladatra vettük vissza, melynél a paraméterekre végeztünk iterációt a regula falsi eljárással. A konvergencia javítására az iterált sorozat elemei közötti távolságot maximáló feltételt is beépítettünk.

Az alkalmazott numerikus módszerek részletes leírása KIESEWETTER és MAESS (1974) könyvében található.

### 4.2.2 Korlátozottan nagy elmozdulások

Korlátozottan nagy elmozdulások esetén a (4.5) egyenletrendszer megoldására a módosított NEWTON-RAPHSON módszert (GÁSPÁR, 1983) szokták alkalmazni. Ennél az eljárásnál a kiindulási helyzet linearizált  $K^1$  merevségi operátorát alkalmazzák az egész terhelési folyamat során.

A lineáris közelítésben minden koordináta irányú erő csak a saját irányába idéz elő elmozdulást, ami azt jelenti, hogy a  $K^1$  mátrix diagonális. A további vizsgálatoknál csak azt fogjuk feltenni, hogy a vízszintes és a függőleges erők között nincs kapcsolat, vagyis hogy a  $K(x, y, z)$  operátor egy  $K_h(x, y)$  és egy  $K_v(z)$  operátorra bontható.

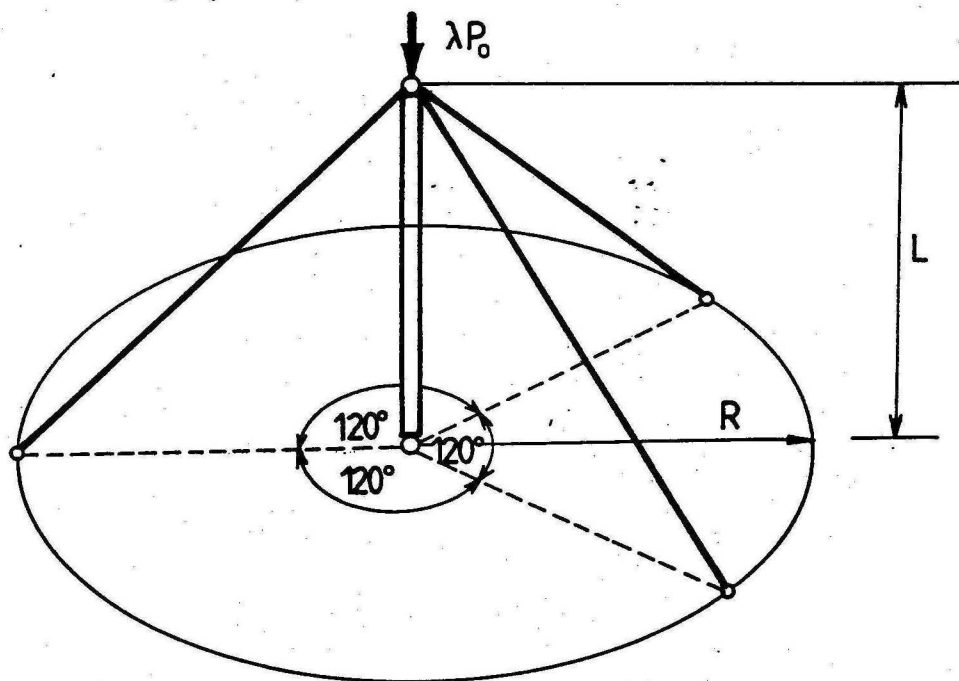
Kikötött árbocok esetében a módosított NEWTON-RAPHSON módszer közvetlen alkalmazása több szempontból is hátrányos lenne. Ennek egyik oka, hogy  $n > 2$  kötél esetén a tökéletes szerkezet  $K_h^1$  merevségi operátora a (3.32) tétel értelmében  $C_\infty$  szimmetriát mutat, tehát elfedi a szerkezet diszkrét forgási szimmetriáját. Másrészt a  $K_z^1$  egydimenziós vektormező  $C_2$  szimmetriát mutat, tehát a szerkezet látszólag húzásra és nyomásra egyformán viselkedik, a valóságban azonban ilyen szimmetria nincs, tehát  $C(K_z) = 1$ .

Mindkét tény arra mutat, hogy a lineáris operátor segítségével csak meglehetősen torz képünk alakulhatna ki a szerkezet viselkedéséről. Ezért, megtarva a módosított NEWTON-RAPHSON módszer alap gondolatát, az eljárást azzal a követelménnyel egészítjük ki, hogy a kezdeti (terheletlen) állapotban számított, és a teljes terhelés alatt alkalmazott csonkolt  $K_h^n$  és  $K_v^m$  merevségi operátoroktól megkívánjuk, hogy szimmetria-invariánsak legyenek, vagyis  $C(K_h^n) = C(K_h)$  és  $C(K_v^m) = C(K_v)$  teljesüljön.

Példaként egy 3 kötéllel merevített árbocot mutatunk be. Ekkor

$$\begin{array}{l} 1./ \quad C(K_h) = 3 \\ 2./ \quad C(K_v) = 1 \end{array} \quad (4.6)$$

A (4.6/2) egyenlőség természetesen  $k > 0$  kötélen esetén mindig teljesül. A szerkezet elrendezését a 16. ábra mutatja ( $\lambda < 0$ ):



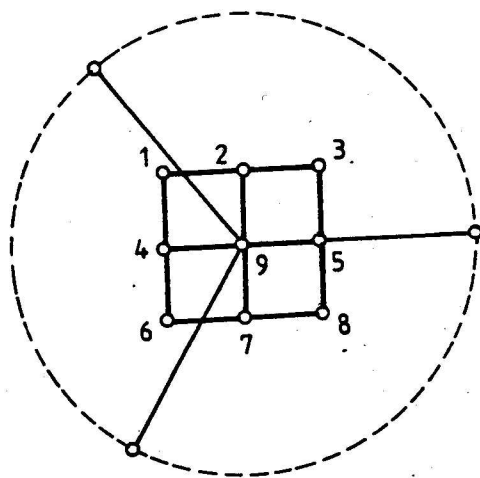
16. ÁBRA: A VIZSGÁLT ÁRBOC

Számszerű adatok:

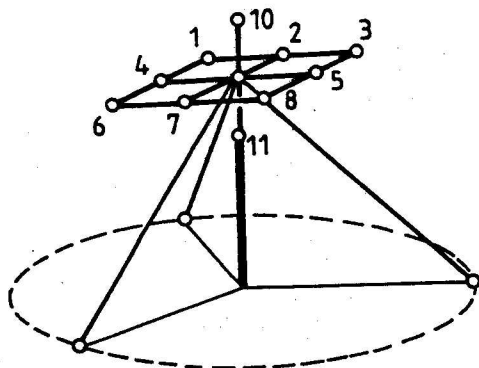
$$\begin{array}{l} R = 2000 \text{ cm} \\ L = 1000 \text{ cm} \\ EA_{\text{rúd}} = 2.10 \times 10^6 \text{ kN} \\ EA_{\text{kötél}} = 2.92 \times 10^4 \text{ kN} \\ EI_{\text{rúd}} = 1.75 \times 10^7 \text{ kNcm}^2 \\ l_{\text{kötél}} = 2231.2 \text{ cm (nyúlásmentes hossz)} \\ P_0 = 1 \text{ kN} \end{array}$$

A (3.32) tétel alapján megállapíthatjuk, hogy a  $K_h^n$  csonkolt sorfejtésben  $n_{\text{szükség}} = 2$ . Ugyanezen tétel alapján a  $K_v^m$  csonkolt sorfejtésben  $m_{\text{szükség}} = 0$ . Mivel  $C(K_v^1) \neq$

$C(K_v)$ , ezért ez nyilván nem elégséges. (Ennek oka, hogy a  $H_{C(K_v)} = H_1$  harmonikus hiányzik.) A (3.41) tétel szerint ekkor itt  $m_{szükséges} = 2$ . Megjegyezzük, hogy  $n$  és  $m$  szükséges értékei csak 3 kötél esetén esnek egybe. Feladatunk a  $K_h^2$  és  $K_v^2$  operátorok numerikus előállítására a deriváltak értékeinek kiszámítására a differenciámódszert alkalmaztuk. A vizsgált „rácst” a 17. ábra mutatja; (A rácoldalak méreteit nagyítottuk.)



FELÜLNÉZET



AXONOMETRIA

17. ÁBRA: A DIFFERENCIA-RÁCS

Az  $i$ -edik rácspontban számított erőt  $F_i$ -vel jelöljük, komponenseit pedig az  $F_{i,x}, F_{i,y}, F_{i,z}$  módon. A 9. rácspont azt a helyzetet jelöli, amikor a szerkezet  $\lambda = 0$  mellett egyensúlyban van. Szemléletünk alapján megállapíthatjuk, hogy

$$F_9 = 0, \quad F_{10,x} = F_{10,y} = 0, \quad F_{11,x} = F_{11,y} = 0. \quad (4.7)$$

Az egyszerűség kedvéért a  $K^2$  operátorokat is mátrixos alakban foglaljuk össze, annak ellenére, hogy nem lineáris transzformációt definiálnak. A kétdimenziós  $K_h^2$  operátort a

$$K_h^2 = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow F_x \\ \leftarrow F_y \end{matrix} \quad (4.8)$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u_x^2 & u_y^2 & u_x u_y & u_x & u_y \end{matrix}$$

alakban írhatjuk. A bevezetett konvenciót is jelöltük: Az oszlopok alatt az  $u(x, y)$  vízszintes eltolódásvektor komponenseinek azon hatványait (illetve szorzatát) tüntettük fel, amelynek együtthatói az adott oszlopban állnak. A sorok mellett azokat az erő-komponenseket tüntettük fel, amelyeket eredményül kapunk a beszorzás után. Bevezetve a

$$u_h^2 = \begin{bmatrix} u_x^2 \\ u_y^2 \\ u_x u_y \\ u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \quad q_h = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

jelölést, az erő-elmozdulás összefüggés a

$$K_h^2 u_h^2 = q_h \quad (4.10)$$

formában írható. A  $K_h^2$  mátrix  $h_{ij}$  elemeit a 18. ábra alapján a következő módon fejezhetjük ki:

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{F_{5,x} + F_{4,x}}{\Delta x^2} & h_{21} &= \frac{F_{5,y} + F_{4,y}}{\Delta x^2} \\ h_{12} &= \frac{F_{2,x} + F_{7,x}}{\Delta y^2} & h_{22} &= \frac{F_{2,y} + F_{7,y}}{\Delta y^2} \\ h_{13} &= \frac{(F_{3,x} + F_{6,x}) - (F_{1,x} + F_{8,x})}{4\Delta x \Delta y} & h_{23} &= \frac{(F_{3,y} + F_{6,y}) - (F_{1,y} + F_{8,y})}{4\Delta x \Delta y} \\ h_{14} &= \frac{F_{5,x} - F_{4,x}}{2\Delta x} & h_{24} &= \frac{F_{5,y} - F_{4,y}}{2\Delta x} \\ h_{15} &= \frac{F_{2,x} - F_{7,x}}{2\Delta y} & h_{25} &= \frac{F_{2,y} - F_{7,y}}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Megjegyezzük, hogy a

$$\begin{bmatrix} h_{14} & h_{15} \\ h_{24} & h_{25} \end{bmatrix}$$

mátrix azonos az elsőrendű  $K_h^1$  merevségi mátrixszal.

A  $K_h^2$  operátornál lényegesen egyszerűbb a helyzet, hiszen ez csak egydimenziós, így összesen 2 komponense van:



$$K_v^2 = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ \uparrow & \uparrow \\ u_z^2 & u_z \end{bmatrix} \leftarrow F_z \quad (4.12)$$

A konvenciót a (4.8) képlethez hasonlóan jelöltük, és az erő-elmozdulás összefüggés itt is a

$$u_v^2 = \begin{bmatrix} u_z^2 \\ u_z \end{bmatrix}, \quad q_v = F_z \quad (4.13)$$

jelölés bevezetés után a

$$K_v^2 u_v^2 = q_v \quad (4.14)$$

formában foglalható össze. A  $K_v^2$  mátrix komponensei az előzőekhez hasonlóan számíthatók:

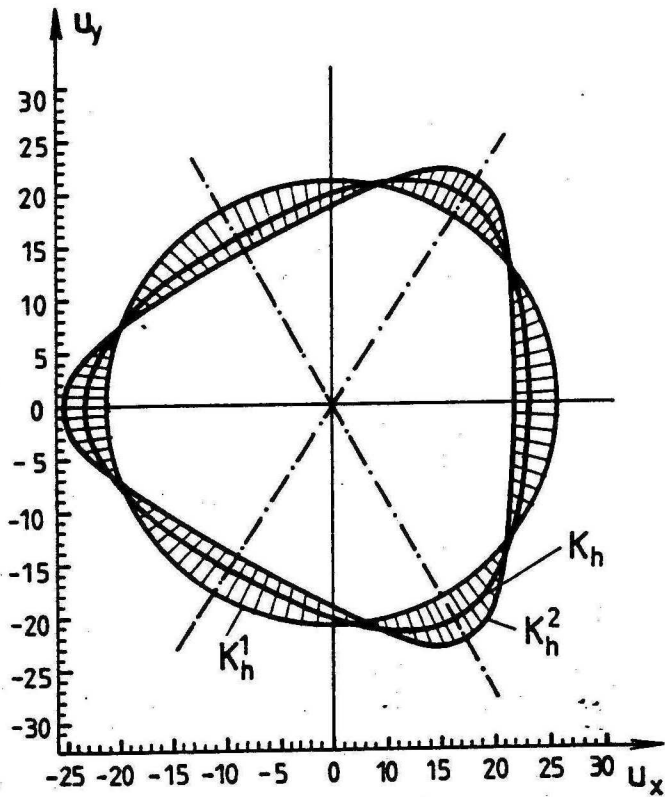
$$v_{11} = \frac{F_{10} + F_{11}}{\Delta z^2}, \quad v_{12} = \frac{F_{10} - F_{11}}{2\Delta z} \quad (4.15)$$

A peremérték feladatoknak az előző alponthban leírt módon való megoldása után az alábbi numerikus eredményekre jutottunk:

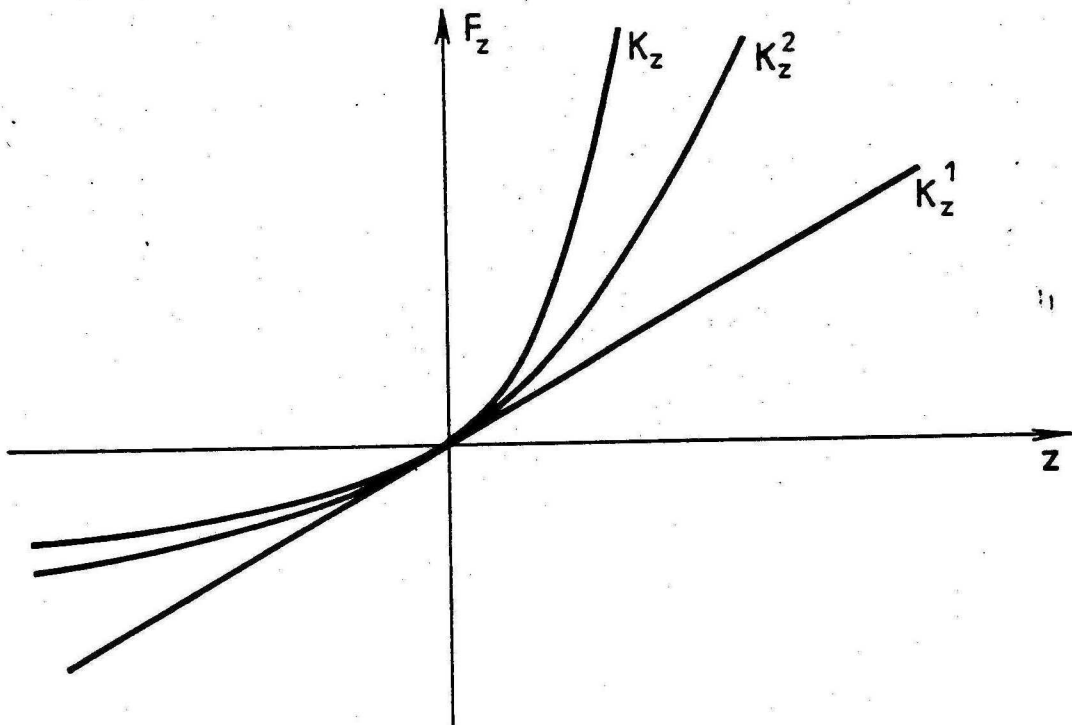
$$K_h^2 = \begin{bmatrix} -20.511 & 21.427 & \underline{0.003} & 41.762 & \underline{0.005} \\ \underline{0.007} & \underline{0.011} & 29.348 & \underline{0.003} & 41.810 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$K_v^2 = [12.344 \quad 82.505]$$

Mivel a szerkezet az  $x$  tengelyre is szimmetrikus, ezért a  $K_h^2$  mátrixban aláhúzott elemeknek pontosan zérusnak kellene lenniük, az eltérés csak a numerikus módszer pontatlanságából adódik. Az operátorok birtokában már rajzolható erő-elmozdulás diagram. A vízszintes síkban egy  $u_x^2 + u_y^2 = konstans$  körpályán mozgattuk a felső csomópontot. Kiszámítottuk az ehhez az elmozduláshoz rendelt erőket a  $K_h^1$ ,  $K_h^2$  és  $K_h$  operátorok alkalmazásával. (Az utóbbi görbéhez 64 pontot számítottunk ki.) Az eredményt a 18. ábra mutatja. Láthatjuk, hogy a (3.32) tétel által meghatározott szükséges feltétel itt elégségesnek is bizonyult, hiszen a másodrendű operátorral számított görbe  $C_3$  szimmetriát mutat. A függőleges irányban a teljes (egydimenziós) elmozduláshoz rendelt erőt ábrázoltuk a 19. ábrán. Itt is megfigyelhetjük, hogy a (3.41) tétel által meghatározott szükséges feltétel egyben elégséges is, hiszen a  $K_v^2$  segítségével számított erők  $C_1$  szimmetriát mutatnak.



18. ÁBRA: A KIEGYENSÚLYOZATLAN VIZSZINTES ERŐ DIAGRAMJAI



19. ÁBRA: A KIEGYENSÚLYOZATLAN FÜGGŐLEGES ERŐ DIAGRAMJAI

### 4.2.3 Korlátlanul nagy elmozdulások

A (4.5) egyenletrendszer iterációs megoldására stabil egyensúlyi helyzetekben a NEWTON-RAPHSON módszert alkalmaztuk (GÁSPÁR, 1983). Az instabil helyzetek meghatározására szolgáló módszereket RIKS (1979) foglalja össze, és egyúttal új, általános módszert is javasol. Ezúttal is egy csomópontban megfogott árbocot fogunk vizsgálni, de ezúttal négy feszítőkötéllel. Numerikus példánkban, amelynek adatai (a kötelek számának kivételével) megegyeznek az előző példa adataival, két típusú instabil helyzetet fogunk vizsgálni:

a/ Súlytalan árboc esetén a triviális egyensúlyi út ( $v_1 = v_2 = 0$ ) instabil szakaszát és

b/ súlyos árboc esetén a tökéletlen szerkezet instabil helyzetét a határpont után.

Az a/ esetben a RIKS által is említett és BUECHNER, JOHNSON és MOORE (1966) által részletesebben is tárgyalt változó-csere a legegyszerűbb megoldás, hiszen a csomópont egy előre ismert vonalon ( $v_1 = v_2 = 0$ ) halad végig, ezen vonal pontjaihoz keressük „visszafelé” a teherparamétert.

A b/ esetben is lényegében ezt az elvet követjük, de mivel a csomópont által befutott görbe itt nem ismeretes, némi előzetes számításra van szükségünk. Ennek az eljárásnak a leírását DOMOKOS (1989b) részletesen közli, röviden ismertetjük.

A tárgyalandó, 4 kötéllel merevített árboc esetén stabilitás-vesztés szempontjából az átlós síkok a legveszélyesebbek (GÁSPÁR, 1978). Numerikus kísérleteink tanúsága szerint azonban, ha a kezdeti tökéletlenség nem a kábelek síkjába esik, akkor a terhelési folyamat során a felső csomópont igen gyorsan „ráfut” a veszélyes átlós síkra. A kritikus teher környezetében már olyan közel van a felső csomópont az átlós síkhoz, hogy jó közelítéssel megelégedhetünk az átlós síkban végzett vizsgálattal a kritikus teher és a posztkritikus leszálló ág meghatározása szempontjából.

Mielőtt a síkbeli mozgásúvá egyszerűsített térbeli szerkezet számítását részleteznénk, két dolgot jegyzünk meg:

- Ha a tökéletlenség az átlós síkban van, akkor a bemutatandó módszer semmilyen közelítést nem tartalmaz. A szerkezet tökéletlenségérzékenységi felületének meghatározásához elvileg az átlós síkban fekvő tökéletlenségekhez tartozó kritikus teher számítása is elegendő.

- A módszer lehetővé teszi nem az átlós síkban fekvő tökéletlenségek tanulmányozását is, hiszen a számításokat egy térbeli szerkezeten végezzük. (Igaz ugyan, hogy a csomópontot síkbeli pályán mozgatjuk.)

Vetítsük most a szerkezetet az átlós síkra, és mozgassuk a felső csomópontot a vízszintes  $x$  tengely mentén. (20. ábra)

A csomópontra ható vízszintes  $H(x)$  erő két részből tehető össze:

$$H(x) = H_r(x) + H_k(x), \quad (4.17)$$

ahol  $H_r(x)$  a rúdról,  $H_k(x)$  pedig a kötelekről a csomópontra átadódó vízszintes erő. A pozitív  $x$  irányba mutató erőt pozitívnak véve statikai megfontolással megállapítható, hogy

$$\left. \begin{array}{l} H_r(x) \geq 0 \\ H_k(x) \leq 0 \end{array} \right\} \text{ ha } 0 < x < c \quad (4.18)$$

A vizsgált tartomány jobb szélét jelző  $c$  pontot az  $x$  tengely és a merev rúddal rajzolt negyedkör metszéspontja szolgáltatja, ennél tovább ugyanis nem tolódhat a csomópont ebben a magasságban. (A húzott rúd esetét nem vizsgáljuk.) Súlytalan rúd esetén a  $H_r(x)$  függvény az  $x = 0$  és  $x = c$  helyeken zérus, súlyos rúd esetén ettől az  $x = c$  helyen kismértékben eltér. A függvénynek a két pont között szemlélet alapján egyetlen maximuma van.

A  $H_k(x)$  függvény az  $x = 0$  helyen zérus és utána ( $x > 0$ ) szigorúan monoton csökken. Közös grafikonon ábrázolva a két függvény abszolút értékét, a diagramok metszéspontjai szolgáltatják azokat a helyeket, ahol pusztán függőleges erővel egyensúlyozható a szerkezet. Eddigi megfontolásaink szerint azonban a vizsgált tartományban csak egy ilyen pont van, tehát a

$$H(x) = 0 \quad (0 < x < c) \quad (4.19)$$

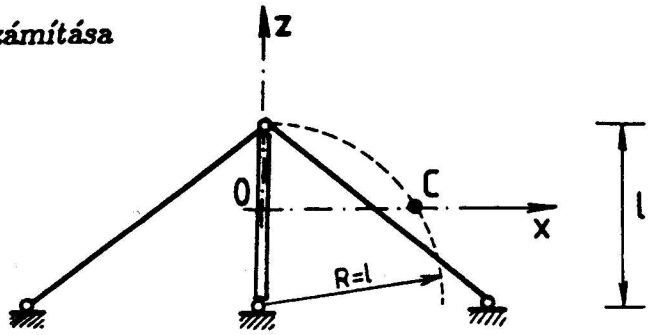
egyenletnek csak egyetlen megoldása van. Ez a megoldás a regula falsi módszerével konvergens sorozattal közelíthető, függetlenül attól, hogy a keresett egyensúlyi helyzet stabil-e vagy sem.

Jelöljük a kapott megoldást (amely a vizsgált magasságtól függ)  $x(z)$ -vel. Az  $x(z)$  pontban a szerkezet egyensúlyozásához szükséges  $P(x(z)) = P(z)$  függőleges teher kritikus értékét a  $P(z)$  függvény maximuma szolgáltatja. Numerikusan ezt a helyet a  $P(z)$  első differenciafüggvényének zérushelye jelöli ki. A zérushely keresésére ismételten a regula falsi eljárást alkalmazhatjuk, amely garantáltan konvergens sorozatot szolgáltat, hiszen a vizsgált tartományon belül ismét csak egyetlen zérushely van. Megjegyezzük, hogy ha a tökéletlenségeket a felső csomópontban ható konstans  $H_0$  vízszintes erővel vesszük figyelembe, akkor a (4.19) egyenlet

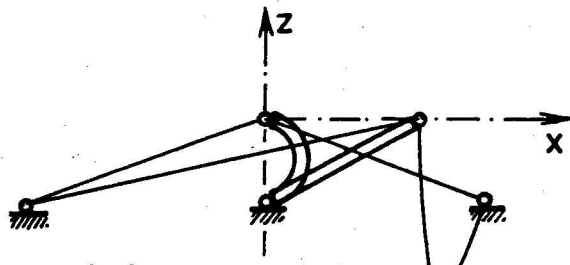
$$H(x) - H_0 = 0 \quad (0 < x < c) \quad (4.20)$$

alakot ölt.

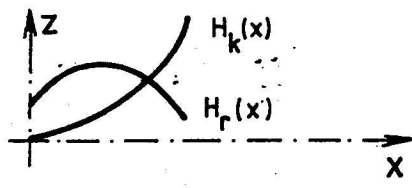
A bemutatott eljárás valószínűleg nem általánosítható más szerkezet-típusra, de az adott szerkezeten konvergál, és az általános módszereknél egyszerűbben programozható.



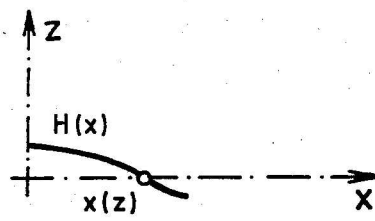
a., A SÍKBELI MOZGÁSÚ SZERKEZET



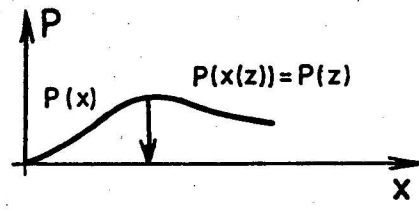
b., VÍZSZINTES KIMOZDÍTÁS



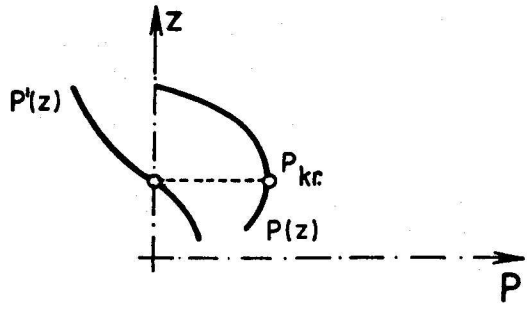
c., VÍZSZINTES RÉSZ-ERŐK



d., VÍZSZINTES EREDŐ



e., FÜGGŐLEGES EGYENSÚLY



f., A KRITIKUS ERŐ

20. ÁBRA: A HATÁRPONT UTÁNI EGYENSÚLY SZÁMITÁSA

Az egyensúlyi út globális leírására a 2. fejezetben leírtak alapján véges dimenziós teret használunk. Összetett szerkezetéről lévén szó, nem várható, hogy az egyensúlyi út ábrázolható ( $d > 3$ ). Itt a véges dimenziós leírásnak számítástechnikai szempontból láthatjuk hasznát. Az egyensúlyi út egyes pontjai ugyanis egy  $u$  vektor helyzeteiként tárolhatók, mely  $u$  vektor dimenziója a terhelési folyamat során állandó marad. Ezt az  $u$  vektort használtuk például a számító és a grafikus program közötti adat-átvitelre.

Az  $u$  vektor komponenseit több módon is megválaszthatjuk. Esetünkben célszerű kihasználni, hogy a szerkezeti elemek (rúd, kötél) a terhelésből adódóan külön-külön síkbeli feladatot jelentenek. A csomópont helyzetének a 16. ábrán illusztrált  $v_i$  koordinátái kijelölik a szerkezeti elemek síkjait, és ezután már csak a síkbeli CAUCHY-feladatok meghatározásához szükséges  $p_i$  paramétereket kell megadnunk a (2.4) tétel értelmében. A rúd alsó pereme a 2. táblázat 4. peremének felel meg. Itt most  $\dot{x}(0)$  és  $\dot{y}(0)$  helyett a szemléletesebb  $Fr_x$  és  $Fr_y$  csuklóerőket választjuk, a  $p_3 = \alpha(0)$  paramétert megtartjuk. A köteleknél nem az általános egyenletet, hanem az (1.51) elsőrendű, kétparaméteres skalár differenciálegyenletet használjuk. Az alsó perem helye rögzített ( $y(0) = konst.$ ), ezért itt a CAUCHY-feladat megadásához csak a paraméterekre van szükség. Az  $i$ -edik kötél paramétereit  $H_i$ -vel és  $C_i$ -vel jelöljük.

„Numerikus“ egyensúlyi útról lévén szó, nem szabad elfelejtkeznünk az egyes integrálási osztásközökről sem, hiszen a megoldást ezek is befolyásolják. A rúd osztásközeinek számát  $\Delta_0$ -al, az  $i$ -edik kötél osztásközeinek számát  $\Delta_i$ -vel jelöljük. A teherparaméter jele  $\lambda$ .

Ezek után felírhatjuk az  $u$  vektort:

$$u^* = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & \dots & u_{18} & u_{19} & u_{20} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lambda & v_1 & v_2 & v_3 & Fr_x & Fr_y & \alpha(0) & \Delta_0 & C_1 & H_1 & \Delta_1 & \dots & C_4 & H_4 & \Delta_4 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Ez a 20 dimenziós vektor tehát egyértelműen meghatároz egy geometriailag lehetséges helyzetet, (nem minden vektor ad egyensúlyi helyzetet, de ha igen, akkor egyértelműen) és viszont: minden egyensúlyi helyzethez egyértelműen hozzárendelhető egy  $u$  vektor. (Ha az osztásköz konstans - ami egyébként nem is túl célszerű - akkor a  $\Delta_i$  paraméterek elhagyhatók, ekkor  $d = 15$ .) A vizsgált egyensúlyi utakat mint egy  $u^1, u^2, \dots, u^i$  vektorsoroszatot értelmezzük. (A felső indexek nem hatványt, hanem sorszámot jelentenek.) Mivel az egyensúlyi utat nem akarjuk a 20 dimenziós tér görbéjeként ábrázolni, ezért az egyes  $u^i$  vektorok között nem kell interpolálnunk. A numerikus eredményeket a 4/a és 4/b táblázat mutatja.

A 4/a táblázatban a szimmetria miatt az összes kötél adata megegyezik, ezért csak az 1. kötél adatait tüntettük fel. Elhagytuk továbbá az  $u$  vektor azon komponenseit, amelyek az egyensúlyi út minden pontján zérus értékűek ( $u_2 = v_1, u_3 = v_2, u_5 = Fr_x$ ).

A 4/b táblázatban páronként egyeznek meg a kötelek, ezért csak két kötél adatait tüntettük fel. Mivel minden egyensúlyi helyzetben  $u_2 = u_3$ , ezért az  $u_3 = v_2$  komponens nem tüntettük fel. A később grafikusán is megjelenítendő egyensúlyi helyzeteket mindkét táblázatban vastag szedés emeli ki.

$u_i \rightarrow$	$u_1$	$u_4$	$u_6$	$u_7$	$u_8$	$u_9$	$u_{10}$	$u_{11}$
$u^i \downarrow$	$(\lambda)$	$(v_3)$	$(Fr_y)$	$(\alpha(0))$	$(\Delta_0)$	$(C_1)$	$(H_1)$	$(\Delta_1)$
$u^1$	-120.02	990	173.17	0.1922	32	21120	25.59	16
$u^2$	-141.22	989	173.28	0.2042	32	12486	15.633	16
$u^3$	-160.85	984	173.81	0.2528	32	3960	5.801	32
$u^4$	-164.72	975	174.55	0.3105	32	2061	3.628	32
$u^5$	-166.12	972	174.86	0.3316	32	1760	3.286	32
$u^6$	-167.21	969	175.18	0.3527	32	1507	3.000	32
$u^7$	-168.05	964	175.62	0.3791	32	1252	2.713	32
$u^8$	-169.09	958	176.12	0.4072	32	1033	2.467	32
$u^9$	-169.94	952	176.74	0.4395	32	826.1	2.237	32
$u^{10}$	-171.03	945	177.38	0.4705	32	662.8	2.057	32
$u^{11}$	-172.93	929	178.87	0.5355	32	401.8	1.773	32
$u^{12}$	-178.72	880	183.62	0.7006	64	-13.39	1.337	32
$u^{13}$	-181.11	860	185.61	0.7577	64	-112.5	1.238	64
$u^{14}$	-184.90	825	189.28	0.8512	64	-242.8	1.111	64
$u^{15}$	-189.92	780	194.16	0.9582	64	-363.1	1.000	64
$u^{16}$	-201.24	690	205.01	1.1510	64	-524.3	0.864	64
$u^{17}$	-212.23	610	215.75	1.3033	64	-622.9	0.791	64
$u^{18}$	-225.38	525	228.70	1.4539	64	-703.8	0.739	64
$u^{19}$	-254.41	370	257.45	1.7094	128	-817.7	0.681	64
$u^{20}$	-266.40	320	268.54	1.7885	128	-848.9	0.668	64
$u^{21}$	-292.19	220	294.31	1.9435	128	-906.6	0.651	64
$u^{22}$	-512.42	-200	514.11	1.1510	256	-1127	0.652	64

4/a TÁBLÁZAT: AZ a/ EGYENSÚLYI ÚT

$u_i \rightarrow$	$u_1$	$u_2$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$	$u_9$	$u_{10}$	$u_{11}$	$u_{12}$	$u_{13}$	$u_{14}$
$u^i \downarrow$													
$u^1$	-165	0.5	973	0.2	175	0.32	32	1811	3.3	32	2011	3.6	32
$u^2$	-167	1.0	966	0.4	176	0.37	32	1243	2.7	32	1455	2.9	32
$u^3$	-169	32	916	8.8	180	0.62	32	-106	1.1	32	4780	-7.3	16
$u^4$	-170	46	886	13	182	0.74	32	-276	0.9	32	6698	10	16
$u^5$	-169	59	856	18	181	0.85	32	-383	0.8	32	8673	13	16

## 4/b TÁBLÁZAT:A b/ EGYENSÚLYI ÚT

Grafikusan a két vizsgált egyensúlyi utat a szerkezet egyensúlyi helyzeteinek rajzaival jelenítjük meg a 22. ábrán.

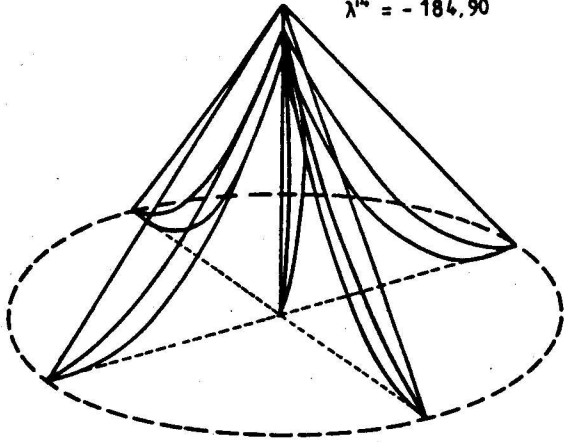
Az a/ egyensúlyi útnál a gyakorlati szempontból kevésbé jelentős rúd hurkolódás és föld alá lógó kötél az alkalmazott apparátus hatékonyságát hivatott alátámasztani globális vizsgálat esetén.

A b/ egyensúlyi útnál a 4. helyzet a határpont közelében van, az 5. (utolsó) már instabil állapotot mutat. Megemlítjük, hogy a grafikánál függőleges irányban erősen nyújtottuk az ábrát, ezért a kötelek ívhossza a terhelés folyamán látszólag erősen módosul. (Kismértékben a valóságban is módosul.) Az itt bemutatott egyensúlyi utakat (DOMO-KOS, 1989a) is tárgyalja.

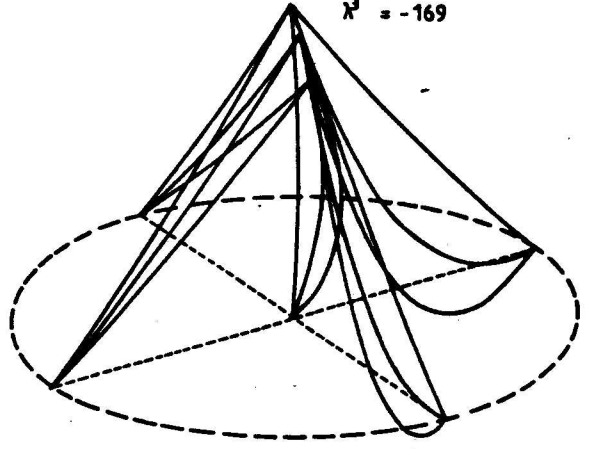


$$\begin{aligned} \lambda^1 &= -120,02 \\ \lambda^{11} &= -172,93 \\ \lambda^{14} &= -184,90 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= -165 \\ \lambda^2 &= -167 \\ \lambda^3 &= -169 \end{aligned}$$



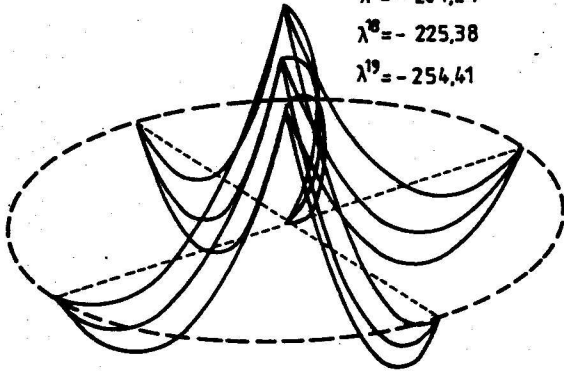
a/1



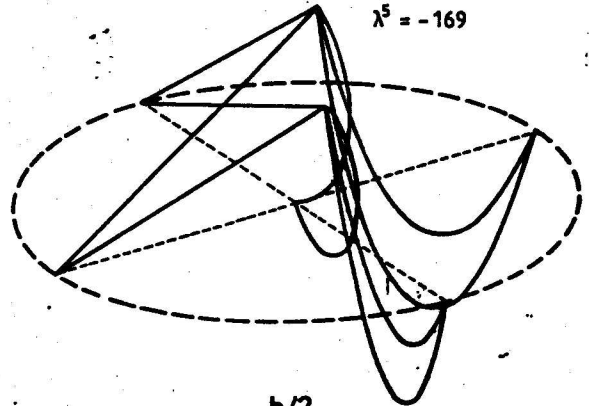
b/1

$$\begin{aligned} \lambda^{16} &= -201,24 \\ \lambda^{18} &= -225,38 \\ \lambda^{19} &= -254,41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^4 &= -170 \\ \lambda^5 &= -169 \end{aligned}$$

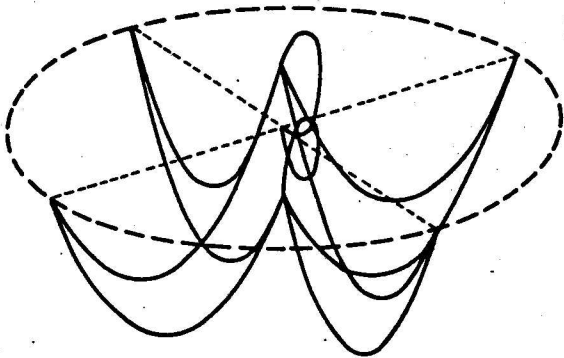


a/2



b/2

$$\begin{aligned} \lambda^{21} &= -292,19 \\ \lambda^{22} &= -512,42 \end{aligned}$$



a/3

21. ÁBRA: A VIZSGÁLT EGYENSÚLYI UTAK

### 4.3 Összefoglaló megjegyzések

Ezen fejezet fő célja az előző fejezetekben kidolgozott apparátus alkalmazása volt.

Az első pontban az 1. fejezet eredményeire támaszkodva olyan tárgyalásmódban fogalmaztuk meg a rugalmas rúdszerkezetek egyensúlyi feltételét, melyben a hagyományosan „véges“ illetve „végtelen“ szabadságfokú szerkezetek közötti minőségi különbség eltűnik.

A második pontban a numerikus módszereket mutattuk be.

A 4.2.1 alpont a differenciálegyenletek integrálásánál és a peremérték-feladatok megoldásánál alkalmazott, ismert módszereket sorolta fel.

A 4.2.2 alpontban a 3. fejezet eredményeire támaszkodva bemutattuk a diszkrét forgási szimmetriával rendelkező kikötött árbocok szimmetria-invariáns csonkolt merevségi operátorának numerikus előállítását. A bemutatott számítások azt igazolják, hogy a 3. fejezetben kimondott tételek „strukturálisan stabilak“. Ezen azt értjük, hogy a  $C_n$  szimmetriával rendelkező szerkezetekre megállapított  $n_{\text{szükséges}}$  értéket eredményesen tudtuk alkalmazni numerikusan, amikor is pedig a  $C_n$  szimmetria csak közelítőleg teljesül.

A 4.2.3 alpontban speciális numerikus eljárást ismertettünk egy pontban megfogott árbocok határpont utáni egyensúlyi helyzeteinek numerikus meghatározására. Illusztráltuk a 2. fejezetben bemutatott véges dimenziós globális leírást rúdszerkezetek gépi számításánál. Eljárásunk hatékonyságát két egyensúlyi út numerikus meghatározásával szemléltettük.

## 5. fejezet:

# Fontosabb új eredmények

Az értekezés főbb eredményeinek az alábbiakat tartom:

**1.** Levezettem a konzervatív teherrel terhelt rugalmas vonalkontinuumok egyensúlyi egyenletét az átviteli mátrixok módszerével az elemi szilárdságtan feltételezései alapján. Lineárisan rugalmas anyag esetében egy explicit, másodrendű vektor differenciálegyenletre jutottam. A levezetett egyenletek elméleti szempontból kismértékben általánosabbak az ismert CLEBSCH-KIRCHHOFF egyenleteknél, gépi számításra lényegesen alkalmasabbak. Az általam ismert irodalomban elsőként alkalmaztam az átviteli és a hajlékonysági mátrix deriváltját.

Megmutattam a kapcsolatot a fenti általános egyenlet és a statika ismert differenciálegyenletei között, az általános egyenletből levezetvén

- a gerenda igénybevételeit és lehajlását az elsőrendű elmélet szerint,
- a csak a végein terhelt rúd nagy elmozdulásait leíró egyenletet, valamint
- a kötél- és lánccgörbét szolgáltatató differenciálegyenleteket.

Ugyancsak az általános egyenletből kiindulva meghatároztam a tengelyirányban rugalmas kötél skalár differenciálegyenletét. Megmutattam a kapcsolatot az eltérő számú peremfeltétellel rendelkező egyenletek között, illusztráltam az általános egyenlet *másodrendű* voltának fizikai tartalmát.

**2.** Megmutattam, hogy az 1. tézisben tárgyalt rugalmas vonalkontinuumok egyensúlyi útja véges dimenziós térben leírható. Definiáltam a CAUCHY-peremet, az ilyen peremmel rendelkező vonalkontinuumoknál szoros felső korlátot adtam az egyensúlyi utat beágyazó tér dimenziójára. Ezt a tételt példákon illusztráltam, bemutattván, hogy

- a nyomott konzol egyensúlyi útja síkban,
- a nyomott csuklós rúd (EULER-feladat) egyensúlyi útja a 3 dimenziós térben

leírható.

**3.** Meghatároztam a kapcsolatot a ciklikusan szimmetrikus szerkezetek TAYLOR-sorában figyelembe veendő tagok szükséges  $n$  rendje és a szerkezet szimmetria-csoportjának

rendje között azon feltétel alapján, hogy a csonkolt TAYLOR-sor a szerkezet valós szimmetria-tulajdonságait tükrözze. Bebizonyítottam, hogy meglehetősen bő információ esetén sem adható  $n$ -re elégséges feltétel. Ezen tételek alapján megadtam a kétváltozós polinomok ciklikus szimmetria-csoportjának rendjére a legkisebb felső korlátot. A bizonyított tételeket különböző rendű tenzormezők esetére a szakirodalomból merített példákön illusztráltam.

**4.** Rugalmas rúdszerkezetek (harmadrendű elmélet szerinti) egyensúlyi feltételét az 1. tézisben levezetett egyenletek alapján olyan tárgyalásmódban fogalmaztam meg, amely egységesen kezeli a hagyományosan „véges“ és „végtelen“ szabadságfokúként elkülönített szerkezeteket, ezáltal lehetővé téve ezen szerkezetek numerikus számítását ugyanazon matematikai modell alapján. Ezt a tárgyalásmódot egy pontban kikötött árboc egyensúlyi feltételének „véges dimenziós“ megfogalmazásával illusztráltam.

**5.** Kikötött árboc példáján bemutattam a szimmetria-invariáns merevségi operátor (a merevségi mátrix megfelelő rendű sorfejtése) numerikus előállítását, ezen számítások alapján numerikusan illusztráltam a 3. tézisben összefoglalt két tétel állítását. Ugyancsak numerikusan nyomonkövettem egy árboc két globális egyensúlyi útját, alkalmazván az 1. és 2. tézisben összefoglalt eredményeket. Az egyik árbocnál numerikusan meghatároztam a tökéletlen (valós) szerkezet kritikus terhének nagyságát.

# Irodalom

- AHRENS, H. (1969): *Der räumlich gekrümmte Stab* Egyetemi doktori értekezés, Braunschweig
- ANTMAN, S. S. (1976): *Ordinary differential equations of non-linear elasticity* Arch. Rat. Mech. Vol.61, pp.307-393
- BERNOULLI, J. (1694): *Acta eruditorum* Leipzig (Opera, Vol. 1, Genf 1744, p. 576)
- BÉRES E., LOVASS-NAGY V. és SZABÓ J: (1958): *Über eine Anwendung der Hypermatrixen bei der Berechnung von räumlichen Fachwerken mit zyklischer Symmetrie* Stahlbau Vol.27, pp. 281-284
- BIEBERACH, L. (1923): *Differentialgleichungen* Springer, Berlin
- BIRKHOFF, G. és MACLANE, S. (1965): *A survey of modern algebra* Macmillan, New York
- BLEICH, F. (1933): *Stahlhochbauten* Springer, Berlin
- BOERNER, H. (1967): *Darstellungen von Gruppen* Springer, Berlin
- BUECHNER, H. F. , JOHNSON , M. W. ( Jr. ) és MOORE , R. H. (1965): *The calculation of equilibrium states of elastic bodies by Newton's method* Proc. 9th. Mid Western Mech. Conf. , Madison
- BUZANO, E. , GEYMONAT, G, és POSTON, T. (1985): *Post-buckling behaviour of a non-linearly hyperelastic thin rod with cross section invariant under the dihedral group  $D_n$*  Arch. for Rat. Mech. Vol. 89. , pp. 307-388
- BÜRGERMEISTER , G. , STEUP, H. és KRETZSCHMAR, H. (1957): *Stabilitätstheorie* Akademie-Verlag, Berlin
- CHAJES, H. és CHEN, W. S. (1979): *Stability of guyed towers* ASCE Vol. 105, No. ST1, pp. 163-174
- CLEBSCH, A. (1862): *Elastizität* Teubner, Leipzig
- CLEMENS, H. (1983): *Stabilitätsprobleme elastischer Stäbe und Platten mit nichtlinearer Verformungsgeometrie* Egyetemi doktori értekezés, Karlsruhe
- CSEHSZLOVÁKIA (1982): *Navrhovani ocelovych konstrukci stozaru* ON731430-1982 (Acélszerkeszeti szabvány)
- COXETER, H. S. M. (1969): *Introduction to geometry* John Wiley, New York

- CSONKA, P. (1981):** *Héjszerkezetek* Akadémiai Kiadó, Budapest
- DEVANEY, R. L. (1987):** *Chaotic dynamical systems* Addison-Wesley, Redwood City
- DICKEY, R. W. (1976):** *Bifurcation problems in nonlinear elasticity* Research Notes in Mathematics, Vol. 3. Pitman Publishing, London
- DOMOKOS G. (1984):** *Membránhéjak egyensúlyi egyenletei általános felületi koordináta-rendszerekben* TDK dolgozat, BME Építészmérnöki Kar, Szilárdságtani Tanszék
- DOMOKOS G. (1988a):** *Large Deflections of elastic bars subject to arbitrary, distributed loads* Newsletter of the Technical University of Budapest, Vol VI. , No. 2. , pp. 6-11
- DOMOKOS G. (1988b):** *Investigation of the digital modelling of chaotic motion* Proc. XI. Int. Conf. Nonlin. Osc., Budapest (1987), J. Bolyai Math. Soc., pp. 382-385
- DOMOKOS G. (1989a):** *Postkritisches Verhalten von abgespannten Masten* ZAMM Bd. 69, No. 5. , pp. T373-T376
- DOMOKOS G. (1989b):** *Kikötött árbocok nagy elmozdulásainak vizsgálata* Építés-Építészettudomány [sajtó alatt]
- DOMOKOS G. (1989c):** *Axiálisan terhelt vasbeton keresztmetszetek számítása konvergencia iterációval a II. feszültségi állapotban* Építés-Építészettudomány XIX.kötet, 3.-4., pp. 395-405 [sajtó alatt]
- DOMOKOS G. (1989d):** *Symmetry-invariance of truncated stiffness operators* Newsletter of the Technical University Budapest, Vol. VI., No.4., pp.5-15
- DOMOKOS G. (1989e):** *Berechnung des nichtlinearen Verhaltens von Tragwerken mit diskreter Rotationssymmetrie* ZAMM Bd. 70, [sajtó alatt]
- DOMOKOS G. (1989f):** *Digital modelling of chaotic motion* Stud. Sci. Math. Hung. [sajtó alatt]
- EGERVÁRY J. (1954):** *A mechanika differenciálegyenletei* BME Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest
- EISLEY, J. G. (1963):** *Nonlinear deformation of elastic beams, rings and strings* Appl. Mech. Rev. Vol. 16, No. 9. , pp. 677-680
- EL NASCHIE, M. S. és AL ATHEL, S. (in press):** *Stress, stability and chaos* John Wiley
- EULER, L. (1744):** *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* Lausanne-Genf (német kiadás: Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 175. W. Engelmann, Leipzig)
- FAURE, K. (1930):** *Berechnung abgespannter Funkmaste* Egyetemi doktori értekezés, Berlin (Ernst Verlag)
- FINNORSZÁG (1980):** *Recommendations for masts in Finland* Joint Commission

- FISCHER J. (1989):** *Kábelekkel merevített antennatornyok posztkritikus viselkedésének számítása* Egyetemi doktori értekezés, Budapest
- GÁSPÁR ZS. (1976):** *Rugalmas rádszerkezetek nagy elmozdulásai* Kandidátusi értekezés, Budapest
- GÁSPÁR ZS. (1977):** *Buckling models for higher catastrophes* J. Struct. Mech. Vol 5, pp. 357-368
- GÁSPÁR ZS. (1978):** *Egyszerű rugalmas modellek magasabbrendű katasztrófák szemléltetésére* Építés-Építészettudomány, VIII. kötet, 3. -4. , pp. 299-309
- GÁSPÁR ZS. (1983):** *A katasztrófaelmélet alkalmazása a szerkezetek stabilitásvizsgálatában* BME Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest (Kézirat)
- GÁSPÁR ZS. és TORNYOS Á (1986):** *Rádszerkezetek állapotjellemzőinek számítása csomóponti koordinátarendszerben* Magyar Építőipar No.3, pp.161-163
- GODBOLE, P. N. , KRISHNA, P. és KHANDEKAR, W. (1985):** *Static analysis of guyed mast tower* Proc. Int. Conf. Finite Elements in Comp. Mech. , Pergamon Press, Oxford
- HACAR, M. A. (1987):** *Discussion to Dean's paper* ASCE Vol. 113, No. ST9, pp. 2066-2068
- HATHOUT, I. A. et al. (1979):** *Buckling of stayed columns* ASCE Vol. 105. , No. ST9, pp. 1805-1822
- HEGEDŰS I. (1988):** *Stability of a hinged bar fixed by weightless cords* Newsletter of the Tech. Univ. Budapest Vol VI.,No.3., pp.15-22
- HEGEDŰS I. (1978):** *Egyrétegű hengeres rácsok vizsgálata mátrixok segítségével.* Műszaki Tudomány 56. kötet, pp.431-443
- KIESEWETTER, H. és MAESS, G. (1974):** *Elementare Methoden der numerischen Mathematik* Springer, Wien
- KIRCHHOFF, G. (1897):** *Vorlesungen über Mechanik* Teubner, Leipzig
- KLINGER, H.-J. (1942):** *Die Statik und Kinematik des räumlich gekrümmten elastischen Stabes* Egyetemi doktori értekezés, Wien
- KOKARAKIS, J. E. és BERNITSAS, M. M. (1987):** *Effect of extensibility on large deformation* Mech.Struct. and Mach. Vol.15, No.2., pp.209-231
- KOLLÁR L. (1972):** *Kötelekkel merevített rendszerek rezgésamplitúdójának csökkenése a kötelek nemlineáris viselkedés következtében* Mélyépítéstudományi Szemle, XXII. évfolyam, 3.szám, pp.137-221
- KORN, G. A. és KORN, T. A. (1968):** *Mathematical Handbook* McGraw-Hill, New York
- KOUNADIS, A. N. és MALLIS, J. (1988):** *On the accuracy of various formulas for establishing large axial displacements of columns* Mech.Struct.and Mach. Vol.16, No.2., pp.123-145

- LAGRANGE, J. L. (1788):** *Mecanique Analitique* (német kiadás: *Analytische Mechanik*, Springer, Berlin, 1887. )
- LAIHO, J. (1987):** *Some known mast accidents* IASS Symp. London (Canada), Recommendation for guyed masts (Working group 4.)
- LOVE, A. E. H. (1927):** *Mathematical theory of elasticity* Dover Publications (4th edition) , New York
- MOON, F. C. (1987):** *Chaotic vibrations* John Wiley, New York
- PETERSEN, CH. (1970):** *Abgespannte Maste und Schornsteine* Berlin
- PFLÜGER, A. (1950):** *Stabilitätsprobleme der Elastostatik* Springer, Berlin
- RIKS, E. (1979):** *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems* Int. J. Solids Structures Vol. 15, pp. 529-551
- ROLLER B. (1965):** *Feszített függőtetők gyakorlati számítása* Mélyépítéstudományi Szemle, 15. kötet, pp.60-69.
- ROSENTHAL, F. és SKOP, R. A. (1980):** *Guyed towers under arbitrary loads* ASCE Vol. 106, No. ST3, pp. 679-692
- SAALSCHÜTZ, L. (1880):** *Der belastete Stab* Leipzig
- SAMUELS, P. (1980):** *Bifurcation and limit point instability of dual eigenvalue third order systems* Int. J. Solids Structures Vol. 16, pp. 743-756
- SCHEER, J. és ULLRICH, U. (1978):** *Zur Berechnung abgepannter Maste* Bauingenieur Vol. 53, pp. 43-50
- SCHRÖTER, H.-J. (1972):** *Beitrag zur statischen Berechnung von räumlich stark gekrümmten Stäben* Egyetemi doktori értekezés, Darmstadt
- SKOP, R. A. (1979) :** *Cable spring constants for guyed tower analysis* ASCE Vol. 105, No. ST7, pp. 1307-1318
- SNEDDON, J. N. (1976):** *Encyclopedic Dictionary of Mathematics* Pergamon Press, Oxford
- STERN, J. (1979):** *Der Gelenkstab bei grossen elastischen Verformungen* Ing.Archiv Vol.48, pp.173-184
- STERN, J. (1984):** *Der Gelenkstab mit Vorverformung* Ing.Archiv Vol.54, pp.152-160
- SZABÓ J. és KOLLÁR L. (1974):** *Függőtetők számítása* Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- SZABÓ J. és ROLLER B. (1978):** *Rúdszerkezetek elmélete és számítása* Akadémiai Kiadó, Budapest
- SZÁSZ P. (1951):** *A differenciál- és integrálszámítás elemei* Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Budapest
- TARNAI T. (1980):** *Simultaneous static and kinematic indeterminacy of space trusses with cyclic symmetry* Int. J. Solids Struc. Vol 16, pp.347-359



- THOM, R. (1975):** *Structural stability and morphogenesis* Benjamin, New York
- THOMPSON, J. M. T. és GÁSPÁR ZS. (1977):** *A buckling model for the set of umbilic catastrophes* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 82, pp. 497-507
- THOMPSON, J. M. T. és HUNT, G. W. (1983):** *On the buckling and imperfection-sensitivity of arches with and without prestress* Int. J. Solids Structures Vol. 19, No. 5, pp. 445-459
- TORNYOS Á. (1985):** *Dynamic analysis of space frameworks with cyclic symmetry* Space Structures Vol 1., pp. 111-115
- VERMES GY. (1986):** *Kikötött antenna tornyok nemlineáris statikai vizsgálata* Mérnök-matematikusi diplomamunka  
BME Építőmérnöki Kar Mechanika Tanszék
- WANG, C. Y. és WATSON, L. T. (1982):** *The elastic catenary* Int. J-Mech. Sci. Vol. 24, pp. 349-357
- ZIESEL, W. (1958):** *Berechnung mehrfach abgepannter Maste* Egyetemi doktori értekezés, Wien
- ZÜLEV, V.B., STEJN, A.B. és ERIN, O.A. (1986):** *Raszczet nyite-sztyerzanyevüh szisztem sz ucsetom nyelinyejnoj uprugoztyi* Csizslennüje metodü resenyija sadacs stroitlyelnoj mehanyiki transzportnüh szooruzsenyij No.782, pp.76-81

# Függelék

Néhány ismert torony-baleset

(LAIHO, 1987)

Dátum	Hely	H(m)	Ország	Összeomlás valószínű oka
195803??	St.Johns, CBN	90	N.Fld,Kan.	Két torony, jégvihar
19601228	Pyhätunturi, YLE FM	74	Finnország	Statikus jég teher
19650103	Nova Scotia, Antig.	137	Kanada	CFXU-TV, ok ismeretlen
19651004	Mt.Gambler TV	150	Ausztrália	Horgony kiszakadás
19651015	Jyväskylä YLE FM/TV	320	Finnország	Repülő kábelnek ütközött
196604??	Roswell, KBIM-TV	560	N.Mex., USA	Szél (80 km/h)
19660526	Calgary, CBR	141	Alberta, Kan.	-
19660708	Manitoba, tel.	116	Kanada	-
19671212	Trois Riv., CKTM	300	Quebec, Kan.	Jégvihar és szél
19680624	Sioux Falls	600	S.Dak., USA	Repülő kábelnek ütközött
196807??	Sioux Falls, KSOO-AM	60	S.Dak., USA	Kábelt beszántották
19680323	Quebec City, CBV-AM	76	Quebec, Kan.	Szél (50-80 km/h) és jég

Dátum	Hely	H(m)	Ország	Összeomlás valószínű oka
19681100	Galesburb, KXJB-TV	627	N.Dak., USA	Helikopter átvágott egy kötelet
19681200	Chacaluco	251	Argentina	Lezuhanó antenna elvágott egy kötelet
19690318	Emley Moor, ITV, BBC	384	Anglia	Belengés (hengeres test)
19690506	Dallas, KDTV	470	Texas, USA	Szélteher
19691123	Ylläs, YLE FM/TV	212	Finnország	Belengés, szél, jég
19700407	Jyväskylä, YLE FM/TV	320	Finnország	Vadászgép árbocnak ütközött
19700712	Motala, LW	200	Svédország	Vihar
19710907	St. Paul, WCCO, KSTP	419	Minn., USA	Platform emelés közben omlott össze
19730600	Orlando TV	487	Florida, USA	Kivitelezési hiba
19731000	Cedar Rap., KCRG-TV	600	Iowa, USA	Kábel szakadás
19731200	Des Moines, KRNT-TV	600	Iowa, USA	Szél és jég szerelés közben
197412??	ismeretlen	?	NSzK	Belengés
19750111	Sioux Falls, KSFY	604	S.Dak., USA	Jégvihar
19750323	Pipestone, KLOH-FM	?	Minn., USA	Szélvihar
19750327	Salem, KNOX-TV	477	S.Dak., USA	Szélvihar
19760911	Karigasniemi	56	Finnország	Belengés
19761202	Pic de Nore	80	Franciao.	Szél (260 km/h)
19780326	Bluffs, Convocom Co.	484	Ill., USA	Jégvihar
197901??	Krasov FM-TV	300	Csehszlov.	Belengés
19790912	Mobile County	100	Alab., USA	Hurrikán (több torony)
19791228	Sunne, FM-TV	320	Svédország	Belengés
19810731	Dudelange, FM-TV	301	Luxemburg	Mirage III vadászgép toronynak ütközött
19821207	Huntsville, KTXH	548	Alab., USA	Szerelés közben statikus teherre
19830300	Manitoba	?	Kanada	Több torony
19830311	Winn Mt., WCSH-TV	395	Maine, USA	Jégvihar
19831016	Wavre, AM/FM/TV	315	Belgium	Belengés
19840319	Topeka, KLDH	438	Kansas, USA	Jégvihar
19850115	Teutoburger Wald	298	NSzK	Belengés