pink.istvan_471_26

Éles felső korlátok speciális típusú kétismeretlenes egységegyenletek megoldásszámára

MTA doktori értekezés tézisei

Dr. Pink István
Debreceni Egyetem

2026

pink.istvan_471_26

1. fejezet

Bevezetés

A diofantikus egyenletekkel kapcsolatos kutatások középpontjában három alapproblaéma áll: a megoldhatóság eldöntése, a megoldásszám vizsgálata, valamint az összes megoldás megkeresése.

1970-ben Matjaszevics negatív választ adott Hilbert 10. problémájára, amennyiben igazolta, hogy nem létezik olyan univerzális eljárás, amely tetszőleges diofantikus egyenletről eldöntené annak megoldhatóságát. Ebből következik, hogy a megoldások számára és az összes megoldás meghatározására vonatkozóan sem létezhet általános algoritmus. Ezért válnak különösen értékessé azok az eredmények, amelyek a diofantikus egyenletek egy-egy széles és fontos osztálya esetén adnak választ az alapproblémákra.

Kiemelkedő jelentőségűek az effektív végességi tételek. Ezek nem csupán a megoldásszám végességét garantálják egy-egy egyenletosztályon belül, hanem konstruktív módon algoritmust is szolgáltatnak az összes megoldás megkeresésére. Ebben a tekintetben alapvető áttörést jelentettek A. Baker Fields-éremmel elismert munkái (ld. [Ba1], [Ba2], [Ba3], [Ba4]), amelyekben algebrai számok logaritmusainak lineáris formáira nyer nem-triviális effektív alsó becsléseket. A Baker-módszerrel nyert effektív eredmények többnyire elméleti jelentőségűek: rendszerint explicit felső korlátot szolgáltatnak a megoldások méretére a fellépő ismert paraméterek függvényében. A korlátok azonban túl nagyok ahhoz, hogy konkrét egyenletek megoldására alkalmazni lehessen őket. Viszont sok esetben a bizonyításukra kidolgozott módszert más módszerekkel, például a Lenstra-Lenstra-Lovász-féle redukciós eljárással kombinálva, végül hatékony algoritmust eredményeznek, melyek konkrét esetekben, nem túl nagy paraméter értékek mellett, számítógépet is felhasználva az összes megoldás meghatározását is lehetővé teszik.

A diofantikus egyenletek egy széles, és alkalmazások szempontjából is rendkívül fontos osztályát képezik a számtestek fölötti S-egység egyenletek. Jelen dolgozatban a racioná-

lis számtest fölötti bizonyos kétismeretlenes S-egység egyenletekre fókuszálunk és ezek megoldásszámára vezetünk le éles felső korlátokat.

Az S-egység egyenletek elmélete igen gazdag (ld. [Gy3, EvGyStTi, EvScSch, EvGy, EvGy2]) és számos diofantikus probléma visszavezethető számtestek feletti S-egység egyenletekre. Ezek közül is a legegyszerűbb, a racionális számtest fölötti kétismeretlenes S-egység egyenlet, amely a következő alakban írható fel:

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0, \tag{1.1}$$

ahol α, β, γ adott nemnulla egész számok, X, Y, Z pedig olyan ismeretlen egészek, amelyeknek a prímtényezői véges sok adott prímszám közül kerülnek ki. Ezen előre rögzített prímek halmazát szokás szerint S-sel jelöljük.

Klasszikus eredmények alapján ismert, hogy az (1.1) egyenletnek csak véges sok megoldása van, és a megoldások méretére effektív felső korlát adható a Baker-módszer segítségével (cf. [Gy, Gy2, BuGy, GyYu]). Ezen effektív korlát csak az α, β, γ konstansoktól és az előre rögzített prímektől függ. Mivel minden ismeretlen kifejezhető a megadott prímek hatványainak szorzataként, ezért az (1.1) egyenlet egy exponenciális diofantikus egyenlet. Ezek alapján az (1.1) egyenlet egyik legegyszerűbb alakja az

$$a^x - b^y = c, \tag{1.2}$$

egyenlet, ahol a, b, c olyan rögzített pozitív egészek, amelyekre $\min\{a, b\} > 1$, az x, y pedig ismeretlen pozitív egészek. Ez az egyenlet a Pillai-egyenlet egy speciális esete, és Pillai híres sejtése szerint bármely adott $c \geq 1$ esetén az (1.2) egyenletnek legfeljebb véges sok olyan (a, x, b, y) megoldása van, amelyre $\min\{a, x, b, y\} > 1$. Érdemes megjegyezni, hogy a $c = 1$ eset a híres Catalan-egyenletnek felel meg, amelyet Mihăilescu [Mi] korábban megoldott (ld. még [Tij]).

Az 1930-as években megjelent cikksorozatában Pillai [Pi1, Pi2, Pi3, Pi4] aktívan tanulmányozta az (1.2) egyenletet (negatív c értékeket is megengedve), és több végességi eredményt ért el a megoldások számára vonatkozóan. Megjegyezzük, hogy már Pólya [Pólya] ineffektív eredményéből adódik, hogy az (1.2) egyenletnek csak véges sok (x, y) megoldása van. 1936-ban Herschfeld [Hersch] megmutatta, hogy ha $(a, b) = (3, 2)$ és $|c|$ elegendően nagy, akkor az (1.2) egyenletnek legfeljebb egy megoldása van az x és y pozitív egészekben. Még ugyanabban az évben Pillai [Pi2] (lásd még [Pi1]) kiterjesztette ezt az eredményt tetszőleges $\gcd(a, b) = 1$ és $a > b \geq 2$ feltételeknek megfelelő (a, b) párokra, feltéve, hogy $|c| > c_0(a, b)$. Mivel Pillai munkái (mint ahogy Herschfeldé is) a Thue-féle, algebrai számok racionálisokkal való approximációjáról szóló tétel Siegel-féle élesítésén alapszik, ezek

az eredmények is ineffektívek (azaz a bizonyítás alapján nem lehetséges a $c_0(a,b)$ konstans kiszámítása). Az $a=3$ és $b=2$ speciális esetben Pillai [Pi4] azt sejtette, hogy $c_0(3,2)=13$. Ezt a sejtést Stroeker és Tijdeman [StrTij] a Baker-módszer alkalmazásával igazolta (ld. még [dW]). Az 1990-es évek elején Scott [Sc] vizsgálta az (1.2) egyenletet abban az esetben, amikor a prímszám (merítve R. K. Guy könyvének [Gu] egyik klasszikus problémájából), és bizonyos kvadratikus számtestekben dolgozva és csupán elemi módszereket használva, éles felső korlátokat vezetett le a megoldások számára. E témákról és további kapcsolódó kérdésekről részletesebben olvashatunk a [ShTi, Be2, BerHa] művekben.

Az (1.2) egyenlet megoldásszámával kapcsolatban Bennett [Be] az alábbi meghatározó eredményt igazolta.

1.1. Tétel. (Bennett, 2001) *Legyenek a,b és c olyan tetszőlegesen rögzített pozitív egészek, amelyekre* $\min\{a,b\}>1$. *Ekkor az (1.2) egyenletnek legfeljebb két megoldása van az x,y pozitív egészekre nézve.*

Az 1.1. Tétel bizonyítása alapvetően bizonyos kétváltozós logaritmikus lineáris formákra vonatkozó nemtriviális alsó becslések és bizonyos elemi kongruenciák kombinálásán múlik. Megjegyezzük, hogy ezen kongruencia feltételek lényegében egy nagy hézagot eredményeznek a megoldások között, amennyiben feltesszük, hogy az (1.2) egyenletnek van legalább három megoldása. Említésre méltó továbbá, hogy a $\gcd(a,b)>1$ esetet is sikerült elemi meggondolásokkal kezelni. Számos egyéb cikk is megjelent a szakirodalomban az (1.2) típusú, általánosabb egyenletek megoldásszámának becslésével kapcsolatban (ld. [BuLu, ScSt, ScSt2, ScSt3]). Fontos látni, hogy az 1.1. Tétel éles abban az értelemben, hogy számos példa létezik, amikor az (1.2) egyenletnek két megoldása van, az alábbiak szerint:

$$\begin{gathered}2^3-3=2^5-3^3=5,\ 2^4-3=2^8-3^5=13,\ 2^3-5=2^7-5^3=3,\\ 3-2=3^2-2^3=1,\ 13-3=13^3-3^7=10,\ 91-2=91^2-2^{13}=89,\\ 6-2=6^2-2^5=4,\ 6^4-3^4=6^5-3^8=1215,\ 15-6=15^2-6^3=9,\\ 280-5=280^2-5^7=275,\ 4930-30=4930^2-30^5=4900.\end{gathered}\tag{1.3}$$

Az (1.3) lista alapján Bennett felvetette azt a kérdést, hogy vajon minden olyan példa, amelyre az (1.2) egyenletnek pontosan két megoldása van, az (1.3) összefüggésekből származik-e, és ezzel kapcsolatban megfogalmazta az alábbi sejtést:

1.2. Sejtés. (Bennett, 2001) *Ha a,b és c olyan pozitív egészek, amelyekre $a,b\geq 2$, akkor az (1.2) egyenletnek legfeljebb egy megoldása van az x és y pozitív egész ismeretlenekre nézve, kivéve az (1.3) összefüggéseknek megfelelő (a,b,c) számhármasokat.*

Az 1.2. sejtéssel kapcsolatban Scott [Sc] ért el bizonyos eredményeket. Nevezetesen, bebizonyította, hogy ha a, b, c olyan pozitív egészek, amelyekre a prím és $b > 1$, akkor az (1.2) egyenletnek - öt konkrét (a, b, c) hármastól eltekintve - legfeljebb egy (x, y) megoldása van, ha y páratlan és legfeljebb egy megoldása van, ha y páros. Terai [Te] néhány részeredménye után Bennett [Be] számos eredményt bizonyított az 1.2. sejtéssel kapcsolatban. Többek között igazolta, hogy az 1.2. sejtés fenáll, amennyiben $a \in \{3, 5, 17, 257, 65537\}$, azaz a az ismert Fermat-prímek egyike.

1.3. Tétel. (Bennett, 2001) *Ha* $a \in \{3, 5, 17, 257, 65537\}$ *és* $b \geq 2$, *akkor az (1.2) egyenletnek legfeljebb egy megoldása van az* x, y *pozitív egészekre nézve, kivéve ha* $(a, b, c) = (3, 2, 1)$, *amely esetben két megoldás létezik, az* $(x, y) = (1, 1)$ *és* $(x, y) = (2, 3)$.

A továbbiakban vizsgáljuk az (1.1) egyenlet egy másik fontos speciális esetét, amely nemcsak az (1.2) egyenlet háromváltozós általánosításának tekinthető, hanem szorosan kapcsolódik az úgynevezett általánosított Fermat-egyenlethez is. Ez egy olyan diofantikus egyenlet, amely esetén keressük az összes olyan összefüggést, ahol két relatív prím pozitív egész hatványának összege egyenlő egy harmadik pozitív egész hatvánnyal (ld. [BeMiSi], [Co, Ch.14]). Ez az egyenlet a következő alakú:

$$a^x + b^y = c^z, \tag{1.4}$$

ahol a, b, c olyan rögzített relatív prím pozitív egészek, amelyekre $\min\{a, b, c\} > 1$, és az x, y, z pedig ismeretlen pozitív egészek. Úgy tűnik, hogy a legkorábbi publikált munka az (1.4) egyenlet megoldására vonatkozóan Sierpiński [Si] nevéhez fűződik, aki az $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ esetben oldotta meg az egyenletet. Közvetlenül e munka után Jeśmanowicz [Je] (aki Sierpiński tanítványa volt) más primitív pitagoraszi számhármasokra is vizsgálta az (1.4) egyenletet, és felvetette a megoldások meghatározásának problémáját tetszőleges pitagoraszi számhármas esetén. Ez a probléma az (1.4) egyenlettel kapcsolatos egyik legismertebb megoldatlan kérdés. Az 1990-es években megjelent cikksorozatában Terai úttörő eredményeket ért el az (1.4) egyenlettel kapcsolatban az (a, b, c) hármasok bizonyos családjaira (beleértve a pitagoraszi számhármasokat), majd később több problémát is felvetett, köztük a már említett Sierpiński-Jeśmanowicz-féle kérdés egy általánosítását, amelyet ma Terai-sejtésnek neveznek (ld. [Te]). E témákról és más kapcsolódó kérdésekről részletesebben olvashatunk a közelmúltbeli [CiMi, Lu2, Miy2] cikkekben és az ezekben található hivatkozásokban.

Amint azt korábban említettük, az S-egységegyenletek elméletéből tudjuk, hogy az (1.4) egyenletnek legfeljebb véges sok megoldása van, sőt, a megoldások száma egy abszolút korláttal felülről becsülhető (lásd Győry Kálmán kiváló összefoglaló munkáját [Gy4],

valamint az [Ev], [Hir] cikkeket). Nyilvánvaló azonban, hogy az ilyen becslések messze elmaradnak a tényleges megoldásszámtól. A szakirodalomban fellelhető számos munka, valamint az (1.1) egyenlet egy sokkal általánosabb alakjának a tárgyalása (ld. [Theorem 1, EvGyStTi]) azt sugallja, hogy a (1.4) egyenletnek általában kevés megoldása van.

Ebben az irányban több kutató is fontos előrelépést tett az elmúlt években. Scott [Sc] az (1.4) egyenletet abban a speciális esetben vizsgálta, amikor c prím, és bebizonyította, hogy $c \neq 2$ esetén az (1.4) egyenletnek legfeljebb két (x, y, z) megoldása van, míg $c = 2$ esetén legfeljebb egy, kivéve az $(a, b, c) \in \{(3, 5, 2), (5, 3, 2)\}$ eseteket, amikor is pontosan három, illetve az $(a, b, c) \in \{(3, 13, 2), (13, 3, 2)\}$ eseteket, amikor pedig pontosan két megoldás létezik. Az (1.4) egyenlettel kapcsolatban meg kell említenünk Scott és Styer munkáját is [ScSt4]. Ők jelentősen továbbfejlesztették a [Sc] cikkben szereplő imaginárius kvadratikus számtestek feletti érvelést abban az esetben, amikor c prím, és arra a következtetésre jutottak, hogy páratlan c esetén az (1.4) egyenletnek legfeljebb két megoldása van. Egy cikksorozatban Hu és Le [HuLe, HuLe2, HuLe3] tanulmányozták az (1.4) egyenletet, és különféle elemi módszereket, többek között lánctörteket használva, találtak egy nagy hézagot három feltételezett megoldás között - ez az úgynevezett "hézagelv". Ezen hézagelv és a Baker-módszer kombinációja azt eredményezi, hogy az (1.4) egyenletnek legfeljebb két megoldása van, amennyiben $\max\{a, b, c\} > 10^{62}$.

A második fejezet fő eredménye (2.1. tétel) ezen a ponton kapcsolódik az (1.4) egyenlet megoldásszámára vonatkozó kutatásokhoz. Nevezetesen, a 2.1. tételben bebizonyítjuk, hogy ha a, b, c olyan tetszőlegesen rögzített, relatív prím pozitív egészek, amelyekre $\min\{a, b, c\} > 1$, akkor az (1.4) egyenletnek legfeljebb két pozitív egész (x, y, z) megoldása van, kivéve az $(a, b, c) \in \{(3, 5, 2), (5, 3, 2)\}$ eseteket, amelyek pontosan három megoldást szolgáltatnak. Megjegyezzük, hogy a kivételes esetek a $3+5 = 2^3, 3^3+5 = 2^5$ és $3+5^3 = 2^7$ azonosságokból adódnak. Megemlítjük, hogy a 2.1. tétel Bennett híres tételének (1.1. tétel) 3-változós általánosításának tekinthető. Továbbá ez az eredmény éles és végleges abban az értelemben, hogy végtelen sok olyan (a, b, c) hármas van, ahol az (1.4) egyenletnek két megoldása létezik (nevezetesen az $(a, b, c) = (2^k - 1, 2, 2^k + 1)$ alapok végtelen családja esetén, ahol $k \geq 2$ tetszőleges egész, az (1.4) egyenletnek pontosan két megoldása van: $(x, y, z) \in \{(1, 1, 1), (2, k+2, 2)\}$). Végül megjegyezzük, hogy a 2.1. tétel a kutatások homlokterében álló témában, igen gazdag szakirodalommal rendelkező és sokak által vizsgált matematikai problémát old meg.

A 2.1. tétel kimondja, hogy csak az $(a, b, c) \in \{(5, 3, 2), (3, 5, 2)\}$ hármasok esetén van az (1.4) egyenletnek három megoldása az (x, y, z) pozitív egészek körében. Másrészt, egy számítógéppel végzett egyszerű keresés egy megfelelően választott véges tartományban (ld. [ScSt4, Section 3]) számos példát szolgáltat olyan (a, b, c) hármasokra, amelyekre az (1.4)

egyenletnek két pozitív egész (x, y, z) megoldása van. Ezek az alábbi egyenlethalmaznak felelnek meg:

$$\begin{gathered}
5+3=2^3,\ 5+3^3=2^5,\ 5^3+3=2^7;\\
13+3=2^4,\ 13+3^5=2^8;\\
5+2^2=3^2,\ 5^2+2=3^3;\\
7+2=3^2,\ 7^2+2^5=3^4;\\
3+2^3=11,\ 3^2+2=11;\\
10+3=13,\ 10+3^7=13^3;\\
3+2^5=35,\ 3^3+2^3=35;\\
89+2=91,\ 89+2^{13}=91^2;\\
5+2^7=133,\ 5^3+2^3=133;\\
3+2^8=259,\ 3^5+2^4=259;\\
13+3^7=2200,\ 13^3+3=2200;\\
91+2^{13}=8283,\ 91^2+2=8283;\\
(2^k-1)+2=2^k+1,\ (2^k-1)^2+2^{k+2}=(2^k+1)^2,
\end{gathered} \tag{1.5}$$

ahol k olyan tetszőleges egész, amelyre $k \geq 2$.

Bár a 2.1. tétel lényegében éles, az (1.4) egyenlettel kapcsolatos számos munka fényében természetes a feltételezés, hogy ennél egy erősebb állítás is igaz lehet. Egy ebbe az irányba mutató sejtést tett közzé Scott és Styer [ScSt4], amely a 1.2. sejtés háromváltozós általánosításának tekinthető, az alábbiak szerint:

1.4. Sejtés. (Scott és Styer, 2016) *Tegyük fel, hogy a, b, c olyan rögzített, relatív prím pozitív egészek, amelyekre* $\min\{a, b, c\} > 1$. *Ekkor az (1.4) egyenletnek legfeljebb egy megoldása van, kivéve, ha az (a, b, c) vagy a (b, a, c) számhármas az alábbi halmazba tartozik*:

$$\begin{aligned}
\{\,&(5,3,2),(13,3,2),(5,2,3),(7,2,3),\\
&(3,2,11),(10,3,13),(3,2,35),(89,2,91),\\
&(5,2,133),(3,2,259),(13,3,2200),(91,2,8283),\\
&(2^k-1,2,2^k+1)\,\},
\end{aligned} \tag{1.6}$$

ahol k tetszőleges pozitív egész, amelyre $k \geq 2$.

A szakirodalomban számos részeredmény található, amely alátámasztja ezt a sejtést, azonban a 1.4. sejtés igazolása csupán napjainkban ismert módszereket használva teljesen elérhetetlennek tűnik. Érdemes megjegyezni, hogy több nyitott problémát is tartalmaz az

(1.4) egyenlettel kapcsolatban bizonyos végtelen (a, b, c) családokra, beleértve Sierpiński és Jeśmanowicz primitív pitagoraszi számhármasokra vonatkozó sejtését is. Értekezésünk harmadik fejezetében több speciális esetben igazoljuk az 1.4. sejtést. Pontosabban, a 3.2. tétel bizonyítja az 1.4. sejtést minden olyan esetben, amikor a és b modulo c vett kiterjesztett multiplikatív rendjei relatív prímek. (A kiterjesztett rend fogalmát a 3.1. Definíció tartalmazza). A 3.2. tétel közvetlen következményeként kapjuk (lásd a 3.3. következményt), hogy ha a és b közül legalább az egyik kongruens 1-gyel vagy -1-gyel modulo c, akkor az 1.4. sejtés teljesül. Megjegyezzük, hogy a 3.3. Következményből adódik, hogy az 1.4. sejtés igaz $c \in \{2, 3, 6\}$ esetén. Ezáltal egy újabb bizonyítást kapunk Scott nevezetes tételére [Sc, Theorem 6; $p = 2$], aki tisztán algebrai úton oldotta meg az 1.4. sejtést $c = 2$ esetén. Következő eredményünk (lásd a 3.4. tételt) a 3.3. következménnyel együtt igazolja a 1.4. sejtést, amennyiben $c \in \{3, 5, 17, 257, 65537\}$, azaz ha c az ismert Fermat-prímek egyike. Ez az eredmény az 1.3. tétel háromváltozós általánosításának tekinthető. Végezetül, a 3.5. tétel megmutatja, hogy a 1.4. sejtés igaz $c = 13$ esetén is.

Megjegyezzük, hogy a jelen értekezésben bemutatott eredmények a [MiPi], [MiPi2] és [MiPi3] publikációkon alapszanak. Bár a [MiPi3] dolgozat tartalmaz két ineffektív eredményt is (lásd a [MiPi3] cikk 1. és 2. tételét), értekezésünkben azokra az eredményekre összpontosítunk, amelyek bizonyításában csak effektív módszereket használtunk, és ezen eredmények teljesen explicit, éles és abszolút felső korlátokat szolgáltatnak az (1.4) egyenlet megoldásainak számára. Továbbá hangsúlyozni kívánjuk, hogy a disszertációnkban bemutatott eredmények napjainkban is motivációként szolgálnak az (1.4) egyenlet megoldásszámával kapcsolatos további kutatásokhoz. Az (1.4) egyenlettel kapcsolatban jónéhány friss eredményt is találunk (ld. [LeSty], [Sty], [LeScSty], [ScSt5], [LeMiy], [MiScSty]).

2. fejezet

A "legfeljebb kettő" eredmény

Ebben a fejezetben egy éles és végleges eredményt prezentálunk az (1.4) egyenlet megoldásainak a számára vonatkozóan (ld. az alábbi 2.1. tételt). Megjegyezzük, hogy ezen eredményünk a kutatások homlokterében álló témában, igen gazdag szakirodalommal rendelkező és sokak által vizsgált matematikai problémát old meg.

2.1. Tétel. *Legyenek a, b és c tetszőlegesen rögzített, relatív prím pozitív egészek, amelyekre* $\min\{a, b, c\} > 1$. *Ekkor az (1.4) egyenletnek legfeljebb két megoldása van az x, y, z pozitív egészek körében, kivéve ha az $(a, b, c) \in \{(3, 5, 2), (5, 3, 2)\}$, amely esetekben pontosan három megoldás létezik.*

A 2.1. tétel bizonyítása három fő elméleti lépésből és egy hatékony szitamódszer kifejlesztéséből áll. Megjegyezzük, hogy Scott [Sc], Hu és Le [HuLe], [HuLe2], [HuLe3] valamint Scott és Styer [ScSt4] munkáinak köszönhetően feltehetjük, hogy $\max\{a, b, c\} \leq 10^{62}$ és $c > 2$ páros.

Az első lépésben, alkalmazzuk Bugeaud [Bu2] egy éles, kétváltozós p-adikus lineáris formákra vonatkozó eredményét. A mi esetünkben a $p = 2$ választással élhettünk, hiszen c páros. Egy technikailag alapos levezetés után éles felső korlátot nyertünk az (1.4) egyenletben a z kitevőre, ahol ez a korlát lényegében kogaritmikus $\max\{a, b, c\}$-ben. Fontos kiemelni továbbá, hogy az ebben, a z kitevőre vonatkozó, Baker-típusú korlátban, végig törekedtünk arra is, hogy a felmerülő abszolút konstansok is minél élesebbek legyenek.

Ezek után feltettük, hogy az (1.4) egyenletnek van legalább három különböző

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ megoldása, azaz tekintettük az

$$\begin{cases} a^{x_1} + b^{y_1} = c^{z_1} \\ a^{x_2} + b^{y_2} = c^{z_2} \\ a^{x_3} + b^{y_3} = c^{z_3}, \end{cases} \tag{2.1}$$

egyenletrendszert, ahol az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy $z_1 \leq z_2 \leq z_3$.

A bizonyítás második lépése Hu és Le korábban igazolt hézagelvének a javítása. A javítás fő ötlete az, hogy két alkalmas kongruenciát "szimultán" vizsgálunk. Ez a módszerünk a Hu és Le-féle hézagelv egyenlőtlenségének egyik tényezőjét az egyenlet két exponenciális ismeretlenjének legnagyobb közös osztójával helyettesíti, ahol ezen legnagyobb közös osztó értéke bizonyos általánosított Fermat-egyenletekre vonatkozó ismert eredmények miatt erősen korlátozott. Ezek után, a javított hézagelv és az első lépés kombinálásával igen éles korlátokat nyerünk a $\max\{a, b, c\}$ kifejezésre.

A harmadik lépésben éles felső korlátokat vezetünk le a (2.1) egyenletrendszer első két egyenletében előforduló összes exponenciális ismeretlenre. Ez lényegében elemi módon, a három egyenlet mindkét oldalának 2-adikus értékeléseinek összehasonlításával történik. E három lépés kidolgozva és számos elemi számelméleti módszerrel kiegészítve, véges sok lehetséges értéket eredményez az első két egyenletben szereplő összes paraméterre.

Végezetül minden egyes esetben ellenőrizzük, hogy a (2.1) egyenletrendszerben az első két egyenlet fennáll-e. Ezen a ponton érdemes megjegyezni, hogy bár az ezen egyenletekben szereplő összes paraméterre levezetett korlátok viszonylag élesek, az első két egyenlet alkotta rendszer összes lehetséges megoldásának közvetlen felsorolása lehetetlen. Ezért nagyon körültekintően jártunk el, és igen hatékony szitamódszereket találtunk a (2.1) első két egyeletéből álló egyenletrendszer megoldására.
A 2.1. tételben szereplő összes számítást a MAGMA [BoCaPl] számítógépes programcsomaggal végeztük, melynek futási összideje nem haladta meg a 17 órát.

3. fejezet

Eredmények az 1.4. Sejtéssel kapcsolatban

Az eredmények ismertetése előtt bevezetünk egy egyszerű fogalmat, amely a redukált maradékosztályokon értelmezett multiplikatív rend kiterjesztése.

3.1. Definíció. *Legyen $M \geq 2$ egy pozitív egész szám. Bármely M-hez relatív prím $\mathcal{A}$ egész szám esetén az $\mathcal{A}$ modulo M vett kiterjesztett multiplikatív rendjén azt a legkisebb pozitív E egész számot értjük, amelyre $\mathcal{A}^E$ kongruens 1-gyel vagy -1-gyel modulo M.*

Az első eredményünk igazolja az 1.4. sejtést abban az esetben, amikor a és b modulo c vett kiterjesztett multiplikatív rendjei relatív prímek.

3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a és b modulo c vett kiterjesztett multiplikatív rendjei relatív prímek. Ekkor az* 1.4. *sejtés igaz, azaz az* (1.4) *egyenletnek legfeljebb egy megoldása van, kivéve, ha (a, b, c) vagy (b, a, c) megegyezik az alábbiak egyikével:* $(5, 3, 2), (13, 3, 2), (5, 2, 3)$ *és* $(7, 2, 3)$.

Ennek közvetlen következménye az alábbi:

3.3. Következmény. *Tegyük fel, hogy a és b közül legalább az egyik kongruens* 1*-gyel vagy -1-gyel modulo c. Ekkor az* (1.4) *egyenletnek legfeljebb egy megoldása van, kivéve, ha (a, b, c) vagy (b, a, c) megegyezik az alábbiak egyikével:* $(5, 3, 2), (13, 3, 2), (5, 2, 3)$ *és* $(7, 2, 3)$.

Megjegyezzük, hogy a 3.3. következmény lényegében ekvivalens a 3.2. tétellel. A 3.3. következmény felvetését az a törekvés motiválta, hogy Bennett eredményének (ld. [Be, Theorem 1.6]) egy 3-változós általánosítását nyerjük. Érdemes megjegyezni, hogy a 3.3.

következmény igazolja az 1.4. sejtést $c = 2, 3$ és 6 esetén, és egy újabb bizonyítást szolgáltat Scott nevezetes tételére [Sc, Theorem 6; $p = 2$], amely tisztán algebrai úton oldja meg a 1.4. sejtést $c = 2$ esetén.

Második eredményünk a 3.3. következménnyel együtt igazolja az 1.4. Sejtést, amennyiben $c \in \{3, 5, 17, 257, 65537\}$, azaz ha c az ismert Fermat-prímek egyike. Ez az eredmény az 1.3. tétel háromváltozós általánosításának tekinthető.

3.4. Tétel. *Ha $c \in \{3, 5, 17, 257, 65537\}$, akkor a* 1.4. *Sejtés igaz, azaz az* (1.4) *egyenletnek legfeljebb egy megoldása van, kivéve, ha (a, b) vagy (b, a) megegyezik az alábbival:*

$$\begin{cases} (5, 2), (7, 2), & \text{ha } c = 3, \\ (c - 2, 2), & \text{ha } c \in \{5, 17, 257, 65537\}. \end{cases}$$

E fejezet harmadik eredménye az 1.4. sejtést igazolja $c = 13$ esetén.

3.5. Tétel. *Ha $c = 13$, akkor az 1.4. sejtés igaz, nevezetesen az* (1.4) *egyenletnek legfeljebb egy megoldása van, kivéve, ha $(a, b) = (3, 10)$ vagy $(10, 3)$.*

A 3.5. Tétel közvetlen következménye az 1.2. sejtés is $a = 13$ esetén.

3.6. Következmény. *Ha $a = 13$, akkor az* 1.2. *sejtés igaz, nevezetesen az (1.2) egyenletnek legfeljebb egy megoldása van, kivéve a $(b, c) = (3, 10)$ esetet.*

A 3.2., 3.4., 3.5. tételek bizonyításához feltesszük, hogy az (1.4) egyenletnek van két különböző megoldása, azaz tekintjük az

$$\begin{cases} a^x + b^y = c^z \\ a^X + b^Y = c^Z \end{cases} \tag{3.1}$$

egyenletrendszert, ahol $(x, y, z) \neq (X, Y, Z)$.

A 3.2. tétel bizonyításához először megmutatjuk, hogy elegendő a tételt abban az esetben igazolni, ha a és b is kongruensek 1-gyel vagy -1-gyel modulo c. Sőt, az sem sérti az általánosságot, ha feltesszük, hogy (3.1)-ben $z \leq Z$. Ezek után, a (3.1) egyenletrendszert felhasználva, bizonyos kongruencia feltételeket vezetünk le, melyek segítségével igazoljuk, hogy (3.1) fennállása esetén

$$\gcd(a - \delta_a, b - \delta_b) \cdot \Delta \equiv 0 \pmod{C^z}, \tag{3.2}$$

ahol $C \in \{c/2, c\}$, $\delta_a, \delta_b \in \{-1, 1\}$ és $\Delta = |xY - Xy| > 0$. A bizonyítás másik fontos és mély eszköze a Baker módszer. Nevezetesen, Bugeaud (ld. [Bu]) bizonyos eredményeit

felhasználva először megmutatható, hogy $Z < K \cdot z^2$ valamilyen K abszolút konstanssal. Ezt az információt kombinálva a (3.2) oszthatósággal teljesen explicit abszolút korlátokat tudunk levezetni a c, z és $\max\{x, y\}$ lehetséges értékeire, amennyiben $\max\{x, y\} \geq 2$. Ezek után egy hatékony szitát fejlesztettünk ki és így a (3.1) egyenletrendszert teljesen meg tudjuk oldani. Megjegyezzük, hogy ezen a ponton a számítógépet és a MAGMA [BoCaPl] programcsomagot is használtuk, ami teljessé tette a 3.2. tétel bizonyítását a $\max\{x, y\} \geq 2$ esetben. Végul, az $x = y = 1$ esetben, kihasználva a (3.1) egyenletrendszer speciális alakját bizonyos további kongruenciafeltételeket igazoltunk, amit Bugeaud (ld. [Bu]) egy eredményével kombinálva és számítógépet is felhasználva sikerült igazolnunk a tételt az $x = y = 1$ esetben is.

A 3.4. tétel bizonyításához a Baker-módszert valamint Scott egy jelentős eredményét [Sc] is felhasználjuk, amely korlátozza az (3.1) egyenletrendszerben az x, y, X, Y ismeretlen kitevők paritását. Emellett a moduláris módszeren alapuló ternér diofantikus egyenletekre vonatkozó eredményeket is alkalmazunk. A 3.4. tétellel kapcsolatos összes számítást szintén a MAGMA [BoCaPl] programcsomaggal végeztük, és megjegyezzük, hogy a 3.2. és 3.4. tételekkel kapcsolatos teljes futási idő körülbelül 2 hét volt.

A 3.5. tétel bizonyításában használt egyik kulcslépés Bauer és Bennett egy, a hipergeometrikus módszeren alapuló, eredményének az alkalmazása. Nevezetesen, Bauer és Bennett [BaBe, Corollary 1.6 ; y=13] megmutatták, hogy

$$\left|\sqrt{13} - \frac{p}{q}\right| > q^{-1.53},$$

ahol p/q olyan racionális szám, amelyekre $q = 13^k$ alakú valamilyen $k > 2$ egésszel. Ezen észrevételt az Eisenstein-egészek fölött alkalmazott Baker-módszerrel valamint Bennett és Siksek [BeSi] egy közelmúltbeli, általánosított Lebesgue-Nagell egyenletekre vonatkozó egy eredményével kombinálva és számítógépes támogatást is igénybe véve sikerült a 3.5. Tételt igazolni, amennyiben $0 < \Delta = |xY - Xy|$ páratlan. Végül, ha Δ páros, akkor Scott egy eredményét [Sc] kombinálva Lucas-sorozatok bizonyos tulajdonságaival és a moduláris megközelítésen alapuló ternér diofantikus egyenletekre vonatkozó eredményekkel kapjuk a 3.5. Tétel állítását. A 3.5. Tétellel kapcsolatos teljes számítási idő nem haladta meg az 1 órát.

Végül megjegyezzük, hogy az összes felmerülő számítást egy Intel Core i7 11800H típusú processzorral és 16GB RAM-mal rendelkező laptopon végeztük.

Irodalomjegyzék

[Ba1] A. Baker, *Contributions to the theory of Diophantine equations I. On the representation of integers by binary forms*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, **263** (1967/68), 173–191.

[Ba2] A. Baker, *Bounds for the solutions of the hyperelliptic equation*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **65** (1969), 439–444.

[Ba3] A. Baker, Transcendental number theory, Cambridge University Press, London-New York, 1975.

[Ba4] A. Baker and G. Wüstholz, Logarithmic forms and Diophantine geometry, vol. 9 of New Mathematical Monographs, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[BaBe] M. Bauer and M.A. Bennett, *Applications of the hypergeometric method to the generalized Ramanujan-Nagell equation*, Ramanujan J. **6** (2002), no. 2, 209–270.

[Be] M.A. Bennett, *On some exponential equations of S. S. Pillai*, Canad. J. Math. **53** (2001), 897–922.

[Be2] M.A. Bennett, *Pillai's conjecture revisited*, J. Number Theory **98** (2003), 228–235.

[BeMiSi] M.A. Bennett, P. Mihăilescu and S. Siksek, *The generalized Fermat equation*, in Springer volume Open Problems in Mathematics, 2016, 173–205.

[BeSi] M.A. Bennett and S. Siksek, *Differences between perfect powers*: *prime power gaps*, Algebra Number Theory **17** (2023), no. 10, 1789–1846.

[BerHa] Cs. Bertók and L. Hajdu, *A Hasse-type principle for exponential diophantine equations and its applications*, Math. Comp. **85** (2016), 849–860.

[BoCaPl] W. Bosma, J. Cannon and C. Playoust, *The Magma Algebra System I: The User Language*, J. Symb. Comp. **24** (1997), 235–265.

[Bu] Y. Bugeaud, *Linear forms in two m-adic logarithms and applications to Diophantine problems*, Compositio Math. 132 (2002), 137–158.

[Bu2] Y. Bugeaud, *Linear forms in logarithms and applications*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 28, European Mathematical Society, 2017.

[BuGy] Y. Bugeaud and K. Győry, *Bounds for the solutions of unit equations*, Acta Arith. **74** (1996), 67–80.

[BuLu] Y. Bugeaud and F. Luca, *On Pillai's Diophantine equation*, New York J. Math. **12** (2006), 193–217.

[CiMi] M. Cipu and M. Mignotte, *On a conjecture on exponential Diophantine equations*, Acta Arith. **140** (2009), 251–269.

[Co] H. Cohen, Number Theory. Vol. II: Analytic and Modern Tools, Grad. Texts in Math. 240, Springer, 2007.

[Ev] J. H. Evertse, *On equations in S-units and the Thue-Mahler equation*, Invent. Math. **75** (1984), 561–584.

[EvGy] J.H. Evertse and K. Győry, *On unit equations and decomposable form equations*, J. Reine. Angew. Math. **358** (1985), 6–19.

[EvGy2] J.H. Evertse and K. Győry, *Unit Equations in Diophantine Number Theory*, Cambridge University Press, 2015.

[EvGyStTi] J.H. Evertse, K. Győry, C.L. Stewart and R. Tijdeman, *S-unit equations in two unknowns*, Invent. Math. **92** (1988), 461–477.

[EvScSch] J.H. Evertse, H.P. Schlickewei and W.M. Schmidt, *Linear equations in variables which lie in a multiplicative group*, Ann. Math. **155** (2002), 1–30.

[Gu] R.K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer, 2004.

[Gy] K. Győry, *On the number of solutions of linear equations in units of an algebraic number field*, Comment. Math. Helv. **54** (1979), 583–600.

[Gy2] K. Győry, *On the solutions of linear diophantine equations in algebraic integers of bounded norm*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **22–23** (1979–1980), 225–233.

[Gy3] K. Győry, *Résultats effectifs sur la représentation des entiers par des formes décomposables*, Kingston, Canada, 1980.

[Gy4] K. Győry, *Some recent applications of S-unit equations* Astérisque, **209** (1992), 17–38.

[GyYu] K. Győry and K. Yu, *Bounds for the solutions of S-unit equations and decomposable form equations*, Acta Arith. **123** (2006), 9–41

[Hersch] A. Herschfeld, *The equation* $2^x - 3^y = d$, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (1936), 231–234.

[Hir] N. Hirata-Kohno, *S-unit equations and integer solutions to exponential Diophantine equations*, in Analytic Number Theory and surrounding Areas 2006, Kyoto RIMS Kokyuroku, 2006, 92–97.

[HuLe] Y. Hu and M. Le, *A note on ternary purely exponential diophantine equations*, Acta Arith. **171** (2015), 173–182.

[HuLe2] Y. Hu and M. Le, *An upper bound for the number of solutions of ternary purely exponential diophantine equations*, J. Number Theory **183** (2018), 62–73.

[HuLe3] Y. Hu and M. Le, *An upper bound for the number of solutions of ternary purely exponential diophantine equations II*, Publ. Math. Debrecen **95** (2019), 335–354.

[Je] L. Jeśmanowicz, *Several remarks on Pythagorean numbers*, Wiadom. Mat. **1** (1955/56), 196–202 (in Polish).

[La]

[LeScSty] M, Le, R. Scott and R. Styer, *On a conjecture concerning the number of solutions to* $a^x + b^y = c^z$*, II.* Glas. Mat. Ser. III **59**(79) (2024), no. 2, 299–312.

[LeMiy] M. Le and T. Miyazaki, *General sharp bounds for the number of solutions to purely exponential equations with three terms* Quart. J. Math., 00 (2026), 1–21.

[LeSty] M. Le, Maohua and R. Styer, *On a conjecture concerning the number of solutions to* $a^x + b^y = c^z$. Bull. Aust. Math. Soc. **108** (2023), no. 1, 40–49.

[Lu2] F. Luca, *On the system of Diophantine equations* $a^2 + b^2 = (m^2+1)^r$ *and* $a^x + b^y = (m^2+1)^z$, Acta Arith. **153** (2012), 373–392.

[Mi] P. Mihăilescu, *Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture*, J. Reine. Angew. Math. **572** (2004), 167–195.

[Miy2] T. Miyazaki, *Contributions to some conjectures on a ternary exponential Diophantine equation*, Acta Arith. **186** (2018), 1–36.

[MiPi] T. Miyazaki and I. Pink, *Number of solutions to a special type of unit equations in two unknowns*, Amer. J. Math. **146** (2024), no. 2, 295–369.

[MiPi2] T. Miyazaki and I. Pink, *Number of solutions to a special type of unit equations in two unknowns, II*, Res. Number Theory **10** (2024), no. 2, 41 pp.

[MiPi3] T. Miyazaki and I. Pink, *Number of solutions to a special type of unit equations in two unknowns, III*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **179** (2025), no. 3, 737–784.

[MiScSty] T. Miyazaki, R. Scott and R. Styer, *Handling some Diophantine equation via Euclidean algorithm and its application to purely exponential equations* https://arxiv.org/abs/2604.18991

[Pi1] S.S. Pillai, *On the inequality* $0 < a^x - b^y \leq n$, J. Indian Math. Soc. **19** (1931), 1–11.

[Pi2] S.S. Pillai, *On* $a^x - b^y = c$, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **2** (1936), 119–122, and 215.

[Pi3] S.S. Pillai, *On* $a^x - b^y = b^Y \pm a^X$, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **8** (1944), 10–13.

[Pi4] S.S. Pillai, *On* $2^x - 3^y = 2^X + 3^Y$, Bull. Calcutta Math. Soc. **37** (1945), 18–20.

[Pólya] G. Pólya, *Zur Arithmetische Untersuchung der Polynome*, Math. Z. **1** (1918), 143–148.

[Sc] R. Scott, *On the equations* $p^x - b^y = c$ *and* $a^x + b^y = c^z$, J. Number Theory **44** (1993), 153–165.

[ScSt] R. Scott and R. Styer, *On the generalized Pillai equation* $\pm a^x \pm b^y = c$, J. Number Theory **118** (2006), 236–265.

[ScSt2] R. Scott and R. Styer, *The number of solutions to the generalized Pillai equation* $\pm ra^x \pm sb^y = c$, J. Theor. Nombres Bordeaux **25** (2013), 179–210.

[ScSt3] R. Scott and R. Styer, *Bennett's Pillai theorem with fractional bases and negative exponents allowed*, J. Theor. Nombres Bordeaux **27** (2015), 289–307.

[ScSt4] R. Scott and R. Styer, *Number of solutions to* $a^x + b^y = c^z$, Publ. Math. Debrecen **88** (2016), 131–138.

[ScSt5] R. Scott and R. Styer, *Number of solutions to* $a^x + b^y = c^z$ *with* $\gcd(a, b) > 1$. To appear in Publ. Math. Debrecen

[ShTi] T.N. Shorey and R. Tijdeman, *Exponential Diophantine Equations*, Cambridge University Press, 1986.

[Si] W. Sierpiński, *On the equation* $3^x + 4^y = 5^z$, Wiadom. Mat. **1** (1955/56), 194–195 (in Polish).

[StrTij] R.J. Stroeker, R. Tijdeman, *Diophantine Equations, Computational Methods in Number Theory, M.C. Tract 155*, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, 1982, pp. 321–369.

[Sty] R. Styer, *At most one solution to* $a^x + b^y = c^z$ *for some ranges of* a, b, c, Glas. Mat. Ser. III **59**(79) (2024), no. 2, 277–298.

[Te] N. Terai, *Applications of a lower bound for linear forms in two logarithms to exponential Diophantine equations*, Acta Arith. **90** (1999), 17–35.

[Tij] R. Tijdeman, *On the equation of Catalan.* Acta Arith. **29** (1976), 197–209.

[dW] B.M.M. De Weger, *Solving exponential Diophantine equations using lattice basis reduction algorithms*, J. Number Theory **26** (1987), 325–367.