

Opponensi vélemény

Hajdu Lajos MTA doktori disszertációjáról

Hajdu Lajos disszertációjában a számelmélet egyik területében, a diofantikus egyenletek témakörében tanulmányoz érdekes és fontos problémákat. A vizsgált kérdések Euler és Fermat munkásságáig nyúlnak vissza! Amint azt Fermat megfogalmazta, majd Euler be is bizonyította, négy négyzetszám nem alkothat számtani sorozatot. Ugyanakkor a Pell egyenletek elméletéből következik, hogy végtelen sok $1, X^2, Y^2$ alakú számtani sorozat van. Így az eredeti kérdés a négyzetszámok esetében megoldottnak tekintendő. Hajdu Lajos ennek a problémának tekinti különböző általánosításait. A probléma az általános $n \geq 3$ esetén egy X^n, Z^n, Y^n alakú számtani sorozatból kiindulva az

$$X^n + Y^n = 2Z^n \tag{1}$$

diofantikus egyenlet megoldhatóságára vezet vissza. Az $n = 3$ speciális eset már Mordell klasszikus könyvében szerepel, míg az $n = 5$ kitevő vizsgálata Dirichlet és Lebesgue bizonyos eredményéig nyúlik vissza. Az első általánosabb eredmény Dénes nevéhez fűződik ($n \leq 31$ eset). Az (1) egyenletet végül Darmon és Merrel oldotta meg teljes általánosságában.

Az alapkérdés általánosításaként egy önmagában is érdekes és szerteágazó problémakör kiindulópontjaként tekintsük az

$$x(x+d) \dots (x+(k-1)d) = by^n \tag{2}$$

diofantikus egyenletet, ahol x, d, b, y, n ismeretlen pozitív egészek, melyekre $k, n \geq 2$, $(x, d) = 1$ és $P(b) \leq k$ teljesül. Itt $P(b)$ a b legnagyobb prímosztóját jelöli. Az egyenlettel rengeteg matematikus foglalkozott, ezen a ponton csupán Fermat, Euler, Erdős, Selfridge, Obláth, Nesterenko, Shorey, Tijdeman, Saradha, Győry, Brindza, Ruzsa, Bennet, Pintér nevét említem.

Megjegyezendő, hogy (2)-ből

$$x + id = a_i x_i^n \quad (3)$$

adódik, ahol $P(a_i) \leq k$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$).

A (2) egyenletnek különlegesen fontos speciális esete például a $d = b = 1$ választás, ekkor egy szép klasszikus kérdéshez jutunk: lehet-e egymást követő természetes számok szorzata teljes hatvány? A probléma megoldása Erdős és Selfridge nevéhez fűződik. Egy másik természetes kérdés az egyenlet $d = 1$, $b = k!$ esetén történő vizsgálata. Ekkor ugyanis a (2) egyenlet az

$$\binom{x + k - 1}{k} = y^n \quad (4)$$

alakra hozható, azaz teljes hatványokat keresünk a binomiális együtthatók körében.

Hajdu Lajos elsőként a (2) egyenlet teljes megoldásának a lehetőségeit tárgyalta az $n = 2$ speciális esetben, de rögzített d mellett. Megoldása továbbfejlesztette Erdős, Selfridge, Saradha, Marszalek módszereit. Módszerének illusztrálásaként megadta a (2) egyenlet összes megoldását a $23 \leq d \leq 30$ esetben. Ezt az eljárást aztán sokan továbbfejlesztették, csupán néhány nevet említve: Saradha, Shorey, Mukhopadhyay is alkalmazta Hajdu Lajos eredményeit.

A (2) egyenlet másik fontos speciális esete az, amikor k -t rögzítjük. Az irodalomban számos ezirányú eredmény található, például Euler már említett tétele, vagy Obláth tételei. Ezek az eredmények azonban csupán speciális, fix n kitevőre vonatkoznak. Hajdu Lajos főeredménye ebben az esetben a következő: *Ha $3 < k < 35$ és $b = 1$, akkor a (2) egyenletnek nincs megoldása.* E szép tétel mellett azonban számos más fontos részeredményt is elér Hajdu Lajos, például abban a speciális esetben, amikor (2)-ben $P(b) \leq P_{k,n}$ is teljesül, ahol $P_{k,n} < k$ egy k -tól és n -től függő rögzített konstans. A megoldás-többek közt- a moduláris technika ügyes alkalmazásán múlik.

A (2) egyenlettel kapcsolatos eredmények úgy is megfogalmazhatóak, hogy olyan számtani sorozatokat keresünk, amelyek „majdnem” teljes n -edik

hatványokból állnak. Tekintsük az

$$a_0x_0^{n_0}, a_1x_1^{n_1}, \dots, a_{k-1}x_{k-1}^{n_{k-1}} \quad (5)$$

alakú számtani sorozatokat. Itt $a_i, x_i \in \mathbb{Z}$, $P(a_i) \leq P$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$), ahol P egy rögzített konstans. Hajdu Lajos ezirányban is számos kitűnő eredményt bizonyít. A disszertáció III. részében a szerző számtani sorozatokat vizsgál S -egységek összeghalmazáiban.

Hajdu Lajos disszertációjában sok szép eredményt ért el, amelyek közül több kiemelt fontosságú. A használt módszerek skálája széles és sokszínű, Hajdu Lajos a legmodernebb eszközöket alkalmazza. Munkáját az ötletesség jellemzi. A dolgozat 9 kitűnő cikk összefoglalója, a tételek érdekesek és fontosak, a bizonyítások megfogalmazása világos. A fentiek alapján a védelem kitűzését és az MTA doktori fokozat odaitélését melegen támogatom.

Budapest, 2010. 10. 11

Gyarmati Katalin
PhD