KAPCSOLT ÉS LPV RENDSZEREK IRÁNYÍTÁSA GEOMETRIAI MEGKÖZELÍTÉSBEN

Dr. Zoltán Szabó

MTA
Doktori Értekezés Tézisei

Budapest
2010

Original English Language Title:

Zoltán Szabó, Ph.D.

A GEOMETRIC APPROACH FOR THE CONTROL OF SWITCHED AND LPV SYSTEMS

1. BEVEZETÉS

A kutatási terület meghatározása

A kutatás a rendszer és irányításelmélet területén egy aktuális, a nemzetközi szakmai érdeklődés középpontjában álló területet célzott meg. Az utóbbi évtized kutatási irányaiban előtérbe kerültek nemlineáris, majd később kapcsolásokat tartalmazó hibrid rendszerosztályok amik az erőforrásokat jobban kihasználó és jobb minőségi jellemzőket garantáló szabályozókat ígérnek.

A sikeres mérnöki alkalmazásokban a lineáris időinvariáns rendszerek kezelésének elmélete és gyakorlata egy mára már kiforrott technikákat felvonultató terület lett. Azoknak a tervezési módszereknek, amelyek általános időváltozós, különösen nemlineáris rendszerekkel foglalkoznak és amelyek nemlineáris irányítástervezést tűznek ki célul, komoly elméleti és gyakorlati nehézségekkel kell megküzdeniük. Ez a tény indokolja egy kezelhető komplexitással bíró problémaosztály vizsgálatát, amely egyrészt elég tág ahhoz, hogy le tudja írni a gyakorlatban előforduló mérnöki feladatok egy jelentős részét, másrészt lehetővé teszi a már ismert és bizonyított lineáris módszerek alkalmazását.

A hibrid modelleken alapuló módszereknek és maguknak a hibrid irányításoknak egy jellemző példáját adják az úgynevezett bimodális rendszerek, amelyekben két működési mód (módus) közötti átkapcsolás történik a rendszer aktuális állapotának függvényében. Annak ellenére, hogy ez az osztály a zárt hurkú kapcsolási stratégiák legegyszerűbb esete, a kapcsolódó irányítási feladatok számos valós alkalmazásban kapnak jelentős szerepet. Ezért tanulmányozásuk kiemelkedő fontosságú.

Kutatásaim motivációs hátterét a gyakorlat által felvetett kérdések adták, legfőbb célom az azokra adható alkalmazható elméleti eljárások és gyakorlati algoritmusok kidolgozása volt. A hibrid rendszerosztályt célzó kutatások hátterében robusztus, átkonfigurálható járműdinamikai irányítások kidolgozása során felmerülő igények álltak. Az átkonfigurálás során egy több szabályozóból álló rendszer elvárt viselkedését kell megnyugtatóan garantálni.

A hatékonyan alkalmazható tervezési eljárások kidolgozására irányuló célkitűzés egyik megvalósítási módja az úgynevezett lineáris változó paraméterű (LPV) illetve kvázi-LPV (qLPV) modellezés, ami a sikeres alkalmazások miatt igen jelentős figyelmet kapott az utóbbi évek rendszer és irányításelméleti kutatásaiban. A módszer lényege az, hogy alapvetően egy lineáris rendszerstruktúrát használunk, amelynek elemei időben változó paraméterektől függnek. Ezen paraméterek lehetnek külső jelek

függvényei (időben változó LTV rendszerek), vagy lehetnek a rendszer mért kimeneteinek függvényei (qLPV rendszerek).

Az irányíthatóság és megfigyelhetőség szoros összefüggésben áll bizonyos speciális állapottér reprezentációkkal, illetve az ezeket meghatározó speciális invariáns alterekkel. A kutatás az alapvető rendszer tulajdonságokból kiindulva a lineáris geometriai rendszerelmélet eszközeit terjesztette ki a qLPV rendszerek osztályára. Az LPV rendszerek alkalmazása különösen légi és földi járművek modellezési és irányítási feladatainak megoldásában vált nagy jelentőségűvé. Ezek a rendszerek nemlineáris, időfüggő dinamikájúak amikor is az LPV modellezési paradigma lehetőséget ad a geometriai rendszerelméletnek, valamint a robusztus irányítások lineáris és affin nemlineáris módszertanának alkalmazására.

A probléma megfogalmazása, célkitűzések

Tekintsük irányított időváltozós lineáris rendszereknek egy

$$\dot{x} = A(\xi)x + B(\xi)u, \quad y = Cx$$

dinamikus állapot-egyenletekkel leírható osztályát. x az állapotváltozó, u a szabályozó bemenet (control input) y pedig a rendszer mért kimeneteit jelöli. ξ lehet egy ismeretlen, állandó vagy időben változó, paraméter (LPV rendszer), lehet egy szakaszonként konstans függvény (kapcsolt rendszer) vagy lehet egy, a végrehajtás pillanatában, ismert függvény (LTV, qLPV rendszer).

A kutatás irányait meghatározó alapvető célkitűzés volt annak vizsgálata, hogy a lineáris geometriai rendszerelmélet alkalmazhatóságának meddig terjednek a határai a qLPV modellezési paradigma esetén, továbbá annak a gyakorlat számára fontos kérdésnek megválaszolása, hogy hagyományos mátrixműveletekkel milyen feltételek mellett kezelhetőek geometriai rendszerelméleti feladatok.

A problémakör első feladata volt az alapvető rendszer tulajdonságok, mint a megfigyelhetőség és irányíthatóság feltételeinek és e feltételek ellenőrzési módszereinek kidolgozása a lehető legtágabb rendszerosztályra. A témakör jeles képviselője, R. E. Kalman többször is az MTA SZTAKI vendége volt. Ezen alkalmakkor mód nyílt a vele való konzultációra, ami ösztönzőleg hatott kutatói munkámra.

A kutatásaim középpontjába a hibrid rendszerek egy osztályát állítottam, amit lineáris kapcsoló üzemű rendszereknek neveznek. Ennek keretén belül a kapcsoló üzemű rendszerek egy fontos osztályával, a bimodális rendszerekkel – amelyeknél a kapcsolási feltétel állapot függő – foglalkoztam részletesen. Olyan bimodális irányíthatósági/megfigyelhetőségi

kritérium és a hozzá tartozó ellenőrzési módszer megadása volt a cél amely a klasszikus Kalman-féle irányíthatósági kritérium egyfajta általánosítása.

Sikerült kimutatni, hogy bizonyos feltételek mellett a feladat visszavezethető egy nyílt hurkú nemnegatív bemenetekkel irányított kapcsolási feladat irányíthatósági kérdéseinek vizsgálatára. Ezzel nagymértékben leegyszerűsödik a probléma és így az irányíthatóságra algebrai feltételeket lehet adni. Nemnegatív bemenettel irányított LTI és affin LTV/LPV rendszerek irányíthatósági és megfigyelhetőségi kérdéseivel foglalkoztam és megadtam annak algebrai, mátrixműveletekkel megfogalmazható feltételét. Ez az eset sűrűn előfordul gyakorlati problémák kezelésénél és tárgyalása sokkal összetettebb feladat mint a témakörben már jól ismert, előjel korlátozás nélküli rendszerosztály irányíthatósága.

Ezek a vizsgálatok azután továbbvezettek hibrid(kapcsolási) rendszerek (előjel)korlátos irányíthatóságának és stabilizálhatóságának vizsgálatához. A kutatásban hangsúlyos szerepet kaptak a kapcsolt rendszerek zárt körben való stabilizálhatóságának kérdései. Ebben a témakörben a stabilizálhatóság elméleti kérdésén túlmenően a legfontosabb célkitűzés olyan eljárás kidolgozása volt ami konstruktív módon képes megadni a stabilizáló irányítást, illetve az egyes módusok irányítását meghatározó állapot-visszacsatolás erősítési mátrixait.

Általában nem lehetséges az irányíthatósági és megfigyelhetőségi, valamint stabilizálhatósági kérdések előzetes eldöntése tetszőleges LTV rendszer esetén. Ami viszont reális célkitűzés, hogy olyan irányíthatósági illetve nemmegfigyelhetőségi felbontásokat konstruáljunk, amik nem függnek az időtől (paraméterektől), így előre kiszámíthatóak és a tervezés során felhasználhatóak.

A kutatás ezirányú célkitűzése az volt, hogy a klasszikus lineáris időinvariáns rendszerek elméletében ma már jól ismert, széleskörű alkalmazhatósággal bíró és az invariáns altér fogalmára épülő geometriai módszereket kiterjesszem az LPV rendszerosztályra. Ez számos alapfeladat, mint a szétcsatolásos zavarelnyomás, ismeretlen bemenetet becslő szűrő, illetve jelkövető szabályozó tervezését teszi lehetővé egy jóval tágabb rendszerosztályra.

Ezzel kapcsolatban az elmélet számára érdekes kérdésfeltevés az volt, hogy az általánosított invariáns alterek a paraméterfüggvények milyen tulajdonságai mellett őrzik meg névadó tulajdonságaikat, nevezetesen, hogy mikor lesznek tényleges irányíthatósági illetve nemmegfigyelhetőségi alterek. Bár a problémafelvetés a legtöbb esetben inkább csak elméleti jelentőséggel bír, a kérdésre adott válasz illetve az alkalmazott módszerek gyakorlati kérdések vizsgálata szempontjából sem mellékesek.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából a geometriai módszerek LPV rendszerekre való kiterjesztésének legfőbb kérdése az volt, hogy hogyan le-

het a bevezetett és ígéretesnek tűnő robusztus invariáns altereket hatékony algoritmussal kiszámítani. Ez lehetségesnek bizonyult affin paraméterfüggés esetén.

A nemlineáris irányítások tervezésében központi szerephez jutnak a rendszer invertáláshoz köthető elméleti és implementációs kérdések. Ezért a kutatás egy további fontos célkitűzése volt hatékony eljárások kidolgozása qLPV rendszerek dinamikus inverzének meghatározására.

2. A KUTATÁS MÓDSZERTANA

Tudományos előzmények

Az utóbbi évtizedben egyre nagyobb hangsúlyt kaptak a hibrid, ezen belül pedig a kapcsolt, irányításokat érintő kutatások. Ennek mind szabályozáselméleti mind pedig gyakorlati okai vannak. A kapcsolt rendszerek családja olyan több részrendszert (módust) tartalmazó dinamikát takar, amelyben minden pillanatban kizárólag csak egy módus lehet aktív és amelynél az aktuális kapcsolási szekvenciák szakaszonként sima trajektóriákat generálnak.

A kapcsolt rendszerek tulajdonságait vizsgálva elsődlegesek az alapvető rendszerelméleti kérdések, mint az irányíthatóság, megfigyelhetőség, stabilizálhatóság. Számos kutatás célozta meg ezen kérdések vizsgálatát, itt csak néhány cikket, illetve monográfiát említve meg a legfontosabb eredmények közül, [GSL01, CC03, Lib03, SG05, LA07].

A kapcsolt rendszerek irányíthatóságát érintő vizsgálatok elsősorban a tetszőleges kapcsolási szekvenciákat megengedő nyílt hurkú kapcsolásokra koncentráltak, amikor is a kitűzött cél az adott irányítást megvalósító illetve, a stabilitást garantáló kapcsolási sorozat volt, [SQ99, Alt02, SGL03]. Ezekben az esetekben az egyes módusok szabályozó bemeneteinek $\mathcal{U}$ halmazán nem feltételeztek korlátozást, azaz $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$.

Megjegyzendő, hogy számos alkalmazásban, például folyamatirányítási feladatok esetén, vannak ilyen korlátozások. Ilyenkor a bemenet nem lehet negatív, tehát a bemeneti halmaz előjelkorlátos $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m_+$. Míg az LTI rendszerek osztályának általános irányíthatósági feltételeit már megadták, [Kor80, FOA86], a kapcsolt rendszerekre vonatkozó feltételek nem voltak ismeretesek. Kutatásaim során a problémakör vizsgálatát az motiválta, hogy kiderült, bizonyos bimodális rendszerek irányíthatósága szoros összefüggésben áll előjelkorlátos bemenettel rendelkező kapcsolt rendszerek irányíthatóságával.

Ami a stabilizálhatóság kérdését illeti, aszimptotikusan irányítható[1] (asymptotically controllable), [CLS97], általános nemlineáris rendszerek esetén garantált a nem túl "patologikus" visszacsatolásos stabilizáló szabályozások létezése, [AB99, Rif02, KT04]. Ezek az eredmények azonban elméleti jellegűek és nem nyújtanak támpontot a gyakorlatban implementálható, például lineáris állapot-visszacsatolással, zárt hurkú szabályozási stratégiák megtervezésére.

Autonóm lineáris kapcsolt rendszerek osztályára kimutatták, [LA07], hogy a stabilizáló kapcsolási stratégia létezéséből következik egy úgynevezett kúpos particionáláson alapuló kapcsolási stratégia, ami zárt körben stabilizálja a rendszert. A szabályozást az állapottér egy $\mathbb{R}^n = \bigcup_{l=1}^{L} \mathcal{C}_l$ particionálása definiálja, ahol az egyes $\mathcal{C}_l$ kúpokon az A_{i_l} dinamikájú módus aktív.

A lineáris időinvariáns rendszerek elméletében az egyes állapottér felbontások és az ezeket a felbontásokat meghatározó specifikus invariáns alterek képezték az alapját annak a geometriai tervezésnek, ami a klasszikus szabályozási feladatok megoldását átláthatóvá tették és nagyban leegyszerűsítették, [Won85]. Az elmélet keretein belül bevezetett alapvető fogalmakat, úgy mint (A, B)–invariancia vagy (C, A)–invariancia, illetve a hozzájuk kapcsolódó geometriai szemléletet megpróbálták átvinni nemlineáris rendszerekre is, [Mas86, BM02].

Ezen törekvések eredményeképpen a klasszikus fogalmak és konstrukciók beágyazhatóak egy általánosabb, a nemlineáris kontextushoz kötődő elméletbe, [Isi89, Nv90]. Ezek az általános nemlineáris módszerek azonban nem túl hatékonyak gyakorlati feladatok megoldására. Egyrészt általában nehéz az algoritmusokat alkalmazni és segítségükkel kiszámítani azokat az objektumokat amelyek elengedhetetlenül szükségesek a szabályozó tervezéshez, másrészt általában nem lehet ellenőrizni az algoritmusok alkalmazhatósági feltételeit.

A geometriai módszerek alkalmazásához köthető fontos feladat rendszerek dinamikus inverzének előállítása. A dinamikus inverz egy olyan dinamikus rendszer ami a kimeneteknek, esetenként azok deriváltjainak, ismeretében előállít egy szabályozó bemenetet, amit a rendszerre alkalmazva, az adott kimeneteket kapjuk.

Lineáris időinvariáns rendszerek dinamikus inverzének előállítására [Sil69] adott algoritmust míg az általános nemlineáris rendszerek esetét [Fli86] vizsgálta meg. A nemlineáris geometriai módszerek alkalmazásával bizonyos nemlineáris rendszerosztályra [Isi89] dolgozott ki módszert a dinamikus inverz állapottérben való leírására illetve az invertálhatósági

[1] A megtévesztő elnevezés ellenére ez egy stabilitással összefüggő fogalom, ami plusz feltételt szab (a stabilizáló szabályozó bemenet egyenletes korlátosságát) az egyensúlyi pontba való irányításra.

feltételek megadására.

Több szabályozó bemenettel illetve mért kimenettel rendelkező (MIMO) rendszerek esetén a dinamikus invertálás két aspektusa jelenik meg a vizsgálatokban és a tervezésben: bal-invertálhatóság, ami az ismeretlen bemenet megfigyelhetőségével van összefüggésben és ami főként hibadetektáló szűrők tervezésénél kap szerepet, illetve a jobb-invertálhatóság, ami az előírt kimenő jeleket követő szabályozók tervezésében játszik fontos szerepet.

Az alkalmazott tudományos módszertan

Bár a bimodális, illetve előjelkorlátos szabályozott kapcsolt rendszerek irányíthatóságára kimunkált feltételek lineáris algebrai keretek között vannak megadva, a kutatás során felmerülő irányíthatósági kérdések megoldása számos terület eszköztárának az alkalmazását tette szükségessé. Az eredmények kimunkálásában mind a geometriai rendszerelmélet technikái, [Jur97, GS90, AS04], mind a nemsima analízis (nonsmooth analysis) és differenciál-tartalmazások elméletének elemei felhasználásra kerültek, [AC84, Wol90, DL92, Smi02]. Ezek a néhol technikai elméleti eszközök ötvöződtek a gyakorlati szemlélethez közelebb álló lineáris algebrai módszerekkel, [Won85].

Irányítható kapcsolt rendszerek stabilizálhatóságának eldöntése is felsőbb matematikai eszközök igénybevételét tette szükségessé. Egy általánosabb nézőpontból az itt felmerült elméleti és gyakorlati nehézségek nem meglepőek: folytonos idejű szabályozott rendszerek esetén sima szabályozási-Lyapunov (smooth control-Lyapunov) függvények megléte speciális feltételeket feltételez a kapcsolódó differenciál-tartalmazásra – a folytonos visszacsatolással való szabályozás Brockett féle feltételének kiterjesztése, [CLS98]. Másrészről a sima szabályozási Lyapunov függvény léte szorosan összefügg a visszacsatolt szabályozás robusztusságával, [LS99]. A stabilizáló stratégia megtalálásának nehézségét jól mutatja, hogy általában a kapcsolt rendszerekhez nem tartozik konvex Lyapunov függvény, [BS06].

A tisztán folytonos idejű esettel ellentétben a diszkrét idejű kapcsolt rendszerek aszimptotikus irányíthatósága maga után vonja a zárt hurkú rendszerhez tartozó a sima Lyapunov függvény létezését. Így a folytonos idejű rendszer mintavételezésével robusztus stabilizáló irányítás kapható, [KT04].

A lineáris időváltozós és a nemlineáris rendszerek trajektóriáinak viselkedése differenciál geometriai eszközökkel tárgyalható, amiben központi szerepet kapnak olyan fogalmak, mint az invariáns disztribúció és kodisztribúció, valamint az ezeknél lényegesen komplexebb objektumok, mint az

irányíthatósági illetve nemmegfigyelhetőségi disztribúciók az ezekhez tartozó és ezeket definiáló algoritmusok, [Isi89, DPI00]. Ezeknek a komplex matematikai struktúráknak adtam a mérnöki szemlélethez közelebb álló és a tervezési gyakorlatban jobban hasznosítható geometriai megfelelőjét az LPV rendszerosztályra. Az újonnan bevezetett objektumok lineáris algebrai eszközökkel állíthatók elő és bizonyos differenciál algebrai feltételek teljesülése esetén ugyanazt a szerepet töltik be mint a megfelelő disztribúciók.

A kutatás támogatottsága

Kutató munkámat az MTA SZTAKI Rendszer és Irányításelméleti Kutató Laboratóriumában, a Laboratórium fő kutatási irányvonalaihoz szorosan kapcsolódva, folytattam.

Az Országos Tudományos Kutatási Alap (OTKA) valamint a Nemzeti Kutatási és Fejlesztési Programok (NKFP) számos ponton biztosított kutatásaimhoz hátteret. "Lineáris és paraméter függő lineáris kapcsoló üzemmódú rendszerek irányítása" címen Bolyai ösztöndíjjal folytathattam kutatásaimat.

Nemzetközi szinten a Dr. Christine Belcastro által felügyelt NASA Langley grant, a National Science Foundation (NSF) illetve a Dr. Paul Losiewicz által felügyelt európai EOARD (Air Force Office of Scientific Research, Air Force Material Command, USAF) ösztöndíja támogatta a kutatói munkámat. A kutatás impaktját jól jellemzi az a SZTAKI-ban megrendezett Real Time Control and Hybrid Systems Workshop, amelyet az USA részéről az NSF, magyar részről pedig az OTKA támogatott és amelyre az NSF elnöke és európai igazgatója is ellátogatott.

3. Új tudományos eredmények

Az alábbi fejezetben a kutatás új eredményeit foglalom össze. A téziseket a fejezetcím és a vonatkozó tézisállítások, dolgozatban szereplő hivatkozási számának megadásával, valamint a kapcsolódó publikációk hivatkozásával közlöm.

3.1. Irányíthatóság

Tekintsük irányított lineáris kapcsolt rendszerek $\Sigma_{(\mathfrak{S},\mathfrak{U})}$ osztályát, azaz:

$$\dot{x}(t) = A(\sigma(t))x(t) + B(\sigma(t))u(t) \qquad (1)$$

ahol $x \in \mathbb{R}^n$ az állapotváltozó, $u \in \mathfrak{U} \subset \mathbb{R}^m$ a szabályozó bemenet, $\sigma : \mathbb{R}^+ \to \mathfrak{S}$ egy mérhető kapcsolási függvény amely az időtengelyt (pozitív valós) képezi $\mathfrak{S} = \{1, \cdots, s\}$-be – így az $A(\sigma)$, $B(\sigma)$ és $C(\sigma)$ rendszermátrixok mérhetők. A szabályozó bemenetek lehetnek tetszőlegesek $\mathfrak{U} = \mathbb{R}^m$, illetve nemnegatívak, $\mathfrak{U} = \mathbb{R}^m_+$. Legyen $\sigma = (s_1, s_2, \cdots, s_q)$ egy véges kapcsolási sorozat, míg $\tau = (t_1, t_2, \cdots t_q)$, $t_i < 0$ illetve $\mu = (u_1, u_2, \cdots, u_q)$ jelöli a hozzá tartozó kapcsolási időket illetve szabályozó bemeneteket.

Az alábbiakban a dolgozat lineáris kapcsolt rendszerek irányíthatóságára vonatkozó kutatási eredményeimet összegzem:

1. Tézis. *[3. és 4. Fejezet, Propositions 3,4,5,6, Corollary 1,2,3]*
Lineáris időinvariáns kapcsolt rendszerek irányíthatóságát tekintve a következő eredményeket fogalmaztam meg:

Teljes rangú elérhetőség (Full rank reachability) *Egy irányítható lineáris kapcsolt rendszer esetén tetszőleges (x, y) pont párt tekintve y mind teljes rangú, mind normális módon elérhető x-ből. Az állapottér bármely két pontja összeköthető ilyen módokon egyetlen rögzített kapcsolási szekvencia segítségével – ahol (σ, τ) illetve (σ, μ) rögzített.*

Véges kapcsolási szám *Irányítható lineáris kapcsolt rendszerek irányíthatók maradnak szakaszonként állandó kapcsolások megengedésével is, azaz véges kapcsolási szekvenciák használatával. Ezen szekvenciáknak van egy közös felső korlátja, ami csak a rendszer-mátrixoktól és a megengedett irányítások $\mathfrak{U}$ halmazától függ. Létezik egy véges univerzális σ kapcsolási sorozat, amelyre az $\dot{x} = A(\sigma)x + B(\sigma)u$ időváltozós lineáris rendszer irányítható.*

Nemnegatív szabályozó bemenetek *Nemnegatív szabályozó jelek esetére egy irányíthatósági feltételt adtam meg, amely a többváltozós Kalman irányíthatósági rangfeltétel egy általánosítása, és amely a rendszermátrixokat tartalmazó algebrai feltételként adott. Algoritmust dolgoztam ki az irányíthatósági feltétel ellenőrzésére.*

Az eredmények részletes kifejtését a [6, 14, 33, 34] publikációkban ismertettem.

Minden irányítható lineáris kapcsolt rendszer esetén a mintavételezett (diszkrét) rendszer is irányítható alkalmasan megválasztott mintavételezési idők használata esetén. Továbbá minden irányítható lineáris kapcsolt

rendszerhez társítható egy (nem feltétlenül egyértelmű) irányítható periodikus időváltozós lineáris rendszer. A nemegyértelműség abból adódik, hogy általában több olyan σ kapcsolási sorozat van, amelyhez tartozó elérhetőségi halmazra $\mathcal{R}_\sigma = \mathbb{R}^n$ teljesül.

A (1) egyenlet megoldási halmaza mindenütt sűrű a relaxált megoldások halmazában, azaz az $\dot{x} \in A_c(x)$ konvexifikált differenciál-tartalmazás megoldásainak halmazában, ahol $A_c(x) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i (A_i x + B_i u)$ és $\alpha_i \geq 0$ and $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$. Ennélfogva a két elérhetőségi halmaz megegyezik.

Kimutattam, hogy a következő feltételek ekvivalensek:

a) az $\dot{x} = A_i x + B_i u$, $i \in \{1, \cdots, s\}$, $\quad u \in \mathcal{U}$ lineáris kapcsolt rendszer irányítható,

b) a hozzárendelt $\dot{x} \in A_c(x)$, $x(0) = 0$ differenciál-tartalmazás irányítható,

c) létezik $k \geq 1$, hogy $A_c^k(0) = (-A)_c^k(0) = \mathbb{R}^n$.

Bevezetve a $\mathbf{co}\{V_j\}$ jelölést a $V_j \subset \mathbb{R}^n$ részhalmazok konvex burkolójára, az $A_p^k := A_c^k(0)$ és $A_m^k := (-A)_c^k(0)$ halmazok az alábbi algoritmussal kaphatók:

Általánosított Irányíthatósági Algoritmus:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{co}\{B_i \mathcal{U} \mid i = 1, \cdots, s\} \\ A_p^1 &= \mathbf{U}, \quad A_m^1 = -\mathbf{U}, \\ A_p^{k+1} &= \mathbf{co}\{A_i A_p^k + B_i \mathcal{U} \mid i = 1, \cdots, s\}, \\ A_m^{k+1} &= \mathbf{co}\{-A_i A_m^k - B_i \mathcal{U} \mid i = 1, \cdots, s\}. \end{aligned}$$

Ha a rendszer irányítható, létezik k, hogy $A_p^k = A_m^k$.

A kapcsolt rendszerek irányíthatóságával kapcsolatos eredményeket hibatűrő és átkonfigurálható járműdinamikai irányítások során felmerülő feladatok megoldása során alkalmaztam, [25, 26, 30]. A kidolgozott vizsgálati módszerek a minnesotai egyetem Aerospace and Mechanics karával együttműködésben végzett szuperkavitációs elven működő torpedó longitudinális dinamikájára vonatkozó irányítási problémáinak megoldásában is sikeresen alkalmazhatóak voltak, [4].

3.2. Stabilizálhatóság

Az $\dot{x} \in A_c(x)$ differenciál-tartalmazás azonosan zérus megoldása aszimptotikusan (gyengén) stabil, ha létezik olyan $x(t)$ megoldás, hogy bármely

$\epsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$ és $\Delta > 0$, hogy ha $||x(0)|| < \delta$ akkor $||x(t)|| < \epsilon$ fennáll minden $t \geq 0$-re és $||x(0)|| < \Delta$ esetén $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Adott irányított lineáris kapcsolt (1) rendszer esetén az *Általánosított Szakaszonként Lineáris Állapot-visszacsatolásos Stabilizálhatóságon* (Generalized Piecewise Linear Feedback Stabilizability – GPLFS) azon stabilizálást értjük, amit

- alkalmas lineáris $u_i = K_{l_i} x, \quad i \in S$ állapot-visszacsatolással és
- egy $\kappa(x) \in S$, $x \in \mathbb{R}^n$ kapcsolási szabállyal

érünk el.

2. Tézis. *[5. Fejezet, Propositions 7,8,9,10]*

Kapcsolt lineáris időinvariáns rendszerek stabilizálhatóságával kapcsolatban az alábbi eredményeket fogalmaztam meg:

Stabilizálhatóság *Irányítható kapcsolt lineáris rendszerek aszimptotikusan irányíthatóak, azaz stabilizálhatóak (zárt hurokban).*

Lineáris állapot-visszacsatolás *Irányítható kapcsolt lineáris rendszerek általánosított szakaszonként lineáris állapot-visszacsatolásos módon stabilizálhatóak.*

Idővezérelt stabilizálhatóság *Az irányítható kapcsolt lineáris rendszerek szakaszonként lineáris állapot-visszacsatolással stabilizálhatóak alkalmas periodikus kapcsolási stratégiával. A állapot-visszacsatolás erősítési mátrixait egy, az irányíthatóságot megvalósító véges kapcsolási szekvencia ismeretében felírt, lineáris mátrix egyenlőtlenség megoldása szolgáltatja.*

A tézishez kapcsolódó eredmények részletes kifejtését a [34, 39, 40, 41] publikációkban ismertettem.

Az általánosított szakaszonként lineáris állapot-visszacsatolásos módon való stabilizálhatóság bevezetését az alkalmas stabilizáló kapcsolási stratégia illetve a megfelelő, stabilizálást megvalósító, visszacsatolás erősítési mátrixai meghatározásának szétválasztása indokolja. Az elgondolás lényege az, hogy alkalmas állapot-visszacsatolásokkal az eredeti irányított kapcsolt rendszer stabilizálását egy – esetenként az eredetinél több módust (elemi rendszert) tartalmazó – stabilizálható, lineáris autonóm kapcsolt rendszer stabilizálására vezessük vissza.

Kimutattam, hogy az irányítható és bizonytalanságot is tartalmazó diszkrét idejű $x_{k+1} = A_i(\Delta)x_k + B_i(\Delta)u_k$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ kapcsolt rendszer

esetén, ahol a $\sigma = (s_1, \cdots, s_M)$ kapcsolási sorozat olyan, hogy a Δ bizonytalanságtól függetlenül $\mathcal{R}_\sigma = \mathbb{R}^n$, létezik egy pozitív definit S mátrix, nemszinguláris V_i, illetve F_i mátrixok úgy, hogy az alábbi lineáris mátrixegyenlőtlenség megoldható:

$$\begin{bmatrix} S & A_{s_M} V_M + B_{s_M} F_M & \dots & 0 & 0 \\ (\bullet)^T & V_M + V_M^T & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V_2 + V_2^T & A_{s_1} V_M + B_{s_1} F_1 \\ 0 & 0 & \dots & (\bullet)^T & V_1 + V_1^T - S \end{bmatrix} > 0$$

A rendszer a σ kapcsolási szekvencia által meghatározott periodikus kapcsolással és a $K_i = F_i V_i^{-1}$, $i = 1, \cdots, M$ erősítési mátrixok által adott állapot-visszacsatolás alkalmazásával stabilizálható.

A kapcsolt rendszerek stabilizálhatóságával kapcsolatos eredményeket átkonfigurálható járműdinamikai szabályozók stabilitási tulajdonságainak vizsgálatára, illetve a szuperkavitációs torpedó stabilitási vizsgálatában alkalmaztam, [11, 28, 29].

3.3. LPV rendszerek geometriai elmélete: robusztus invariáns alterek

A lineáris időinvariáns rendszerek elméletében az egyes állapottér felbontások és az ezeket meghatározó specifikus invariáns alterek bevezetése nagyban leegyszerűsítette és átláthatóvá tette számos klasszikus szabályozási feladat megoldását. Ebből kiindulva és az irányíthatósági vizsgálatokban használt eszközökre alapozva LPV rendszerek vizsgálatának geometriai megközelítését dolgoztam ki.

***3. Tézis.** [**6. és 7. Fejezet, Lemma 4, Proposition 11,12,13,14,15,16, AISAL, AISAK, ABISA, CAISA, CSA, USA Algoritmusok**] A lineáris időinvariáns rendszerekhez köthető klasszikus invariáns altér fogalmának kiterjesztését adtam meg lineáris változó paraméterű (LPV) rendszerekre. Abban az esetben, amikor a paraméterfüggés affin, hatékony algoritmusokat dolgoztam ki az egyes, alkalmazásokban gyakran előforduló, fontos robusztus invariáns alterek kiszámítására.*

A tézishez tartozó eredmények a [1, 2, 13, 36] publikációimban lettek részletesen kifejtve.

Invariáns alterek: LPV rendszerek esetén a $\mathcal{V}$ alteret az $A(\rho)$ lineáris családra nézve változó-paraméterű (robusztus) invariáns altérnek (vagy röviden $\mathcal{A}$-invariáns altérnek) nevezzük, ha

$$A(\rho)\mathcal{V} \subset \mathcal{V} \quad \text{minden } \rho \in \mathcal{P} \text{ esetén.}$$

Továbbá, a $\mathcal{B}(\rho) = \mathbf{Im}\, B(\rho)$ jelöléssel, a $\mathcal{V}$ alteret változó-paraméterű (A, B)–invariáns altérnek (azaz röviden $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-invariáns altérnek) nevezzük, ha minden $\rho \in \mathcal{P}$-re az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

$$A(\rho)\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \mathcal{B}(\rho);$$

vagy, létezik $F \circ \rho : [0, T] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ úgy, hogy:

$$(A(\rho) + B(\rho)F(\rho))\mathcal{V} \subset \mathcal{V}.$$

A duális fogalom a következőképp definiálható: ha $\mathcal{C}(\rho)$ jelöli $\mathbf{Ker}\, C(\rho)$-t, a $\mathcal{W}$ alteret változó-paraméterű (C, A)-invariáns altérnek (röviden $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$-invariáns altér) nevezzük, ha minden $\rho \in \mathcal{P}$ esetén teljesül az alábbi ekvivalens feltételek egyike:

$$A(\rho)(\mathcal{W} \cap \mathcal{C}(\rho)) \subset \mathcal{W};$$

vagy, létezik $G \circ \rho : [0, T] \to \mathbb{R}^{n\times p}$ leképezés úgy, hogy:

$$(A(\rho) + G(\rho)C(\rho))\mathcal{W} \subset \mathcal{W}.$$

A fenti definíciók a qLPV rendszerekre is alkalmazhatóak.

Konstans B mátrixszal adott LPV rendszerek esetén a klasszikus irányíthatósági altér (controllability subspace) következő kiterjesztése adható meg: $\mathcal{R}$ egy változó-paraméterű irányíthatósági altér, amennyiben létezik egy konstans K mátrix és egy változó-paraméterű $F : [0, T] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix, hogy

$$\mathcal{R} = \langle \mathcal{A} + B\mathcal{F} | \mathbf{Im}\, BK \rangle,$$

ahol a $\mathcal{K}$ altérben levő maximális $\mathcal{A}$-invariáns alteret $\langle \mathcal{K} | A(\rho) \rangle$ jelöli. Az adott $\mathcal{K}$ altérben levő irányíthatósági alterek családjának van egy legnagyobb $\mathcal{R}^*$ eleme.

A változó-paraméterű irányíthatósági altérhez tartozó duális fogalom a következő: $\mathcal{S}$ egy LPV rendszerhez tartozó nemmegfigyelhető altér (unobservability subspace), ha létezik egy konstans H mátrix és egy változó-paraméterű $G : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^{n\times p}$ mátrix úgy, hogy:

$$\mathcal{S} = \langle \mathbf{Ker}\, HC | A(\rho) + G(\rho)C \rangle.$$

Az adott $\mathcal{L}$ alteret tartalmazó nemmegfigyelhető alterek családjának van egy legkisebb $\mathcal{S}_*$ eleme.

Invariáns altér algoritmusok: Gyakorlati szempontból nagyon lényeges, hogy egy adott LPV rendszer esetén az előbb bevezetett robusztus altereket véges számú feltétellel jellemezzük. Az $A(\rho)$ mátrix affin paraméter változását feltételezve a következő algoritmusokkal adhatók meg a $\mathcal{K}$ altérben levő maximális illetve az $\mathcal{L}$ alteret tartalmazó minimális $\mathcal{A}$-invariáns altér: ($\mathcal{A}$-*I*nvariant *S*ubspace *A*lgorithm over $\mathcal{L}$)

$$\mathcal{AISA}\mathcal{L}: \quad \mathcal{V}_0 = \mathcal{L} \quad \mathcal{V}_{k+1} = \mathcal{L} + \sum_{i=0}^{N} A_i \mathcal{V}_k, \qquad k \geq 0,$$
$$\mathcal{V}^* = \lim_{k\to\infty} \mathcal{V}_k.$$

Az algoritmus véges lépésben leáll, azaz $\mathcal{V}^* = \mathcal{V}_{n-1}$. Az időinvariáns eset mintájára a $\mathcal{V}^*$ alteret $\langle \mathcal{A}|\mathcal{L}\rangle$ jelöli.

A duális algoritmus a következő ($\mathcal{A}$-*I*nvariant *S*ubspace *A*lgorithm in $\mathcal{K}$):

$$\mathcal{AISA}\mathcal{K}: \quad \mathcal{W}_0 = \mathcal{K}, \quad \mathcal{W}_{k+1} = \mathcal{K} \cap \bigcap_{i=0}^{N} A_i^{-1}\mathcal{W}_k, \qquad k \geq 0,$$
$$\mathcal{W}^* = \lim_{k\to\infty} \mathcal{W}_k,$$

ahol $A_i^{-1}\mathcal{W}_k$ jelöli $\mathcal{W}_k$ inverz képét az A_i^{-1} leképezésre nézve. A $\mathcal{W}^*$ alteret $\langle \mathcal{K}|\mathcal{A}\rangle$ jelöli.

A $\mathcal{K}$ altérben levő maximális $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-invariáns alteret az alábbi algoritmussal lehet meghatározni ($(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-*I*nvariant *S*ubspace *A*lgorithm):

$$\mathcal{AB ISA}: \quad \mathcal{V}_0 = \mathcal{K}, \quad \mathcal{V}_{k+1} = \mathcal{K} \cap \bigcap_{i=0}^{N} A_i^{-1}(\mathcal{V}_k + \mathcal{B}).$$

Az iteráció stacionárius halmaza $\mathcal{V}^*$ amit legfeljebb n lépésben megapunk. Az adott $\mathcal{L}$ alteret tartalmazó legkisebb $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$-invariáns altér kiszámítására szolgál a következő algoritmus – $\mathcal{C} = \mathbf{Ker}\, C$ – ($(\mathcal{C}, \mathcal{A})$-*I*nvariant *S*ubspace *A*lgorithm) ami nem más, mint $\mathcal{AB ISA}$ duálisa:

$$\mathcal{C AISA} \quad \mathcal{W}_0 = \mathcal{L}, \quad \mathcal{W}_{k+1} = \mathcal{L} + \sum_{i=0}^{N} A_i(\mathcal{W}_k \cap \mathcal{C}).$$

Az algoritmus által véges lépésben szolgáltatott stacionárius halmazt $\mathcal{W}_*$-vel jelöljük.

Az $\mathcal{L}$ alteret tartalmazó változó-paraméterű nem-megfigyelhető alterek családjának minimális eleme az alábbi algoritmussal számítható ki

($\mathcal{U}$nobservability $\mathcal{S}$ubspace $\mathcal{A}$lgorithm ($\mathcal{USA}$)):

$$\mathcal{USA}: \qquad \mathcal{S}_0 = \mathcal{X}, \quad \mathcal{S}_{k+1} = \mathcal{W}_* + \left(\bigcap_{i=0}^{N} A_i^{-1} \mathcal{S}_k \cap \mathcal{C} \right)$$
$$\mathcal{S}_* = \lim_{k \to \infty} \mathcal{S}_k$$

ahol $\mathcal{W}_*$-t a $\mathcal{CAISA}$ algoritmussal kapjuk.

Dualitással kaphatjuk meg a változó-paraméterű irányíthatósági altér algoritmust ($\mathcal{C}$ontrollability $\mathcal{S}$ubspace $\mathcal{A}$lgorithm).

Az eredmények felhasználásával klasszikus irányítási és detektálási alapfeladatok megoldására adtam javaslatot, például longitudinális repülésdinamikához terveztem LPV hibadetektáló algoritmust, [7, 12, 32].

3.4. LPV rendszerek dinamikus invertálása

Az alábbiakban az m számú bemenettel és p kimenettel rendelkező

$$\dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

LPV rendszerek affin osztályával foglalkozunk, ahol

$$A(\rho(t)) = A_0 + \rho_1(t)A_1 + \ldots + \rho_N(t)A_N,$$
$$B(\rho(t)) = B_0 + \rho_1(t)B_1 + \ldots + \rho_N(t)B_N,$$

és az állapotok száma n.

Feltesszük, hogy az egyes ρ_i paraméterek adott $\rho_i(t) \in [\underline{\rho}_i, \overline{\rho}_i]$ értékek között változhatnak. A lehetséges $(\rho_1(t), \cdots, \rho_N(t))$, $t \in [0, T]$, paraméterek halmazát jelölje $\mathcal{P}$.

4. Tézis. *[* ***9. Fejezet, Proposition 20,21,22****] Eljárást dolgoztam ki affin paraméterezéssel adott qLPV rendszerek dinamikus inverzének meghatározására. Erre alapozva ismeretlen bemenet becslésére szűrőt, illetve adott jel követését megvalósító szabályozót terveztem.*

A tézisponthoz tartozó eredmények és alkalmazások a [3, 15, 19, 20, 37] publikációimban vannak részletesen kifejtve.

A LPV rendszer bal-invertálható, ha

$$\mathcal{V}^* \cap \mathcal{B} = 0,$$

illetve jobb-invertálható, ha

$$\mathcal{S}_* + \mathcal{V}^* = \mathcal{X},$$

ahol $\mathcal{V}^*$ a $\mathcal{C} = \mathbf{Ker}\ C$ altérben levő maximális $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-invariáns altér, míg a $\mathcal{B} = \mathbf{Im}\ B$ alteret tartalmazó minimális $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$-invariáns altér $\mathcal{S}_*$.

Ha az invertálási feltételek teljesülnek, a dinamikus inverz megkonstruálásához választható egy

$$z = Tx, \text{ ahol } \quad T = \begin{bmatrix} \mathcal{V}^{*\perp} \\ \Lambda \end{bmatrix}, \ \Lambda \subset \mathcal{B}^{\perp}$$

állapottér-transzformáció.

Ennek megfelelően a dinamikus egyenletek:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_{11}(\rho(t))\xi + A_{12}(\rho(t))\eta + \bar{B}(\rho(t))u \\ \dot{\eta} &= A_{21}(\rho(t))\xi + A_{22}(\rho(t))\eta \\ y &= \bar{C}\xi \end{aligned}$$

szerint bomlanak fel. Alkalmas

$$u = F_2(\rho(t))\eta + v$$

állapot-visszacsatolással, melyre a $\mathcal{V}^*$ altér $(\mathcal{A} + \mathcal{B}F, \mathcal{B})$ invariáns lesz, az alábbi rendszer adódik:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_{11}(\rho(t))\xi + \bar{B}(\rho(t))v \\ y &= \bar{C}\xi. \end{aligned}$$

$\mathcal{V}^*$ maximalitása garantálja, hogy ξ és v az y és alkalmas deriváltjainak segítségével kifejezhető. A $\tilde{y} = \mathcal{S}\xi$ relációval, ahol

$$\tilde{y} = \left[y_1, \cdots, y_1^{(\gamma_1)}, \cdots, y_p, \cdots, y_p^{(\gamma_p)} \right]^T$$

a következő kifejezés adódik: $v = \bar{B}^{-1}\mathcal{S}^{-1}(\dot{\tilde{y}} - \dot{\mathcal{S}}\mathcal{S}^{-1}\tilde{y} - \mathcal{S}\bar{A}_{11}\mathcal{S}^{-1}\tilde{y})$, azaz

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A_{22}\eta + A_{21}\xi \\ u &= F_2\eta + \bar{B}^{-1}\mathcal{S}^{-1}(\dot{\tilde{y}} - (\dot{\mathcal{S}}\mathcal{S}^{-1} + \mathcal{S}A_{11}\mathcal{S}^{-1})\tilde{y}). \end{aligned}$$

Egy előírt y_d kimenet követése az alábbi szabályozási sémával valósítható meg:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\eta}} &= A_{22}\bar{\eta} + A_{21}\mathcal{S}^{-1}\tilde{y}_d + \Gamma_1\tilde{e} \\ \bar{u} &= F_2\bar{\eta} + \lambda(\tilde{y}_d) + \Gamma_2\tilde{e}, \end{aligned}$$

ahol $\lambda(\tilde{y}_d) = \bar{B}^{\{-1\}}\mathcal{S}^{-1}(\dot{\tilde{y}} - \dot{\mathcal{S}}\mathcal{S}^{-1}\tilde{y} - \mathcal{S}A_{11}\mathcal{S}^{-1}\tilde{y})$ és ahol Γ_1, Γ_2 alkalmas (változó paraméterű) erősítési mátrixok, amiket a szabályozó minőségi tulajdonságait javítandó választhatunk meg.

A dinamikus inverzión alapuló módszerek alkalmazásaként repülőgépekhez hibadetektáló szűrőket terveztem. Az inverzión alapuló jelkövető szabályozást aktív felfüggesztési rendszerek tervezésében alkalmaztam illetve irányítástervezési módszert dolgoztam ki, ami a paksi atomerőmű felújított blokkjainak primerköri nyomásszabályozását valósítja meg, [21, 22, 23, 24, 38, 42].

3.5. Bimodális rendszerek

Egy lineáris *bimodális rendszer* egy két működési módból álló, kapcsolt rendszer, ahol a kapcsolási szabályt az állapottérnek egy $\mathcal{C}$ hipersíkkal történő felosztása során keletkező két része határozza meg, azaz

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A_1x(t) + B_1u(t) & \text{ha } x \in \mathcal{C}_-, \\ A_2x(t) + B_2u(t) & \text{ha } x \in \mathcal{C}_+. \end{cases}$$

Egy t_0 pillanatban a rendszer kezdeti állapota $x_0 = x(t_0)$ és kezdeti módusa $s_0 \in \{1, 2\}$. Az $y_s = Cx$ kimenet határozza meg a $\mathcal{C} = \mathbf{Ker}\, C = \{x \mid Cx = 0\}$ hipersíkot, így $\mathcal{C}_+ = \{\, x \mid Cx \geq 0 \,\}$ illetve $\mathcal{C}_- = \{\, x \mid Cx \leq 0 \,\}$. Az állapot-mátrixok adott, kompatibilis méretű konstans mátrixok és B_1, B_2 teljes oszlop rangú.

***5. Tézis.** [8. Fejezet, Lemma 5, Proposition 17,18, 19]*
Irányíthatósági dekompozíciót adtam meg bimodális rendszerek azon osztályára, melyek jól meghatározott relatív fokszámmal (relative degree) rendelkeznek. Kimutattam, hogy ezen rendszerek akkor és csak akkor irányíthatóak, ha egy specifikus, az irányíthatósági felbontás során létrejövő alrendszer irányítható. Ez utóbbi feltétel ekvivalens egy nemnegatív szabályozó bemenettel irányított kapcsolt rendszer irányíthatóságával. Kimutattam, hogy ha a bimodális rendszer irányítható, akkor aszimptotikusan stabilizálható.

A tézisponthoz köthető eredményeket a [5, 8, 9, 10] publikációkban részleteztem.

Tegyük fel, hogy a rendszer y_s-hez és az i-edik módushoz tartozó relatív fokszáma r_i, azaz $y_s^{(k)} = CA_i^k x$, $k < r_i$ és $y_s^{(r_i)} = CA_i^{r_i}x + CA_i^{r_i-1}B_iu$, ahol $CA_i^{r_i-1}B_i \neq 0$. Ha $r_1 = r_2 = r$ – ekkor a rendszer mindig értelmes

(well-posed). Alkalmas bázisban a bimodális rendszer állapotegyenletei az alábbiak szerint bonthatók fel:

$$\dot{\eta} = \begin{cases} P_1\eta + R_1 y_s + Q_1\tilde{u}_1 & \text{ha} \quad y_s \geq 0 \\ P_2\eta + R_2 y_s + Q_2\tilde{u}_2 & \text{ha} \quad y_s \leq 0 \end{cases}$$
$$\dot{\xi} = \begin{cases} A_r\xi + B_r v_1 & \text{if} \quad y_s \geq 0 \\ A_r\xi + B_r v_2 & \text{if} \quad y_s \leq 0 \end{cases}.$$

Alkalmas állapot-transzformációval illetve állapot-visszacsatolással a rendszer a következő alakra hozható:

$$\dot{\eta}_1 = \begin{cases} P_{1,1}\eta_1 + \tilde{R}_1 y_s + \tilde{Q}_1 u_1 & \text{ha} \quad y_s \geq 0 \\ P_{2,1}\eta_1 + \tilde{R}_2 y_s + \tilde{Q}_2 u_2 & \text{ha} \quad y_s \leq 0 \end{cases}, \tag{2}$$

$$\dot{\eta}_2 = \begin{cases} P_{1,2}\eta_2 + R_1 y_s & \text{if} \quad y_s \geq 0 \\ P_{2,2}\eta_2 + R_2 y_s & \text{if} \quad y_s \leq 0 \end{cases}, \tag{3}$$

$$\dot{y}_s = v, \tag{4}$$

ahol az (2) alrendszer irányítható $\mathcal{C}$-n állapotfüggetlen (nyílt hurkú) kapcsolásokkal. Ez a felbontás egy irányíthatósági dekompozíciónak tekinthető, ahol az eredeti rendszer irányíthatósága az (3) és (4) alrendszerek irányíthatóságára vezetődik vissza. A redukált (3), (4) bimodális rendszer

$$\dot{\eta}_2 = P_{i,2}\eta_2 + \bar{R}_{i,2} w, \quad i \in \{ 1, 2 \}, \quad w \geq 0 \tag{5}$$

dinamikus kiterjesztéseként fogható fel.

Amennyiben az η_0 és η_f pontok összeköthetők a $\dot{\eta} = P\eta + Rw$ lineáris rendszer egy trajektóriájával, ahol $w \geq 0$ akkor, adott r relatív fokot feltételezve, ezek a pontok összeköthetők egy sima trajektóriával amit egy sima nemnegatív $\omega \geq 0$ szabályozás indukál, ami a végpontokban $k = 0, 1, \cdots, r$-re kielégíti az $\omega^{(k)}(0) = \omega_{0,k}$ és $\omega^{(k)}(T_f) = \omega_{T_f,k}$ feltételeket. Így (3),(4) irányíthatósága ekvivalens (5) irányíthatóságával. Ezen túlmenően a (3), (4) bimodális rendszer akkor és csak akkor stabilizálható ha a megfelelő nemnegatív szabályozó jelekkel rendelkező nyílt-hurkú kapcsolt (5) rendszer stabilizálható.

A módusokban folytonos dinamikájú, azaz $P_1 = P_2 = P$,

$$\dot{x} = Px + Rw \quad w \in \mathbb{R}^2_+$$

bimodális rendszer akkor és csak akkor stabilizálható ha a megfelelő előjel korláttól mentes rendszer stabilizálható, továbbá P^T minden nemnegatív sajátértékéhez tartozó valós v sajátvektor esetén $R^T v$ rendelkezik mind pozitív mind negatív komponenssel.

A bimodális rendszerek viselkedését érintő kutatások eredményei olyan csúcstechnológiai alkalmazásokban hasznosultak, mint a minnesotai egyetem Aerospace and Mechanics tanszékével közös munka keretén belül egy szuperkavitációs torpedó irányítása vagy egy aktív felfüggesztési rendszer aktuátorának hibatűrő szabályozása, [9, 10, 29, 31].

4. Az eredmények értelmezése és gyakorlati hasznosítása

A feldolgozott ismeretek, a kidolgozott módszerek és az elért eredmények a szakma élvonalába tartozó korszerű és időszerű területet ölelnek fel. A kutatás témája teljes mértékben illeszkedik abba az utóbbi időben egyre kiterjedtebb vizsgálati irányba, ami nemlineáris hibrid rendszerek modellezésével illetve irányítási feladataival foglalkozik. A kutatás az alapvető rendszertulajdonságok, mint a R.E. Kalman által a lineáris rendszerekre megfogalmazott megfigyelhetőség és irányíthatóság, lehetséges megfogalmazását és a kritériumait kiterjesztette a kapcsoló üzemmódú rendszerek egy adott osztályára, a bimodális rendszerekre. A bimodális kapcsoló üzemmódú rendszerek tulajdonsága, hogy állapottérben megadott feltételek szerinti viselkedésüket két különböző dinamika írja le. A kutatás egy fontos eredménye, hogy ezen rendszerek elérhetőségi és irányíthatósági kérdései visszavezethetők a pozitív irányítójellel gerjesztett rendszerek irányítási problémáira. Ennek az ellenőrzésére szolgáló geometriai rendszerelméleti kritériumokat valamint a bimodális rendszerek irányíthatóságának Kalman-féle rangfeltételeit dolgoztam ki.

A hibrid rendszerek irányítását és stabilizálhatóságát érintő kutatási célkitűzéseket gyakorlati feladatok motiválták. Bár az elért eredmények alapkutatás jellegűek, irányítási rendszerek tervezési módszertanában sikeresen alkalmazhatók, mint azt a közleményekben szereplő számos alkalmazási példa illusztrálja. Ennek alátámasztására itt csak a szuperkavitációs elven működő torpedó longitudinális dinamikájának modellezése és irányítása álljon. E kutatás a University of Minnesota Aerospace and Mechanics tanszékével közös munka keretén belül az Office of Naval Research által támogatott "Stability and Control of Very High Speed Cavity Running Bodies" projektben került sor, [4, 8, 9, 10].

A kutatás során általánosítottam a lineáris idő-invariáns rendszereknél ismert invariáns alterek – irányítható illetve nem-megfigyelhető alterek – fogalmait LPV rendszerosztályra. A lineáris rendszerekre már ismert algoritmusokat általánosítva kidolgoztam a változó-paraméterű invariáns

altér-családok kiszámítási algoritmusait affin paraméterezés esetére. Az eredmények felhasználásával több klasszikus irányítási és detektálási alapfeladat megoldására adtam javaslatot. Tervezési algoritmusokat dolgoztam ki, melyeknél a stabilitás és a robusztusság biztosítása lineáris mátrix egyenlőtlenségek (LMI) alakjában fogalmazhatók meg, amelyek megoldására az utóbbi években kidolgozott belső pontos konvex optimalizálási algoritmusok hatékonyan alkalmasak.

Az elért eredmények a gyakorlat által felvetett kérdésekkel foglalkoznak és azokra adnak alkalmazható megoldásokat: mind elméleti eljárásokat, mind gyakorlati algoritmusokat. A kutatás új módszereket tárt fel, melyekkel hatékonyabb, a gyakorlati feladatok által támasztott igényeket jobban kielégítő irányítások és hibatűrő rendszerek jönnek létre. Az eredmények gyakorlati hasznosítása a kurrens technológiai fejlődés tükrében ítélhető meg. A kutatás az LPV modell-osztályra általánosította a lineáris irányítástechnika egyes eredményeit, amelyeknek köszönhetően ma kereskedelmi forgalomban is elérhető szoftverek segítségével is tervezhetők szabályozók az LMI és belső pontos módszerek használatával.

Az elméleti eredményeket és algoritmusokat járművek irányítási feladatainak megoldására alkalmazhatóak, példaként fékezési és sávelhagyási, illetve a borulási szituációkban alkalmazható új LPV alapú irányítási stratégiákat dolgoztam ki és vizsgáltam. A kidolgozott módszerek segítségével repülőgépekhez (Boeing 747) dinamikus inverz alapú szabályozás, valamint az LPV hibadetektáló szűrők alkalmazásával a longitudinális repülésdinamikához átkonfiguráló irányítási rendszer tervezhető, [7, 38, 36].

Dinamikus inverzión alapuló irányítástervezési módszert dolgoztam ki LPV rendszerekre. Ennek felhasználásával történt a Paksi Atomerőmű primerköri nyomásszabályzójának tervezése, amely megvalósításra került és ma is működik mindegyik blokkban, [21, 42, 47]. Az új szabályozó algoritmussal sikerült a korábban 1 bar-os tartományban ingadozó primerköri nyomást stabilizálni, ami így csak egy negyed bar-on belül marad. A kialakított szabályozási sémával sikerült megmutatni, hogy a nagy megbízhatóságú matematikai modellek valamint a modern szabályozótervezési módszerek együttes alkalmazásával olyan minőségi javulás érhető el, amely alapvető technológiaváltás nélkül is lehetővé teszi a rendszer hatékonyabb működtetését.

Mivel a kutatás az irányításelmélet alapvető témaköreit érinti (irányíthatóság, geometriai rendszerelmélet) a dolgozatban megfogalmazott elméleti és alkalmazási eredmények közvetlenül felhasználhatók az oktatási munka során is, mivel közvetlenül példázzák az elvontabb elméleti fogalmak és módszerek hatását a gyakorlati probléma megoldásra.

HIVATKOZÁSOK

[AB99] F. Ancona and A. Bressan. Patchy vector fields and asymptotic stabilization. *ESAIM-Control, Optimization and Calculus of Variations*, 4:445–471, 1999.

[AC84] J.P. Aubin and A. Cellina. *Differential Inclusions*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Alt02] C. Altafini. The reachable set of a linear endogenous switching system. *Systems & Control Letters*, 47(4):343–353, 2002.

[AS04] A. A. Agrachev and Y. L. Sachkov. *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, volume 87 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer, 2004.

[BM02] G. B. Basile and G. Marro. *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 2002.

[BS06] F. Blanchini and C. Savorgnan. Stabilizability of switched linear systems does not imply the existence of convex Lyapunov functions. In *Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, California*, pages 119–124, 2006.

[CC03] Daizhan Cheng and Han-Fu Chen. Accessibility of switched linear systems. In *Proceedings. 42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003, Maui, Hawaii*, volume 6, pages 5759–5764, 2003.

[CLS98] F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, and R.J. Stern. Asymptotic stability and smooth Lyapunov functions. *Journal of Differential Equations*, 149:69–114, 1998.

[CLS97] F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, E. Sontag, and A. Subbotin. Asymptotic controllability implies feedback stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42:1394–1407, 1997.

[DL92] A. L. Dontchev and F. Lempio. Difference methods for differential inclusions: a survey. *SIAM Review*, 34(2):263–294, 1992.

[DPI00] C. De Persis and A. Isidori. On the observability codistributions of a nonlinear system. *Systems & Control Letters*, 40(5):297–304, 2000.

[Fli86] M Fliess. A note on the invertibility of nonlinear input-output differential systems. *Systems & Control Letters*, 8:147–151, 1986.

[FOA86] H. Frankowska, C. Olech, and J. P. Aubin. Controllability of convex processes. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24(6):1192–1211, 1986.

[GS90] K. A. Grasse and H. J. Sussmann. *Nonlinear Controllability and Optimal Control*, chapter Global controllability by nice controls, pages 33–79. Dekker, New York, 1990.

[GSL01] S.S. Ge, Zhendong Sun, and T.H. Lee. Reachability and controllability of switched linear systems. In *Proceedings of the American Control Conference, Arlington, VA*, volume 3, pages 1898–1903, 2001.

[Isi89] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 1989.

[Jur97] V. Jurdjevic. *Geometric Control Theory*. Cambridge University Press, 1997.

[Kor80] V. I. Korobov. A geometric criterion of local controllability of dynamical systems in the presence of constraints on the control. *Differential Equations*, 15:1136–1142, 1980.

[KT04] C. Kellett and A. Teel. Discrete–time asymptotic controllability implies smooth control–Lyapunov function. *Systems & Control Letters*, 52:349–359, 2004.

[LA07] H. Lin and P.J. Antsaklis. Switching stabilizability for continuous–time uncertain switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(4):633–646, 2007.

[Lib03] D. Liberzon. *Switching in Systems and Control*. Birkhauser, Boston, MA, 2003.

[LJ01] G. Looye and H. G. Joos. Design of robust dynamic inversion control laws using multi-objective optimization. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Montreal, Canada*, 2001.

[LS99] Y.S. Ledyaev and E.D. Sontag. A Lyapunov characterization of robust stabilization. *Nonlinear Analalysis*, 37(7, Ser. A: Theory Methods):813–840, 1999.

[Mas86] M.A. Massoumnia. A geometric approach to the sinthesys of failure detection filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31:839–846, 1986.

[MEZ96] B. Morton, D. Enns, and B. Y. Zhang. Stability of dynamic inversion control laws applied to nonlinear aircraft pitch-axis models. *International Journal on Control*, 63:1–26, 1996.

[Nv90] Henk Nijmeijer and Arjan J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, 1990.

[Rif02] L. Rifford. Semiconcave control-Lyapunov functions and stabilizing feedbacks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(3):659–681, 2002.

[SG05] Z. Sun and S. S. Ge. *Switched Linear Systems. Control and Design*. Springer, 2005.

[SGL03] Z. Sun, S. S. Ge, and T. H. Lee. Controllability and reachability criteria for switched linear systems. *Automatica*, 38(5):775–786, 2003.

[Sil69] L. M. Silverman. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14:270–276, 1969.

[Smi02] G. V. Smirnov. *Introduction to the theory of differential inclusions*, volume 41 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society. Providence, RI, 2002.

[SQ99] E.D. Sontag and Y. Qiao. Further results on controllability of recurrent neural networks. *Systems & Control Letters*, 36:121–129, 1999.

[Wol90] P. R. Wolenski. The exponential formula for the reachable set of a Lipschitz differential inclusion. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 28(5):1148–1161, 1990.

[Won85] W. M. Wonham. *Linear Multivariable Control - A Geometric Approach*. Springer-Verlag, New York (Third Edition), 1985.

TÉZISPONTOKHOZ KAPCSOLÓDÓ PUBLIKÁCIÓK JEGYZÉKE

[1] G. Balas, J. Bokor, and Z. Szabó. Failure detection for LPV systems - a geometric approach. In *Proceedings of the 20th Annual American Control Conference (ACC'02), Anchorage, AK, USA*, pages 4421–4426, 2002.

[2] G. Balas, J. Bokor, and Z. Szabó. Invariant subspaces for LPV systems and their applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(11):2065–2069, 2003.

[3] G. Balas, J. Bokor, and Z. Szabó. Tracking of continuous LPV systems using dynamic inversion. In *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC'04), San Diego, CA, USA*, pages 2929–2933, 2004.

[4] J. Bokor, J. Balas, and Z. Szabó. On constrained input controllability of LTI and LPV systems. In J. Bokor and K. Hangos, editors, *Proceedings of the of the Workshop on System Identification and Control Systems, Budapest, Hungary*, pages 1–20. BME EJJT, 2006.

[5] J. Bokor, P. Gáspár, and Z. Szabó. Switching Systems: Controllability and Control Design. EOARD Final Report: Defense Technical Information Center (DTIC). Accession Number: ADA506882, 2009.

[6] J. Bokor and Z. Szabó. Controllability and observability of linear systems. Technical Report, 2003.

[7] J. Bokor, Z. Szabó, and G. Balas. Parameter-varying invariant subspaces and applications. Technical Report, 2002.

[8] J. Bokor, Z. Szabó, and G. Balas. Controllability of bimodal LPV systems. In *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND'06), Toulouse, France*, volume 5, page 6 pages (on CD), 2006.

[9] J. Bokor, Z. Szabó, and G. Balas. Controllability of bimodal LTI systems. In *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications, Munich, Germany*, pages 2974–2979, 2006.

[10] J. Bokor, Z. Szabó, and G. Balas. On controllability and stabilizability of some bimodal LTI systems. In *Proceedings of the European Control Conference (ECC'07), Kos, Greece*, pages 3289–3294, 2007.

[11] J. Bokor, Z. Szabó, L. Nádai, and I. J. Rudas. Hybrid systems: A control theoretic perspective. In *Proceedings of the 5th IEEE International Conference on Computational Cybernetics, Gammarth, Tunisia*, pages 9–17, 2007.

[12] J. Bokor, Z. Szabó, and G. Stikkel. Failure detection for quasi LPV systems. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control (CDC'02), Las Vegas, NV, USA*, pages 3318–3323, 2002.

[13] J. Bokor, Z. Szabó, and G. Stikkel. Invariant subspaces for LPV systems and their applications. In *Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'02), Lisbon, Portugal*, page 6 pages (on CD), 2002.

[14] J. Bokor, Z. Szabó, and F. Szigeti. Controllability of LTI switching systems using nonnegative inputs. In *Proceedings of the European Control Conference (ECC'07), Kos, Greece*, pages 1948–1953, 2007.

[15] A. Edelmayer, J. Bokor, and Z. Szabó. A geometric view on inversion-based detection filter design in nonlinear systems. In *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on fault detection supervision and safety for technical processes (SAFEPROCESS'03), Washington, USA*, pages 783 – 788, 2003.

[16] A. Edelmayer, J. Bokor, and Z. Szabó. Robust detection and estimation of faults by exact fault decoupling and $\mathcal{H}^\infty$ disturbance attenuation in linear dynamical systems. In *Proceedings of the American Control Conference (ACC'06), Minneapolis, MN, USA*, pages 5716–5721, 2006.

[17] A. Edelmayer, J. Bokor, and Z. Szabó. Exact fault and disturbance decoupling by means of direct input reconstruction and estimation of the inverse dynamics. In *Proceedings of the Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'07), Athens, Greece*, pages 719–723, 2007.

[18] A. Edelmayer, J. Bokor, and Z. Szabó. Inversion-based approaches to robust fault detection and isolation with applications in linear systems. In *Proceedings of the 5th IEEE International Conference on Computational Cybernetics (ICCC 2007), Gammarth, Tunisia*, pages 263–270, 2007.

[19] A. Edelmayer, J. Bokor, and Z. Szabó. Inversion-based residual generation for robust detection and isolation of faults by means of estimation of the inverse dynamics in linear dynamical systems. *International Journal of Control*, 82(8):1526–1538, 2009.

[20] A. Edelmayer, J. Bokor, Z. Szabó, and F. Szigeti. Input reconstruction by means of system inversion: a geometric approach to fault detection and isolation in nonlinear systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 14(2):189 – 199, 2004.

[21] P. Gáspár, Z. Szabó, and J. Bokor. Tracking design for Wiener systems based on dynamic inversion. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications (CCA'06), Munich, Germany*, pages 839–844, 2006.

[22] P. Gáspár, Z. Szabó, and J. Bokor. Tracking control by integrated steering and braking systems using an observer-based estimation. In *Proceedings of the European Control Conference (ECC'07), Kos, Greece*, pages 619–624, 2007.

[23] P. Gáspár, Z. Szabó, and J. Bokor. The design of a reconfigurable suspension control system based on an FDI filter. In *Proceedings of the 16th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'08), Ajaccio-Corsica, France*, pages 445–450, 2008.

[24] P. Gáspár, Z. Szabó, and J. Bokor. Design of reconfigurable and fault-tolerant suspension systems based on LPV methods. In *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, (CDC'08), Cancun, Mexico*, pages 5384–5389, 2008.

[25] P. Gáspár, Z. Szabó, and J. Bokor. A fault-tolerant vehicle control design. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea*, pages 8540–8545, 2008.

[26] P. Gáspár, Z. Szabó, and J. Bokor. An integrated vehicle control with actuator reconfiguration. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea*, pages 2087–2092, 2008.

[27] P. Gáspár, Z. Szabó, and J. Bokor. Átkonfiguráló és hibatűrő felfüggesztési rendszer tervezése. *A Jövő Járműve, Járműipari Innováció*, pages 20–25, 2008.

[28] P. Gáspár, Z. Szabó, and J. Bokor. The design of a fault-tolerant vehicle control system. *International Journal of Vehicle Autonomous Systems*, 7(1–2):36–55, 2009.

[29] P. Gáspár, Z. Szabó, and J. Bokor. *Switched Systems*, chapter Active Suspension in Integrated Vehicle Control, pages 83–104. IN-TECH Education and Publishing, 2009.

[30] P. Gáspár, Z. Szabó, G. Szederkényi, and J. Bokor. Two-level controller design for an active suspension system. In *Proceedings of the 16th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'08), Ajaccio-Corsica, France*, pages 439–444, 2008.

[31] P. Gáspár, G. Szederkényi, Z. Szabó, and J. Bokor. The design of a two-level controller for suspension systems. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea*, pages 3386–3391, 2008.

[32] G. Stikkel, J. Bokor, and Z. Szabó. Disturbance decoupling problem with stability for LPV systems. In *Proceedings of the 7th European Control Conference (ECC'03), Cambridge, UK*, page 6 pages (on CD), 2003.

[33] G. Stikkel, J. Bokor, and Z. Szabó. Necessary and sufficient condition for the controllability of switching linear hybrid systems. *Automatica*, 40(6):1093–1097, 2004.

[34] Z. Szabó. Geometric control theory and linear switched systems. *European Journal of Control*, 15(3–4):378–388, 2009.

[35] Z. Szabó. Geometric control theory and linear switched systems – plenary lecture. In *Proceedings of the European Control Conference (ECC'09). Budapest, Hungary*, pages 3453–3463, 2009.

[36] Z. Szabó, J. Bokor, and G. J. Balas. Detection filter design for LPV systems: a geometric approach. In *Proceedings of the 15th Triennial World Congress of the International Federation of Automatic Control, Barcelona, Spain*, page 6 pages (on CD). IFAC, 2002.

[37] Z. Szabó, J. Bokor, and G. Balas. Inversion of LPV systems. In *Proceedings of the 11th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (MED '03), Rhodes, Greece*, page 6 pages (on CD), 2003.

[38] Z. Szabó, J. Bokor, and G. Balas. Inversion of LPV systems and its application to fault detection. In *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on fault detection supervision and safety for technical processes (SAFEPROCESS'03), Washington, USA*, pages 235 – 240, 2003.

[39] Z. Szabó, J. Bokor, and G. Balas. Stabilization of linear switched controlled systems. In *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS'07), Pretoria, South-Africa*, pages 966–971, 2007.

[40] Z. Szabó, J. Bokor, and G. Balas. Generalized piecewise linear feedback stabilizability of controlled linear switched systems. In *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, (CDC'08), Cancun, Mexico*, pages 3410–3414, 2008.

[41] Z. Szabó, J. Bokor, and G. J. Balas. Controllability and stabilizability of linear switched systems. In *Proceedings of the European Control Conference (ECC'09). Budapest, Hungary*, pages 3245–3250, 2009.

[42] Z. Szabó, P. Gáspár, and J. Bokor. Reference tracking for Wiener systems using dynamic inversion. In *Proceedings of 13th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'05), Limassol, Cyprus*, pages 1196–1200, 2005.

[43] Z. Szabó, P. Gáspár, and J. Bokor. Discussion on: "Combining slip and deceleration control for brake-by-wire control systems: A sliding-mode approach". *European Journal of Control*, 13(6):615–617, 2007.

[44] Z. Szabó, P. Gáspár, and J. Bokor. LPV-based reconfigurable chassis design. In *Proceedings of the European Control Conference (ECC'09). Budapest, Hungary*, pages 3634–3639, 2009.

[45] I. Szászi, Z. Szabó, F. Szigeti, and J. Bokor. Inversion based fault detection and isolation for LTI systems. Technical Report, 2000.

[46] G. Szederkényi, Z. Szabó, J. Bokor, and K. M. Hangos. Analysis of the networked implementation of the primary circuit pressurizer controller at a nuclear power plant. In *Proceedings of the 16th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'08), Ajaccio-Corsica, France*, pages 1604–1609, 2008.

[47] Z. Szabó, G. Szederkényi, P. Gáspár, I. Varga, K. M. Hangos, and J. Bokor. Identification and Dynamic Inversion-Based Control of a Pressurizer at the Paks NPP . *Control Engineering Practice*, 18, 2010.