

RÁCZ ISTVÁN

FEKETELYUKAK A GRAVITÁCIÓ  
GEOMETRIZÁLT ELMÉLETEIBEN

Doktori értekezés tézisei

MTA KFKI RMKI  
Budapest, 2010

## 1. Témaválasztás

Az Einstein-elméletben a feketelyukakkal kapcsolatos tudásunk igen nagy hányada a sztatikus Schwarzschild-téridőhöz, illetve ennek forgó általánosításához, a stacionárius és tengelyszimmetrikus Kerr-téridőhöz kapcsolható. Ezekhez kapcsolódnak a feketelyuk-egyértelműségi bizonyítások is. Az Israel és Carter által a 60'-as évek végén megkezdett vizsgálatok megmutatták, hogy az Einstein-elméletben bármely stacionárius, aszimptotikusan sík, vákuum feketelyuk külső kommunikációs tartománya, valamely a Kerr-téridőosztályhoz tartozó feketelyuk-téridő megfelelő részével izometrikus. Az anyagmentes esetre vonatkozó eredményeket hamarosan a stacionárius elektrovákuum feketelyuk-téridők vizsgálata követte. Robinson, Mazur és Bunting munkája nyomán a 80'-as évek közepére született meg az az eredmény, melynek értelmében a stacionárius, aszimptotikusan sík, elektrovákuum feketelyukak szükségképpen a Kerr-Newman-téridőosztályhoz tartoznak.

A stacionárius feketelyukak geometriájának egyértelműségére vonatkozó eredmények mellett a hetvenes évek elején kibontakozó feketelyuk-(termo)dinamika, valamint a görbült háttéren végzett kvantumtérelméleti vizsgálatok – az utóbbiak tették lehetővé, hogy a feketelyuk-dinamika klasszikus törvényeiben megjelenő hőmérséklet-paraméter, a Hawking-sugárzás termikus jellegét felhasználva, valódi termodinamikai alapot kaphasson – sikereinek köszönhetően mára a feketelyuk-fizika az Einstein-elmélet önálló szakterületévé vált.

A feketelyuk-fizika kialakulásában is vezető szerepet játszott Hawking és Penrose, akik a gravitációs összeomlási folyamatok során kialakuló téridő-szingularitások vizsgálata kapcsán számos olyan fogalmat – például a csapdázott felület, esemény- és látszólagos horizont, vagy külső kommunikációs tartomány – vezettek be, illetve olyan általános, a dinamikai esetet is érintő eredményeket értek el – ilyenek például Penrose kozmikus cenzor hipotéziseinek a feketelyukak végállapotát érintő vonatkozásai, Hawking feketelyuk-topológiai és feketelyuk-merevségi tételei, vagy a feketelyuk-termodinamika klasszikus törvényei –, melyek azóta is alapvető szerepet játszanak.

A 70'-es és 80'-as évek során elvégzett dinamikai vizsgálatok – melyeket az utóbbi években végzett nemlineáris dinamikai vizsgálatok is megerősítenek – az mutatták, hogy amikor a feketelyukba hulló anyagnak nincs számottevő utánpótlása, akkor a gravitációs összeomlás során kialakuló feketelyuk nagyon gyorsan a stacionárius végállapotra jellemző tulajdonságokat mutat. Ennek megfelelően a stacionárius feketelyukakra vonatkozó vizsgálatok eredményei nemcsak a feketelyukak végállapotának meghatározása, de a nem extrém dinamikai esetek leírása szempontjából is fontosak.

Jelen dolgozat egyrészt a feketelyuk egyértelműségi tételek, másrészt a napjainkban egyre intenzívebben kutatott nemlineáris dinamikai folyamatok feketelyukakhoz kapcsolódó azon részterületeinek bemutatására törekszik, amelyek kutatásában magam is aktí-

van vettem részt. Azon vizsgálataim, melyek annak kiderítésére irányultak, hogy általános esetben egy stacionárius feketelyuknak szükségképpen kettéhasadó Killing-horizonttal kell-e rendelkeznie, vagy sem, nemcsak a feketelyuk-egyértelműségi tételek szempontjából, de a görbült háttéren végzett kvantumtérelméleti vizsgálatok szempontjából is fontosak.

## 2. Tudományos célkitűzések

Kutatásaim kezdetben főként a gravitációs összeomlási folyamat során kialakuló feketelyukak lehetséges végállapotainak részletes tanulmányozására, illetve a feltárt törvényszerűségek magasabb dimenziós elméletekben vagy az Einstein-elmélettől esetleg eltérő gravitációs elméletekben történő alkalmazhatóságának felderítésére irányultak.

Érdemes kiemelni, hogy a dolgozat első felében bemutatott eredmények egyik legfontosabb következménye az, hogy igazolják azt a korábban csak ésszerűnek tűnő feltételezés-ként használt állítást, miszerint amikor az általánosított domináns energiafeltétel teljesül, a gravitációs összeomlási folyamat végállapotát megjeleníteni hivatott stacionárius feketelyuk téridők eseményhorizontja – nemcsak a négydimenziós Einstein-elméletben, de a gravitáció tetszőleges magasabb dimenziós geometrizált elméletében is – olyan Killing-horizont, amely vagy kettéhasadó, vagy pedig a hozzá tartozó felületi gravitáció azonosan zérus, azaz a feketelyuk degenerált.

A dolgozat utolsó fejezetében bemutatott eredmények a megkezdett általános analitikus és numerikus dinamikai vizsgálataim matematikai háttérének előkészítéséhez kapcsolódnak. Meglepő, de a kettő kodimenzióval rendelkező szigorúan stabil felületek négydimenziós Einstein-elméleten belüli kitüntetettsége is csak Hawking feketelyuk-topológiai tételének magasabb dimenziós és általános elméletekben is érvényes alakjának bizonyítása közben vált nyilvánvalóvá.

A dolgozat megírása közben az is fontos szempont volt, hogy az érdeklődő olvasó bepillantást nyerhessen abba, hogy milyen mértékben tekinthetők az elsőként az Einstein-elméletben testet öltő feketelyuk-fizika törvényszerűségei a magasabb dimenziós-, és esetleg az Einstein-elmélettől lényegesen eltérő elméletekben is érvényesnek.

## 3. Az alkalmazott kutatási módszerek

A dolgozatban bemutatott eredmények származtatása, illetve bizonyítása az általános relativitáselméletben alkalmazott technikai eszközök széles skáláját igényli. Ezek közül a legfontosabbak a differenciálgeometria, differenciáltopológia, a Newman-Penrose-formalizmus és a parciális differenciálegyenletek elmélete, de egyre fontosabb szerepet kapnak a hiperbolikus fejlődési egyenletekre vonatkozó kezdőértékproblémák úgy, mint a szokásos Cauchy-probléma vagy a karakterisztikus kezdőértékprobléma.

Az Einstein-elmélethez hasonlóan, a gravitáció összes geometrizált elméletében sokszor még a legegyszerűbbnek tűnő alapfogalmak bevezetése is sok technikai előkészítést igényel. Jó példa erre az, hogy már a téridőnek – az összes elvileg megfigyelhető klasszikus fizikai események összességének – az elméleten belüli megjelenítése is a differenciálható sokaságok és az azokon értelmezett Lorentz-szignatúrájú metrikák fogalmára, valamint ilyen párok izometria-transzformációk által indukált ekvivalencia-osztályaira épül.

Ugyanakkor a dolgozatban alkalmazott geometriai leírás azt is lehetővé tette, hogy az anyagmezőkre legtöbb esetben csak mint az alapsokaságon értelmezett absztrakt tenzormezőkre hivatkozzunk. Az egyetlen megszorítás, melyet ezekben az esetekben felhasználtam, az az általánosított domináns energiafeltétel volt, mely akkor is értelmezhető, ha esetleg anyagmezők egyáltalán nincsenek jelen a téridőben, vagy az Einstein-egyenletektől lényegesen eltérő módon – például ahogyan az a string- vagy a brane-elméletben történik – kapcsolódnak a geometriához.

Lényegében mindegyik fejezetben használtam valamilyen Gauss-féle fényszerű koordinátarendszert, mely bármely elegendően sima, fényszerű hiperfelület nyílt környezetében egy geometriai eljárással megkonstruálható. A geometriai meghatározottságnak köszönhetően ezekben a rendszerekben kényelmesen kezelhetővé válik az elmélet diffeomorfizmusinvarianciája, és így több lokális differenciálgeometriai vizsgálat is könnyen elvégezhető.

Vizsgálatainkban központi szerepet játszik a Penrose által bevezetett csapdázott felület fogalma, amelynek felhasználása nélkül, az általános dinamikai esetben, még a feketelyuk fogalmának meghatározása is elképzelhetetlen. Csapdázott felületek a dinamikai folyamat során akkor jelennek meg, amikor a tér valamely véges kiterjedésű, lokalizált részében, az ott összegyűlő anyag hatására a gravitáció már olyannyira erős, hogy még a felületről merőlegesen kifelé indított fényjelekhez tartozó hullámfrontok felszíne is csökken, de legalábbis nem növekszik a kibocsátás pillanatában.

A dolgozat első része a feketelyuk-téridők kiterjesztésére irányuló eredményeket mutatja be. Mivel egy téridőn a lehetséges események összességét értjük, már önmagában is érdekes az a koncepcionális kérdés, hogy mit is kellene valamely téridő kiterjesztésén érteni. Ennek a dilemmának egy egyszerűnek tűnő feloldása az, amikor egy téridőt akkor tekintünk kiterjeszhetőnek, amikor az izometrikus egy másik téridő valódi részhalmazával.

A magasabb dimenziós, dinamikai feketelyuk-téridők vizsgálata során központi szerepet játszottak a kettő kodimenzióval rendelkező felületek topológiai invariánsának, az úgynevezett Yamabe-invariánsnak a vizsgálatára irányuló geometriai és topológiai módszerek.

A dolgozatban bemutatott új eredmények származtatása során – két fejezettől eltekintve – konkrét téregyenleteket nem alkalmaztam, ezért azok a gravitáció bármely lehetséges geometrizált elméletében érvényesek. Hasonlóan, az ismertett eredmények nemcsak négy-, de lényegében véve tetszőleges dimenziójú téridők esetén alkalmazhatók.

## 4. Új tudományos eredmények

- (1) Megvizsgáltuk [1] azon stacionárius feketelyuk-téridők lokális kiterjeszhetőségét, amelyekben a feketelyuk jövő eseményhorizontját egy olyan  $\mathcal{N}$  Killing-horizont jeleníti meg, melyhez található olyan  $\Sigma$  globális szelés, hogy  $\mathcal{N}$  az  $\mathbb{R} \times \Sigma$  topológiával rendelkezik. Megmutattuk, hogy amikor a felületi gravitáció nem zérus és állandó az  $\mathcal{N}$  horizonton, akkor annak valamely környezete kiterjeszhető úgy, hogy a kiterjesztett téridőben  $\mathcal{N}$  képe valódi részalmazza lesz egy kettéhasadó Killing-horizontnak. Megmutattuk, hogy minden sztatikus vagy  $t - \varphi$  tükrözési szimmetriával rendelkező stacionárius és tengelyszimmetrikus téridőben értelmezhető sztatikus, vagy stacionárius és tengelyszimmetrikus hiperfelületek sima, azaz  $C^\infty$  módon metszik egymást a kettéhasadási felületen.
- (2) Megmutattam, hogy a stacionárius feketelyukak jövő eseményhorizontját megjelenítő Killing-horizontokhoz tartozó felületi gravitáció értéke szükségképpen állandó a gravitáció bármely geometrizált elméletében feltéve, hogy az általánosított domináns energiefeltétel teljesül. Speciálisan a négydimenziós téridők esetén megmutattuk [2], hogy a horizonttal kompatibilis Killing-vektormezőhöz tartozó örvényvektor eltűnése a felületi gravitáció állandóságának szükséges és elégséges feltétele. Amennyiben a felületi gravitáció értéke nem nulla a Killing-horizont valamely  $\gamma$  fényszerű generátora mentén, akkor  $\gamma$  nem lehet geodetikus értelemben teljes. Megmutattuk [1], hogy egy ilyen inkomplett geodetikus a párhuzamosan elterjesztett bázisokra nézve görbületi szingularitáson végződik, hacsak a felületi gravitáció gradiense nem azonosan nulla  $\gamma$  mentén.
- (3) Megvizsgáltuk [2] azon globálisan hiperbolikus, stacionárius feketelyuk-téridők globális kiterjeszhetőségét, amelyekben nem létezik fehérlyuk-tartomány, továbbá a feketelyuk jövő eseményhorizontját egy  $\mathcal{N}$  Killing-horizont jeleníti meg. Megmutattuk, hogy amennyiben a felületi gravitáció nem zérus és állandó az  $\mathcal{N}$  horizonton, a téridő globális értelemben kiterjeszhető úgy, hogy  $\mathcal{N}$  a kiterjesztés során egy kettéhasadó Killing-horizont valódi részalmazára képeződik le. Megmutattam, hogy mindig megadható olyan globális kiterjesztés is, amelyre az eredeti izometria-csoportthatás kiterjed, továbbá a kapott kiterjesztés a kettéhasadási felületre vett tengelyes tükrözésre nézve is invariáns. Megmutattuk, hogy minden sztatikus (és így  $t$  időtükrözési szimmetriával rendelkező), vagy olyan stacionárius és tengelyszimmetrikus feketelyuk-téridőben, amely a  $t - \varphi$  tükrözési szimmetriával is rendelkezik, az eredeti feketelyuk-téridőn értelmezett anyagmezők is kiterjeszthetők a legnagyobbított téridőre feltéve, hogy az anyagmezők az eredeti téridőben rendelkeznek a téridő-geometria szimmetriáival.

- (4) Megmutattuk [3], hogy a négydimenziós, stacionárius, aszimptotikusan sík elektrovákuum feketelyuk-téridőkben a stacionárius Killing-vektormező mellett mindig létezik egy olyan másik – az eseményhorizonttal kompatibilis – Killing-vektormező, mely sima esetben a feketelyuk-tartományban, analitikus esetben a külső kommunikációs tartományban is értelmezhető, és amely által indukált izometria-transzformációkra nézve az eseményhorizont egy Killing-horizont, és amelyre nézve maga az elektromágneses tér is invariáns. Hawking feketelyuk-merevségi tételének további általánosításaként megmutattam [4], hogy nemcsak az elektrovákuum esetben, de az Einstein–Klein–Gordon-, Einstein–Yang–Mills-dilaton- és az Einstein–Yang–Mills–Higgs-rendszerek esetén is, a stacionárius Killing-vektormező mellett mindig létezik egy olyan másik, az eseményhorizonttal kompatibilis Killing-vektormező is, amelyhez tartozó izometria-transzformációk hatásával szemben az említett anyagmezők is invariánsak.
- (5) Megvizsgáltam a kezdőérték-problémák és a téridő-szimmetriák kapcsolatát, és megmutattam, hogy a gravitáció geometrizált elméleteiben a gravitáció és anyag összes olyan csatolt rendszerére, amelyben – esetleg csak egy hiperbolikus redukció után – a téregyenletek elsőrendű, szimmetrikus hiperbolikus fejlődési egyenletek alakjában írhatók fel, a kezdőadatok szimmetriái megőrződnek az evolúció során [5,6].
- (6) A Newman–Penrose-formalizmus és a karakterisztikus kezdőértékprobléma eszköztárát felhasználva megmutattam, hogy az Einstein–Maxwell-elméletben egyszerre vizsgálhatók azok a négydimenziós deformált stacionárius feketelyuk-téridők, amelyekben egy Killing-vektormező és egy azzal kompatibilis kettéhasadó, azaz nemdegenerált Killing-horizont található. Megmutattam, hogy a négydimenziós téridő geometriája és az elektromágneses tér is egyértelműen meghatározott – a  $C^\infty$  esetben a feketelyuk-tartományban, míg analitikus esetben az eseményhorizont külső kommunikációs tartomány felőli oldalán is –, mihelyt a kétdimenziós kettéhasadási felületen az ott indukált metrika, az egyik komplex spin-együttható, továbbá az egyik komplex elektromágneses potenciál adott [7].
- (7) Hawking feketelyuk-topológiai tételének, valamint Gibbons és Woolgar entrópiaminimum létezésére vonatkozó eredményének magasabb dimenziós általánosításainak egy olyan új, egyszerű és független bizonyítását adtam, amely nemcsak a négy-, vagy magasabb dimenziós Einstein-elméletben, de a gravitáció összes geometrizált elméletében alkalmazható [8]. Bármely  $(n \geq 4)$ -dimenziójú téridőben nemcsak a szigorúan stabil marginális csapdafelületeknek, de bármely szigorúan stabil  $(n - 2)$ -dimenziós felületnek is teljesen analóg topológiai jellemzését adtam [9].

## A tézispontokhoz kapcsolódó publikációk

- [1] I. Rácz and R.M. Wald: *Extension of spacetimes with Killing horizon*, Class. Quant. Grav. **9**, 2643-2656 (1992)
- [2] I. Rácz and R.M. Wald: *Global extensions of spacetimes describing asymptotic final states of black holes*, Class. Quant. Grav. **13**, 539-553 (1996)
- [3] H. Friedrich, I. Rácz and R.M. Wald: *On rigidity of spacetimes with stationary event- or compact Cauchy horizons*, Commun. Math. Phys. **204** 691-707 (1999)
- [4] I. Rácz: *On further generalisation of the rigidity theorem for spacetimes with a stationary event horizon or a compact Cauchy horizon*, Class. Quant. Grav. **17** 153-178 (2000)
- [5] I. Rácz: *On the existence of Killing vector fields*, Class. Quant. Grav. **16**, 1695-1703 (1999)
- [6] I. Rácz: *Symmetries of spacetime and their relation to initial value problems*, Class. Quant. Grav. **18**, 5103-5113 (2001)
- [7] I. Rácz: *Stationary black holes as holographs*, Class. Quant. Grav. **24**, 5541-5571 (2007)
- [8] I. Rácz: *A Simple proof of the recent generalisations of Hawking's black hole topology theorem*, Class. Quant. Grav. **25**, 162001 (2008)
- [9] I. Rácz: *On the topology of untrapped surfaces*, Class. Quant. Grav. **26**, 055017 (2009)

A fenti listában szereplő [7]-es és [8]-as publikációt a Classical and Quantum Gravity szerkesztő bizottságának tagjai 2008-ban, illetve 2009-ben, a folyóiratban azévből megjelent legkiemelkedőbb cikkek (Research Highlights) közé sorolták.