dc_52_10

Geometriai Problémák az Addititív Kombinatorikában

Solymosi József

Akadémiai doktori értekezés

1 Bevezető

A doktori fokozat megszerzése óta az additív kombinatorikával és ahhoz kapcsolodó problémákkal foglalkozom. Ennek a fiatal matematikai kutatási területnek számos ága van fontos alkalmazásokkal a számítógéptudományban, számelméletben, kombinatorikában vagy éppen harmonikus analízisben. Különösen kedvelem azokat a problémákat ahol közvetve vagy közvetlenül geometriát lehet alkalmazni számelméleti kérdésekben, illetve amikor számelméleteti eredmények segítségevel oldhatóak meg geometriai problémák. Kutatásom három – egymással kapcsolatban álló – témakör köré csoportosítható: Szemerédi tételének általánosításai, Erdős és Szemerédi összeg-szorzat sejtése és Erdős különböző távolságokkal kapcsolatos sejtései.

Jelen értekezésben mindhárom témakörben bemutatunk eredményeket. Tizenkét cikket fogunk ismertetni négy fejezetben a következők szerint:

1. Első fejezet: A "Hypergraph Removal Lemma" alkalmazásai a Szemerédi tétel általánosításában.
   - a. Bevezetés: Regularity, uniformity, and quasirandomness
   - b. Első cikk: Roth tételének általánosítása.
   - c. Második cikk: Erdős és Graham egy probléméjáról.
   - d. Harmadik cikk: Számtani sorozatok kis összegű halmazokban
2. Második fejezet: Az összeg-szorzat problémáról
   - e. Negyedik cikk: Összeg-szorzat becslés komplex számokra
   - f. Ötödik cikk: Javított becslés a Szemerédi-Trotter tétel alkalmazásával
   - g. Hatodik cikk: Összeg-szorzat becslés mátrixokra
   - h. Hetedik cikk: További javítás elemi lineáris algebra alkalmazásával
3. Harmadik fejezet: Számelméleti eredmények alkalmazása a diszkrét geometria területén.
   - i. Nyolcadik cikk: Extremális pont-egyenes illeszkedési rendszerek lokális struktúrája
   - j. Kilencedik cikk: Összeg-szorzat becslések geometriai alkalmazása
   - k. Tizedik cikk: Erdős és Ulam egy problémájáról
4. Negyedik fejezet: Különböző távolságok
   - l. Tizenegyedik cikk: A különböző távolságok száma magasabb dimenzióban
   - m. Tizenkettedik cikk: Különböző távolságok homogén ponthalmazokban

2 Szemerédi tételének általánosítása

Szemerédi Endre bizonyította 1970-ben Erdős és Turán sejtését miszerint az egészek bármely sűrű részhalmaza tartalmaz tetszőlegesen hosszú számtani sorozatokat. Ezt a fontos eredményt ergodikus módszerekkel újrabizonyította és általánosította Fürstenberg és Katznelson [7].

Megmutatták hogy bármely $\delta > 0$ és pozitív egész r-re minden $X \subset \mathbf{Z}^r$ halmazhoz van olyan N hogy minden $A \subset \{1, 2, \ldots, N\}^r$ esetén ha $|A| \geq \delta N^r$ akkor A-ban talalható egy részhalmaz ami $a + dX$ alaku. (d egy pozitív egész)

2000-ben Timothy Gowers egy analitikus bizonyítást dolgozott ki Szemerédi tételére. Roth 3-hosszú számtani sorozatokra vonatkozó tételénél alkalmazott technikát terjesztette ki a hosszabb számtani sorozatok problémájára.

A publikáció előtti kézirat végén Gowers fontos nyitott problémának jelölte meg hogy találjunk egy elemi bizonyítást Roth tételének egy kétdimenziós válozatára (a kérdés részleteit hamarosan meglátjuk). A kézirat olvasása után egy egyszerű bizonyítást találtam Szemerédi és Ruzsa "6;3" tétele alkalmazásával. Az itt alkalmazott módszer – amit később általánosítottam – lehetőséget adott Fürstenberg és Katznelson fent említett tételének elemi bizonyítására. (egy másik, sokkal nehezebb, gráfelméleti eredmény segítségével)

[15]-ben bizonyítottam hogy minden sűrű részhalmaza a kétdimenziós egész rácsnak tartalmaz egy négyzetet. (A Fürstenberg-Katznelson tétel speciális este amikor $X = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$) Azt is megmutattam, hogy a Fürstenberg-Katznelson tétel következik egy – akkor még csak sejtett – állításból, az úgynevezett "Hypergraph Removal Lemma"-ból.

A Hypergraph Removal Lemma következik Szemerédi gráf-regularitási lemmájának általánosításából [1] ; a hipergráf regularitási lemma és az ehhez tartozó leszámolási lemma alkalmazásából. Ezeket az állításokat egymástól függetlenül Tim Gowers és Vojta Rödl diákjaival igazolták. (Gowers [3] and Rödl et al. [2])

Rödl, Nagle, Skokan, Schacht és Kohayakava cikke, "The hypergraph regularity method and its applications" a Proceedings of the National Academy of Sciences of USA-ben jelent meg. Az újság szerkesztői felkértek, hogy írjak egy "Commentary"-t a cikkhez, amit csak az általános tudomány kiemelt fontosságú eredményekhez szoktak kérni. Ezt az írást is csatoltam a doktori dolgozatomhoz, bevezetőként az első fejezethez.

A Hipergráf Regularitási Lemma az első két bizonyítás után újabb bizonyításokat

[1] A Regularitási Lemma a diszkrét matematika egyik legfontosabb eszköze. Szemerédi a fentiekben már említett Erdős-Turán sejtés bizonyításához fejlesztette ki, mely szerint egy pozitív felső sűrűségű egész számokból alló sorozat tartalmaz hosszú számtani sorozatokat [32]. A lemmát úgy lehetne röviden összefoglalni, hogy bizonyos értelemben minden nagy gráfot jól lehet közelíteni kisebb súlyozott élű gráfokkal. A Regularitási Lemmával és az ezzel a módszerrel kapcsolatos további információkért lásd a [31] áttekintő cikket és a további regularitásra vonatkozó referenciákat a cikkjegyzékben

kapott, Terry Tao, Elek Gábor és Szegedi Balázs, valamint Yoshi Ishigami is bizonyította, részben a korábbi bizonyításokra alapozva. (Vannak akik kétlkednek Ishigami bizonyításának korrektségében) Bár ez az eredmény túl mutat jelen doktori dolgozat keretein, megemlítjük még, hogy Szemerédi tételét is használva és részben a hipergráf regularitási lemma által inspirálva Ben Green és Terry Tao bebizonyította hogy a prímszámok között tetszőlegesen hosszú számtani sorozatok talalhatók.

3 Az összeg-szorzat probléma

Minden olyan probléma ide sorolható ami a két művelet, az összeadás és a szorzás összeférhetetlenségét mutatja; Ha egy halmaz összeghalmaza nem sokkal nagyobb mint az eredeti halmaz akkor a szorzathalmaz nagy kell hogy legyen. Ezt az állítást pontosan megfogalmazzuk valós számok véges részhalmazaira.

Legyen A valós számok egy véges részhalmaza. Az összegehalazt az alábbiak szerint definiáljuk:

$$A + A = \{a + b | a, b \in A\}.$$

Hasonlóan, a szorzathalmazt a következőképpen kapjuk:

$$A \cdot A = \{ab | a, b \in A\}.$$

Erdős és Szemerédi azt sejtette hogy az összeghalmaz vagy a szorzathalmaz mindig majdnem kvadratikus méretben az eredi halmazhoz képest.

$$\max(|A + A|, |A \cdot A|) \geq |A|^{2-\delta}$$

ahol δ tart nullához amint $|A|$ tart a végtelenhez.

Egy rendkívül elegáns cikkben Elekes [26] megmutatta, hogy diszkrét geometria használható jó összeg-szorzat becslésekhez. Elkes módszerét továbbfejlesztve megmutattam [10]-ban, hogy

$$\max(|A + A|, |A \cdot A|) \geq c|A|^{14/11}/\log|A|.$$

Egy Tardos Gáborral közösen írt cikkben igazoltuk, hogy a fenti egyenlőtlenség komplex számok véges halmazára is igaz. Ezzel megjavítottuk egy korábbi eredményemet ahol a

$$\max(|A + A|, |A \cdot A|) \geq c|A|^{5/4}$$

egyenlőtlenséget igazoltam komplex számokra. Mindamellett, az ott alkalmazott módszerem általánosítható más testek/gyűrűk feletti összeg-szorzat problémákra is, így ez az eredmény bekerült több egyetemi jegyzetbe.

A közelmúltban egy még egyszerűbb bizonyítást találtam az erősebb

$$\max(|A + A|, |A \cdot A|) \geq c|A|^{4/3}\log|A|$$

egyenlőtlenségre amikor A valós számok részhalmaza [11].

Van Vu-val közös cikkben a négyzetes matrixok gyűrűje felett igazoltuk a

$$\max(|A+A|, |A \cdot A|) \geq c|A|^{5/4}$$

egyenlőtlenséget "szép" mátrixok családjára.

Az összeg-szorzat probléma nagyon érdekes és fontos alkalmazásokkal bír a véges testek felett is. Itt persze további megkötésekre van szükség hiszen például egy részgyűrűnek az összeghalmaza és a szorzathalmaza is nagyon kicsi, a fenti egyenlőtlenségekhez hasnonlóak általánosan nem várhatóak.

Bourgain, Katz és Tao bizonyított egy $|A|^{1+\varepsilon}$ alsó becslést a véges testek felett [24] az alábbiak szerint: Legyen $A \subset \mathbf{F}_p$ és $p^\alpha \leq |A| \leq p^{1-\alpha}$. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$ ami csak α-tól függ hogy

$$\max(|A+A|, |A \cdot A|) \geq c|A|^{1+\varepsilon}.$$

Ez az eredmény fontos alkalmazásokkal bír számelméletben, számítógéptudományban, Ramsey elméletben és kriptográfiában. Kiderült, hogy a valós esetre használt geometriai látásmód a véges karakterisztikájú testek felett is alkalmazható. Hart és Iosevich-el közös cikkünkben [25] elsőként adtunk jó becslést $\max(|A+A|, |A \cdot A|)$-re ahol $A \subset \mathbf{F}_p$ and $p^{1/2} \ll |A| \ll p$. (Hozzá kell tennem, hogy a legtöbb alkalmazáshoz a $|A| \ll p^{1/2}$ szakasz az érdekes)

4 Különböző távolságok

Ez a harmadik témakör érdekesen kapcsolódik az additív kombinatorikához. A korábban emített Bourgain, Katz, Tao cikk foglalkozik a különböző távolságok problémájával véges testek felett. Megmutatták hogy a probléma bizonyos értelemben ekvivalens az összeg-szorzat kéréssel $\mathbf{F}_p^2$-ben.

Először Erdős egy klasszikus problémáját tárgyaljuk. Erdős írja [28]-ben: "My most striking contribution to geometry is, no doubt, my problem on the number of distinct distances."

Jelölje $g(n)$ egy n-elemű síkbeli ponthalmaz által meghatározott különböző távolságok lehetséges minimumális számát. Erdős megmutatta, hogy a $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ méretű egész rács pontjai $cn/\sqrt{\log n}$ különböző távolságot határoznak meg. Úgy sejtette, hogy hasonló becslés felülről is igaz.

Tóth Csabával [13]-ben megmutattuk hogy $g(n) > cn^{6/7}$. Székely immár klasszikusnak mondható módszerét javítottuk meg. Cikkünk egy számelméleti lemmáját Katz és Tardos megjavították, megnövelve a 6/7 kitevőt egy további 0.007-tel. Ez a mostani rekord, és Ruzsa Imre egy konstrukcióval megmutatta hogy jelen módszerünkkel Erdős sejtett becslése nem elérhető, további, új ötletekre lesz szükség az előrelépéshez.

Jelen dolgozatban a magasabb dimenziós változatát vizsgáljuk Erdős sejtésének. A sejtés (Erdős) szerint n pont a d-dimenziós euklideszi térben legalább $n^{\frac{2}{d}-\epsilon}$ különböző távolságot határoz meg.

Van Vu-val közös cikkünkben [16] elsőnek sikerült megmutatnunk hogy Erdős sejtése asszimptotikusan igaz;

n pont a d-dimenziós euklideszi térben legalább

$$n^{\frac{2}{d}-\frac{2}{d(d+2)}}$$

különböző távolságot határoz meg.

Harmonikus analizisben kutatókat érdekli a különböző távolságok probléma egyenletes eloszlású ponthalmazokra is, ahol esetleg jobb becslés várható. Tom Wolff munkássága alapján Łaba, Iosevich és mások is kapcsolatot találtak a híres Kakeya sejtés és a különböző távolságok problémája egyenletes eloszlású ponthalmazokra között.

Tóth Csabával közös cikkünkben [19] az erősebb

$$n^{\frac{2d}{d^2+1}}$$

alsó becslést bizonyítottuk egyenletes eloszlású ponthalmazokra.

5 A cikkek bemutatása

Ebben az összefoglaló szekcióban röviden bemutatjuk a tézis cikkeit. A bemutatás során használjuk a jelöléseket az előző bekezdésekből.

1. Első fejezet: A "Hypergraph Removal Lemma" alkalmazásai a Szemerédi tétel általánosításában.

   a. Bevezetés: Regularity, uniformity, and quasirandomness

   [20]'Regularity, uniformity, and quasirandomness'. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 102.23 (2005): 8075 - 8076.

   Ezt a cikket bevezetőnek szántam az első fejezethez. Új önálló eredményt nem tartalmaz, de segít a későbbi erdmények megértésében.

   b. **Első cikk:** Roth tételének általánosítása.

   [21]'Note on a generalization of Roth's theorem'. Discrete and computational geometry; Algorithms Combin. Vol. 25. Ed. Janos Pach. Springer, 2003. 825 – 827.

   Gowers kérdésére válaszolva egyszerű bizonyítást adunk a következő problémára:

Bármely $\delta > 0$-hoz van olyan N hogy minden $A \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ esetén ha $|A| \geq \delta N^2$ akkor A-ban talalható három pont amik egy derékszögű egyenlőszárú háromszöget alkotnak, azaz $(x, y), (x+d, y), (x, y+d)$ alakuak. (d egy nemnulla egész)

Ezt az eredményt nemrég Ilya Shkredov megjavította. Továbbfejlesztve Gowers és Bourgain analitikus módszereit megmutatta hogy $(\log\log\log n)^{-1}$ sűrűség garantál ilyen háromszöget. (Az én bizonyításom csak $(\log^* n)^{-1}$ sűrűségre működik)

c. **Második cikk:** Erdős és Graham egy problémájáról.

[15] 'A note on a question of Erdős and Graham', Combin. Probab. Comput. 13 (2004), no. 2, 263–267.

A fő erdménye a cikknek egy új módszer bevezetése; hogyan használható a "Removal Lemma" a többdimenziós Szemerédi tétel bizonyítására.

Példaként elemi bizonyítást adtunk Erdős és Graham egy kérdésére, miszerint minden sűrű részhalmaza a kétdimenziós egész rácsnak tartalmaz egy négyzetet. Ez a Fürstenberg-Katznelson tétel speciális este amikor

$X = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

d. **Harmadik cikk:** Számtani sorozatok kis összegű halmazokban

[18] 'Arithmetic Progressions in Sets with Small Sumsets', Combinatorics, Probability and Computing. 15 (2006): 597 - 603.

Ez a cikk egy további illusztráció a "Removal Lemma" erjére. Megmutattuk, hogy ha $|A + A| \leq C|A|$ akkor A tartalmaz hosszú számtani sorozatokat. Ezt akkor is meg tudjuk mutatni, ha az összeghalmaz csak egy sűrű gráf mentén kicsi. Balog és Szemerédi [1] egy tétele alapján tudjuk, hogy ez az eset visszavezethető az előzőre, de itt nem kell használnunk ezt az eredményt. A fő érdekesség azonban nem ez, hanem hogy bizonyítani tudjuk a fenti állítást a nehéz Freiman-Ruzsa tétel [4] alkalmazása nélkül is.

2. Második fejezet: Az összeg-szorzat problémáról

e. **Negyedik cikk:** Összeg-szorzat becslés komplex számokra

A

$$\max(|A + A|, |A \cdot A|) \geq c|A|^{5/4}$$

egyenlőtlenséget igazoljuk komplex számokra. Az itt alkalmazott módszer általánosítható más testek/gyűrűk feletti összeg-szorzat problémákra is.

f. **Ötödik cikk:** Javított becslés a Szemerédi-Trotter tétel alkalmazásával

[10] 'On the number of sums and products', Bull. London Math. Soc. 37 (2005), no. 4, 491–494.

Elekes ötletét továbbfejlesztve igazoljuk az alábbi összeg-szorzat becslést:

$$\max(|A+A|, |A \cdot A|) \geq c|A|^{14/11}/\log|A|.$$

Mint Elekesnél is, a bizonyítás fő eleme Szemerédi és Trotter becslése egyenesek és pontok illeszkedésére.

g. **Hatodik cikk:** Összeg-szorzat becslés mátrixokra

[17](Van Vu-val közös cikk) 'Sum-product estimates for well-conditioned matrices'. Bulletin of the London Mathematical Society 2009 41(5):817-822

a négyzetes matrixok gyűrűje felett igazoltuk a

$$\max(|A+A|, |A \cdot A|) \geq c|A|^{5/4}$$

egyenlőtlenséget "well-conditioned" mátrixok családjára, azaz olyan mátrixokra amelyeknek a legnagyobb és legkisebb sajátértékei hányadosa nem túl nagy.

h. **Hetedik cikk:** További javítás elemi lineáris algebra alkalmazásával

[11] 'Bounding multiplicative energy by the sumset', Advances in Mathematics, Volume 222, Issue 2, 2009, 402–408.

Igazoljuk a

$$\max(|A+A|, |A \cdot A|) \geq c|A|^{4/3}\log|A|$$

egyenlőtlenséget a valós számok egy A részhalmazára.

3. Harmadik fejezet: Számelméleti eredmények alkalmazása a diszkrét geometria területén.

   i. **Nyolcadik cikk:** Extremális pont-egyenes illeszkedési rendszerek lokális struktúrája

   [12]'Dense arrangements are locally very dense I.'. SIAM JOURNAL ON DISCRETE MATHEMATICS. 20.3 (2006): 623 - 627.

   Olyan pont-egyenes rendszerek szerkezetét vizsgáljuk ahol az illeszkedések száma közel van a Szemerédi-Trotter becslés által adott korláthoz. Megmutatjuk – ami intuitive sejthető – hogy az ilyen rendszerek tartalmaznak háromszögeket,

sőt nagyobb teljes részstruktúrákat is. Ez az első ilyen struktúra erdmény. A bizonyítás Szemerédi regularitási lemmáján alapul, illetve Ruzsa-Szemerédi tétetlét használja.

j. **Kilencedik cikk:** Összeg-szorzat becslések geometriai alkalmazása

(Mei-Chu Changgal közös cikk) 'Sum-product theorems and incidence geometry'. JOURNAL OF THE EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY. 9.3 (2007): 545 - 560.

Összeg-szorzat becsléseket alkalmazunk geometriai állítások igazolására. Egy tipikus állítás a következő: Ha a síkban négy ponton keresztül úgy adott $n-n-n-n$ egyenes, hogy legalább $n^{1.9}$ pont illeszkedik négy egyenesre, akkor a négy pont kollineáris. A bizonyításra az adott lehetőséget, hogy az összeg-szorzat becsléseknél alkalmazott geometriai technikák általánosan is alkalmazhatók.

k. **Tizedik cikk:** Erdős és Ulam egy problémájáról

[23] (Frank De Zeeuw-al közös cikk) 'On a question of Erdos and Ulam'. Discrete and Computational Geometry, Volume 43, Issue 2 (2010), Page 393-401.

Erdős kérdezte hogy vajon bármely k természetes számra megadható-e k általános helyzetű pont a síkon (nincs három egy egyenesen és négy egy körön) úgy hogy bármely kettő távolsága egész szám? Sasha Kurz talált egy ilyen egész távolságú ponthalmazt hét ponton, ez eddig a rekord. A másik oldalról Ulam kérdezte, hogy megadható-e egy mindenütt sűrű ponthalmaz, hogy bármely kettő távolsága racionális szám. Erdős sejtette hogy ez nem lehetséges. Több kutató is próbálkozott racionális távolságú ponthalmazokat találni algebrai görbék mentén.

Diákommal, Frank De Zeeuw-val, megmutattuk hogy ha egy algebrai görbe tartalmaz egy végtelen racionális ponthalmazt, akkor a pontok egy körön vagy egyenesen vannak.

4. Negyedik fejezet: Különböző távolságok

l. **Tizenegyedik cikk:** A különböző távolságok száma magasabb dimenzióban

[16] (Van Vu-val közös cikk) Near optimal bound for the distinct distances problem in high dimensions. COMBINATORICA, 28.1 (2008): 113 – 125.

Erdős sejtésének megfelelően n pont a d-dimenziós euklideszi térben legalább

$$n^{\frac{2}{d}-\frac{2}{d(d+2)}}$$

különböző távolságot határoz meg.

m. **Tizenkettedik cikk:** Különböző távolságok homogén ponthalmazokban

[19](Tóth, Csabával közös cikk) Distinct distances in homogeneous sets in Euclidean space. Discrete Comput. Geom. 35 (2006), no. 4, 537–549.

Ha n pont egyenletes eloszlású a d-dimenziós euklideszi térben akkor ezek legalább

$$n^{\frac{2d}{d^2+1}}$$

különböző távolságot határoznak meg.

References

[1] A. Balog, E. Szemerédi, A statistical theorem of set addition, Combinatorica 14 (1994), 263268.

[2] Rödl, V., Nagle, B., Skokan, J., Schacht, M., Kohayakava, Y. The hypergraph regularity method and its applications. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 102 (2005), no. 23, 8109–8113

[3] Gowers, W. T. Quasirandomness, counting and regularity for 3-uniform hypergraphs. Combin. Probab. Comput. 15 (2006), no. 1-2, 143–184.

[4] I. Ruzsa, Generalized arithmetic progressions and sumsets, Acta Math. Hungar. 65 (1994), 379388.

[5] Szemerédi, E. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. Collection of articles in memory of JuriĭVladimirovič Linnik. Acta Arith. 27 (1975), 199–245.

[6] Gowers, W. T. A new proof of Szemerédi's theorem, (2001) *Geom. Funct. Anal.* **11**, 465–588.

[7] Furstenberg, H. Katznelson, Y. (1978) *J. Analyse Math.* **34**, 275–291.

[8] Furstenberg, H.; Katznelson, Y. A density version of the Hales-Jewett theorem. J. Anal. Math. 57 (1991), 64–119.

[9] Furstenberg, H.; Katznelson, Y. A density version of the Hales-Jewett theorem for $k = 3$. Graph theory and combinatorics (Cambridge, 1988). Discrete Math. 75 (1989), no. 1-3, 227–241.

[10] Solymosi, Jozsef, On the number of sums and products. Bull. London Math. Soc. 37 (2005), no. 4, 491–494.

[11] Solymosi, Jozsef, Bounding multiplicative energy by the sumset, Advances in Mathematics, Volume 222, Issue 2, 2009, 402–408

[12] Solymosi, Jozsef. 'Dense arrangements are locally very dense I.'. SIAM JOURNAL ON DISCRETE MATHEMATICS. 20.3 (2006): 623 - 627.

[13] Solymosi, J.; Tóth, Cs. D. Distinct distances in the plane. Discrete Comput. Geom. 25 (2001), no. 4, 629–634.

[14] Solymosi, Jozsef; Tardos, Gábor; Tóth, Csaba D. The k most frequent distances in the plane. Discrete Comput. Geom. 28 (2002), no. 4, 639–648.

[15] Solymosi, J. A note on a question of Erdős and Graham. Combin. Probab. Comput. 13 (2004), no. 2, 263–267.

[16] Solymosi, Jozsef; Van Vu. Near optimal bound for the distinct distances problem in high dimensions. COMBINATORICA, 28.1 (2008): 113 – 125.

[17] Solymosi, Jozsef and Van Vu. 'Sum-product estimates for well-conditioned matrices'. Bulletin of the London Mathematical Society 2009 41(5):817-822

[18] Solymosi, Jozsef. Arithmetic Progressions in Sets with Small Sumsets'. Combinatorics, Probability and Computing. 15 (2006): 597 - 603.

[19] Solymosi, Jozsef; Tóth, Csaba D. Distinct distances in homogeneous sets in Euclidean space. Discrete Comput. Geom. 35 (2006), no. 4, 537–549.

[20] Solymosi, Jozsef. 'Regularity, uniformity, and quasirandomness'. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 102.23 (2005): 8075 – 8076.

[21] Solymosi, Jozsef. 'Note on a generalization of Roth's theorem'. Discrete and computational geometry; Algorithms Combin. Vol. 25. Ed. Janos Pach. Springer, 2003. 825 – 827.

[22] Chang, Mei-Chu and Jozsef Solymosi. 'Sum-product theorems and incidence geometry'. JOURNAL OF THE EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY. 9.3 (2007): 545 - 560.

[23] Solymosi, Jozsef and Frank De Zeeuw. 'On a question of Erdos and Ulam'. Discrete and Computational Geometry, Volume 43, Issue 2 (2010), Page 393–401.

[24] Bourgain, J.; Katz, N.; Tao, T. A sum-product estimate in finite fields, and applications. Geom. Funct. Anal. 14 (2004), no. 1, 27–57.

[25] Hart,D. Iosevich, A. and Solymosi, J. Sum product estimates in finite fields via Kloosterman sums, INTERNATIONAL MATHEMATICS RESEARCH NOTICES. 2007: 1–14.

[26] Elekes, György, On the Number of Sums and Products, Acta Arithmetica LXXXI.4, (1997) 365-367

[27] Elekes, György; Nathanson, Melvyn B.; Ruzsa, Imre Z. Convexity and sumsets. J. Number Theory 83 (2000), no. 2, 194–201.

[28] Erdős, P. On some of my favourite theorems. Combinatorics, Paul Erdős is eighty, Vol. 2 (Keszthely, 1993), 97–132, Bolyai Soc. Math. Stud., 2, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996.

[29] W.T. Gowers, *Lower bounds of tower type for Szemerédi's Uniformity Lemma*, Geom. Funct. Anal 7, 1997, no. 2, pp. 322-337.

[30] J. Komlós, *The Blow-up Lemma*, Combinatorics, Probability and Computing, 8, 1999, pp. 161-176.

[31] J. Komlós, M. Simonovits, *Szemerédi's Regularity Lemma and its applications in graph theory*, in Combinatorics, Paul Erdős is Eighty (D. Miklós, V.T. Sós, and T. Szőnyi, Eds.), pp. 295-352, Bolyai Society Mathematical Studies, Vol. 2, János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1996.

[32] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arithmetica 27, 1975, pp. 199-245.

[33] E. Szemerédi, *Regular partitions of graphs*, Colloques Internationaux C.N.R.S. N$^{\underline{o}}$ 260 - Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes, Orsay, 1976, pp. 399-401.

[34] T. Tao, *A variant of the hypergraph removal lemma*, Journal of Combinatorial Theory, Ser. A 113, 2006, pp. 1257-1280.

[35] T. Tao, *Szemerédi's regularity lemma revisited*, Contrib. Discrete Math. 1, 2006, pp. 8-28.