Kvantum Grupoidok
Doktori Értekezés Tézisei
2010

Böhm Gabriella
MTA KFKI Részecske- és Magfizikai Kutatóintézet
Elméleti Főosztály

A 'kvantum csoport' kifejezést több rokon értelemben is használják. A népszerű *WikipediA* „Quantum group" szócikke a következőt írja [47]. *„A matematikában és az elméleti fizikában a 'kvantum csoport' kifejezés különféle további struktúrákkal ellátott nem kommutatív algebrákat jelent. Általában a 'kvantum csoport' valamiféle Hopf-algebra. Nincs egyetlen, az összes változatot magába foglaló definíció, hanem lényegében hasonló objektumok egy családjára kell gondolni. [...]"* Az elnevezés nyilvánvalóan onnan ered, hogy bármely csoport elemei által tetszőleges test fölött kifeszített vektortér természetesen ellátható egy 'kvantum csoport' azaz Hopf-algebra struktúrával; s a motiváló példákat ezen 'klasszikus' esetek deformálásával vagyis 'kvantálásával' konstruálták.

Hasonlóképpen, a dolgozatban szereplő 'kvantum grupoidok' Hopf-algebrák különféle általánosításai nem feltétlenül kommutatív (de mindig asszociatív és egységelemes) alap gyűrűk esetére. Akárcsak a kvantum csoportok esetén, az elnevezés eredete a motivációul szolgáló példa: egy (véges sok objektummal rendelkező) grupoid elemei által kifeszített vektortér. Noha ezen példában az identitás morfizmusok által generált alapgyűrű kommutatív, megfigyelhetjük azt a nem kommutatív vonást, hogy jobb és bal hatása a grupoidon különböző.

Az irodalomban előforduló hasonló fogalmak közül kettővel foglalkozunk részletesen. A Szlachányi Kornéllal közösen bevezetett *Hopf-algebroidokkal* és az ezek speciális esetét jelentő, de történetileg előbb, szintén Szlachányival együttműködésben született *gyenge Hopf-algebrákkal*. Mindkettőt általánosítja a Schauenburg által javasolt '$\times_R$-Hopf-algebra' [37], másfelől a gyenge Hopf-algebra általánosabb, mint a Hayashi féle ' lap-algebra' (face algebra) [22], a Yamanouchi féle általánosított Kac-algebra [43] és az Ocneanu féle 'para csoport' [32]. Hopf-algebroidok (de nem feltétlenül gyenge Hopf-algebrák) az algebrai topológiában szintén Hopf-algebroidnak nevezett kogrupoid objektumok a kommutatív algebrák kategóriájában [35, Appendix I].

Noha a Hopf-algebrák vizsgálata rendkívül gazdag és sikeres tudományterület immár több, mint ötven éve, az 1990-es években egyre több és több kérdés motiválta egy általánosabb struktúra bevezetését. A Poisson geometriában a dinamikai Yang–Baxter-egyenlet megoldásai ún. dinamikai kvantum csoportokkal kapcsolatosak, melyek nem Hopf-algebrák. A topológiában bizonyos újabb invariánsok nem származtathatók Hopf-algebrákból. A Connes féle nem kommutatív geometriában Hopf-algebrák nem kommutatív algebrákkal való kiterjesztései jelentek meg szimmetriaként. Faktorok véges mélységű, de reducibilis kiterjesztései (az irreducibilis esettel szemben) nem írhatók Hopf-algebrákkal vett kereszt szorzatként. Az alacsony dimenziós kvantumtérelméletekben a nem egész értékű kvantum dimenziók fellépése kizárja, hogy a szuperszelekciós szimmetriát Hopf-algebra írja le. A klasszikus Galois-elmélet Hopf-algebrai általánosításának gyenge pontja, hogy egy Hopf–Galois-kiterjesztés nem jellemezhető a szimmetriát leíró Hopf-algebrára való explicit hivatkozás nélkül, tisztán a kiterjesztés tulajdonságainak megfogalmazásával. Mint az utóbbi évtizedben kiderült, mindezen kérdésekben sikeresen alkalmazhatók a Hopf-algebroidok.

A dolgozat eredményei három fő téma köré csoportosíthatók. Az első a Hopf-algebroidok tisztán algebrai axiomatikus tárgyalása. A második alkalmazásuk a nem kommutatív Galois-elméletben. Harmadikként olyan kategóriaelméleti eredményeket ismertetünk, melyek gyenge Hopf-algebrákhoz kapcsolódó konstrukciókat helyeznek el egy tágabb fogalomkörben illetve általánosítják azokat. Keletkezési idejüket tekintve a kiválasztott publikációk a szerző munkásságának bő tíz évét ölelik fel, a PhD fokozat megszerzésétől a legutóbbi időkig.

I. A kitűzött kutatási feladatok.

I.1. Hopf-algebroidok definíciója és vizsgálata.

A bialgebra fogalom általánosítása nem kommutatív alapgyűrűk esetére Takeuchi nevéhez fűződik és több, mint harminc éve fellelhető [42]. Takeuchi eredetileg a $\times_R$-bialgebra elnevezést használta de (elsősorban J.H. Lu [26] munkája nyomán) napjainkban a *bialgebroid* elnevezés elfogadottabb.

Az irodalomban több alternatív javaslat is található arra, milyen további tulajdonságot követeljünk meg egy *Hopf-algebroidtól.* A Hopf-algebra antipódja a $H \to H$ identitás leképezés inverze az $(f * g)(h) := f(h_1)g(h_2)$ konvolúció szorzásra nézve. Egy R gyűrű feletti B bialgebroid esetén azonban az identitás leképezés nem eleme (az alap R-kogyűrű és az alap R-gyűrű közötti bimodulus leképezések alkotta) konvolúció algebrának.

Szlachányi Kornéllal közös vállalkozásunk célja egy olyan Hopf-algebroid fogalom megalkotása volt, amely kategóriaelméleti szempontból is természetes, amely alkalmas a szimmetria leírására (minél több) olyan helyzetben, amikor a Hopf-algebrák már nem használhatóak, s amelyre a Hopf-algebrákra vonatkozó eredmények minél szélesebb köre kiterjeszthető. Az általunk javasolt definíció szerint egy Hopf-algebroidban egy adott algebrán nem egy, hanem két kompatibilis bialgebroid struktúra van jelen R illetve R^{op} fölött. Ennek megfelelően van két konvolúció-algebra, melyeket egy Morita-összefüggés köt össze. Az identitás leképezés a Morita-összefüggés egyik bimodulusának eleme, az antipód a másiknak – s ezek egymás inverzei a Morita-összefüggés szorzására nézve [63]. A Hopf-algebroidokról írt első, [51] cikkben arra az esetre szorítkoztunk, amikor az így definiált antipód ráadásul bijektív, így az egyik bialgebroid struktúra redundáns információt jelent: megkapható a másikból az antipód és annak inverze által.

I.2. Hopf-algebroidok integrálelmélete.

Ahogyan a Hopf-algebrák esetében, ugyanúgy a Hopf-algebroidok vizsgálatában is fontos információk nyerhetők az algebrai szerkezetről az integrálok tanulmányozásával. Az [52] munka célja ennek a kérdéskörnek a vizsgálata; annak a megfelelő integrál fogalomnak a megtalálása, mely lehetőséget teremt olyan algebrai tulajdonságok leírására, mint a félig (ko)egyszerűség, a (ko)szeparabilitás vagy a (kvázi-) Frobenius-tulajdonság. A megfelelő integrál fogalom segítségével a Hopf-algebroidokra a Hopf-algebrákkal megnyugtató módon analóg tételek igazolhatóak. A lényeges különbség, hogy míg a Hopf-algebrák esetén egyetlen kommutatív gyűrű feletti algebra (ill. koalgebra) tulajdonságairól van szó, egy Hopf-algebroidban négy (páronként izomorf) gyűrűt (ill. két kogyűrűt) kell vizsgálnunk, nem kommutatív algebrák fölött.

I.3. Galois-kiterjesztések Hopf-algebroid szimmetriával.

A Hopf–Galois-elmélet alkalmazása igen széles – a csoport gradált algebrák elegáns tárgyalásától a nem kommutatív differenciálgeometria principális nyalábjainak megfogalmazásáig. Az [53] munka célja az első lépések megtétele a Galois-elmélet Hopf-algebroidokra való általánosítása felé. Az adódó elmélet magában foglalja például a grupoid gradált algebrák és a grupoid nyalábok nem kommutatív megfelelőinek leírását.

Egy Hopf-algebrával való Galois-kiterjesztés alatt tulajdonképpen az alap bialgebrával való kiterjesztést értjük. Mégis, a Hopf-algebrák további tulajdonságait kihasználva, Hopf-algebrákkal való kiterjesztésekre erősebb állítások igazolhatók, mint bialgebrákkal való kiterjesztésekre. A bialgebroidokkal illetve Hopf-algebroidokkal való kiterjesztések között sokkal alapvetőbb elvi különbségek vannak, abból adódóan, hogy egy Hopf-algebroidban egyszerre két bialgebroid (egy bal és egy jobb) van jelen. Tekinthetünk Galois-kiterjesztéseket ezek bármelyikével; az első kérdés ezek viszonyának tisztázása. Fontos látnunk továbbá, hogy a Hopf–Galois-kiterjesztésekre vonatkozó tételek közül melyek terjeszthetők ki Hopf-algebroidokra.

I.4. Gyenge Hopf-algebrák Doi–Hopf-modulusai.

Ha R tetszőleges algebra egy k kommutatív gyűrű felett, akkor minden R-gyűrű k-algebra is. Ugyanakkor egy R-kogyűrű nem feltétlenül k-koalgebra, hacsak R nem rendelkezik további tulajdonságokkal; például R 1 indexű Frobenius-algebra k felett. Így ha B bialgebroid egy R 1 indexű Frobenius-algebra felett, akkor hordoz egy algebra és egy koalgebra struktúrát is. Ezek kielégítik a gyenge bialgebra axiómákat sőt, minden gyenge bialgebra előáll ilyen módon egy 1 indexű Frobenius-algebra fölötti bialgebroidból. A gyenge Hopf-algebrák pontosan azok a H, L és R anti-izomorf 1 indexű Frobenius-algebrák fölötti Hopf-algebroidok, melyekben a két alap (L- illetve R-) kogyűrű ugyanazon koalgebrából adódik a két $H \otimes_k H \twoheadrightarrow H \otimes_R H$ illetve $H \otimes_k H \twoheadrightarrow H \otimes_L H$ epimorfizmus szeléseinek segítségével.

Egy bialgebra különböző Hopf-típusú modulusainak egységes leírása adható a Doi illetve Koppinen által bevezetett ún. Doi–Hopf-modulusok segítségével. A [50] publikáció célja egy analóg, a gyenge bialgebrák Hopf-típusú modulusait egységesítő fogalom kidolgozása és vizsgálata.

I.5. Gyenge Hopf-algebrákra épülő konstrukciók és a monádok gyenge elmélete.

Számos bialgebrákkal kapcsolatos eredmény megkapható a monádok általánosabb, Lack és Street nevéhez fűződő ún. formális elméletéből [40],[24]. Például, bialgebrákkal vett féldirekt szorzatok példák [24] koszorú szorzatára. Másik példaként, egy bialgebra modulus kategóriájának monoidális struktúrája az alapgyűrű modulus kategóriájának monoidális struktúrájából a [40]-ben tárgyalt felhúzással adódik.

Az [54] munka célja, hogy gyenge bialgebrákra épülő konstrukcióknak hasonló kategóriaelméleti megalapozását adja.

I.6. Gyenge bimonádok.

A bialgebrák jellemezhetők, mint pontosan azok a B k-algebrák, melyek modulusainak kategóriája (azaz az $(\mathcal{M}_k, (-) \otimes B)$ monád Eilenberg–Moore kategóriája) monoidális úgy, hogy a felejtő funktor a k-modulusok kategóriájába szigorúan monoidális Ezen a leíráson alapszik a bialgebrák Moerdijk által [27]-ban javasolt általánosítása, melyet ő eredetileg „Hopf-monádnak” hívott, de amelyre azóta inkább a kifejezőbb „bimonád” név használatos.

Természetesen felvetődik a kérdés, mi a bialgebrák két különböző irányú általánosítását – a bimonádokat és a gyenge bialgebrákat – egyaránt általánosító fogalom. E kérdés megválaszolását tűzte ki céljául Steve Lackkal Ross Streettel közös [55] munkánk.

II. Az elvégzett vizsgálatok.

Az alábbiakban a következő általános érvényű jelöléseket használjuk. Mindvégig, k egy kommutatív, asszociatív egység elemes gyűrű. A díszítetlen $\otimes$ szimbólum k-modulusok tenzor szorzatát jelöli. Minden előforduló gyűrű asszociatív és egység elemes. Egy R gyűrű jobb- illetve bal modulusainak kategóriáját $\mathcal{M}_R$-rel illetve ${}_R\mathcal{M}$-rel jelöljük, $P \to Q$ homomorfizmusaik halmazát $\mathrm{Hom}_R(P,Q)$-val illetve ${}_R\mathrm{Hom}(P,Q)$-val. A bimodulus kategória jelölése ${}_R\mathcal{M}_R$, $P \to Q$ homomorfizmusainak halmazáé ${}_R\mathrm{Hom}_R(P,Q)$. Az R-modulus tenzor szorzatot $\otimes_R$ jelöli.

II.1. Hopf-algebroidok definíciója és vizsgálata.

A Hopf-algebroid axiómáinak alábbi megfogalmazása [63]-ből való.

Legyenek L és R tetszőleges algebrák. Tekintsünk egy H algebrát, mely rendelkezik egy bal L-bialgebroid struktúrával – $s_{_L} : L \to H$ és $t_{_L} : L^{op} \to H$ kommutáló értékkészletű algebra homomorfizmusokkal; $\delta_{_L} : {}_{_L}H_{_L} \to {}_{_L}H_{_L} \otimes_L {}_{_L}H_{_L}$ koszorzással; illetve $\varepsilon_{_L} : {}_{_L}H_{_L} \to L$ koegységgel – valamint egy jobb R-bialgebroid struktúrával – $s_{_R} : R \to H$ és $t_{_R} : R^{op} \to H$ kommutáló értékkészletű algebra homomorfizmusokkal; $\delta_{_R} : {}^{^R}H^{^R} \to {}^{^R}H^{^R} \otimes_R {}^{^R}H^{^R}$ koszorzással; illetve $\varepsilon : {}^{^R}H^{^R} \to R$ koegységgel. A négy, $s_{_R} : R \to H$, $t_{_R} : R^{op} \to H$, $s_{_L} : L \to H$ és $t_{_L} : L^{op} \to H$ algebra homomorfizmus különböző modulus struktúrákat indukál H-n:

- A ${}_{_R}H$-val jelölt bal R-moduluson a hatás $R \otimes H \to H$, $r \otimes h \mapsto s_{_R}(r)h$;
- A $H_{_R}$-val jelölt jobb R-moduluson a hatás $H \otimes R \to H$, $h \otimes r \mapsto t_{_R}(r)h$;
- A ${}^{^R}H$-val jelölt bal R-moduluson a hatás $R \otimes H \to H$, $r \otimes h \mapsto ht_{_R}(r)$;
- A $H^{^R}$-val jelölt jobb R-moduluson a hatás $H \otimes R \to H$, $h \otimes r \mapsto hs_{_R}(r)$.

Hasonlóan,

- A ${}_{_L}H$-val jelölt bal L-moduluson a hatás $L \otimes H \to H$, $l \otimes h \mapsto s_{_L}(l)h$;
- A $H_{_L}$-val jelölt jobb L-moduluson a hatás $H \otimes L \to H$, $h \otimes l \mapsto t_{_L}(l)h$;
- A ${}^{^L}H$-val jelölt bal L-moduluson a hatás $L \otimes H \to H$, $l \otimes h \mapsto ht_{_L}(l)$;
- A $H^{^L}$-val jelölt jobb L-moduluson a hatás $H \otimes L \to H$, $h \otimes l \mapsto hs_{_L}(l)$.

Ezen hatások kombinációival különböző bimodulus struktúrákat tekinthetünk H-n.

A két bialgebroid között követeljük meg az alábbi kompatibilitási axiómákat:

$$s_{_L}\varepsilon_{_L}t_{_R} = t_{_R}; \qquad t_{_L}\varepsilon_{_L}s_{_R} = s_{_R}; \qquad s_{_R}\varepsilon_{_R}t_{_L} = t_{_L}; \qquad t_{_R}\varepsilon_{_R}s_{_L} = s_{_L}. \tag{1}$$

Könnyen látható, hogy ezen axiómák következtében $\varepsilon_{_R}s_{_L} : L \to R^{op}$ algebra izomorfizmus, melynek inverze $\varepsilon_{_L}t_{_R}$. Ugyanígy, $\varepsilon_{_L}s_{_R} : R \to L^{op}$ algebra izomorfizmus, melynek inverze $\varepsilon_{_R}t_{_L}$. (1) teljesülése esetén értelmes megkövetelni a következő axiómákat.

$$(\delta_{_R} \otimes_L \mathrm{Id})\delta_{_L} = (\mathrm{Id} \otimes_R \delta_{_L})\delta_{_R}; \qquad (\delta_{_L} \otimes_R \mathrm{Id})\delta_{_R} = (\mathrm{Id} \otimes_L \delta_{_R})\delta_{_L}, \tag{2}$$

mint $H \to {}^R H^R \otimes_R {}^R H_L \otimes_L {}_L H_L$ illetve $H \to {}_L H_L \otimes_L {}_L H^R \otimes_R {}^R H^R$ leképezések. Két, a fenti kapcsolatban lévő bialgebroid meghatároz egy Morita-összefüggést a $\mathrm{Hom}({}_L H_L, {}_L H^L)$ és $\mathrm{Hom}({}^R H^R, {}_R H^R)$ konvolúció-algebrák között. A két szereplő bimodulus $\mathrm{Hom}({}_L H^R, {}_L H^R)$ és $\mathrm{Hom}({}^R H_L, {}_R H^L)$. A Morita-összefüggés valamennyi művelete a megfelelő konvolúció szorzással adott; azaz H bármely h elemére,

$$\begin{aligned}
(\phi * \phi')(h) &= \phi(h_1)\phi'(h_2), && \phi, \phi' \in \mathrm{Hom}({}_L H_L, {}_L H^L); \\
(\psi * \psi')(h) &= \psi(h^1)\psi'(h^2), && \psi, \psi' \in \mathrm{Hom}({}^R H^R, {}_R H^R); \\
(\phi * \alpha)(h) &= \phi(h_1)\alpha(h_2), && \phi \in \mathrm{Hom}({}_L H_L, {}_L H^L),\ \alpha \in \mathrm{Hom}({}_L H^R, {}_L H^R); \\
(\alpha * \psi)(h) &= \alpha(h^1)\psi(h^2), && \psi \in \mathrm{Hom}({}^R H^R, {}_R H^R),\ \alpha \in \mathrm{Hom}({}_L H^R, {}_L H^R); \\
(\psi * \beta)(h) &= \psi(h^1)\beta(h^2), && \psi, \in \mathrm{Hom}({}^R H^R, {}_R H^R),\ \beta \in \mathrm{Hom}({}^R H_L, {}_R H^L); \\
(\beta * \phi)(h) &= \beta(h_1)\phi(h_2), && \phi \in \mathrm{Hom}({}_L H_L, {}_L H^L),\ \beta \in \mathrm{Hom}({}^R H_L, {}_R H^L); \\
(\alpha * \beta)(h) &= \alpha(h^1)\beta(h^2), && \alpha \in \mathrm{Hom}({}_L H^R, {}_L H^R),\ \beta \in \mathrm{Hom}({}^R H_L, {}_R H^L); \\
(\beta * \alpha)(h) &= \beta(h_1)\alpha(h_2), && \alpha \in \mathrm{Hom}({}_L H^R, {}_L H^R),\ \beta \in \mathrm{Hom}({}^R H_L, {}_R H^L),
\end{aligned} \tag{3}$$

ahol a $\delta_L(h) = h_1 \otimes_L h_2$ és $\delta_R(h) = h^1 \otimes_R h^2$ Sweedler–Heynemann-féle jelölést használjuk alsó, illetve felső indexekkel, mindkét esetben implicit összegzést értve. Nyilvánvalóan, a $H \to H$ identitás leképezés a $\mathrm{Hom}({}_L H^R, {}_L H^R)$ bimodulus eleme.

1. Definíció. Egy *Hopf-algebroid* alatt a következő struktúrát értjük. Egy H algebrát, ellátva egy bal L-bialgebroid és egy jobb R-bialgebroid struktúrával, melyekre (1) és (2) axiómák teljesülnek, továbbá a (3) Morita-összefüggésben $\mathrm{Id} \in \mathrm{Hom}({}_L H^R, {}_L H^R)$ invertálható. Expliciten, az utóbbi követelmény azt jelenti, hogy létezik $S \in \mathrm{Hom}({}^R H_L, {}_R H^L)$, melyre

$$h^1 S(h^2) = s_L \varepsilon_L(h); \qquad S(h_1)h_2 = s_R \varepsilon_R(h), \qquad \forall h \in H. \tag{4}$$

2. Tétel ([52] Proposition 2.3)**.** *Egy H Hopf-algebroid S antipódjára a következő állítások teljesülnek.*

- *S homomorfizmus az $(s_R : R \to H, t_R : R^{op} \to H)$ $R \otimes R^{op}$-gyűrűből az $(s_R = t_L \varepsilon_L s_R : R \to H, s_L \varepsilon_L s_R : R^{op} \to H)$ $R \otimes R^{op}$-gyűrű ellentettjébe;*
- *S homomorfizmus az $(s_L : L \to H, t_L : L^{op} \to H)$ $L \otimes L^{op}$-gyűrűből az $(s_L = t_R \varepsilon_R s_L : L \to H, s_R \varepsilon_R s_L : L^{op} \to H)$ $L \otimes L^{op}$-gyűrű ellentettjébe;*
- *S homomorfizmus a $({}_L H_L, \delta_L, \varepsilon_L)$ L-kogyűrűből abba a kogyűrűbe, melybe az $\varepsilon_L s_R : R^{op} \to L$ algebra izomorfizmus által indukált ${}_{R^{op}}\mathcal{M}_{R^{op}} \cong {}_L\mathcal{M}_L$ monoidális izomorfizmus viszi $({}^R H^R, \delta_R, \varepsilon_R)$ R-kogyűrű ellentettjét;*
- *S homomorfizmus a $({}^R H^R, \delta_R, \varepsilon_R)$ R-kogyűrűből abba a kogyűrűbe, melybe az $\varepsilon_R s_L : L^{op} \to R$ algebra izomorfizmus által indukált ${}_{L^{op}}\mathcal{M}_{L^{op}} \cong {}_R\mathcal{M}_R$ monoidális izomorfizmus viszi $({}_L H_L, \delta_L, \varepsilon_L)$ L-kogyűrű ellentettjét.*

A 2. Tételből nyilvánvaló, hogy abban az esetben, ha egy Hopf-algebroid antipódja bijektív, a jobb bialgebroidot definiáló valamennyi leképezés kifejezhető a bal bialgebroid struktúrát leíró leképezésekkel, az antipóddal illetve annak inverzével. A Hopf-algebroidok axiómái ezen adatokkal megfogalmazva [51] 4. fejezetében találhatók.

3. Megjegyzés. Nagyon fontos hangsúlyoznunk, hogy a (2) axiómák $H \to {}^R H^R \otimes_R {}^R H_L \otimes_L {}_L H_L$ illetve $H \to {}_L H_L \otimes_L {}_L H^R \otimes_R {}^R H^R$ leképezésekre vonatkoznak. Tudjuk ugyan, hogy az első egyenlőség bal oldalán szereplő leképezés faktorizálódik $(H \times_R H) \times_L H$-n keresztül, a jobb oldalon álló pedig $H \times_R (H \times_L H)$-n keresztül. Ezek azonban nem részhalmazai ${}^R H^R \otimes_R {}^R H_L \otimes_L {}_L H_L$-nak, melyeknek lehetne a metszetét venni. Noha a nyilvánvaló $(H \times_R H) \times_L H \to (H \times_R H) \otimes_L H$ leképezés injektív, $(H \times_R H) \otimes_L H \to (H \otimes_R H) \otimes_L H$ nem az, legalábbis további feltevések nélkül nem. Így az olyan φ leképezések esetén, melyek mondjuk $(H \times_R H) \times_L H$-en vannak értelmezve, de nem terjeszthetők ki $H \otimes_R H \otimes_L H$-ra (pl. $H \otimes_R \varepsilon_R \otimes_L H : (H \times_R H) \times_L H \to H \times_L H$), a $\varphi(\delta_R \otimes_L \mathrm{Id})\delta_L$ kifejezés átalakítására nem alkalmazható az (2) axióma. Sweedler indexeket használva, noha $h_1{}^1 \otimes_R h_1{}^2 \otimes_L h_2 = h^1 \otimes h^2{}_1 \otimes_L h^2{}_2$, mint ${}^R H^R \otimes_R {}^R H_L \otimes_L {}_L H_L$ elemei, a $\varphi(h_1{}^1 \otimes_R h_1{}^2 \otimes_L h_2) = \varphi(h^1 \otimes h^2{}_1 \otimes_L h^2{}_2)$ egyenlőség hibás, mivel a jobb oldal rosszul definiált. Sajnos ilyen típusú – saját magam által, vagy hivatkozott cikkben elkövetett – hiba miatt több cikkem javításra szorult.

A Hopf-algebroidok a gyenge Hopf-algebrák (így a Hopf-algebrák) általánosításai a következő értelemben.

4. Tétel ([51] Example 4.8)**.** *Legyen B egy (gyenge) bialgebra $B \to B \otimes B$, $b \mapsto b_1 \otimes b_2$ koszorzással és $\varepsilon : B \to k$ koegységgel (l. 20. Definíció). Ezen adatok meghatároznak egy jobb bialgebroid struktúrát B-n az $\{1_1\varepsilon(b1_2)\}_{b\in B}$ részalgebra fölött és egy bal bialgebroid struktúrát az $\{\varepsilon(1_1 b)1_2\}_{b\in B}$ részalgebra fölött. Ha továbbá B (gyenge) Hopf-algebra S antipóddal (l. 21. Definíció), akkor a fenti bialgebroidok és S Hopf-algebroid struktúrát definiálnak B-n.*

Hopf-algebroidok fontos alkalmazása, hogy leírják algebrák kettes mélységű Frobenius-kiterjesztéseinek szimmetriáját. A Frobenius-tulajdonság azt jelenti, hogy M végesen generált projektív (jobb vagy bal) N-modulus és a (jobb vagy bal) modulus homomorfizmusokból álló $\mathrm{Hom}_N(M, N)$ izomorf M-mel mint (N-M vagy M-N) bimodulus. A kettes mélység feltétel azt jelenti, hogy $M \otimes_N M$ direkt összeadandó M véges sok példányának direkt összegében – mint N-M bimodulus és M-N bimodulus.

5. Tétel ([51] Section 3)**.** *Tekintsünk egy $N \subseteq M$ kettes mélységű és Frobenius-tulajdonságú algebra kiterjesztést. Ezen feltevések mellett mind M N-bimodulus endomorfizmusainak algebrája, mind az $M \otimes_N M$ M-bimodulus centruma (melynek algebra struktúrája a faktoronkénti szorzással ill. ellentett szorzással adott) Hopf-algebroidok bijektív antipóddal.*

Az 5. Tétel általánosításaként, bármely k-lineáris bikategória Frobenius-tulajdonságú és kettes mélységű 1-cellája meghatároz két (megfelelő értelemben duális) Hopf-algebroidot, l. [76].

További példák Hopf-algebroidokra [51] 4.3 fejezetében találhatók.

6. Tétel ([51] Proposition 4.2)**.** *Egy L és R algebrák fölötti Hopf-algebroidban a*

$$H^L \otimes_L {}_L H \to H^R \otimes_R {}^R H \qquad h' \otimes_L h \mapsto h' h^1 \otimes_R h^2$$

leképezés bijektív – azaz $s_L : L \to H$ Galois-kiterjesztés az alap jobb bialgebroiddal. Vagyis [37] szóhasználatával, minden Hopf-algebroid $\times_R$-Hopf-algebra.

Ezt a megfigyelést kombinálva Schauenburg ([37] Theorem and Definition 3.5) eredményével, azt látjuk, hogy az $\mathcal{M}_H \to {}_R\mathcal{M}_R$ felejtő funktor őrzi a jobbról zárt struktúrát. Ebből következik, hogy azon jobb H-modulusoknak, melyek végesen generált projektív bal R-modulusok (így van bal duálisuk ${}_R\mathcal{M}_R$-ben), van bal duálisuk $\mathcal{M}_H$-ban is, melyet az $\mathcal{M}_H \to {}_R\mathcal{M}_R$ felejtő funktor őriz.

Day és Street [15]-ben (a problémát általánosabban, monoidális bikategóriákban megfogalmazva) azt a kérdést vizsgálták, hogy az $\mathcal{M}_H \to {}_R\mathcal{M}_R$ felejtő funktor mely H jobb R-bialgebroidokra őrzi a jobbról zártságnál erősebb $*$-autonóm struktúrát. Az ehhez szükséges további struktúrát H-n *$*$-autonóm* struktúrának nevezték [15, Section 9].

7. Tétel ([51] Theorem 4.7)**.** *Legyen B egy jobb bialgebroid. Egy erős *-autonóm struktúra (a [15]-ben tárgyalt értelemben) B-n ekvivalens egy bijektív antipóddal mely B-t Hopf-algebroiddá teszi.*

II.2. Hopf-algebroidok integrálelmélete.

Ha H egy bal L-bialgebroid, akkor L bal H-modulus a $h.l := \varepsilon(hs(l))$ hatás révén. Az alábbi definíció ezt a tényt használja fel.

8. Definíció. Legyen B egy bal L-bialgebroid. Egy M bal B-modulus *invariánsainak* nevezzük a

$$ {}_B\mathrm{Hom}(L, M) \cong \{n \in M | \forall h \in B,\ h.n = s\varepsilon(h).n\} $$

k-részmodulus elemeit. A *bal integrálok B-ben* a bal reguláris B-modulus invariánsai.

Szimmetrikusan definiáljuk egy jobb bialgebroid jobb modulusainak invariánsait és az integrálokat mint a jobb reguláris modulus invariánsait. Egy Hopf-algebroidban egyszerre van jelen egy jobb és egy bal bialgebroid struktúra, így ez esetben mind bal- mind jobb integrálokat értelmezhetünk. Egy bal (vagy jobb) integrál antipód általi képe jobb (vagy bal) integrál.

Egy bialgebroid komodulusain az alap kogyűrű komodulusait értjük. Bármely B bal L-bialgebroid esetén L jobb B-komodulus az $L \to L \otimes_L B \cong B$, $l \mapsto s(l)$ kohatás révén és bal B-komodulus is az $L \to B \otimes_L L \cong B$, $l \mapsto t(l)$ kohatás révén. Így a B*-beli* integrálok duálisaként bevezethetjük az alábbi fogalmakat is.

9. Definíció. Legyen B egy bal L-bialgebroid. Egy *s-integrál B-n* egy $B \to L$ bal B-komodulus homomorfizmus, azaz egy $\varrho : B \to L$ leképezés, amire

$$ \varrho(s(l)h) = l\varrho(h); \qquad t\varrho(h_2)h_1 = s\varrho(h), \qquad\qquad l \in L,\ h \in H. $$

Egy *t-integrál B-n* egy $B \to L$ jobb B-komodulus homomorfizmus, azaz egy $\varrho : B \to L$ leképezés, amire

$$ \varrho(t(l)h) = \varrho(h)l; \qquad s\varrho(h_1)h_2 = t\varrho(h), \qquad\qquad l \in L,\ h \in H. $$

Szimmetrikusan definiálunk integrálokat egy B jobb R-bialgebroidon, mint bal- illetve jobb komodulus homomorfizmusokat $B \to R$.

Ha egy B bal L-bialgebroidban ${}_LB$ végesen generált projektív bal L-modulus, így ${}_L\mathrm{Hom}(B, L)$ jobb L bialgebroid, akkor egy s-integrál B-n pontosan ugyanaz mint egy jobb integrál ${}_L\mathrm{Hom}(B,L)$-ban. Ha B_L végesen generált projektív jobb L-modulus, így $\mathrm{Hom}_L(B,L)$ jobb L bialgebroid, akkor egy t-integrál B-n pontosan ugyanaz mint egy jobb integrál $\mathrm{Hom}_L(B,L)$-ban.

Egy Hopf-algebroidban egyszerre van jelen egy jobb és egy bal bialgebroid struktúra, így egy Hopf-algebroidon négyféle integrál értelmezhető: s- és t-integrálok az alap bal- és jobb bialgebroidokon. Ha ϱ s-integrál a bal bialgebroidon akkor ϱS t-integrál ugyanezen a bal bialgebroidon.

Legyen H egy Hopf-algebroid L és R (szükségképpen anti-izomorf) algebrák fölött. A megfelelő értelemben (l. 10. Tétel) normált integrálok létezésének H-ban a négy $s_L : L \to H$, $t_L : L^{op} \to H$, $s_R : R \to H$ illetve $t_R : R^{op} \to H$ algebra kiterjesztés félig egyszerűségéhez illetve szeparabilitásához van köze. (Egy $R \to H$ algebra kiterjesztést *szeparábilisnak* mondunk, ha a $H \otimes_R H \to H$ szorzás felhasadó H-bimodulus epimorfizmus. Az $R \to H$ algebra kiterjesztés jobbról (illetve balról) *félig egyszerű*, ha minden olyan jobb (illetve bal) H-modulus homomorfizmus felhasad, amely felhasadó jobb (illetve bal) R-modulus epimorfizmus.)

10. Tétel ([52] Theorem 3.1)**.** *Legyen H egy Hopf-algebroid L és R algebrák fölött. A következő állítások ekvivalensek.*

- *Az $s_R : R \to H$ kiterjesztés szeparábilis;*
- *A $t_R : R^{op} \to H$ kiterjesztés szeparábilis;*
- *Az $s_L : L \to H$ kiterjesztés szeparábilis;*
- *Az $t_L : L^{op} \to H$ kiterjesztés szeparábilis;*
- *Az $s_R : R \to H$ kiterjesztés jobbról félig egyszerű;*
- *A $t_R : R^{op} \to H$ kiterjesztés jobbról félig egyszerű;*
- *Az $s_L : L \to H$ kiterjesztés balról félig egyszerű;*
- *A $t_L : L^{op} \to H$ kiterjesztés balról félig egyszerű;*
- *Létezik egy bal integrál ℓ az alap bal L-bialgebroidban, ami normált az $\varepsilon_L(\ell) = 1$ értelemben;*
- *Létezik egy jobb integrál ℓ az alap jobb R-bialgebroidban, ami normált az $\varepsilon_R(\ell) = 1$ értelemben;*
- *$\varepsilon_L : H \to L$ felhasadó epimorfizmus a bal H-modulusok kategóriájában;*
- *$\varepsilon_R : H \to R$ felhasadó epimorfizmus a jobb H-modulusok kategóriájában.*

Hasonlóképpen, megfelelő értelemben (l. 11. Tétel) normált integrálok létezésének H-n a két, L illetve R fölötti kogyűrű félig koegyszerűségéhez illetve koszeparabilitásához van köze. (Egy R fölötti H kogyűrűt *koszeparábilisnak* mondunk, ha a $H \to H \otimes_R H$ koszorzás felhasadó H-bikomodulus monomorfizmus. A H R-kogyűrű jobbról (illetve balról) *félig koegyszerű*, ha minden olyan jobb (illetve bal) H-komodulus homomorfizmus felhasad, amely felhasadó jobb (illetve bal) R-modulus monomorfizmus.)

11. Tétel ([52] Theorem 3.2)**.** *Tekintsünk egy H egy Hopf-algebroidot L és R algebrák fölött. A következő állítások ekvivalensek.*

- *H mint R-kogyűrű koszeparábilis;*
- *H mint L-kogyűrű koszeparábilis;*
- *H mint R-kogyűrű jobbról félig koegyszerű;*
- *H mint R-kogyűrű balról félig koegyszerű;*
- *H mint L-kogyűrű jobbról félig koegyszerű;*
- *H mint L-kogyűrű balról félig koegyszerű;*
- *Létezik egy s-integrál λ az alap R-bialgebroidon, ami normált a $\lambda(1) = 1$ értelemben;*
- *Létezik egy t-integrál λ az alap R-bialgebroidon, ami normált a $\lambda(1) = 1$ értelemben;*
- *Létezik egy s-integrál λ az alap L-bialgebroidon, ami normált a $\lambda(1) = 1$ értelemben;*
- *Létezik egy t-integrál λ az alap L-bialgebroidon, ami normált a $\lambda(1) = 1$ értelemben;*
- *$s_R : R \to H$ felhasadó monomorfizmus az alap jobb R-bialgebroid jobb komodulusainak kategóriájában;*
- *$t_R : R \to H$ felhasadó monomorfizmus az alap jobb R-bialgebroid bal komodulusainak kategóriájában;*
- *$s_L : L \to H$ felhasadó monomorfizmus az alap bal L-bialgebroid bal komodulusainak kategóriájában;*
- *$t_L : L \to H$ felhasadó monomorfizmus az alap bal L-bialgebroid jobb komodulusainak kategóriájában.*

Legyen H egy Hopf-algebroid L és R algebrák fölött. A megfelelő értelemben (l. 12. Tétel) nem degenerált integrálok létezése a négy $s_L : L \to H$, $t_L : L^{op} \to H$, $s_R : R \to H$ illetve $t_R : R^{op} \to H$ algebra kiterjesztés Frobenius-tulajdonságával (l. 5. Tételt megelőző bekezdés) kapcsolatos.

12. Tétel ([52] *Erratum*, Corollary 3)**.** *Tekintsünk egy H egy Hopf-algebroidot L és R algebrák fölött. A következő állítások ekvivalensek.*

- *Az $s_R : R \to H$ és a $t_R : R^{op} \to H$ kiterjesztések mindegyike Frobenius-kiterjesztés;*
- *Az $s_L : L \to H$ és a $t_L : L^{op} \to H$ kiterjesztések mindegyike Frobenius-kiterjesztés;*
- *H^R végesen generált projektív jobb R-modulus és létezik egy s-integrál λ az alap jobb R-bialgebroidon, amire a $H \to \mathrm{Hom}_R(H, R)$, $h \mapsto \lambda(h-)$ leképezés bijektív;*
- *Az S antipód bijektív, ${}^R H$ végesen generált projektív bal R-modulus és létezik egy t-integrál λ az alap jobb R-bialgebroidon, amire a $H \to {}_R\mathrm{Hom}(H, R)$, $h \mapsto \lambda(h-)$ leképezés bijektív;*

- ${}_L H$ *végesen generált projektív bal* L*-modulus és létezik egy* s*-integrál* λ *az alap bal* L*-bialgebroidon, amire a* $H \to {}_L\mathrm{Hom}(H, L)$, $h \mapsto \lambda(-h)$ *leképezés bijektív;*

- *Az* S *antipód bijektív,* ${}_L H$ *végesen generált projektív jobb* L*-modulus és létezik egy* t*-integrál* λ *az alap bal* L*-bialgebroidon, amire a* $H \to \mathrm{Hom}_L(H, L)$, $h \mapsto \lambda(-h)$ *leképezés bijektív;*

- *Létezik egy bal integrál* ℓ *az alap bal* L*-bialgebroidban, ami nem degenerált abban az értelemben, hogy mindkét*

$$\mathrm{Hom}_R(H, R) \to H,\ \varphi \mapsto \ell^1 s_R \varphi(\ell^2) \quad \text{és} \quad {}_R\mathrm{Hom}(H, R) \to H,\ \psi \mapsto \ell^2 t_R \psi(\ell^1)$$

  leképezés bijektív;

- *Létezik egy jobb integrál* ℓ *az alap jobb* R*-bialgebroidban, ami nem degenerált abban az értelemben, hogy mindkét*

$${}_L\mathrm{Hom}(H, L) \to H,\ \varphi \mapsto s_L \varphi(\ell_1)\ell_2 \quad \text{és} \quad \mathrm{Hom}_L(H, L) \to H,\ \psi \mapsto t_L \psi(\ell_2)\ell_1$$

  leképezés bijektív.

A fenti ekvivalens tulajdonságokkal rendelkező Hopf-algebroidot Frobenius Hopf-algebroidnak *mondjuk.*

A fenti tétel ([52] Theorem 4.7)-ben megjelent formája nem helyes – egy, a 3. Megjegyzésben ismertetett hiba miatt.

Az integrálok vizsgálatával szükséges és elégséges feltételek adhatók meg a négy, $s_L : L \to H$, $t_L : L^{op} \to H$, $s_R : R \to H$ illetve $t_R : R^{op} \to H$ algebra kiterjesztés kvázi-Frobenius-tulajdonságára is, l. ([52], Theorem 5.2).

Ha egy (bal vagy jobb) R-bialgebroidon valamelyik R-modulus végesen generált projektív, akkor a megfelelő duális rendelkezik egy (jobb vagy bal) bialgebroid struktúrával. Ha tehát egy Hopf-algebroid végesen generált projektív valamelyik értelemben, akkor a megfelelő duális rendelkezik egy bialgebroid struktúrával. Nem ismert azonban az általánosságnak ezen a szintjén, hogy a duális Hopf-algebroid-e. A természetes jelölt, a Hopf-algebroid antipódjával való kompozíció ugyanis nem definiál antipódot egyik duálison sem, mert erre a műveletre nézve egyikük sem zárt. Az antipóddal való kompozíció az egyik duálisból egy másikba való leképezés. Hopf-algebroidok egy szűkebb osztályáról tudható csak, hogy zárt a dualitásra nézve. Tekintsünk egy H Frobenius-Hopf-algebroidot L és R algebrák fölött. Ez esetben H összes L- illetve R- modulus struktúrája végesen generált projektív, tehát mind a négy duális rendelkezik (bal vagy jobb) bialgebroid struktúrával. Sőt, az 12. Tételben látott izomorfizmusok ezen duálisok ill. ellentettjeik közötti bialgebroid izomorfizmusokká kombinálhatók (l. [51] Theorem 5.16). Ezekkel komponálva az eredeti (bijektív) antipód transzponáltját, bármely duális ellátható egy bijektív antipóddal. Mi több, az alábbi tétel áll fenn.

13. Tétel ([51] Theorem 5.17 and Proposition 5.19)**.** *Egy Frobenius-Hopf-algebroid négy duálisa (anti-)izomorf Frobenius-Hopf-algebroid.*

II.3. Galois-kiterjesztések Hopf-algebroid szimmetriával.

Értelemszerűen, egy B (mondjuk jobb) R-bialgebroid (bal vagy jobb) komodulusai alatt az alap R-kogyűrű komodulusait értjük. Definíció szerint tehát egy (mondjuk) jobb B-komodulus egy jobb R-modulus M, ellátva egy $\varrho : M \to M \otimes_R {}^R B^R$, $m \mapsto m^0 \otimes_R m^1$ jobb R-modulus leképezéssel (ahol implicit összegzés értendő), amelyre a szokásos koasszociativitási és koegység feltételek teljesülnek. Noha egy jobb B-komodulus definíció szerint csak jobb R-modulus struktúrával rendelkezik, ([34] Lemma 1.4.1) szerint R-bimodulussá tehető az $r.m := m^0.\varepsilon(s(r)m^1)$ bal R-hatás bevezetésével. Erre a hatásra nézve minden komodulus homomorfizmus R-bimodulus homomorfizmus is. Mi több, a jobb B-komodulusok $\mathcal{M}^B$ kategóriája monoidális és a fent konstruált $\mathcal{M}^B \to {}_R\mathcal{M}_R$ funktor szigorúan monoidális. Hasonlóan, B bal komodulusainak ${}^B\mathcal{M}$ kategóriája is monoidális és van egy szigorúan monoidális funktor ${}^B\mathcal{M} \to {}_{R^{op}}\mathcal{M}_{R^{op}}$. Egy B bal L-bialgebroid bal vagy jobb komodulusainak kategóriája is monoidális és el van látva ${}^B\mathcal{M} \to {}_{L^{op}}\mathcal{M}_{L^{op}}$ illetve $\mathcal{M}^B \to {}_L\mathcal{M}_L$ szigorúan monoidális funktorral.

Egy B jobb bialgebroid jobb *komodulus algebráit* tehát definiálhatjuk, mint monoidokat a jobb B-komodulusok monoidális kategóriájában. Egy tetszőleges M B-komodulus *koinvariánsai* alatt az $M^{coB} := \{n \in M | n^0 \otimes_R n^1 = n \otimes_R 1\}$ halmaz elemeit értjük. Egy A jobb B-komodulus algebra koinvariánsai A^{coB} részalgebrát alkotnak. Így tekinthetjük a

$$\mathrm{can} : A \otimes_{A^{coB}} A \to A \otimes_R B \quad a' \otimes_{A^{coB}} a \mapsto a'a^0 \otimes_R a^1$$

kanonikus leképezést. Ha ez bijektív, akkor az $A^{coB} \to A$ algebra kiterjesztést B-*Galois-kiterjesztésnek* mondjuk.

Egy H Hopf-algebroidban egyszerre van jelen egy jobb R-bialgebroid és egy bal L-bialgebroid. Egyikük komodulusait sincs jobb okunk a Hopf-algebroid komodulusainak hívni. Ehelyett tekinthetjük az alábbi szimmetrikus fogalmat.

14. Definíció ([53] Definition 3.2)**.** Egy L és R algebrák fölötti H Hopf-algebroid *jobb komodulusa* alatt egy M k-modulust értünk, amely egyszerre komodulusa az alap jobb R-bialgebroidnak – valamely jobb R-hatás és egy $\varrho^{R} : M \to M \otimes_R {}^R M^R$ kohatás révén – és komodulusa az alap bal L-bialgebroidnak – valamely jobb L-hatás és egy $\varrho^{L} : M \to M \otimes_L {}_L M_R$ kohatás révén – továbbá ϱ^{R} jobb L-modulus homomorfizmus, ϱ^{L} jobb R-modulus homomorfizmus, és a két kohatásra az alábbi egyenlőségek teljesülnek.

$$(\mathrm{Id} \otimes_R \delta_L)\varrho^{R} = (\varrho^{R} \otimes_L \mathrm{Id})\varrho^{L} \qquad \text{és} \qquad (\mathrm{Id} \otimes_L \delta_R)\varrho^{L} = (\varrho^{L} \otimes_R \mathrm{Id})\varrho^{R}.$$

Azaz ϱ^{R} komodulus homomorfizmusa az alap bal L-bialgebroidnak és ϱ^{L} komodulus homomorfizmusa az alap jobb R-bialgebroidnak. H-komodulusok *homomorfizmusai* komodulus homomorfizmusai mind az alap bal L-bialgebroidnak mind az alap jobb R-bialgebroidnak.

A jobb H-komodulusok és homomorfizmusaik kategóriáját $\mathcal{M}^H$-val jelöljük. Megkülönböztetésül, az alap bal L-bialgebroid komodulusainak kategóriáját $\mathcal{M}^{H_L}$-val, míg az alap jobb R-bialgebroid komodulusainak kategóriáját $\mathcal{M}^{H_R}$-val jelöljük. Korábbi konvenciónkhoz hasonlóan, az alap jobb R-bialgebroid kohatására az $m \mapsto m^0 \otimes_R m^1$ index jelölést alkalmazzuk, míg az alap bal L-bialgebroid kohatására $m \mapsto m_0 \otimes_L m_1$-et, ahol mindkét esetben implicit összegzés értendő. Szimmetrikusan értelmezzük egy Hopf-algebroid bal komodulusait.

Ha M egy L és R algebrák fölötti H Hopf-algebroid jobb komodulusa, akkor tekinthetjük M koinvariánsait az alap jobb R-bialgebroid kohatására – ezek M azon m elemei, melyekre $m^0 \otimes_R m^1 = m \otimes_R 1$ – illetve M koinvariánsait az alap bal L-bialgebroid kohatására – ezek M azon m elemei, melyekre $m_0 \otimes_L m_1 = m \otimes_L 1$. A ([63] *Corrigendum*, Proposition 3) alapján, az előbbi értelemben vett koinvariánsok koinvariánsok az utóbbi értelemben is; és a két koinvariáns fogalom egybeesik mindazon esetekben, amikor az antipód bijektív.

15. Tétel ([63] *Corrigendum*, Theorem 6)**.** *Bármely, L és R algebrák fölötti H Hopf-algebroid esetén a H-komodulusok $\mathcal{M}^H$ kategóriája monoidális; az alábbi diagram kommutatív; és a benne szereplő (felejtő) funktorok szigorúan monoidálisak.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^H \arrow[rr, "G_R"] \arrow[d, "G_L"'] & & \mathcal{M}^{H_R} \arrow[d] \\
\mathcal{M}^{H_L} \arrow[r] & {}_{L^{op}}\mathcal{M}_{L^{op}} \arrow[r, "\cong"] & {}_R\mathcal{M}_R
\end{tikzcd}$$

Hangsúlyozzuk, hogy – bár ellenpéldát nem ismerünk – tetszőleges Hopf-algebroidok esetén nem bizonyított, hogy a fenti diagramban szereplő G_L és G_R funktorok izomorfizmusok. Az ezt állító ([53] Theorem 3.1) bizonyításában az 3. Megjegyzésben leírt hiba található. A G_L és G_R funktorok izomorfizmusok bizonyos további feltevések mellett, például, ha H lapos bal L-modulus és lapos bal R-modulus.

Az 15. Tételre alapozva megfogalmazható a következő.

16. Definíció. Egy H Hopf-algebroid (jobb vagy bal) *komodulus algebrái* monoidok a (jobb vagy bal) H-komodulusok kategóriájában.

Expliciten, ha H Hopf-algebroid L és R algebrák fölött, akkor egy jobb H-komodulus algebra egy R-gyűrű, melynek $R \to H$ egysége és $H \otimes_R H \to H$ szorzása H-komodulus homomorfizmusok. Egy H-komodulus algebra komodulus algebrája mindkét alap bialgebroidnak.

Ha A egy L és R algebrák fölötti H Hopf-algebroid jobb komodulus algebrája, akkor – a két alap bialgebroid kohatásának megfelelően – két kanonikus Galois-leképezést tekinthetünk:

$$\begin{aligned}
\mathrm{can}_R &: A \otimes_{B_R} A \to A \otimes_R {}^R H^R, \quad a' \otimes_{B_R} a \mapsto a'a^0 \otimes_R a^1 \quad \text{és} \\
\mathrm{can}_L &: A \otimes_{B_L} A \to A \otimes_L {}_L H_L, \quad a' \otimes_{B_L} a \mapsto a'_0 a \otimes_L a'_1,
\end{aligned} \tag{5}$$

ahol B_R az A koinvariánsainak részalgebráját jelöli az alap jobb R-bialgebroid kohatására, míg B_L az A koinvariánsainak részalgebráját jelöli az alap bal L-bialgebroid kohatására.

Ha H antipódja bijektív, akkor $B_R = B_L$; és can_R pontosan akkor bijektív, ha can_L bijektív. Azaz ebben az esetben egy jobb H-komodulus algebra A pontosan akkor Galois-kiterjesztése $B_R = B_L$-nek az alap jobb R-bialgebroiddal ha Galois-kiterjesztése az alap bal L-bialgebroiddal.

Kreimer és Takeuchi klasszikus Tétele a következőképpen általánosítható Hopf-algebroidokra.

17. Tétel ([53] Lemma 3.3 and Corollary 4.3)**.** *Tekintsünk egy H Hopf-algebroidot L és R k-algebrák fölött, amiben a H^R, ${}^R H$, ${}_L H$ és H_L modulusok mindegyike végesen generált projektív és aminek az antipódja bijektív. Legyen A egy jobb H-komodulus algebra (ami jelen esetben ugyanaz, mint bármelyik alap bialgebroid komodulus algebrája) és legyen B a koinvariáns részalgebra (a jobb- vagy ekvivalens módon a bal alap bialgebroid kohatására nézve). Ha $(A\otimes A)^{coH} \cong A\otimes B$ (pl. mert A lapos k-modulus), akkor a következő állítások ekvivalensek.*

- *$B \to A$ Galois-kiterjesztés az alap jobb R-bialgebroiddal, azaz az* (5)*-ben definiált* can_R *kanonikus leképezés bijektív;*
- *$B \to A$ Galois-kiterjesztés az alap bal L-bialgebroiddal azaz az* (5)*-ben definiált* can_L *kanonikus leképezés bijektív;*
- can_R *szürjektív;*
- can_L *szürjektív.*

Az [53] munkában a fenti tétel egy sokkal általánosabb tételből (([39] Theorem 3.1) általánosításából) következik. Egy B jobb R-bialgebroid A jobb komodulus algebrája meghatároz egy

$$\psi : B \otimes_R A \to A \otimes_R B \qquad b \otimes_R a \mapsto a^0 \otimes_R ba^1 \tag{6}$$

vegyes disztributív szabályt az A R-gyűrű és a B R-kogyűrű között (melyben 1 csoportszerű elem, azaz $1^1 \otimes_R 1^2 = 1 \otimes_R 1$ és $\varepsilon(1) = 1$). Ha B az alap jobb bialgebroid egy Hopf-algebroidban, melynek antipódja bijektív, akkor a fenti ψ bijektív. Ha ráadásul ebben a Hopf-algebroidban az összes fellépő R-modulus végesen generált projektív, akkor ezek a modulusok laposak is; továbbá B projektív mint akár bal, akár jobb B-komodulus (abban az értelemben, hogy a $\mathrm{Hom}^B(B,-)$ funktor a B-komodulusok kategóriájából a k-modulusok kategóriájába őrzi az epimorfizmusokat), azaz ([53], Theorem 4.2) összes feltevése teljesül.

Ahogy azt [53] 5. fejezete tárgyalja, bármely H jobb R-bialgebroid A jobb komodulus algebrája esetén tekinthetjük az ún. *relatív Hopf-modulusok* $\mathcal{M}_A^H$-val jelölt kategóriáját. Ezt úgy definiáljuk, mint a jobb A modulusok kategóriáját a jobb H-komodulusok $\mathcal{M}^H$ kategóriájában (hiszen definíció szerint, A egy monoid $\mathcal{M}^H$-ban). Felhasználva azt az észrevételt, hogy A meghatároz egy vegyes disztributív szabályt (l. (6)), $\mathcal{M}_A^H$-ra tekinthetünk úgy is, mint egy $A\otimes_R H$ A-kogyűrű komodulusainak kategóriájára. Az A koinvariánsainak részalgebráját B-vel jelölve, tekinthetjük az

$$\mathcal{M}_B \xrightarrow{(-)\otimes_B A} \mathcal{M}_A^H \quad \dashv \quad \mathcal{M}_A^H \xrightarrow{(-)^{coH}} \mathcal{M}_B \tag{7}$$

adjungált funktor párt. Ebben a szövegkörnyezetben az erős és gyenge struktúra tételek a jobb adjungált hű teliségére; illetve ekvivalencia voltára vonatkozó feltételeket fogalmaznak meg.

Ha H végesen generált projektív bal R-modulus, akkor $\mathcal{M}_A^H$ izomorf az $A \otimes_R H$ A-kogyűrű duálisaként adódó A-gyűrű modulusainak kategóriájával. Ugyanúgy, mint a bialgebrák esetében, ez a duális gyűrű most is A-nak és H bal R-duálisának, ${}^*H := {}_R\mathrm{Hom}(H,R)$-nak ${}^*H \ltimes A$ féldirekt szorzataként írható (mely most is egy alkalmas koszorú szorzat). Ebben az esetben tehát az erős és gyenge struktúra-tételek visszavezethetők a következő Morita-összefüggés vizsgálatára. A két szereplő algebra B illetve ${}^*H \ltimes A$; a fellépő bimodulusok pedig A-n illetve $({}^*H \ltimes A)^{coH}$-n vannak definiálva. Ez a Morita-összefüggés speciális esete azon Morita-összefüggéseknek, melyet Caenepeel és társai [11]-ben csoportszerű elemmel rendelkező A-kogyűrűkhöz rendeltek, azon feltevés mellett, hogy a kogyűrű végesen generált projektív bal A-modulus. Szimmetrikusan kezelhetjük egy bal bialgebroid jobb komodulus algebráit. A következő *gyenge struktúra-tételt* úgy kapjuk, hogy a Morita-elmélet eredményeit kombináljuk azzal a fentebb látott ténnyel, hogy az alap jobb- illetve bal bialgebroiddal vett Galois-kiterjesztések egybeesnek azon Hopf-algebroidok esetén, melyeknek antipódja bijektív s amelyekben az összes releváns modulus struktúra végesen generált projektív.

18. Tétel. *([53] Theorem 5.4) Tekintsünk egy H Hopf-algebroidot L és R algebrák fölött, amiben a H^R, ${}^RH$, ${}_LH$ és H_L modulusok mindegyike végesen generált projektív és aminek az antipódja bijektív. Legyen A egy jobb H-komodulus algebra (ami jelen esetben ugyanaz, mint bármelyik alap bialgebroid komodulus algebrája) és legyen B a koinvariáns részalgebra (a jobb- vagy ekvivalens módon a bal alap bialgebroid kohatására nézve). Ezen feltevések mellett a következő állítások ekvivalensek.*

- *$B \to A$ Galois-kiterjesztés az alap jobb bialgebroiddal;*
- *A projektív bal B-modulus és a kanonikus ${}^*H \ltimes A \to {}_B\mathrm{End}(A)$ algebra anti-homomorfizmus izomorfizmus;*
- *A generátor a jobb ${}^*H \ltimes A$-modulusok kategóriájában;*
- *$(-)^{coH} : \mathcal{M}_A^H \to \mathcal{M}_B$ hű és teli;*
- *A $({}^*H \ltimes A)^{coH} \otimes_B A \to {}^*H \ltimes A$ Morita-leképezés szürjekció (így bijekció);*
- *$B \to A$ Galois-kiterjesztés az alap bal bialgebroiddal;*
- *A projektív jobb B-modulus és a kanonikus ${}_*H \ltimes A \to \mathrm{End}_B(A)$ algebra anti-homomorfizmus izomorfizmus (ahol ${}_*H = {}_L\mathrm{Hom}(H, L)$ az alap bal bialgebroid bal duálisa);*
- *A generátor a bal ${}_*H \ltimes A$-modulusok kategóriájában;*
- *$(-)^{coH} : {}_A\mathcal{M}^H \to {}_B\mathcal{M}$ hű és teli (ahol ${}_A\mathcal{M}^H$ A bal modulusainak kategóriája a jobb H-komodulusok kategóriájában);*
- *Az $A \otimes_B ({}_*H \ltimes A)^{coH} \to {}_*H \ltimes A$ Morita-leképezés szürjekció (így bijekció).*

Egy C R-kogyűrű valamely M jobb komodulusát *relatíve injektívnek* mondjuk, ha mindazon $f : P \to Q$ jobb komodulus homomorfizmusokra, amelyek felhasadó jobb R-modulus monomorfizmusok, $\mathrm{Hom}^C(f, M) : \mathrm{Hom}^C(Q, M) \to \mathrm{Hom}^C(P, M)$ szürjekció. Egyfelől ([62], Proposition 4.1); másfelől ([56] Proposition 3.4) szerint, a 18. Tételben tárgyalt Galois-kiterjesztésekben A pontosan akkor relatíve injektív jobb/bal komodulusa az alap jobb (vagy bal) bialgebroidnak, ha a $B \to A$ beágyazás felhasadó jobb/bal B-modulus monomorfizmus, vagy ami evvel ekvivalens, A hűen lapos jobb/bal B-modulus. ([56] Theorem 4.1) szerint, az antipód bijektivitásának köszönhetően A pontosan akkor relatíve injektív jobb komodulus ha relatíve injektív bal komodulus. Mindezen észrevételeket ötvözve ([8] Theorem 5.6)-tal illetve a Morita-elmélet eredményeivel, a következő *erős struktúra-tételre* jutunk.

19. Tétel ([53] Proposition 5.5, [56] Proposition 4.2)**.** *Tekintsünk egy H Hopf-algebroidot L és R algebrák fölött, amiben a H^R, ${}^R H$, ${}_L H$ és H_L modulusok mindegyike végesen generált projektív és aminek az antipódja bijektív. Legyen A egy jobb H-komodulus algebra (ami jelen esetben ugyanaz, mint bármelyik alap bialgebroid komodulus algebrája) és legyen B a koinvariáns részalgebra (a jobb- vagy ekvivalens módon a bal alap bialgebroid kohatására nézve). Ezen feltevések mellett a következő állítások ekvivalensek.*

- *$B \to A$ Galois-kiterjesztés az alap jobb (vagy bal) bialgebroiddal és A hűen lapos bal B-modulus;*
- *A projektív generátor a bal B-modulusok kategóriájában és a kanonikus ${}^*H \ltimes A \to {}_B\mathrm{End}(A)$ algebra anti-homomorfizmus izomorfizmus;*
- *$(-)^{coH} : \mathcal{M}_A^H \to \mathcal{M}_B$ ekvivalencia;*
- *A B és ${}^*H \ltimes A$ közötti Morita-összefüggés szigorú;*
- *$B \to A$ Galois-kiterjesztés az alap jobb (vagy bal) bialgebroiddal és A hűen lapos jobb B-modulus;*
- *A projektív generátor a jobb B-modulusok kategóriájában és egy és a kanonikus ${}_*H \ltimes A \to \mathrm{End}_B(A)$ algebra anti-homomorfizmus izomorfizmus;*
- *$(-)^{coH} : {}_A\mathcal{M}^H \to {}_B\mathcal{M}$ ekvivalencia;*
- *A B és ${}_*H \ltimes A$ közötti Morita-összefüggés szigorú.*

II.4. Gyenge Hopf-algebrák Doi–Hopf-modulusai.

20. Definíció ([68] Definition 2.1)**.** Egy *gyenge bialgebra* (valamely k kommutatív gyűrű felett) egy k-modulus B, ellátva egy (η, μ) algebra struktúrával és egy (δ, ε) koalgebra struktúrával, melyekre az alábbi diagramokkal megfogalmazott kompatibilitási feltételek teljesülnek (ahol $\mathsf{tw} : V \otimes W \to W \otimes V$, $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ a felcserélést, azaz a k-modulusok kategóriájának szimmetria operációját jelöli).

$$\begin{tikzcd}
B^{\otimes 2} \arrow[r, "\delta\otimes\delta"] \arrow[d, "\mu"'] & B^{\otimes 4} \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\mathsf{tw}\otimes\mathrm{Id}"] & B^{\otimes 4} \arrow[d, "\mu\otimes\mu"] \\
B \arrow[rr, "\delta"'] & & B^{\otimes 2}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B^{\otimes 3} \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\delta\otimes\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\delta\otimes\mathrm{Id}"'] \arrow[dr, "\mu^2"] & B^{\otimes 4} \arrow[r, "\mu\otimes\mu"] & B^{\otimes 2} \arrow[dd, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] \\
B^{\otimes 4} \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\mathsf{tw}\otimes\mathrm{Id}"'] & B \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\
B^{\otimes 4} \arrow[r, "\mu\otimes\mu"'] & B^{\otimes 2} \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "\eta\otimes\eta"] \arrow[dd, "\eta\otimes\eta"'] \arrow[dr, "\eta"] & B^{\otimes 2} \arrow[r, "\delta\otimes\delta"] & B^{\otimes 4} \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\mathsf{tw}\otimes\mathrm{Id}"] \\
& B \arrow[dr, "\delta^2"] & B^{\otimes 4} \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\mu\otimes\mathrm{Id}"] \\
B^{\otimes 2} \arrow[r, "\delta\otimes\delta"'] & B^{\otimes 4} \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\mu\otimes\mathrm{Id}"'] & B^{\otimes 3}
\end{tikzcd}$$

Tetszőleges B-beli a, b és c elemeken kiírva a gyenge bialgebra axiómák az alábbi alakot öltik.

$$(ab)_1 \otimes (ab)_2 = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2$$
$$\varepsilon(ab_1)\varepsilon(b_2 c) = \varepsilon(abc) = \varepsilon(ab_2)\varepsilon(b_1 c) \quad 1_1 \otimes 1_2 1_{1'} \otimes 1_{2'} = 1_1 \otimes 1_2 \otimes 1_3 = 1_1 \otimes 1_{1'} 1_2 \otimes 1_{2'},$$

ahol $1_1 \otimes 1_2 = 1_{1'} \otimes 1_{2'}$ a $\delta(1)$ $B \otimes B$-beli elem példányait jelöli. Ez tipikusan nem egyenlő $1 \otimes 1$-gyel.

Bármely B gyenge bialgebrában a

$$\sqcap^L : B \to B \quad b \mapsto \varepsilon(1_1 b) 1_2 \qquad \text{és} \qquad \sqcap^R : B \to B \quad b \mapsto 1_1 \varepsilon(b 1_2)$$

leképezések idempotensek; továbbá $B^L := \sqcap^L(B)$ és $B^R := \sqcap^R(B)$ (az ún. *bal- illetve jobb részalgebrák*) egymással kommutáló, anti-izomorf 1-indexű (így szeparábilis) Frobenius-algebrák, melyekre $\delta(1) \in B^R \otimes B^L$ [68].

21. Definíció. Egy *gyenge Hopf-algebra* egy gyenge bialgebra H, ellátva egy $H \to H$ *antipódnak* nevezett lineáris leképezéssel, mely az alábbi diagramokkal megfogalmazott axiómáknak tesz eleget.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\delta"] \arrow[drr, "\sqcap^L"'] & H^{\otimes 2} \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes S"] & H^{\otimes 2} \arrow[d, "\mu"] \\ & & H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "\delta"] \arrow[drr, "\sqcap^R"'] & H^{\otimes 2} \arrow[r, "S\otimes\mathrm{Id}"] & H^{\otimes 2} \arrow[d, "\mu"] \\ & & H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "\delta^2"] \arrow[drr, "S"'] & H^{\otimes 3} \arrow[r, "S\otimes\mathrm{Id}\otimes S"] & H^{\otimes 3} \arrow[d, "\mu^2"] \\ & & H \end{tikzcd}$$

Tetszőleges $b \in H$ elemeken kiírva a gyenge Hopf-algebra axiómák a következőek.

$$b_1 S(b_2) = \varepsilon(1_1 b) 1_2 \qquad S(b_1) b_2 = 1_1 \varepsilon(b 1_2) \qquad S(b_1) b_2 S(b_3) = S(b).$$

A 4. Tételből azonnal következik, hogy B jobb illetve bal modulusainak kategóriája monoidális a B^R illetve B^L fölötti modulus tenzor szorzás révén. (Mivel B^L és B^R 1 indexű Frobenius-algebrák, a B^R illetve B^L fölötti modulus tenzor szorzat izomorf a k-modulus tenzor szorzat megfelelő retraktumával). Igazolható, hogy egy gyenge bialgebra (azaz alap koalgebrája) komodulusainak kategóriája izomorf a megfelelő (akár bal akár jobb) bialgebroid komodulusainak kategóriájával, így az is monoidális a megfelelő modulus tenzor szorzás révén (ami izomorf a k-modulus tenzor szorzat megfelelő retraktumával). Egy gyenge bialgebra jobb komodulus algebrája monoid a jobb komodulusok monoidális kategóriájában. Expliciten, ez a következőt jelenti.

22. Definíció ([50] Definition 2.1)**.** Egy B gyenge bialgebra *jobb komodulus algebrája* egy algebra A ellátva egy $a \mapsto a_0 \otimes a_1$ jobb B komodulus struktúrával úgy, hogy minden $a, a' \in A$ elemre

$$(aa')_0 \otimes (aa')_1 = a_0 a'_0 \otimes a_1 a'_1 \qquad 1_0 a \otimes 1_1 = a_0 \otimes \sqcap^L(a_1).$$

Egy gyenge bialgebra jobb modulus koalgebrája komonoid a jobb modulusok monoidális kategóriájában. Expliciten, ez a következőt jelenti.

23. Definíció ([50] Definition 2.1)**.** Egy B gyenge bialgebra *jobb modulus koalgebrája* egy koalgebra C ellátva egy jobb B modulus struktúrával úgy, hogy minden $c \in C$, $b \in B$ elemre

$$(c.b)_1 \otimes (c.b)_2 = c_1.b_1 \otimes c_2.b_2 \qquad c.\sqcap^L(b) = \varepsilon(c_1.b)c_2.$$

24. Definíció ([50] Definition 2.2)**.** *(Jobb-jobb) gyenge Doi–Hopf-adatok* alatt olyan (A, B, C) hármasokat értünk, ahol B gyenge bialgebra, A jobb B-komodulus algebra és C jobb B-modulus koalgebra.

Elegendő jobb-jobb Doi–Hopf-adatokat bevezetnünk, hiszen a többi lehetőséget megkapjuk, ha a gyenge bialgebra (ko)szorzását az ellentettjére cseréljük és az így adódó gyenge bialgebra jobb-jobb Doi–Hopf-adatait tekintjük.

Gyenge Doi–Hopf-adatokhoz hozzárendelhetjük a következő modulus fogalmat.

25. Definíció ([50] Definition 3.1)**.** Tekintsünk egy (A, B, C) gyenge Doi–Hopf-adatot. Ezen adatok *gyenge Doi–Hopf-modulusain* olyan M k-modulusokat értünk, melyek egyszerre jobb A modulusok és jobb C-komodulusok és minden $m \in M$, $a \in A$ elemre az $(m.a)_0 \otimes (m.a)_1 = m_0.a_0 \otimes m_1.a_1$ egyenlőség teljesül. Gyenge Doi–Hopf-modulusok morfizmusai jobb A-modulus jobb C-komodulus homomorfizmusok. A gyenge Doi–Hopf-modulusok és morfizmusaik kategóriáját $\mathcal{M}_A^C$-val jelöljük.

26. Tétel ([50] Section 3, Examples)**.** *Legyen B egy gyenge bialgebra.*

- *Ha $A = B$ a reguláris B-komodulus algebra és $C = B^R$ a triviális B-modulus koalgebra ($r \mapsto r1_1 \otimes S(1_2) \equiv 1_1 \otimes S(1_2)r$ koszorzással, B koegységének megszorításával és az $r.b := \sqcap^R(rb)$ jobb B-hatással) akkor $\mathcal{M}_A^C$ izomorf a jobb B-modulusok kategóriájával;*

- *Ha $C = B$ a reguláris B-modulus koalgebra és $A = B^R$ a triviális B-komodulus algebra (az $r \mapsto 1_1 \otimes r1_2$ kohatással), akkor $\mathcal{M}_A^C$ izomorf a jobb B-komodulusok kategóriájával;*

- *Ha $C = B$ a reguláris B-modulus koalgebra és $A = B$ a reguláris B-komodulus algebra, akkor $\mathcal{M}_A^C$ izomorf B Hopf-modulusainak kategóriájával;*

- *Ha H egy gyenge Hopf-algebra, $B = H^{op} \otimes H$, $C = H$ és $A = H$ a*

$$c.(h \otimes h') := hch' \qquad \text{és} \qquad a \mapsto a_2 \otimes (S(a_1) \otimes a_3)$$

  hatással illetve kohatással, akkor $\mathcal{M}_A^C$ izomorf H Yetter–Drinfel'd-modulusainak [31], [12] kategóriájával.

Az ([50] Proposition 3.3) szerint az $\mathcal{M}_A^C \to \mathcal{M}_A$ felejtő funktor jobb adjungált, az $\mathcal{M}_A^C \to \mathcal{M}^C$ felejtő funktor pedig bal adjungált.

27. Tétel ([50] Proposition 4.2)**.** *Ha egy (A, B, C) gyenge Doi–Hopf-adatban C végesen generált projektív k-modulus, akkor található egy alkalmas algebra amelynek modulus kategóriája izomorf $\mathcal{M}_A^C$-val.*

Ez a *gyenge féldirekt szorzatnak* nevezett algebra a következőképpen konstruálható meg. C koalgebra struktúrájának transzponálásával $C^* := \mathrm{Hom}(C,k)$ algebra; és a $C \otimes B \to C$ hatás transzponálásával C^* bal B-modulus. A szokásos $(a \otimes \phi)(b \otimes \psi) := a_0 b \otimes (a_1.\psi)\phi$ féldirekt szorzás formula $A \otimes C^*$-on asszociatív szorzást definiál. Ennek a szorzásnak azonban nincs egység eleme, az $1 \otimes \varepsilon$ elem centrális idempotens. Az általa generált ideál a keresett egység elemes asszociatív algebra, C^* és A ún. gyenge féldirekt szorzata. Ez $A \otimes C^*$ k-modulus retraktuma és elemei $1_0 a \otimes 1_1.\phi$ alakúak, ahol $a \in A$, $\phi \in C^*$.

28. Tétel ([50] Section 4 Examples and Appendix)**.** *Legyen B végesen generált projektív gyenge bialgebra.*

- *Ha $A = B$ a reguláris B-komodulus algebra és $C = B^R$ a triviális B-modulus koalgebra (l. 26. Tétel), akkor C^* és A gyenge féldirekt szorzata izomorf B-vel;*
- *Ha $C = B$ a reguláris B-modulus koalgebra és $A = B^R$ a triviális B-komodulus algebra (l. 26. Tétel), akkor C^* és A gyenge féldirekt szorzata izomorf B-duális algebrájával;*
- *Ha $C = B$ a reguláris B-komodulus algebra és $A = B$ a reguláris B-komodulus algebra, akkor C^* és A gyenge féldirekt szorzata izomorf B Heisenberg-duplumával;*
- *Ha H egy végesen generált projektív gyenge Hopf-algebra, $B = H^{op} \otimes H$, $C = H$ és $A = H$ a 26. Tételben látott hatással illetve kohatással, akkor C^* és A gyenge féldirekt szorzata izomorf H Drinfel'd-duplumával.*

A bialgebrákra vonatkozó hasonló konstrukciók illetve állítások szépen illeszkednek a vegyes disztributív szabályok általánosabb keretébe. A fenti gyenge Doi–Hopf-adatok általánosításaként Caenepeel és De Groot [9]-ben bevezették az ún. *gyenge vegyes disztributív szabályokat* avagy *gyenge összekapcsoló struktúrákat.* A gyenge Doi–Hopf-modulusok kategóriáját általánosítva, gyenge összekapcsoló struktúrákhoz hozzárendelhető *összekapcsolt modulusaik* $\mathcal{M}_A^C$ kategóriája. Igazolható, hogy a $\mathcal{M}_A^C \to \mathcal{M}_A$ felejtő funktor jobb adjungált, a $\mathcal{M}_A^C \to \mathcal{M}^C$ felejtő funktor pedig bal adjungált. Ha egy gyenge összekapcsoló struktúrában C végesen generált projektív k-modulus, akkor $\mathcal{M}_A^C$ izomorf egy, az A és $C^* := \mathrm{Hom}(C,k)$ algebrák gyenge féldirekt szorzataként adódó algebra modulus kategóriájával. Mindennek absztrakt kategóriaelméleti leírása csak mintegy tíz évvel később, [54]-ben történt meg, l. a következő tézispontot.

II.5. Gyenge Hopf-algebrákra épülő konstrukciók és a monádok gyenge elmélete.

Legyen $\mathcal{K}$ egy tetszőleges bikategória. Rendeljük hozzá a következő, a [24]-beli $\mathrm{EM}(\mathcal{K})$-t általánosító, $\mathrm{EM}^w(\mathcal{K})$-val jelölt bikategóriát. A 0-cellák legyenek a monádok $\mathcal{K}$-ban. Az $(A,t) \to (A',t')$ 1-cellák legyenek $x : A \to A'$ 1-cellák $\mathcal{K}$-ban, ellátva egy $\psi : t'x \to xt$ $\mathcal{K}$-beli 2-cellával, melyre

$$\begin{tikzcd} t't'x \arrow[r, "\mathrm{Id}\,\psi"] \arrow[d, "\mu'\,\mathrm{Id}"'] & t'xt \arrow[r, "\psi\,\mathrm{Id}"] & xtt \arrow[d, "\mathrm{Id}\,\mu"] \\ t'x \arrow[rr, "\psi"'] & & xt \end{tikzcd} \tag{8}$$

diagram kommutatív. Ez a diagram megegyezik az EM($\mathcal{K}$) 1-cellái és a monádok szorzása közötti [24]-beli kompatibilitási feltétellel. Az EM($\mathcal{K}$) 1-cellái és a monádok egysége közötti [24]-beli kompatibilitási feltételt egyszerűen vessük el. Hogy mégis bikategóriát kapjunk, ezt a 2-cellákra kirótt további feltétellel kompenzáljuk. Az $(x,\psi) \to (y,\phi)$ 2-cellák EM^w($\mathcal{K}$)-ban $\mathcal{K}$-beli $\varrho : x \to yt$ 2-cellák, melyekre a

$$\begin{tikzcd} t'x \arrow[r, "\mathrm{Id}\,\varrho"] \arrow[d, "\psi"'] & t'xt \arrow[r, "\psi\,\mathrm{Id}"] & xtt \arrow[d, "\mathrm{Id}\,\mu"] \\ xt \arrow[r, "\varrho\,\mathrm{Id}"'] & xtt \arrow[r, "\mathrm{Id}\,\mu"'] & xt \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[rr, "\varrho"] \arrow[d, "\varrho"'] & & yt \\ yt \arrow[r, "\eta'\mathrm{Id}"'] & t'yt \arrow[r, "\phi\mathrm{Id}"'] & ytt \arrow[u, "\mathrm{Id}\mu"'] \end{tikzcd}$$

diagramok kommutatívak. A fenti első diagram definiálja [24]-ben EM($\mathcal{K}$) 2-celláit, a második diagram pedig triviálisan teljesül ha (x,ψ) és (y,ϕ) 1-cellák EM($\mathcal{K}$)-ban. Így az EM^w($\mathcal{K}$) bikategória lokálisan teli rész-bikategóriaként tartalmazza a monádok [24]-beli EM($\mathcal{K}$) bikategóriáját. Vegyük észre, hogy a $\mathcal{K}$-beli $\mathrm{Id}\eta : x \to xt$ 2-cella nem 2-cella EM^w($\mathcal{K}$)-ban. Az $(x,\psi) \to (x,\psi)$ identitás 2-cella $\psi.\eta'\mathrm{Id} : x \to xt$. Az egységekkel való kompatibilitás elvetése miatt

$$xt \xrightarrow{\eta'\mathrm{Id}} t'xt \xrightarrow{\psi\mathrm{Id}} xtt \xrightarrow{\mathrm{Id}\mu} xt$$

nem identitás 2-cella $\mathcal{K}$-ban, de idempotens.

Az EM^w($\mathcal{K}$) bikategória monádjait hívhatjuk akár *gyenge koszorúknak* is.

A monád fogalom általánosításaként tekintsük az alábbi definíciót.

29. Definíció ([54] Definition 2.1)**.** Egy *pre-monád* egy $\mathcal{K}$ bikategóriában egy $t : A \to A$ 1-cella, ellátva $\eta : \mathrm{Id}_A \to t$ (pre-egység) és $\mu : tt \to t$ (szorzás) 2-cellákkal, melyekre az alábbi diagramok kommutatívak.

$$\begin{tikzcd} ttt \arrow[r, "\mu\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\mu"'] & tt \arrow[d, "\mu"] \\ tt \arrow[r, "\mu"'] & t \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} t \arrow[r, "\eta\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\eta"'] & tt \arrow[d, "\mu"] \\ tt \arrow[r, "\mu"'] & t \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} 1_A \arrow[r, "\eta\eta"] \arrow[dr, "\eta"'] & tt \arrow[d, "\mu"] \\ & t \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} tt \arrow[r, "\eta\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\mu"'] & ttt \arrow[d, "\mu^2"] \\ & t \end{tikzcd}$$

Bármely pre-monádra a $\mu.t\eta : t \to t$ 2-cella idempotens. Tegyük fel, hogy ez az idempotens 2-cella felhasad, azaz létezik egy $\widehat{t} : A \to A$ 1-cella valamint $i : \widehat{t} \to t$ és $p : t \to \widehat{t}$ 2-cellák, melyekre $p.i = \mathrm{Id}$ és $i.p$ egyenlő a kérdéses idempotens 2-cellával. Ekkor $\widehat{t}$ monád $\mathcal{K}$-ban,

$$\mathrm{Id}_A \xrightarrow{\eta} t \xrightarrow{p} \widehat{t} \quad \text{és} \quad \widehat{t}\,\widehat{t} \xrightarrow{ii} tt \xrightarrow{\mu} t \xrightarrow{p} \widehat{t}$$

egységgel illetve szorzással.

30. Tétel ([54] Theorem 2.3)**.** *Tekintsünk egy $\mathcal{K}$ bikategóriát, egy (A,t) monádot és egy $s : A \to A$ 1-cellát $\mathcal{K}$-ban. Bijektív kapcsolat van az alábbi struktúrák között.*

- $((A,t),(s,\psi))$ *alakú monádok* EM^w($\mathcal{K}$)*-ban;*
- (A,st) *alakú pre-monádok $\mathcal{K}$-ban, melyek $\Theta : stst \to st$ szorzására $\Theta.sts\mu = s\mu.\Theta t$.*

Ha a fenti tételben az (A, st) pre-monád idempotens $st \to st$ 2-cellája felhasad, akkor az ezáltal meghatározott $(A, \widehat{st})$ retraktum monádot $\mathcal{K}$-ban hívhatjuk t és s *gyenge koszorú szorzatának.*

31. Példa. Legyen (A, B, C) egy jobb-jobb gyenge Doi–Hopf-adat. Ehhez hozzárendelhetünk egy $((k, A), (C^*, \psi))$ monádot $\mathrm{EM}^w(\mathrm{Bim})$-ben, ahol

$$\psi : A \otimes C^* \to C^* \otimes A \qquad a \otimes \phi \mapsto \phi(-a_1) \otimes a_0.$$

A hozzátartozó pre-monád $C^* \otimes A$ a $(\phi \otimes a)(\phi' \otimes a') = \phi'(-a_1)\phi \otimes a_0 a'$ szorzással és az $\varepsilon(-1_1) \otimes 1_0$ pre-egység elemmel. A

$$C^* \otimes A \to C^* \otimes A \qquad \phi \otimes a \mapsto \phi(-1_1) \otimes 1_0 a$$

idempotens leképezés felhasad, így képe egység elemes és asszociatív algebra, mely (a tenzor faktorok felcserélése révén) izomorf C^* és A gyenge féldirekt szorzatával.

További példaként a gyenge Hopf-algebrákkal [36]-ben vett kereszt szorzatok is gyenge koszorú szorzatok. A gyenge koszorú szorzat fenti konstrukciója egybeesik a [20]-ban (bármiféle kategória elméleti megfontolásra való hivatkozás nélkül) javasolt gyenge kereszt szorzattal.

Tekintsünk egy $\mathcal{K}$ bikategóriát, amelyben minden idempotens 2-cella felhasad, és amelyben léteznek a monádok Eilenberg–Moore-objektumai (azaz a $\mathcal{K} \to \mathrm{Mnd}(\mathcal{K})$ diagonális bifunktornak van egy R jobb adjungáltja. Ezen feltevések mellett konstruálható egy $J^w : \mathrm{EM}^w(\mathcal{K}) \to \mathcal{K}$ pszeudo-funktor, l. ([54] Theorem 3.5). („Pszeudo" volta annyit tesz, hogy a horizontális kompozíciót nem szigorúan, csak koherens izomorfizmusok erejéig őrzi). A 0-cellákon (monádokon) legyen $J^w(A, t) := R(A, t) = A^t$ a szokásos Eilenberg–Moore-objektum (l. [40]). Egy $(x, \psi) : (A, t) \to (A', t')$ 1-cella esetén, az $f \dashv v : A^t \to A$ „felejtő" adjunkció és annak ϵ koegysége segítségével tekintsük az

$$xv \xrightarrow{\eta' \mathrm{Id}} t'xv \xrightarrow{\psi} xtv \xrightarrow{\mathrm{Id}\epsilon} xv \tag{9}$$

idempotens 2-cellát $\mathcal{K}$-ban. Feltevésünk szerint ez felhasad, azaz létezik egy $p : xv \to \widehat{x}$ epi 2-cella $i : \widehat{x} \to xv$ széléssel úgy, hogy $i.p$ egyenlő a (9) idempotens 2-cellával. Nem nehéz látni, hogy $(\widehat{x}, \widehat{\psi} := p.\mathrm{Id}\epsilon.\psi\mathrm{Id}.\mathrm{Id}i) : (A^t, \mathrm{Id}) \to (A', t')$ 1-cella $\mathrm{Mnd}(\mathcal{K})$-ban. Így értelmezhető $J^w(x, \psi) := R(\widehat{x}, \widehat{\psi})$. Hasonlóan, egy $\varrho : (x, \psi) \to (y, \phi)$ 2-cellára

$$\widehat{\varrho} := (\ \widehat{x} \xrightarrow{i} xv \xrightarrow{\varrho \mathrm{Id}} ytv \xrightarrow{\mathrm{Id}\epsilon} yv \xrightarrow{p} \widehat{y}\ ) : (\widehat{x}, \widehat{\psi}) \to (\widehat{y}, \widehat{\phi})$$

2-cella $\mathrm{Mnd}(\mathcal{K})$-ban, így értelmezhető $J^w(\varrho) := R(\widehat{\varrho})$. Jegyezzük meg, hogy J^w konstrukciójához idempotens 2-cellák felhasadását használtuk. A felhasadás azonban csak izomorfizmus erejéig egyértelmű, így J^w csak pszeudo-természetes izomorfizmus erejéig egyértelmű. Ugyancsak a felhasadás nem egyértelműségéből következik, hogy általában J^w csak pszeudo-funktor (nem bifunktor).

Az alábbi diagram balról jobbra mutató nyilai rendre a diagonális bifunktort; a 0- és 1-cellákon identitásként ható és egy ω 2-cellát $\mathrm{Id}\eta.\omega$-ba vivő bifunktort; illetve a nyilvánvaló beágyazást jelölik. A J bifunktor J^w megszorítása. Az R, J és J^w bifunktorok mindegyike jobb biadjungált, ahogy az ábra mutatja.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K} \arrow[r] & \mathrm{Mnd}(\mathcal{K}) \arrow[r] \arrow[l, bend left, "R", "\perp"'] & \mathrm{EM}(\mathcal{K}) \arrow[r] \arrow[ll, bend left, "J", "\perp"'] & \mathrm{EM}^w(\mathcal{K}) \arrow[lll, bend left, "J^w", "\perp"']
\end{tikzcd}$$

Mivel $(x,\psi):(A,t)\to(A',t')$ $\mathrm{EM}^w(\mathcal{K})$-beli 1-cellák esetén $\mathrm{Id}\eta : x \to xt$ nem 2-cella $\mathrm{EM}^w(\mathcal{K})$-ban, nem természetes kérdés felvetés, hogy mely ω $\mathcal{K}$-beli 2-cellákra lesz $\mathrm{Id}\eta.\omega$ 2-cella $\mathrm{EM}^w(\mathcal{K})$-ban. Ehelyett megkérdezhetjük, hogy mely ω esetén lesz

$$x \xrightarrow{\eta'\mathrm{Id}} t'x \xrightarrow{\psi} xt \xrightarrow{\omega\mathrm{Id}} yt \qquad \text{illetve} \qquad x \xrightarrow{\omega} y \xrightarrow{\eta'\mathrm{Id}} t'y \xrightarrow{\phi} yt$$

$(x,\psi)\to(y,\phi)$ 2-cella $\mathrm{EM}^w(\mathcal{K})$-ban. A válasz az, hogy pontosan akkor, ha a

$$\begin{tikzcd}
t'x \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\eta'\mathrm{Id}"'] & xt \arrow[r, "\omega\mathrm{Id}"] & yt \\
t't'x \arrow[d, "\mathrm{Id}\psi"'] & & \\
t'xt \arrow[r, "\mathrm{Id}\omega\mathrm{Id}"'] & t'yt \arrow[r, "\phi\mathrm{Id}"'] & ytt \arrow[uu, "\mathrm{Id}\mu"']
\end{tikzcd}
\quad \text{illetve} \quad
\begin{tikzcd}
t'x \arrow[r, "\mathrm{Id}\omega"] \arrow[d, "\psi"'] & t'y \arrow[r, "\phi"] & yt \\
xt \arrow[d, "\omega\mathrm{Id}"'] & & \\
yt \arrow[r, "\eta'\mathrm{Id}"'] & t'yt \arrow[r, "\phi\mathrm{Id}"'] & ytt \arrow[uu, "\mathrm{Id}\mu"']
\end{tikzcd} \tag{10}$$

diagram kommutatív. Ha (x,ψ) 1-cella $\mathrm{EM}(\mathcal{K})$-ban (azaz kompatibilis a monádok egységével), akkor a (10)-beli első diagram redukálódik a [40]-ben a monád transzformációkat definiáló

$$\begin{tikzcd}
t'x \arrow[r, "\mathrm{Id}\,\omega"] \arrow[d, "\psi"'] & t'y \arrow[d, "\phi"] \\
xt \arrow[r, "\omega\,\mathrm{Id}"'] & yt
\end{tikzcd} \tag{11}$$

diagrammá, ha (y,ϕ) 1-cella $\mathrm{EM}(\mathcal{K})$-ban akkor a (10)-beli második diagram redukálódik (11)-gyé. Tetszőleges (x,ψ) és (y,ϕ) $\mathrm{EM}^w(\mathcal{K})$-beli 1-cellák esetén a két (10)-beli diagram szimultán kommutativitása ekvivalens (11)-gyel.

Vezessük be a következő két, $\mathrm{Mnd}^i(\mathcal{K})$-val illetve $\mathrm{Mnd}^p(\mathcal{K})$-val jelölt bikategóriát. A 0-cellák és 1-cellák mindkettőben legyenek ugyanazok, mint $\mathrm{EM}^w(\mathcal{K})$-ban. Az $(x,\psi)\to(y,\phi)$ 2-cellák $\mathrm{Mnd}^i(\mathcal{K})$-ban illetve $\mathrm{Mnd}^p(\mathcal{K})$-ban legyenek $\omega : x\to y$ $\mathcal{K}$-beli 2-cellák, amikre (10) első illetve második diagramja kommutatív. Ellenőrizhető, hogy ezek bikategóriák és vannak $G^i : \mathrm{Mnd}^i(\mathcal{K}) \to \mathrm{EM}^w(\mathcal{K}) \leftarrow \mathrm{Mnd}^p(\mathcal{K}) : G^p$ bifunktorok, melyek identitás leképezésként hatnak a 0-cellákon és az 1-cellákon, egy ω 2-cellát pedig $\omega\mathrm{I}d.\psi.\eta'\mathrm{I}d$-be illetve $\phi.\eta'\mathrm{Id}.\omega$-ba visznek. Ezek a bikategóriák fontos szerepet játszanak az alábbi *gyenge felhúzás* problémában.

32. Definíció ([54] Definition 4.1)**.** Legyen $\mathcal{K}$ egy bikategória, melyben léteznek a monádok Eilenberg–Moore-objektumai. Legyen adott $\mathcal{K}$-ban egy (A,t) és egy (B,s) monád. Egy $\overline{x} : A^t \to B^s$ 1-cellát az $x : A \to B$ 1-cella *gyenge felhúzásának* mondjuk, ha léteznek

$$\begin{tikzcd}
A^t \arrow[r, "\overline{x}"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow_i"] & B^s \arrow[d, "v"] \\
A \arrow[r, "x"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad \text{és} \qquad
\begin{tikzcd}
A^t \arrow[r, "\overline{x}"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow_p"] & B^s \arrow[d, "v"] \\
A \arrow[r, "x"'] & B
\end{tikzcd}$$

2-cellák, melyekre $p.i = \mathrm{Id}$.

Egy 2-cella gyenge felhúzásait kétféle értelemben definiálhatjuk.

33. Definíció ([54] Definition 4.2)**.** Legyen $\mathcal{K}$ egy bikategória, melyben léteznek a monádok Eilenberg–Moore-objektumai. Legyen adott $\mathcal{K}$-ban egy (A, t) és egy (B, s) monád továbbá $x, y : A \to B$ 1-cellák $\overline{x}, \overline{y} : A^t \to B^s$ gyenge felhúzásokkal. Egy $\overline{\omega} : \overline{x} \to \overline{y}$ 2-cellát az $\omega : x \to y$ 2-cella *i-felhúzásának* mondunk ha az alábbi első ($\mathcal{K}$-beli 2-cellákra vonatkozó) diagram kommutatív. $\overline{\omega}$ az ω *p-felhúzása* ha az alábbi második diagram kommutatív.

$$\begin{tikzcd} v\overline{x} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\,\overline{\omega}"'] & xv \arrow[d, "\omega\,\mathrm{Id}"] \\ v\overline{y} \arrow[r, "i"'] & yv \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} v\overline{x} \arrow[d, "\mathrm{Id}\,\overline{\omega}"'] & xv \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "\omega\,\mathrm{Id}"] \\ v\overline{y} & yv \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

Ha egy $\mathcal{K}$ bikategóriában léteznek a monádok Eilenberg–Moore objektumai, akkor adott (A, t) és (B, s) $\mathcal{K}$-beli monádokra tekinthetjük az alábbi $\mathrm{Lift}^i((A, t), (B, s))$-vel illetve $\mathrm{Lift}^p((A, t), (B, s))$-vel jelölt kategóriákat. Mindkét kategória objektumai legyenek $(x : A \to B, \overline{x} : A^t \to B^s, i : v\overline{x} \to xv, p : xv \to v\overline{x})$ négyesek, ahol $p.i = \mathrm{Id}$ (így $\overline{x}$ az x gyenge felhúzása). Az $(x, \overline{x}, i, p) \to (x', \overline{x}', i', p')$ morfizmusok legyenek $(\omega : X \to x', \overline{\omega} : \overline{x} \to \overline{x}')$ párok, ahol $\overline{\omega}$ az ω i-felhúzása illetve p-felhúzása.

34. Tétel ([54] Theorem 4.4)**.** *Legyen $\mathcal{K}$ egy bikategória, melyben léteznek a monádok Eilenberg–Moore-objektumai és melyben minden idempotens 2-cella felhasad. Bármely (A, t) és (B, s) monádokra $\mathcal{K}$-ban az alábbi kategóriák ekvivalensek.*

- $\mathrm{Lift}^i((A, t), (B, s))$ *és* $\mathrm{Mnd}^i(\mathcal{K})((A, t), (B, s))$*;*
- $\mathrm{Lift}^p((A, t), (B, s))$ *és* $\mathrm{Mnd}^p(\mathcal{K})((A, t), (B, s))$*.*

Ha $\omega : (x, \psi) \to (x', \psi')$ morfizmus (mondjuk) $\mathrm{Mnd}^i(\mathcal{K})((A, t), (B, s))$-ben, akkor a fenti ekvivalencia általi képe az $(\omega, J^w G^i(\omega)) : (x, J^w G^i(x, \psi), i, p) \to (x', J^w G^i(x', \psi'), i', p')$ morfizmus $\mathrm{Lift}^i((A, t), (B, s))$-ben, ahol i és p (i' és p') a J^w konstrukciójához használt 2-cellák $\mathcal{K}$-ban. A fenti tételben látható ekvivalenciák általában nem izomorfizmusok (szemben a klasszikus esettel), mivel idempotens morfizmusok felhasadása csak izomorfizmus erejéig egyértelmű.

35. Példa. Bármely B gyenge bialgebrára $\mathcal{M}_B$ monoidális struktúrája gyenge felhúzással adódik. Míg a monoidális szorzás $\mathcal{M}_k$ monoidális szorzásának (mint $\otimes : \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_k \to \mathcal{M}_k$ funktornak) a gyenge felhúzása, a monoidális egység nem $\mathcal{M}_k$ monoidális egységének, hanem a $B : 1 \to \mathcal{M}_k$ funktornak a gyenge felhúzása, ahol 1 a terminális kategóriát jelöli, melynek egyetlen objektuma van és egyetlen morfizmusa ennek identitása. Rajzban tehát, léteznek

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_B \times \mathcal{M}_B \arrow[r, "\overline{\otimes}"] \arrow[d, "v \times v"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow_i \Uparrow_p"] & \mathcal{M}_B \arrow[d, "v"] \\ \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_k \arrow[r, "\otimes"'] & \mathcal{M}_k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\overline{B}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow_i \Uparrow_p"] & \mathcal{M}_B \arrow[d, "v"] \\ 1 \arrow[r, "B"'] & \mathcal{M}_k \end{tikzcd}$$

természetes transzformációk, melyek segítségével az $\mathcal{M}_B$ monoidális kategória koherencia természetes izomorfizmusai a rajz szerinti i-felhúzással adódnak.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_B \times \mathcal{M}_B \times \mathcal{M}_B \arrow[r, bend left, "\overline{\otimes}(\overline{\otimes}\times\mathrm{Id})"] \arrow[r, bend right, "\overline{\otimes}(\mathrm{Id}\times\overline{\otimes})"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\cong"] \arrow[d, "v\times v\times v"'] & \mathcal{M}_B \arrow[d, "v"] \\
\mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_k \times \mathcal{M}_k \arrow[r, bend left, "\otimes(\otimes\times\mathrm{Id})"] \arrow[r, bend right, "\otimes(\mathrm{Id}\times\otimes)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\cong"] & \mathcal{M}_k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_B \arrow[r, bend left, "\overline{\otimes}(\overline{B}\times\mathrm{Id})"] \arrow[r, "\mathrm{Id}" description] \arrow[r, bend right, "\overline{\otimes}(\mathrm{Id}\times\overline{B})"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\cong"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Uparrow\cong"] \arrow[d, "v"'] & \mathcal{M}_B \arrow[d, "v"] \\
\mathcal{M}_k \arrow[r, bend left, "\otimes(B\times\mathrm{Id})"] \arrow[r, "\mathrm{Id}" description] \arrow[r, bend right, "\otimes(\mathrm{Id}\times B)"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow_{\varepsilon\times\mathrm{Id}}"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Uparrow_{\mathrm{Id}\times\varepsilon}"] & \mathcal{M}_k
\end{tikzcd}
$$

A fenti ábrákon $v : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_k$ a felejtő funktort jelöli.

Az állítás megfordításához, azaz ahhoz a következtetéshez, hogy valamely adott B algebra rendelkezik gyenge bialgebra struktúrával, nem elég feltenni, hogy $\mathcal{M}_B$ monoidális valamely gyenge felhúzással adódó monoidális struktúrával – ráadásul a gyenge felhúzásért felelős $\mathrm{Mnd}^i(\mathrm{Cat})$-beli 1-cellák alakjára is feltevést kell tenni, l. 40. és 41. Tétel.

36. Példa. Tekintsünk egy A algebrát és egy C koalgebrát valamely k kommutatív gyűrű fölött, és közöttük egy $\psi : C \otimes A \to A \otimes C$ gyenge vegyes disztributív szabályt Bim-ben. Ez ugyanaz, mint egy $(-)\otimes\psi$ gyenge vegyes disztributív szabály Cat-ban a $(\mathcal{M}_k, (-)\otimes A)$ monád és a $(\mathcal{M}_k, (-) \otimes C)$ komonád között. Ezen feltevések mellett a $(\mathcal{M}_k, (-) \otimes C)$ komonádnak létezik i-felhúzása $\mathcal{M}_A$-ra. Rajzban, léteznek

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_A \arrow[r, "\overline{(-)\otimes C}\cong(-)\otimes_A(\overline{A\otimes C})"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow_i\Uparrow_p"] & \mathcal{M}_A \arrow[d, "v"] \\
\mathcal{M}_k \arrow[r, "(-)\otimes C"'] & \mathcal{M}_k
\end{tikzcd}
$$

természetes transzformációk (vagy ami ugyanaz, $A \otimes C \twoheadrightarrow \overline{A \otimes C}$ és $\overline{A \otimes C} \rightarrowtail A \otimes C$ bal A-modulus homomorfizmusok), melyek segítségével a gyengén felhúzott $(\mathcal{M}_A, (-) \otimes_A (\overline{A \otimes C}))$ komonád koszorzása és koegysége a rajz szerinti i-felhúzással adódik.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_A \arrow[r, bend left, "(-)\underset{A}{\otimes}(\overline{A\otimes C})"] \arrow[r, bend right, "(-)\underset{A}{\otimes}(\overline{A\otimes C})\underset{A}{\otimes}(\overline{A\otimes C})"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow (-)\underset{A}{\otimes}(\overline{A\otimes\delta})"] \arrow[d, "v"'] & \mathcal{M}_A \arrow[d, "v"] \\
\mathcal{M}_k \arrow[r, bend left, "(-)\otimes C"] \arrow[r, bend right, "(-)\otimes C\otimes C"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow_{(-)\otimes\delta}"] & \mathcal{M}_k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_A \arrow[r, bend left, "(-)\underset{A}{\otimes}(\overline{A\otimes C})"] \arrow[r, bend right, "(-)\underset{A}{\otimes}A"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow (-)\underset{A}{\otimes}(\overline{A\otimes\varepsilon})"] \arrow[d, "v"'] & \mathcal{M}_A \arrow[d, "v"] \\
\mathcal{M}_k \arrow[r, bend left, "(-)\otimes C"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Id}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow_{(-)\otimes\varepsilon}"] & \mathcal{M}_k
\end{tikzcd}
$$

Több is igaz, ([54] Proposition 5.7) szerint egy A algebra, egy C koalgebra és egy $\psi : C \otimes A \to A \otimes C$ lineáris leképezés pontosan akkor alkotnak gyenge vegyes disztributív szabályt Bim-ben, ha ψ az $(\mathcal{M}_k, (-) \otimes C)$ komonád i-felhúzását indukálja $\mathcal{M}_A$-ra a fenti értelemben – azaz $((k, A), (C, \psi))$ komonád $\mathrm{Mnd}^i(\mathrm{Bim})$-ben – és az $(\mathcal{M}_k, (-) \otimes A)$

monád p-felhúzását indukálja $\mathcal{M}^C$-re a duális értelemben – azaz $((k,C),(A,\psi))$ monád $\mathrm{Mnd}^i(\mathrm{Bim}_*)_*$-ben, ahol $(-)_*$ az ellentett vertikális kompozíciójú bikategóriát jelöli. Ebben az esetben a gyengén felhúzott monád és komonád Eilenberg–Moore-kategóriái izomorfak [66] szerint és visszaadják a Caenepeel és De Groot által bevezetett összekapcsolt modulusok kategóriáját.

Vegyes disztributív szabályok más általánosításait – a Caenepeel és Janssen által [10]-ben bevezetett parciális- illetve lax összekapcsoló struktúrákat – ([54] Section 5) vizsgálja a gyenge felhúzások nézőpontjából.

II.6. Gyenge bimonádok.

Szlachányi [41] munkájából ismert, hogy a gyenge bialgebrák jellemzhetők, mint pontosan azok a k-algebrák, melyek modulusainak kategóriája monoidális, és a felejtő funktor a k-modulusok kategóriájába rendelkezik a következő, ún. szeparábilis Frobenius-szerkezettel.

37. Definíció (Szlachányi [41])**.** Tekintsünk egy F funktort az $(\mathcal{N},\boxtimes,R)$ monoidális kategóriából az $(\mathcal{M},\otimes,K)$ monoidális kategóriába. Azt mondjuk, hogy F *szeparábilis Frobenius*-szerkezetű, ha el van látva egy $p_{X,Y}: FX\otimes FY\to F(X\boxtimes Y)$, $p_0: K\to FR$ monoidális struktúrával és egy $i_{X,Y}: F(X\boxtimes Y)\to FX\otimes FY$, $i_0: FR\to K$ opmonoidális struktúrával úgy, hogy $\mathcal{N}$ minden X,Y,Z objektumára a következő diagramok kommutatívak.

$$\begin{tikzcd}
FX\otimes F(Y\boxtimes Z) \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes i_{Y,Z}"] \arrow[d, "p_{X,Y\boxtimes Z}"'] & FX\otimes FY\otimes FZ \arrow[d, "p_{X,Y}\otimes\mathrm{Id}"] \\
F(X\boxtimes Y\boxtimes Z) \arrow[r, "i_{X\boxtimes Y,Z}"'] & F(X\boxtimes Y)\otimes FZ
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X\boxtimes Y)\otimes FZ \arrow[r, "i_{X,Y}\otimes\mathrm{Id}"] \arrow[d, "p_{X\boxtimes Y,Z}"'] & FX\otimes FY\otimes FZ \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes p_{Y,Z}"] \\
F(X\boxtimes Y\boxtimes Z) \arrow[r, "i_{X,Y\boxtimes Z}"'] & FX\otimes F(Y\boxtimes Z)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& FX\otimes FY \arrow[dr, "p_{X,Y}"] & \\
F(X\boxtimes Y) \arrow[ur, "i_{X,Y}"] \arrow[rr, equal] & & F(X\boxtimes Y)
\end{tikzcd}$$

Szigorúan monoidális funktorok nyilvánvalóan rendelkeznek szeparábilis Frobenius-szerkezettel. A következő definíció tehát általánosítja mind a bimonádokat, mind a gyenge Hopf-algebrákat.

38. Definíció ([55] Definition 1.3)**.** Egy *gyenge bimonád* alatt egy T monádot értünk valamely $(\mathcal{M},\otimes,K)$ monoidális kategórián, ellátva mindazon struktúrákkal, melyek ekvivalensek az $\mathcal{M}^T$ Eilenberg–Moore-kategória monoidalitásával úgy, hogy az $\mathcal{M}^T\to\mathcal{M}$ felejtő funktor rendelkezik szeparábilis Frobenius-szerkezettel.

A fenti világos jelentésű, ámde meglehetősen implicit definíció aprópénzre váltható, ha ráadásul az $\mathcal{M}$ monoidális kategória Cauchy-teljes, azaz idempotens morfizmusai felhasadnak.

39. Tétel ([55] Theorem 1.5)**.** *Tekintsünk egy (T,m,u) monádot egy $(\mathcal{M},\otimes,K)$ Cauchy-teljes monoidális kategórián. Egy gyenge bimonád struktúra T-n pontosan ugyanaz, mint* *egy* (T,τ,τ_0) *opmonoidális struktúra, melyre az alábbi diagramok kommutatívak.*

$$\begin{tikzcd}
T^2(X\otimes TK) \arrow[r, "T\tau_{X,TK}"] & T(TX\otimes T^2K) \arrow[r, "T(\mathrm{Id}\otimes m_K)"] & T(TX\otimes TK) \arrow[r, "T(\mathrm{Id}\otimes\tau_0)"] & T^2X \arrow[d, "m_X"] \\
T(X\otimes TK) \arrow[u, "Tu_{X\otimes TK}"] \arrow[r, "\tau_{X,TK}"'] & TX\otimes T^2K \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes m_K"'] & TX\otimes TK \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\tau_0"'] & TX
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T^2(TK\otimes X) \arrow[r, "T\tau_{TK,X}"] & T(T^2K\otimes TX) \arrow[r, "T(m_K\otimes\mathrm{Id})"] & T(TK\otimes TX) \arrow[r, "T(\tau_0\otimes\mathrm{Id})"] & T^2X \arrow[d, "m_X"] \\
T(TK\otimes X) \arrow[u, "Tu_{TK\otimes X}"] \arrow[r, "\tau_{TK,X}"'] & T^2K\otimes TX \arrow[r, "m_K\otimes\mathrm{Id}"'] & TK\otimes TX \arrow[r, "\tau_0\otimes\mathrm{Id}"'] & TX
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X\otimes T(Y\otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\tau_{Y,Z}"] & X\otimes TY\otimes TZ \arrow[r, "u_{X\otimes TY}\otimes\mathrm{Id}"] & T(X\otimes TY)\otimes TZ \arrow[r, "\tau_{X,TY}\otimes\mathrm{Id}"] & TX\otimes T^2Y\otimes TZ \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes m_Y\otimes\mathrm{Id}"'] \\
X\otimes Y\otimes Z \arrow[u, "\mathrm{Id}\otimes u_{Y\otimes Z}"'] \arrow[r, "u_{X\otimes Y\otimes Z}"'] & T(X\otimes Y\otimes Z) \arrow[r, "\tau_{X\otimes Y,Z}"'] & T(X\otimes Y)\otimes TZ \arrow[r, "\tau_{X,Y}\otimes\mathrm{Id}"'] & TX\otimes TY\otimes TZ
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "\tau_{X,Y}\otimes\mathrm{Id}"] & TX\otimes TY\otimes Z \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes u_{TY\otimes Z}"] & TX\otimes T(TY\otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\tau_{TY,Z}"] & TX\otimes T^2Y\otimes TZ \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes m_Y\otimes\mathrm{Id}"'] \\
X\otimes Y\otimes Z \arrow[u, "u_{X\otimes Y}\otimes\mathrm{Id}"'] \arrow[r, "u_{X\otimes Y\otimes Z}"'] & T(X\otimes Y\otimes Z) \arrow[r, "\tau_{X\otimes Y,Z}"'] & T(X\otimes Y)\otimes TZ \arrow[r, "\tau_{X,Y}\otimes\mathrm{Id}"'] & TX\otimes TY\otimes TZ
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T^2(X\otimes Y) \arrow[r, "T\tau_{X,Y}"] \arrow[d, "m_{X\otimes Y}"'] & T(TX\otimes TY) \arrow[r, "\tau_{TX,TY}"] & T^2X\otimes T^2Y \arrow[d, "m_X\otimes m_Y"] \\
T(X\otimes Y) \arrow[rr, "\tau_{X,Y}"'] & & TX\otimes TY
\end{tikzcd}$$

A fenti tételben fellépő opmonoidális struktúra a gyenge bialgebra koalgebra struktúráját általánosítja, az öt szereplő diagram pedig rendre megfeleltethető a gyenge bialgebrát definiáló öt diagramnak (vö. 44. Tétel).

Egy gyenge bimonád Eilenberg–Moore-kategóriájának, és alap kategóriájának monoidális struktúrái közötti kapcsolat megértése az alábbi tételen alapszik.

40. Tétel ([55] Theorem 1.10)**.** *Legyen* (T,m,u) *egy monád valamely* $(\mathcal{M},\otimes,K)$ *monoidális kategórián, melyben* $(T,\tau,\tau_0):(\mathcal{M},\otimes,K)\to(\mathcal{M},\otimes,K)$ *egy opmonoidális funktor. Ezen feltevések mellett a 39. Tételben szereplő diagramok pontosan akkor kommutatívak, ha az alábbiak teljesülnek.*

- *A* K, *mint a terminális kategóriából* $\mathcal{M}$*-be menő funktor segítségével definiált* $1\xrightarrow{K}\mathcal{M}\xrightarrow{T}\mathcal{M}$ *funktor; és a*

$$\sqcap := \big(\, TK \xrightarrow{u_{TK}} T^2K \xrightarrow{\tau_{K,TK}} TK\otimes T^2K \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes m_K} TK\otimes TK \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\tau_0} TK \,\big)$$

  természetes transzformációból felépülő $T^2K \xrightarrow{m_K} TK \xrightarrow{\sqcap} TK$ *természetes transzformáció* $(1,\mathrm{Id})\to(\mathcal{M},T)$ *1-cellát alkotnak* $\mathsf{Mnd}^{\,i}(\mathsf{Cat})$*-ben;*

- *Az* $\mathcal{M}\times\mathcal{M} \stackrel{\otimes}{\to} \mathcal{M}$ *funktor és a* $T(\bullet\otimes\bullet) \stackrel{\tau}{\to} T(\bullet)\otimes T(\bullet)$ *természetes transzformáció* $(\mathcal{M},T)\times(\mathcal{M},T)\to(\mathcal{M},T)$ *1-cellát alkotnak* $\mathsf{Mnd}^i(\mathsf{Cat})$*-ben;*

- *Az*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}\times\mathcal{M} \arrow[r, "\mathrm{Id}\times T"] & \mathcal{M}\times\mathcal{M} \arrow[d, "\otimes"] \\ \mathcal{M} \arrow[u, "\mathrm{Id}\times K"] \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \mathrm{Id}\times\tau_0"] & \mathcal{M} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{M}\times\mathcal{M} \arrow[r, "T\times \mathrm{Id}"] & \mathcal{M}\times\mathcal{M} \arrow[d, "\otimes"] \\ \mathcal{M} \arrow[u, "K\times\mathrm{Id}"] \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \tau_0\times\mathrm{Id}"] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

  természetes transzformációk 2-cellák $\mathsf{Mnd}^i(\mathsf{Cat})$*-ben;*

- *Az alábbi formulákkal definiált* $E_{TX,TY}$ *és* $E^{(3)}_{TX,TY,TZ}$ *természetes transzformációk*

$$TX\otimes TY \xrightarrow{u_{TX\otimes TY}} T(TX\otimes TY) \xrightarrow{\tau_{TX,TY}} T^2X\otimes T^2Y \xrightarrow{m_X\otimes m_Y} TX\otimes TY \quad \textit{és}$$

$$TX\otimes TY\otimes TZ \xrightarrow{u_{TX\otimes TY\otimes TZ}} T(TX\otimes TY\otimes TZ) \xrightarrow{\tau^{(3)}_{TX,TY,TZ}} T^2X\otimes T^2Y\otimes T^2Z \xrightarrow{m_X\otimes m_Y\otimes m_Z} TX\otimes TY\otimes TZ\,,$$

  kommutatívvá teszik az alábbi diagramot,

$$\begin{tikzcd} TX\otimes TY\otimes TZ \arrow[r, "E_{TX,TY}\otimes\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes E_{TY,TZ}"'] \arrow[dr, "E^{(3)}_{TX,TY,TZ}"] & TX\otimes TY\otimes TZ \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes E_{TY,TZ}"] \\ TX\otimes TY\otimes TZ \arrow[r, "E_{TX,TY}\otimes\mathrm{Id}"'] & TX\otimes TY\otimes TZ \end{tikzcd}$$

  $\mathcal{M}$ *minden* X,Y,Z *objektumára.*

Ezt együtt alkalmazva a 34. Tétellel, a következő igazolható.

41. Tétel ([55] Proof of Proposition 1.11)**.** *Egy* T *gyenge bimonádra valamely* $(\mathcal{M},\otimes,K)$ *Cauchy-teljes monoidális kategórián a következő állítások teljesülnek.*

- $\mathcal{M}^T$ *monoidális egysége az* $1 \stackrel{K}{\to} \mathcal{M} \stackrel{T}{\to} \mathcal{M}$ *funktor gyenge felhúzása;*
- $\mathcal{M}^T$ *monoidális szorzása* $\mathcal{M}$ *monoidális szorzásának gyenge felhúzása;*
- $\mathcal{M}^T$ *asszociátor izomorfizmusa* $\mathcal{M}$ *asszociátor izomorfizmusának i-felhúzása;*
- $\mathcal{M}^T$ *monoidális egységgel kapcsolatos koherencia izomorfizmusai a 40. Tétel harmadik pontjában szereplő természetes transzformációk i-felhúzásai.*

Ahogy a gyenge bialgebrák speciális bialgebroidok, sejthető, hogy a gyenge bimonádok is megkaphatók, mint speciális bimonádok. Alább ([55] Section 2) alapján áttekintjük, hogy csakugyan, a gyenge bimonádok kategóriája ekvivalens bimonádok egy alkalmas kategóriájával.

42. Definíció ([55] Definition 2.6)**.** Egy $\mathcal{M}$ monoidális kategórián értelmezett gyenge bimonádok közötti *morfizmusokat* úgy definiáljuk, mint opmonoidális monád morfizmusokat. Azaz mint $g : T \to T'$ természetes transzformációkat, melyek opmonoidálisak abban az értelemben, hogy a

$$\begin{tikzcd} T(X\otimes Y) \arrow[r, "g_{X\otimes Y}"] \arrow[d, "\tau_{X,Y}"'] & T'(X\otimes Y) \arrow[d, "\tau'_{X,Y}"] \\ TX\otimes TY \arrow[r, "g_X\otimes g_Y"'] & T'X\otimes T'Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TK \arrow[r, "g_K"] \arrow[d, "\tau_0"'] & T'K \arrow[d, "\tau'_0"] \\ K \arrow[r, equal] & K \end{tikzcd}$$

diagramok kommutatívak $\mathcal{M}$ minden X és Y objektumára, és amelyek monád morfizmusok a következő kommutatív diagramok értelmében, $\mathcal{M}$ minden X objektumára.

$$\begin{tikzcd} T^2X \arrow[r, "Tg_X"] \arrow[d, "m_X"'] & TT'X \arrow[r, "g_{T'X}"] & T'^2X \arrow[d, "m'_X"] \\ TX \arrow[rr, "g_X"'] & & T'X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, "u_X"'] & X \arrow[d, "u'_X"] \\ TX \arrow[r, "g_X"'] & T'X \end{tikzcd} .$$

A gyenge bimonádok $\mathcal{M}$-en, mint objektumok, és morfizmusaik, mint nyilak, egy $\mathsf{Wbm}(\mathcal{M})$-mel jelölt kategóriát alkotnak, amiben a bimonádok kategóriája teljes részkategória.

Azt mondjuk, hogy egy (R, μ, η) monoid valamely $(\mathcal{M}, \otimes, K)$ monoidális kategóriában rendelkezik a *Frobenius*-tulajdonsággal, ha a felejtő funktor az R-modulusok kategóriájából $\mathcal{M}$-be olyan, hogy jobb és bal adjungáltja megegyezik. Ez ekvivalens azzal, hogy létezik egy (R, δ, ε) komonoid is $\mathcal{M}$-ben és a következő diagram kommutatív.

$$\begin{tikzcd} R\otimes R \arrow[rr, "\delta\otimes \mathrm{Id}"] \arrow[dr, "\mu"] \arrow[dd, "\mathrm{Id}\otimes\delta"'] & & R\otimes R\otimes R \arrow[dd, "\mathrm{Id}\otimes\mu"] \\ & R \arrow[dr, "\delta"] & \\ R\otimes R\otimes R \arrow[rr, "\mu\otimes\mathrm{Id}"'] & & R\otimes R \end{tikzcd}$$

Szeparábilis Frobenius-monoidról beszélünk, ha továbbá δ a μ szorzás szelése azaz $\mu\delta = \mathrm{Id}_R$. (A látszólag átfedő terminológia magyarázata az, hogy egy R monoid pontosan akkor (szeparábilis) Frobenius-tulajdonságú, ha a felejtő funktor az R-bimodulusok kategóriájából $\mathcal{M}$-be (szeparábilis) Frobenius-szerkezetű.)

Tekintsük a következő, $\mathsf{Sfbm}(\mathcal{M})$-mel jelölt kategóriát. Objektumai legyenek $(R, \widetilde{T})$ párok, ahol R szeparábilis Frobenius-monoid $\mathcal{M}$-ben és $\widetilde{T}$ bimonád az R bimodulusok kategóriáján. Az $(R, \widetilde{T}) \to (R', \widetilde{T}')$ morfizmusok legyenek (γ, Γ) párok, ahol $\gamma : R \to R'$ monoid és komonoid izomorfizmus (így egy γ^* izomorfizmust indukál az R-bimodulusok és az R'-bimodulusok monoidális kategóriája között) Γ pedig $\widetilde{T} \to \gamma^*\widetilde{T}\gamma^{*-1}$ bimonád morfizmus (a 42. Definíció értelmében).

43. Tétel ([55] Theorem 2.11)**.** *Bármely $\mathcal{M}$ Cauchy-teljes monoidális kategória esetén a* $\mathsf{Wbm}(\mathcal{M})$ *és* $\mathsf{Sfbm}(\mathcal{M})$ *kategóriák ekvivalensek.*

A gyenge bialgebrák illetve a gyenge Hopf-algebrák definíciója minden nehézség nélkül megismételhető a k-modulusok kategóriája helyett tetszőleges szimmetrikus, vagy akár fonott monoidális kategóriában, l. [33], [3].

44. Tétel ([55] Theorem 3.1)**.** *Tekintsünk egy (B, μ, η) monoidot valamely $(\mathcal{M}, \otimes, K, c)$ Cauchy-teljes fonott monoidális kategóriában. Bijektív kapcsolat áll fent a következő struktúrák között.*

- *$(B, \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ alakú gyenge bialgebrák $\mathcal{M}$-ben;*
- *$((-) \otimes B, (-) \otimes \mu, (-) \otimes \eta, \tau, \tau_0)$ alakú gyenge bimonádok $\mathcal{M}$-en, melyekre az alábbi diagram kommutatív, $\mathcal{M}$ bármely X, Y objektumára.*

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \otimes B \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes\tau_{K,K}"] \arrow[dr, "\tau_{X,Y}"'] & X \otimes Y \otimes B \otimes B \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes c_{Y,B}\otimes\mathrm{Id}"] \\
& X \otimes B \otimes Y \otimes B
\end{tikzcd} \tag{12}$$

Ha valamely B monoidra egy $(\mathcal{M}, \otimes, K, c)$ Cauchy-teljes fonott monoidális kategóriában a $(-) \otimes B$ funktor gyenge bimonád $\mathcal{M}$-en, akkor a természetesség miatt minden $f : K \to X$, $g : K \to Y$, $h : K \to B$ morfizmusra az alábbi diagram kommutatív.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f\otimes g\otimes h"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f\otimes g\otimes h"] & X \otimes Y \otimes B \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}\otimes\tau_{K,K}"] & X \otimes Y \otimes B \otimes B \arrow[dd, "\mathrm{Id}\otimes c_{Y,B}\otimes\mathrm{Id}"] \\
B \arrow[d, "\tau_{K,K}"'] & X \otimes Y \otimes B \arrow[dr, "\tau_{X,Y}"] & \\
B \otimes B \arrow[rr, "f\otimes\mathrm{Id}\otimes g\otimes\mathrm{Id}"'] & & X \otimes B \otimes Y \otimes B
\end{tikzcd}$$

Így (12) teljesül, ha a K monoidális egység „köbös generátor” a következő értelemben: Ha valamely $p, q : X \otimes Y \otimes Z \to W$ $\mathcal{M}$-beli morfizmusokra $p \circ (f \otimes g \otimes h) = q \circ (f \otimes g \otimes h)$ *minden* $f : K \to X$, $g : K \to Y$, $h : K \to Z$ morfizmus esetén, akkor $p = q$.

A monoidális egység „köbös generátor” például a k-modulusok szimmetrikus monoidális kategóriájában. Így tehát a fenti tétel magában foglalja a k fölötti gyenge bialgebrák, mint $\mathcal{M}_k$-n értelmezett gyenge bimonádok leírását (l. Szlachányi [41]).

Egy $(\mathcal{M}, \otimes, K)$ monoidális kategóriát *jobbról zártnak* mondunk, ha $\mathcal{M}$ minden X objektumára a $(-) \otimes X : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ funktor bal adjungált. Például, a k-modulusok kategóriája jobbról zárt. Jobbról zárt továbbá egy B k-bialgebra modulusainak kategóriája is, és Schauenburg [37] észrevétele szerint, az $\mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_k$ felejtő funktor pontosan akkor kompatibilis a zárt struktúrákkal, ha B Hopf-algebra. Ezen az alapon kézenfekvő egy bimonádot egy jobbról zárt monoidális kategórián *jobb Hopf- monádnak* mondani, ha Eilenberg–Moore-kategóriája is jobbról zárt úgy, hogy a felejtő funktor kompatibilis a zárt struktúrákkal.

Lawvere (Schauenburg fenti észrevételénél általánosabb) tétele (l. [25]) szerint egy jobb adjungált funktor (pl. a felejtő funktor) pontosan akkor kompatibilis a zárt struktúrákkal, ha az ún. Frobenius-reciprocitás teljesül. Egy (T, m, u, τ, τ_0) bimonád esetén ez azt jelenti, hogy az $\mathcal{M}^T \to \mathcal{M}$ felejtő funktor pontosan akkor kompatibilis a jobbról zárt struktúrákkal, ha a

$$\mathsf{can}_{X,Y} := \big(\, T(TX \otimes Y) \xrightarrow{\tau_{TX,Y}} T^2X \otimes TY \xrightarrow{m_X \otimes \mathrm{Id}} TX \otimes TY \,\big) \tag{13}$$

kanonikus természetes transzformáció izomorfizmus. Bruguières és társai [7]-ben azt a definíciót javasolták, hogy egy bimonádot egy tetszőleges monoidális kategórián nevezzünk *jobb Hopf-monádnak*, ha (13) természetes izomorfizmus. Szimmetrikusan definiálhatóak *bal Hopf-monádok* a $T(X \otimes TY) \to TX \otimes TY$ kanonikus természetes transzformáció izomorfizmus voltával.

Az (13) természetes transzformációt tekinthetjük egy gyenge bimonád esetén is. Egy gyenge Hopf-algebra által indukált gyenge bimonádra azonban (13) nem természetes izomorfizmus, de természetes izomorfizmust indukál $T(TX \otimes Y)$ és $TX \otimes TY$ egy-egy alkalmas retraktuma között. A gyenge Hopf-monád definíciójához a 40. Tételben látott $E_{TX,TY} : TX \otimes TY \to TX \otimes TY$; és egy, T-hez szintén kanonikusan rendelt (l. [55] (4.3)) $F_{X,Y} : T(TX \otimes Y) \to T(TX \otimes Y)$ idempotens természetes transzformációt használunk.

45. Definíció ([55] Definition 4.1)**.** Egy T gyenge bimonádot valamely $(\mathcal{M}, \otimes, K)$ monoidális kategórián *gyenge jobb Hopf-monádnak* mondunk, ha létezik egy $\chi_{X,Y} : TX \otimes TY \to T(TX \otimes Y)$ természetes transzformáció, melyre

$$\chi_{X,Y} E_{TX,TY} = \chi_{X,Y} = F_{X,Y} \chi_{X,Y}, \quad \chi_{X,Y} \mathsf{can}_{X,Y} = F_{X,Y}, \quad \mathsf{can}_{X,Y} \chi_{X,Y} = E_{TX,TY},$$

$\mathcal{M}$ bármely X, Y objektuma esetén. Szimmetrikusan definiáljuk a *gyenge bal Hopf-monádokat* a $T(X \otimes TY) \to TX \otimes TY$ kanonikus természetes transzformáció segítségével.

E definíció jogosságát igazolja a következő.

46. Tétel ([55] Theorem 4.2)**.** *Tekintsünk egy T gyenge bimonádot valamely $(\mathcal{M}, \otimes, K)$ Cauchy-teljes monoidális kategórián, és a 43. Tétel szerint neki megfelelő $\widetilde{T}$ bimonádot (egy szeparábilis Frobenius-monoid bimodulus kategóriáján). A következő állítások ekvivalensek.*

- *$\widetilde{T}$ jobb (ill. bal) Hopf-monád;*
- *T gyenge jobb (ill. bal) Hopf-monád.*

Legyen T egy gyenge jobb Hopf-monád valamely $(\mathcal{M}, \otimes, K)$ Cauchy-teljes monoidális kategórián és legyen R a 43. Tétel szerint hozzárendelt szeparábilis Frobenius-monoid. Ha az R-bimodulusok kategóriája jobbról zárt, akkor a fenti tétel szerint $\mathcal{M}^T$ is jobbról zárt úgy, hogy a felejtő funktor az R-bimodulusok kategóriájába kompatibilis a zárt struktúrákkal. Ha $\mathcal{M}$ jobbról zárt, akkor az R-bimodulusok kategóriája is jobbról zárt (a megkívánt jobb adjungáltak alkalmas idempotens természetes transzformációk felhasadásával adódnak).

Végül, a remélt kapcsolat bizonyítható gyenge Hopf-monádok és gyenge Hopf-algebrák között.

47. Tétel ([7] Theorems 4.6 and 4.8)**.** *Legyen B egy gyenge bialgebra valamely $(\mathcal{M}, \otimes, K, c)$ Cauchy-teljes fonott monoidális kategóriában. Az indukált $(-) \otimes B$ funktor pontosan akkor gyenge jobb Hopf-monád, ha B gyenge Hopf-algebra. Továbbá $(-) \otimes B$ pontosan akkor gyenge bal Hopf-monád <u>is</u>, ha a B gyenge Hopf-algebra antipódja invertálható.*

III. Az eredmények rövid összefoglalása, alkalmazások.

Értekezésem témájául munkásságom azon (részben társszerzőkkel írt) darabjait választottam ki, melyek a Hopf-algebrákat általánosító algebrai struktúrák – gyenge Hopf-algebrák, illetve a még általánosabb Hopf-algebroidok – definíciójának kimunkálásával, a struktúra vizsgálatával, kategóriaelméleti megalapozásával illetve néhány elemi alkalmazásával foglalkoznak.

III.1. Hopf-algebroidok definíciója és vizsgálata.

Az elért fő eredmények a következők.

- Megfogalmaztuk a Hopf-algebroidok axiómáit, melyek általánosítják mind a Hopf-algebrákat mind a gyenge Hopf-algebrákat tetszőleges (nem feltétlenül kommutatív) bázis algebrák esetére, l. [51].
- Igazoltuk a Hopf-algebroidok olyan alapvető tulajdonságait, mint a bázis algebrák anti-izomorfizmusa és az antipód (ko)gyűrű anti-homomorfizmus volta, l. [52].
- Hopf-algebroid definíciónkat összevetettük az irodalomban található hasonló fogalmakkal – mint a Lu féle Hopf-algebroid [26], a Schauenburg féle $\times_R$-Hopf-algebra [37] valamint a Day-Street féle kvantum grupoid [15], l. [51].
- Példákat adtunk Hopf-algebroidokra, egy részük esetén az irodalomban különböző alkalmazásokban már szerepelt példákról igazolva, hogy kielégítik a Hopf-algebroid axiómákat, l. [51].

Mondhatjuk, hogy mára e struktúrák (főként a speciálisabb gyenge Hopf-algebrák) alkalmazási köre viszonylag széles. Faktorok bővítésének leírására használták például Enock [17], David [16], Vallin [45], Nikshych és Vainerman [29], Das és Kodiyalam [14]. Frobenius-kiterjesztések szimmetriájaként használta Kadison és Nikshych [23]. Dupla grupoidokkal való kapcsolatukat mutatták meg Andruskiewitsch és Natale [4], dinamikai kvantum csoportokat írtak le velük Etingof és Nikshych [18], általánosított Kac–Moody-algebrákkal összefüggésben merültek föl Wu munkájában [49], Cartan mátrixokhoz rendelt gyenge Hopf-algebrákat Yang [44], bizonyos kvantum csoportokhoz Aizawa és Isaac [1]. A (dinamikai) Yang–Baxter-egyenlet megoldására alkalmazta Etingof és Nikshych [19], csomó invariánsok konstrukciójához használta Nikshych, Turaev és Vainerman [28].

A matematika mellett ezek a struktúrák felléptek fizikai alkalmazásokban is. Peremes konform térelméletek szimmetriájaként jelentek meg Coquereaux és társszerzői [13], Behrend, Pierce, Petkova és Zuber [6] cikkeiben. Rács modellekben bukkant fel Alekseev, Faddeev, Fröhlich és Schomerus [2] munkájában.

[72] és [68] munkánk általánosításaként (kommutatív gyűrűk modulus kategóriája helyett) fonott monoidális kategóriákban definiáltak és vizsgáltak gyenge Hopf-algebrákat Pastro és Street [33] illetve Alonso Álvárez és társai [3]. Számos cikk tárgya a hatalmas Hopf-algebrai irodalom különböző erdményeinek Hopf-algebroidokra (elsősorban gyenge Hopf-algebrákra) való általánosítása, l. pl. [46].

III.2. Hopf-algebroidok integrálelmélete.

Az elért fő eredmények a következők.

- Bevezettem az integrál fogalmát bialgebroidokban és Hopf-algebroidokban illetve bialgebroidokon és Hopf-algebroidokon, l. [52].

- Maschke-típusú tételeket bizonyítottam, melyek szerint egy Hopf-algebroid alap (ko)gyűrűjének félig (ko)egyszerűsége ekvivalens a (ko)szeparabilitással és ekvivalens egy megfelelő értelemben normált integrál létezéseval a Hopf-algebroidban (Hopf-algebroidon), l. [52].

- Igazoltam, hogy egy Hopf-algebroid Frobenius-tulajdonsága (egyszerre mindkét bázis algebra fölött) ekvivalens egy megfelelő értelemben nem degenerált integrál létezésével. Szükséges és elégséges feltételeket adtam meg a kvázi-Frobenius-tulajdonságra, l. [52].

- Igazoltam, hogy egy Frobenius-Hopf-algebroidnak a (nem kommutatív bázis algebra szerinti) duálisa is Frobenius-Hopf-algebroid, l. [51].

[52] kvázi-Frobenius-kiterjeztésekre vonatkozó eredményeit alkalmazta [21].

III.3. Galois-kiterjesztések Hopf-algebroid szimmetriával.

Az elért fő eredmények a következők.

- Egy Hopf-algebroid két alap bialgebroidjának Galois-kiterjesztéseit összehasonlítva igazoltam, hogy e két fogalom egybeesik mindazon esetekben, ha az antipód bijektív és a Hopf-algebroid a bázis algebrák fölötti lapos modulus, l. [53], [63, *Corrigendum*].

- Igazoltam Kreimer és Takeuchi klasszikus Hopf-algebrai tételének általánasítását Hopf-algebroidokra, mely szükséges és elégséges feltételeket fogalmaz meg egy végesen generált projektív Hopf-algebroiddal vett kiterjesztés Galois-tulajdonságára, l. [53].

- A relatív Hopf-modulusok kategóriáját a koinvariáns részalgebra modulus kategóriájával összehasonlító gyenge és erős struktúra-tételeket bizonyítottam a Morita-elmélet alkalmazásával, l. [53].

A Hopf-algebroidok Galois-elméletének [53]-ben megkezdett tanulmányozását folytatta [5], illetve saját munkáim közül [56], [63].

III.4. Gyenge Hopf-algebrák Doi–Hopf-modulusai.

Az elért fő eredmények a következők.

- Bevezettem a gyenge bialgebrák feletti Doi–Hopf-adatokat és az ezekhez rendelt modulusok kategóriáját. Megmutattam, hogy gyenge Hopf-algebrák modulusai, komodulusai, relatív Hopf-modulusai és Yetter–Drinfel'd-modulusai mind gyenge Doi–Hopf-modulusok, l. [50].

- Igazoltam, hogy a gyenge Doi–Hopf-adatban szereplő modulus koalgebra végesen generált projektivitása esetén a gyenge Hopf-modulusok kategóriája ekvivalens egy alkalmas algebra modulus kategóriájával. Ezen algebra konstrukciója a féldirekt szorzat „gyenge" általánosítása, l. [50]. Példaként megmutattam, hogy egy gyenge bialgebra Drinfel'd-dupluma előáll ezen konstrukció révén.

A [50]-beli gyenge Doi–Hopf-modulusok inspirálták Caenepeel és De Groot gyenge vegyes disztributív szabályát [9] és Wisbauer gyenge kogyűrűjét [48].

III.5. Gyenge Hopf-algebrákra épülő konstrukciók és a monádok gyenge elmélete.

Az elért fő eredmények a következők.

- Bevezettem egy tetszőleges $\mathcal{K}$ 2-kategória monádjainak a [24]-belit általánosító $\mathrm{EM}^w(\mathcal{K})$ 2-kategóriáját és a [40]-belit kétféleképpen általánosító $\mathrm{Mnd}^i(\mathcal{K})$ és $\mathrm{Mnd}^p(\mathcal{K})$ 2-kategóriáit, l. [54]. (Mindezen konstrukciók nehézség nélkül általánosíthatók bikategóriákra is.)

- Bijektív kpcsolatot igazoltam $\mathrm{EM}^w(\mathcal{K})$ monádjai és $\mathcal{K}$ bizonyos szorzat alakú premonádjai között. Megmutattam, hogy algebrák gyenge féldirekt szorzata ilyen „gyenge koszorú szorzat”, l. [54].

- Az Eilenberg–Moore-objektumokra való felhúzás általánosításaként bevezettem a „gyenge felhúzás” fogalmát, amikor a felejtő morfizmussal való kompatibilitás csak egy felhasadó mono illetve epi 2-cella erejéig teljesül. Igazoltam, hogy az ilyen értelemben vett gyenge felhúzások kategóriája ekvivalens $\mathrm{Mnd}^i(\mathcal{K})$ illetve $\mathrm{Mnd}^p(\mathcal{K})$ megfelelő hom kategóriájával. Példaként megmutattam, hogy gyenge bialgebrák modulus kategóriájának monoidális struktúrája gyenge felhúzással adódik. Caenepeel és De Groot gyenge vegyes disztributív szabályának [9] ekvivalens leírását adtam a gyenge felhúzás segítségével, l. [54].

A monádok gyenge elméletét kidolgozó [54] munkám nyomán indult meg együttműködésem a Sydney-i kategórialeméleti csoporttal, Steve Lackkal és Ross Streettel. Ennek eredménye eddig két elkészült [55], [66]; és további két folyamatban lévő, részben [54]-re épülő munka.

III.6. Gyenge bimonádok.

Az elért fő eredmények a következők.

- Az Eilenberg–Moore-kategória monoidális struktúrájára megfogalmazott követelmények révén definiáltuk a „gyenge bimonádokat” monoidális kategóriákon. Ez általánosítja mind a gyenge bialgebrákat [30], [72], [68] mind a Moerdijk féle bimonádokat [27]. Cauchy-teljes alap monoidális kategória esetén igazoltuk definíciónk ekvivalenciáját néhány egyszerű axiómával, l. [55].

- Megmutattuk, hogy gyenge bimonádok Eilenberg–Moore-kategóriájának monoidális struktúrájára gyenge felhúzással adódik, l. [55].

- Igazoltuk, hogy egy adott Cauchy-teljes monoidális kategória gyenge bimonádjainak kategóriája ekvivalens egy olyan kategóriával, melynek objektumai egy R szeparábilis Frobenius-monoidból és egy, az R-bimodulusok kategóriáján értelmezett bimonádból állnak. Ez általánosítja a gyenge bialgebrák és a bialgebroidok közötti kapcsolatot, l. [55].

- Igazoltuk, hogy bármely Cauchy-teljes fonott monoidális kategóriában minden gyenge bialegbra indukál egy gyenge bimonádot. Jellemeztük azon gyenge bimonádokat amelyek így állnak elő, l. [55].

- A [7]-ben tárgyalt jobb illetve bal Hopf-monádok gyenge megfelelőiként definiáltuk a jobb illetve bal gyenge Hopf-monádokat. Igazoltuk, hogy egy Cauchy-teljes fonott monoidális kategóriában egy gyenge bialgebra pontosan akkor indukál jobb Hopf-monádot (a jobbról való tenzor szorzás révén) ha gyenge Hopf-algebra és pontosan akkor indukál bal Hopf-monádot is ha antipódja bijektív, l. [55].

IV. Publikációk jegyzéke.

IV.1. Hivatkozások.

[1] N. Aizawa and P.S. Isaac, *Weak Hopf algebras corresponding to* $U_q[sl_n]$, J. Math. Phys. 44 (2003), no. 11, 5250-5267.

[2] A.Y. Alekseev, L.D. Faddeev, J. Fröhlich and V. Schomerus, *Representation theory of lattice current algebras*, Comm. Math. Phys. 191 (1998), no. 1, 31-60.

[3] J.N. Alonso Álvarez, J.M. Fernández Vilaboa and R. González Rodríguez, *Weak braided Hopf algebras*, Indiana Univ. Math. J. 57 (2008), no. 5, 2423-2458.

[4] N. Andruskiewitsch and S. Natale, *Double categories and quantum groupoids*, Publ. Mat. Urug. 10 (2005), 11-51.

[5] I. Bálint and K. Szlachányi, *Finitary Galois extensions over noncommutative bases*, J. Algebra 296 (2006), no. 2, 520-560.

[6] R.E. Behrend, P.A. Pearce, V.B. Petkova and J.B. Zuber, *Boundary conditions in rational conformal field theories*, Nucl. Phys. B 579 (2000) No 3, 707-773.

[7] A. Bruguières, S. Lack and A. Virelizier, *Hopf monads on monoidal categories*, Preprint available at `http://arxiv.org/abs/1003.1920v1`.

[8] T. Brzeziński, *The structure of corings. Induction functors, Maschke-type theorem, and Frobenius and Galois-type properties*, Algebras and Representation Theory 5 (2002), no. 4, 389-410.

[9] S. Caenepeel and E. De Groot, *Modules over weak entwining structures*, [in:] New trends in Hopf algebra theory (La Falda, 1999) N. Andruskiewitsch, W.R. Ferrer Santos, H.J. Schneider (eds.), pp. 31-54, Contemp. Math., 267, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[10] S. Caenepeel and K. Janssen, *Partial (Co)Actions of Hopf Algebras and Partial Hopf-Galois Theory*, Comm. Algebra 36 (2008), no. 8, 2923–2946.

[11] S. Caenepeel, J. Vercruysse and S. Wang, *Morita theory for corings and cleft entwining structures*, J. Algebra 276 (2004), no. 1, 210-235.

[12] S. Caenepeel, D. Wang and Y. Yin, *Yetter-Drinfeld modules over weak bialgebras*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.) 51 (2005), 69–98.

[13] R. Coquereaux and G. Schieber, *Orders and dimensions for sl(2) or sl(3) module categories and boundary conformal field theories on a torus*, J. Math. Phys. 48 (2007), no. 4, 043511, 17 pp.

[14] P. Das and V. Kodiyalam, *Planar algebras and the Ocneanu-Szymański theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), no. 9, 2751-2759 (electronic).

[15] B. Day and R. Street, *Quantum category, star autonomy and quantum groupoids*, [in:] Galois Theory, Hopf Algebras, and Semiabelian Categories, G. Janelidze, B. Pareigis and W. Tholen (eds.), Fields Institute Comm. 43 pp 187-225, AMS, Providence, RI, 2004.

[16] M.C. David, *C^*-groupoïdes quantiques et inclusions de facteurs: structure symétrique et autodualité, action sur le facteur hyperfini de type II1*, (French) [*Quantum C^*-groupoids and inclusions of factors: symmetric structure and self-duality, action on the type-II1 hyperfinite factor*] J. Operator Theory 54 (2005), no. 1, 27-68.

[17] M. Enock, *Measured quantum groupoids in action.* Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) No. 114 (2008), ii+150 pp.

[18] P. Etingof and D. Nikshych, *Dynamical quantum groups at roots of 1*, Duke Math. J. 108 (2001), no. 1, 135-168.

[19] P. Etingof and D. Nikshych, *Vertex-IRF transformations and quantization of dynamical r-matrices*, Math. Res. Lett. 8 (2001), no. 3, 331-345.

[20] J.M. Fernández Vilaboa, R. González Rodríguez and A.B. Rodríguez Raposo, *Preunits and weak crossed products*, J. Pure Appl. Algebra 213 (2009), no. 12, 2244-2261.

[21] G. Guo, *Quasi-Frobenius corings and quasi-Frobenius extensions*, Comm. Algebra 34 (2006), no. 6, 2269–2280.

[22] T. Hayashi, *Quantum group symmetry of partition functions of IRF models and its application to Jones' index theory*, Commun. Math. Phys. 157 (1993), no. 2, 331-345.

[23] L. Kadison and D. Nikshych, *Frobenius extensions and weak Hopf algebras*, J. Algebra 244 (2001), no. 1, 312-342.

[24] S. Lack and R. Street, *The formal theory of monads II*, J. Pure and Applied Algebra 175 (2002), no. 1, 243-265.

[25] F.W. Lawvere, *Equality in hyperdoctrines and comprehension schema as an adjoint functor*, [in:] „Applications of Categorical Algebra" Heller, A. (ed.) Sympos. Pure Math., Vol. XVII, pp. 1–14, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1970.

[26] J.H. Lu, *Hopf algebroids and quantum groupoids*, Internat. J. Math. 7 (1996), no. 1, 47–70.

[27] I. Moerdijk, *Monads on tensor categories*, J. Pure Appl. Algebra 168 (2002), no. 2-3, 189-208.

[28] D. Nikshych, V. Turaev and L. Vainerman, *Invariants of knots and 3-manifolds from quantum groupoids*, Topology Appl. 127 (2003), no. 1-2, 91-123.

[29] D. Nikshych and L. Vainerman, *A characterization of depth 2 subfactors of II1 factors*, J. Funct. Anal. 171 (2000), no. 2, 278-307.

[30] F. Nill, *Weak bialgebras*, Preprint available at `http://arxiv.org/abs/0805.3806`.

[31] A. Nenciu, *The center construction for weak Hopf algebras*, Tsukuba J. Math. 26 (2002), no. 1, 189–204.

[32] A.Ocneanu, *Quantized groups, string algebras, and Galois theory for algebras,* [in:] Operator Algebras and Applications, Vol. 2, D.E. Evans et al. (eds.), London Math. Soc. Lect. Notes 135, Cambridge 1988

[33] C. Pastro and R. Street, *Weak Hopf monoids in braided monoidal categories*, Algebra Number Theory 3 (2009), no. 2, 149-207.

[34] Phung Ho Hai, *Tannaka-Krein duality for Hopf algebroids*, Israel J. Math. 167 (2008), 193-225.

[35] D.C. Ravenel, *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres.* Academic Press 1986.

[36] A.B. Rodríguez Raposo, *Crossed Products for Weak Hopf Algebras*, Comm. Algebra 37 (2009), no. 7, 2274–2289.

[37] P. Schauenburg, *Duals and doubles of quantum groupoids ($\times_R$-Hopf algebras)*, [in:] New trends in Hopf algebra theory, N. Andruskiewitsch and W.R. Ferrer Santos (eds.), AMS Contemporary Mathematics 267 (2000) 273-299.

[38] P. Schauenburg, *Bialgebras over noncommutative rings and a structure theorem for Hopf bimodules*, Appl. Categ. Structures 6 (1998), no. 2, 193-222.

[39] P. Schauenburg and H.J. Schneider, *On generalized Hopf Galois extensions*, J. Pure and Applied Algebra 202 (2005), no. 1-3, 168-194

[40] R. Street, *The formal theory of monads*, J. Pure and Applied Algebra 2 (1972), no. 2, 149-168.

[41] K. Szlachányi, *Adjointable monoidal functors and quantum groupoids*, [in:] „Hopf algebras in noncommutative geometry and physics", Caenepeel, S.; Van Oysaeyen, F. (eds.), pp. 291–307, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 239, Dekker, New York, 2005.

[42] M. Takeuchi, *Groups of algebras over $A \otimes \overline{A}$*, J. Math. Soc. Japan 29 (1977), no. 3, 459-492.

[43] T. Yamanouchi, *Duality for Generalized Kac Algebras and a Characterization of Finite Groupoid Algebras*, Journal of Algebra 163, no. 1, 9-50 (1994)

[44] S. Yang, *Weak Hopf algebras corresponding to Cartan matrices*, J. Math. Phys. 46 (2005), no. 7, 073502, 18 pp.

[45] J.M. Vallin, *Groupoïdes quantiques finis*, (French) [*Finite quantum groupoids*] J. Algebra 239 (2001), no. 1, 215-261.

[46] Y. Wang and L.Y. Zhang, *The structure theorem for comodule algebras over Hopf algebroids*, Acta Math. Hung., in press.

[47] WikipediA, *Quantum group.*
`http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_group` (ford. B.G.)

[48] R. Wisbauer, *Weak corings*, J. Algebra 245 (2001), no. 1, 123-160.

[49] Z. Wu, *The weak Hopf algebras related to generalized Kac-Moody algebra*, J. Math. Phys. 47 (2006), no. 6, 062108, 13 pp.

IV. 2. A dolgozat a szerző alábbi publikációi alapján készült.

[50] G. Böhm, *Doi-Hopf modules over weak Hopf algebras*, Comm. Algebra 28 (2000), no. 10, 4687-4698.

[51] G. Böhm and K. Szlachányi, *Hopf algebroids with bijective antipodes: axioms integrals and duals*, J. Algebra 274 (2004), no. 2, 708-750.

[52] G. Böhm, *Integral theory for Hopf algebroids*, Algebr. Represent. Theory 8 (2005), no. 4, 563-599. *Erratum*, in press.

[53] G. Böhm, *Galois theory for Hopf algebroids*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.) 51 (2005), 233-262.

[54] G. Böhm, *The weak theory of monads*, Adv. in Math. 225 (2010), no. 1, 1-32.

[55] G. Böhm, S. Lack and R. Street, *Weak bimonads*, J. Algebra in press. doi:10.1016/j.jalgebra.2010.07.032.

IV. 3. A szerző további publikációi a dolgozat témájában.

[56] A. Ardizzoni, G. Böhm and C. Menini, *A Schneider type theorem for Hopf algebroids*, J. Algebra 318 (2007), no. 1, 225-269. *Corrigendum*, J. Algebra 321 (2009) no. 6, 1786-1796.

[57] G. Böhm, *Internal bialgebroids, entwining structures and corings*, [in:] Algebraic structures and their representations, J.A. de la Peña, E. Vallejo, and N. Atakishiyev (eds.), pp. 207-226, Contemp. Math., 376, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[58] G. Böhm, *An alternative notion of Hopf algebroid*, [in:] Hopf algebras in noncommutative geometry and physics, S. Caenepeel and F. Van Oystaeyen (eds.) pp 31-53, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 239, Dekker, New York, 2005.

[59] G. Böhm, *Galois extensions over commutative and non-commutative base*, (survey) [in:] New techniques in Hopf algebras and graded ring theory, S. Caenepeel and F. Van Oysaeyen (eds.) pp. 9-34, K. Vlaam. Acad. Belgie Wet. Kunsten (KVAB), Brussels, 2007.

[60] G. Böhm, *Hopf Algebroids*, (survey) [in:] Handbook of Algebra Vol 6, M. Hazewinkel (ed.), pp. 173-236, Elsevier, 2009.

[61] G. Böhm, *Factorization systems induced by weak distributive laws*, submitted. Preprint available at `http://arxiv.org/abs/1009.0732`.

[62] G. Böhm and T. Brzeziński, *Strong connections and the relative Chern-Galois character for corings*, Int. Math. Res. Not. 2005, no. 42, 2579-2625.

[63] G. Böhm and T. Brzeziński, *Cleft extensions of Hopf algebroids*, Appl. Categ. Structures 14 (2006), 431-469. *Corrigendum*, Appl. Categ. Structures 17 (2009), no. 6, 613-620.

[64] G. Böhm and T. Brzeziński, *Pre-torsors and equivalences*, J. Algebra 317 (2007), 544-580. *Corrigendum*, J. Algebra 319 (2008), 1339-1340.

[65] G. Böhm, T. Brzeziński and R. Wisbauer, *Monads and comonads in module categories*, J. Algebra 322 (2009) 1719-1747.

[66] G. Böhm, S. Lack and R. Street, *On the 2-categories of weak distributive laws*, Preprint available at `http://arxiv.org/abs/arXiv:1009.3454`.

[67] G. Böhm and C. Menini, *Pre-torsors and Galois comodules over mixed distributive laws*, Appl. Cat. Str. in press. doi:10.1007/s10485-008-9185-9.

[68] G. Böhm, F. Nill and and K. Szlachányi, *Weak Hopf algebras. I. Integral theory and C*-structure*, J. Algebra 221 (1999), no. 2, 385-438.

[69] G. Böhm and D. Ştefan, *(Co)cyclic (co)homology of bialgebroids: an approach via (co)monads*, Comm. Math. Phys. 282 (2008), no.1, 239-286.

[70] G. Böhm and D. Ştefan, *Examples of para-cocyclic objects induced by BD-laws*, Algebr. Represent. Theory 12 (2009), no. 2-5, 153-180.

[71] G. Böhm and D. Ştefan, *A categorical approach to cyclic duality*, J. Noncommutative Geometry, in press.

[72] G. Böhm and K. Szlachányi, *A coassociative C*-quantum group with nonintegral dimensions*, Lett. Math. Phys. 38 (1996), no. 4, 437-456.

[73] G. Böhm and K. Szlachányi, *Weak C*-Hopf algebras: the coassociative symmetry of non-integral dimensions*, [in:] Quantum groups and quantum spaces (Warsaw, 1995), R. Budzynski, W. Pusz and S. Zakrzewski (eds.) pp. 9-19, Banach Center Publ., 40, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1997.

[74] G. Böhm and K. Szlachányi, *Weak C*-Hopf algebras and multiplicative isometries*, J. Operator Theory 45 (2001), no. 2, 357-376.

[75] G. Böhm and K. Szlachányi, *Weak Hopf algebras. II. Representation theory, dimensions, and the Markov trace*, J. Algebra 233 (2000), no.1, 156-212.

[76] G. Böhm and K. Szlachányi, *Hopf algebroid symmetry of abstract Frobenius extensions of depth 2*, Comm. Algebra 32 (2004), no. 11, 4433-4464.

[77] G. Böhm and J. Vercruysse, *Morita theory for coring extensions and cleft bicomodules*, Adv. in Math. 209 (2007), no. 2, 611-648. *Corrigendum*, Adv. in Math. 221 (2009), no. 2, 682-686.

[78] G. Böhm and J. Vercruysse, *Morita theory of comodules*, Comm. Algebra 37 (2009), no. 9, 3207-3247.

V. Nyilatkozat.

Mellékelve [51] társszerzőjének, Prof Dr Szlachányi Kornélnak a nyilatkozata, mely szerint a tézisekben ismertetett eredményeket a pályázó eredményeinek ismeri el.