

**Bírálat Böhm Gabriella**  
**„Kvantum grupoidok” c. MTA doktori értekezéséről**

A Hopf-algebrák elmélete a modern algebra egyik fontos területe. Tanulmányozásuk két, algebrán kívüli alkalmazás miatt vált fontossá: az algebrai geometriában az affin algebrai csoportok koordinátagyűrűjén adott egy természetes Hopf-algebra struktúra, illetve a topológiában bizonyos kohomológiagyűrűk is Hopf-algebra struktúrával bírnak. Az utóbbi egy-két évtizedben elsősorban fizikai és topológiai alkalmazások okán fontossá vált a Hopf-algebra fogalom általánosítása. A különféle általánosítások közül Böhm Gabriella értekezése kettővel foglalkozik részletesen: a gyenge Hopf-algebrákkal és a Hopf-algebroidokkal.

A gyenge Hopf-algebrák fogalmát Böhm Gabriella doktori témavezetőjével, Szlachányi Kornéllal közösen vezette be az 1990-es évek második felében. Definíciójuk két okból is igen sikeresnek bizonyult. Egyfelől azért, mert koncepciózus általánosítását adta több, az irodalomban szereplő speciális konstrukciónak. Másfelől azért, mert élvonalbeli külföldi kutatók sikeresen hasznosították alkalmazásokban. Kiemelném itt Etingof és Nikshych munkáját a dinamikus kvantum-csoportok elméletében, illetve Nikshych, Turaev és Vainerman csomóinvariáns-konstrukcióit a topológiában. Ezen és más alkalmazások frappánsan igazolták a definíció hasznosságát.

Kevésbé egyértelmű a helyzet a Hopf-algebroidokkal. Mindenekelőtt meg kell jegyezni, hogy ezen a néven több konstrukció is fut az irodalomban. A hivatkozások számát tekintve a legelfogadottabbnak J. H. Lu 1996-os definíciója tűnik, amelynek mindmáig számos alkalmazása van az algebrán kívül a topológiában, a nemkommutatív geometriában és a matematikai fizikában. Ezzel szemben a Böhm és Szlachányi 2004-es, illetve Böhm 2005-os önálló munkáiban bevezetett fogalmakat, amelyek az értekezés 2. és 3. fejezetének tárgyát képezik, úgy tűnik, hogy jelenleg csak a szűkebb téma specialistái használják. Ezzel kapcsolatban felmerül a kérdés, hogy szerencsés volt-e Lu munkája után 8 évvel ugyanazzal a névvel jelölni egy azzal nem ekvivalens és vélhetően nem is általánosabb konstrukciót. Hozzá kell tennünk azonban, hogy a Böhm-Szlachányi-féle definíció még igen friss, így elképzelhető, hogy a közeljövőben akad olyan frappáns alkalmazás, amely igazolja létjogosultságát.

Az értekezés egy igen alapos magyar nyelvű bevezetőből és 7 db angol nyelvű cikk utánnyomásából áll. A cikkek szinte mind a témakör mértékadó nemzetközi lapjaiban jelentek meg, egy pedig rangos általános folyóiratban, az *Advances in Mathematics*-ben. E bírálatban nem tudok kitérni a bennük található számos új eredmény mindegyikére, így csak röviden tekintem át őket.

A bevezető utáni 2. fejezet a bialgebrák elméletéből ismert Doi–Hopf-modulusok fogalmát általánosítja gyenge bialgebrák, illetve gyenge Hopf-algebrák felett, és vizsgálja néhány tulajdonságukat. A 3. fejezet a már

említett Szlachányi Kornéllal közös cikk, amely a Hopf-algebroidok új definícióját tartalmazza. Az imént némi fenntartást hangoztattam a cikkel kapcsolatosan, azt viszont mindenképpen fontos matematikai eredményként kell kiemelnem, hogy a Böhm-Szlachányi-féle konstrukció tisztán algebraelméleti leírását adja Day és Street egy kategorikus konstrukciójának. E fejezet utolsó alfejezetében már megjelennek a 4. fejezet fő témájául szolgáló integrálok Hopf-algebroidokban. Böhm Gabriella itt többek között igen szép Maschke-típusú tételeket bizonyít, amelyek egy adott Hopf-algebroid féligegyszerűségét integrálok létezésén keresztül karakterizálják. E tételek korábbi, Hopf-algebrákra vonatkozó ismert állításokat általánosítanak.

Az 5. fejezet Hopf-algebroidok Galois-elméletével foglalkozik. Számomra mint kívülálló számára először kicsit furcsának tűnt, hogy a témakör specialistái Galois-elméleten szinte kizárólag csupán a Galois-féle testbővítések fogalmának általánosítását értik. Ám már e kérdést tekintve is lehet nemtriviális tételleket igazolni. Böhm Gabriella fő eredménye itt Kreimer és Takeuchi egy klasszikus, Hopf-algebrákra vonatkozó tételének általánosítása Hopf-algebroidokra, amely kimutatja, hogy a Galois-tulajdonság már gyengébb feltételekből is következik. A további kutatásokban talán érdekes lehetne egyéb Galois-elméleti fogalmak, mint például a Galois-leszállás vagy a normálbázis-tétel analógjainak vizsgálata is ebben a kontextusban.

Az utolsó két fejezetben a szerző visszatér a gyenge bialgebrákhoz és Hopf-algebrákhoz, amelyeket kategória-elméleti szemszögből vizsgál. A nézőpont itt a 3. fejezetének pont a fordítottja: míg ott általános kategóriaelméleti konstrukciók algebra-elméleti leírásáról volt szó, addig itt Böhm Gabriella azt mutatja meg, hogy a gyenge Hopf-algebrákkal kapcsolatos, az utóbbi évtizedben született eredményeket hogyan lehet kategória-elméletileg megalapozni. A 7. fejezetben elsősorban Lack és Street egy korábbi monádokkal kapcsolatos munkáját fejleszti tovább, ami láthatóan felkeltette e szerzők érdeklődését, hiszen az utolsó fejezet már hármójuk közös munkájára alapul, amelyben bevezetik és vizsgálják a gyenge Hopf-monádokat.

Összefoglalva: Böhm Gabriella a Hopf-algebrák és azok kategorikus leírásának területén vezetett be fontos új konstrukciókat és általánosított klasszikus tételleket. Munkájában nehéz és absztrakt technikák imponáló és innovatív kezeléséről tett tanúbizonyságot. Bár konstrukciói egy részének szélesebb körben való alkalmazhatósága jelen pillanatban még nem világos, az mindenképp elmondható, hogy eredményei a szűkebb témakör művelőinek körében komoly nemzetközi visszhangot váltottak ki. Az értekezés nyilvános vitára bocsátását és a fokozat odaítélését melegen támogatom.

Budapest, 2011. szeptember 16.

Szamuely Tamás  
MTA Rényi Intézet