Válasz
Ivanyos Gábor, az MTA doktora bírálatára

Nagyon szépen köszönöm az alapos és mélyreható bírálatot, a dicsérő szavakat. A feltett kérdésre az alábbiakban válaszolok.

Kérdés: Az értekezés olvasásakor kisebb nehézséget okozott, hogy a 6. fejezet (az Advances-ben megjelent cikk) eredményeinél formálisan általánosabbak az 1.6. alfejezetben megfogalmazottak: míg az előbbi a 2-kategóriák nyelvén szól, utóbbi a valamivel gyengébb bikategória fogalmát használja. A jelölttől az kérném, térjen ki röviden arra, hogy miért maradnak érvényben a 6. fejezet eredményei az általánosabb környezetben.

Válasz: Köszönöm szépen a nagyon is jogos kérdést, melyre talán jó lett volna kitérnem a dolgozatban kérdés nélkül is. Sajnálom a fejezetek közötti teljes összhang hiányából fakadó kényelmetlenséget.

A kérdés tulajdonképpen a dolgozat **1.74 Tétel**ének és **1.78 Tétel**ének bikategóriákra való bizonyítására vonatkozik. Alább erre három (elvileg különböző) gondolatmenetet vázolok.

Első („favágó") bizonyítás. Kellő türelemmel a 6. fejezet (azaz a [12] sorszám alatt hivatkozott cikk) bizonyításai megismételhetők 2-kategóriák helyett bikategóriákra. A nem triviális koherencia izomorfizmusok csak technikai nehézséget okoznak, elvi bonyodalmat nem.

Második (biekvivalencián alapuló) bizonyítás. A 6. fejezetben ismertetett, 2-kategóriákra vonatkozó állításokból bikategóriákra vonatkozó következtetéseket nyerhetünk – felhasználva, hogy bármely $\mathcal{K}$ bikategóriához található megfelelő $\mathcal{C}$ 2-kategória és $F : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$ biekvivalencia, l. [S. MacLane and R. Paré, *Coherence for bicategories and indexed categories*, J. Pure Appl. Algebra 37 (1985), 59-80].

Ha $\mathcal{K}$ bikategória, akkor $\mathsf{EM}^w(\mathcal{K})$, $\mathsf{Mnd}^i(\mathcal{K})$ és $\mathsf{Mnd}^p(\mathcal{K})$ is az. Ennek belátása ugyanis 2-cellákra vonatkozó azonosságok ellenőrzését jelenti. Ezen azonosságoknak a (hű és teli) F általi képét pedig a 6. fejezetben igazoltuk.

Az **1.74 Tétel** tulajdonképpen bijekciót fogalmaz meg – egyfelől a $\Theta : stst \to st$ premonád szorzás, másfelől a $\psi : st \to ts$ 2-ciklus és a $\nu : ss \to st$ szorzás – azaz $\mathcal{K}$-beli 2-cellák között. Mivel F hű és teli, ez ekvivalens a 6. fejezetben igazolt bijekcióval a

$$(Fs)(Ft)(Fs)(Ft) \xrightarrow{\cong} F((st)(st)) \xrightarrow{F\Theta} F(st) \xrightarrow{\cong} (Fs)(Ft)$$

pre-monád szorzás, és a

$$(Ft)(Fs) \xrightarrow{\cong} F(ts) \xrightarrow{F\psi} F(st) \xrightarrow{\cong} (Fs)(Ft) \qquad \text{és}$$
$$(Fs)(Fs) \xrightarrow{\cong} F(ss) \xrightarrow{F\nu} F(st) \xrightarrow{\cong} (Fs)(Ft)$$

2-ciklus illetve szorzás; azaz $\mathcal{C}$-beli 2-cellák között.

Az **1.78 Tétel** esetében elegendő észrevenni, hogy az F biekvivalencia $\mathsf{Mnd}^i(\mathcal{K}) \to \mathsf{Mnd}^i(\mathcal{C})$ és $\mathsf{Mnd}^p(\mathcal{K}) \to \mathsf{Mnd}^p(\mathcal{C})$ biekvivalenciákat indukál, továbbá ekvivalenciát indukál a $\mathcal{K}$-beli és $\mathcal{C}$-beli, a tételben szereplő „i-felhúzás" illetve „p-felhúzás" kategóriák között is.

Harmadik (univerzalitásra épülő) bizonyítás. Eljárhatunk a 6. fejezetben idézett cikkre való hivatkozás nélkül is, újabb [G. Böhm, S. Lack and R. Street, *Idempotent splittings, colimit completion, and weak aspects of the theory of monads*, J. Pure Appl. Algebra 216 (2012), 385-403] cikkünk nyomán.

Ebben a munkában bármely $\mathcal{K}$ bikategóriának vettük először is azt a szabad kiterjesztését (ún. lokális Cauchy-teljessé tételét) amelyben minden idempotens 2-cella széthasad. Erre tekinthetünk úgy, mint a Cauchy-teljes kategóriák Descartes-monoidális kategóriájában gazdagított kategóriára (röviden Cat_{cc}-kategóriára). Így teljessé tehetjük mint Cat_{cc}-kategóriát a bikategóriai Eilenberg–Moore-objektumokra. A hivatkozott [JPAA 2012] cikk 5.5 Tétele szerint az így adódó $\mathsf{EM}_{dm}(\mathcal{K})$ bikategória (sőt Cat_{cc}-kategória) hű és teli rész bikategóriaként tartalmazza $\mathsf{EM}^w(\mathcal{K})$-t. Azaz a különbség $\mathsf{EM}_{dm}(\mathcal{K})$ és $\mathsf{EM}^w(\mathcal{K})$ között csak a 0-cellákban van: előbbi 0-cellái $\mathcal{K}$ pre-monádjai míg az utóbbié csak a valódi monádok. (Így ekvivalensek ha $\mathcal{K}$ idempotens 2-cellái széthasadnak.) E konstrukcióból rögtön következik, hogy $\mathsf{EM}_{dm}(\mathcal{K})$ (és $\mathsf{EM}^w(\mathcal{K})$) bikategória univerzális tulajdonságokkal.

A fenti [JPAA 2012] cikk 6.1 Tétele szerint a nyilvánvaló $\mathcal{K} \to \mathsf{EM}_{dm}(\mathcal{K})$ beágyazásnak van jobb biadjungáltja (a disszertációban is felbukkanó J^w) mindazon esetekben ha $\mathcal{K}$ idempotens 2-cellái széthasadnak és léteznek a monádok (bikategóriai) Eilenberg–Moore-objektumai. Eszerint az $\mathsf{EM}_{dm}(\mathcal{K}) \to \mathsf{EM}_{dm}(\mathsf{EM}_{dm}(\mathcal{K}))$ beágyazásnak van jobb biadjungáltja mely egy $\mathsf{EM}_{dm}(\mathcal{K})$-beli $((A,t),(s,\psi))$ (pre-)monádot az (A, st) $\mathcal{K}$-beli pre-monádba visz. Ez megfelel az **1.74 Tétel** egyik irányú konstrukciójának. Az **1.74 Tétel**ben megfogalmazott bijekcióra ugyanakkor nem látok absztrakt érveket, ennek igazolására (egyelőre?) a fent leírt első vagy második bizonyítással kell beérnünk.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{K}$ idempotens 2-cellái széthasadnak és léteznek a monádok (bikategóriai) Eilenberg–Moore-objektumai. A $\mathcal{K}$-beli 1-cellák gyenge felhúzását a [JPAA 2012] 6.1 Tételben szereplő $I^w \dashv J^w$ biadjunkció $((u,\epsilon),\iota)$ koegysége írja le a következő értelemben. Legyen $(x,\psi) : (A,t) \to (B,s)$ 1-cella $\mathsf{EM}^w(\mathcal{K})$-ban. Az x $\mathcal{K}$-beli 1-cella $\overline{x}$ gyenge felhúzását a következő $\mathsf{EM}^w(\mathcal{K})$-beli, a koegységre vonatkozó diagramon ismerhetjük fel.

$$\begin{tikzcd}
I^w J^w(A,t) =: (A^t,1) \arrow[r, "I^w J^w(x{,}\psi)=:(\overline{x}{,}1)"] \arrow[d, "(u{,}\epsilon)"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\iota"] & I^w J^w(B,s) =: (B^s,1) \arrow[d, "(u{,}\epsilon)"] \\
(A,t) \arrow[r, "(x{,}\psi)"'] & (B,s)
\end{tikzcd}$$

Az $(x,\psi) \mapsto (x, \overline{x} := J^w(x,\psi), \iota, \iota^{-1})$ (inverz $\mathsf{EM}^w(\mathcal{K})$-ban, nem $\mathcal{K}$-ban!) hozzárendelés adja az **1.78 Tétel**ben szereplő ekvivalencia funktorok hatását az objektumokon. A [JPAA 2012] 6.2 Lemmájában igazoltuk, hogy ez lényegében szürjektív leképezés. A 6.3 Lemmában jellemeztük azon 2-cellákat $\mathcal{K}$-ban melyek rendelkeznek i-felhúzással illetve p-felhúzással. Ezekre alapozva az **1.78 Tétel** bizonyítása a 6.4 Következményben található.

Budapest, 2011. október 20.

Böhm Gabriella