Bírálói vélemény

Jenei Sándor *"Investigation of Residuated Monoids"*

című MTA doktori értekezéséről

Jenei Sándor fő kutatási területei az algebra, az algebrai logika és a nemklasszikus logikák elmélete. Érdeklődésének középpontjában elsősorban a reziduált félcsoportok vizsgálata és azok szubstrukturális logikák területére való alkalmazása áll, ezekben a témakörökben ért el szép, jelentős nemzetközi visszhanggal bíró eredményeket. MTA doktori értekezésének témájául is a reziduált félcsoportok vizsgálatát választotta, bemutatva többek között az asszociativitás geometriájára, az MTL logika standard teljességére, valamint reziduált monoidok konstrukcióira és strukturális leírására vonatkozó fontos eredményeit. Az értekezés három fő részből áll: a geometriai szemléletmód bemutatásából, beágyazási eredményekből, valamint struktúratételeket tartalmazó részből.

A reziduáltság (reziduáció) fontos algebrai fogalom, a reziduált struktúrák kutatása hosszú időre nyúlik vissza. Jelenleg az ún. reziduált hálók kutatása nyert nagyobb érdeklődést, mivel ezek a struktúrák szoros kapcsolatban állnak a szubstrukturális logikákkal (egy közös elméleti keretbe foglalt különböző nemklasszikus logikák). A reziduált hálók és a szubstrukturális logikák kiterjedt alkalmazásokkal bírnak: az algebrán kívül pl. a bizonyításelméletben, a játékelméletben, a kódelméletben és még más, további tárgykörökben. Mindezek alapján elmondhatjuk, hogy Jenei Sándor kutatásait fontos, nemzetközi érdeklődésre számot tartó területeken végzi, amely állítást - többek között - munkásságának nagyfokú idézettsége is igazol.

A továbbiakban áttekintem az értekezésben foglalt eredményeket. Terjedelmi okok miatt nincs arra mód, hogy részletesen taglaljam a disszertáció teljes tartalmát, ezért röviden összefoglalom az egyes fejezetekben ismertetett főbb eredményeket, kitérve jelentőségükre. Megjegyzem, hogy a bevezetett fogalmak, konstrukciók és az állítások hozzájárultak az egyes matematikai részterületek fejlődéséhez, és komplex, újszerű szemléletmódjuk (geometria-algebra-logika) révén számos esetben még további alkalmazásuk várható. A fejezetekben felvetett kérdések és problémák megalapozottak, vagy már korábban felvetődtek érdemi vagy érdekes problémaként az egyes részterületek kutatása során (például a terület neves művelői által), vagy a jelölt által elért eredményekből következnek, illetve azok által inspiráltak, amely további érv az elvégzett kutatások indokolt volta, jelentősége mellett.

A doktori értekezés egy előszóval kezdődik, amelyben a jelölt nagyon röviden áttekinti a szükséges algebrai és logikai hátteret (reziduált félcsoportok, hálók, szubstrukturális logikák, stb.), valamint tömören összefoglalja az értekezés egyes fejezeteiben ismertetett eredményeket azok jelentőségével, illetve előzményeivel együtt. Meg kívánom jegyezni, hogy az egyes fejezetek szintén tartalmaznak az elvégzett kutatás indokoltságát bizonyító, a tárgykörben előzetesen elért

Cz. V. S.

2012. 10. 29.

eredményeket bemutató, illetve az új eredmények jelentését és jelentőségét megvilágító meggyőző információkat.

Az első fejezetben a jelölt kommutatív, reziduált műveletek asszociativitásának szimmetria családokkal való jellemzésével foglalkozik. Ismeretes, hogy a kommutatív műveletek asszociativitása ekvivalens a művelet négydimenziós gráfjának három szimmetriájával. A jelölt megmutatja, hogy reziduált műveletek esetében egy bizonyos feltétel teljesülése a művelet háromdimenziós gráfjának egy bizonyos forgatásra való invarianciáját, illetve kétdimenziós metszeteinek egyfajta tükörszimmetriáját eredményezi, amely a négydimenziós szimmetria "nyomaként" fogható fel. Azaz, a kommutatív reziduált műveletek asszociativitását forgatás-invarianciával lehet jellemezni. Hasonlóan fontos eredmény az is, ha a művelet alaphalmaza teljes lánc, a gráf bizonyos részei invariánsak egy középpontos tükrözésre nézve, sőt folytonossági pontjairól is információhoz jutunk, minthogy a folytonossági pontoknak ezen tükrözésnél származó képe is folytonossági pont lesz. Ezek a geometriai jellemzések lehetővé tették algebrai összefüggések geometriai leírását, jellemzését, mint például az involutív elemek szerkezete, a természetesen rendezett tulajdonság és az egyszerűsítési szabály egyik változatának ekvivalenciája. Ugyancsak ez a szemléletmód tette lehetővé tisztán geometriai bizonyítását annak az állításnak, hogy egy részben rendezett halmazon értelmezett félcsoport-művelet mindig részbenrendezett, reziduált, integrál monoid, feltéve, hogy az alaphalmaz (létező) legkisebb eleme involutív. Számos további, algebrai, logikai és függvényegyenletekre vonatkozó eredmény származtatható még ebből a geometriai megközelítésmódból (ahogy az értekezésből látható is), amely bizonyítja a gondolatkör eredetiségét és hasznos voltát.

A második fejezetben a jelölt speciális asszociatív függvények egyértelműségi tartományainak vizsgálatával foglalkozik, nevezetesen a t-normák egyértelműségi tartományaival. A forgatás-invariancia, valamint a tükrözés-invariancia segítségével új eredményeket ad folytonos archimédeszi és balról folytonos t-normák egyértelműségi tartományaira nézve.

A harmadik fejezetben azt kérdést vizsgálja meg a jelölt, hogy két t-norma (súlyozott) számtani közepe mindig t-norma-e? Megmutatja, hogy két különböző, A és B, balról folytonos t-norma (nemtriviális) súlyozott számtani közepe sohasem asszociatív bizonyos feltételek teljesülése esetén: A és B c-szintvonala megegyezik és $c \in]0,1]$ involutív A-ra nézve. A balról-folytonosság és a közös szintvonal mint feltétel nem enyhíthető. A megoldás különlegességét az adja, hogy geometriai motiváció alapján a jelölt algebrai módszerekkel visszavezet egy, a függvényegyenletek területén felmerült problémát valós, egyváltozós függvények szimmetriájáról szóló problémára.

A negyedik fejezetben a jelölt speciális logikákkal, ún. MTL logikákkal (Monoidal T-norm-based Logic) foglalkozik, és igazolja hogy ezen logikák a balról folytonos t-normák logikái. Azaz, megmutatja, hogy bármely, megszámlálható lineárisan rendezett MTL-algebra beágyazható egy standard algebrába (balról folytonos t-norma mint monoidművelet esetén). Az állítás következménye, hogy az MTL logika teljes a standard MTL-algebrák osztályára nézve. Az állítás nemcsak jelentős, hanem bizonyítása is különleges, teljesen algebrai megközelítéssel

2012. 10. 29

történik, a beágyazási módszert pedig azóta széles körben használták. A fejezet további részében a jelölt nem-kommutatív t-normák, másképpen pszeudo t-normák logikáit vizsgálja. Megmutatja, hogy minden megszámlálható lineárisan rendezett $psMTL^r$-algebra beágyazható egy standard algebrába. Következésképpen, a $psMTL^r$ logika teljes a standard $psMTL^r$ algebrák osztályára nézve.

Az ötödik fejezet általános módszereket nyújt (balról folytonos) t-normák konstruálására. Megmutatja, hogy bármely megszámlálható, teljesen rendezett, kommutatív integrál monoid beágyazható egy balról folytonos t-normába. Bizonyos esetekben, például, ha a beágyazandó monoid alaphalmaza véges vagy végtelen lexikografikus szorzat, analitikus képlet adható a beágyazásra, így konkrét balról folytonos t-normák konstruálhatók. A módszer számos előnyt nyújt, új aspektusból mutatja be például Chang MV-algebráját, továbbá Hajek Π-MTL logikájának szemantikáját, stb. A fejezetben még számos példa található.

A hatodik fejezet a balról folytonos t-normák struktúráját vizsgálja. Ekvivalens karakterizációkat ad balról folytonos t-normákra. Majd megmutatja, hogy minden balról folytonos t-norma esetében a folytonossági pontok halmaza sűrű, sőt a szakadási pontok halmaza nullmértékű, első kategóriájú halmaz. Megmutatja továbbá, hogy van olyan balról folytonos t-norma, amely nem izomorf egyetlen a racionális egységintervallumon értelmezett folytonos t-norma lezárásával sem, azonban bármely balról folytonos t-norma, amely gyengén kancellatív, előáll ezen intervallumon értelmezett folytonos t-norma lezárásaként. Továbbá, karakterizálja a racionális egységintervallumon értelmezett folytonos t-normákat, amelyek lezárása is folytonos.

Összességében elmondhatjuk, hogy szép eredményekkel gazdagítja a t-normák elméletét, hozzájárul a balról folytonos t-normák természetének pontosabb megértéséhez.

A hetedik fejezet Girard monoidok vagy más terminológiával klasszikus reziduált hálók tanulmányozásával foglalkozik, az ún. szubstrukturális logika és t-norma alapú logika motivációs hátterével. A fejezetben először geometriai leírását találjuk a forgatás-invariáns parciálisan rendezett halmazoknak és félcsoportoknak. Az involutív reziduált hálók általánosításaként bevezeti a forgatás-invariáns félcsoport fogalmát, a forgatás, a forgatás-annihilálás konstrukciókat, amelyek érintkezéses vagy érintkezés nélküliek lehetnek, és amelyek segítségével bizonyos reziduált félcsoportokból involutív reziduált félcsoportok állíthatók elő. A konstrukciók segítségével a következő állításra jut a jelölt: egy kommutatív hálórendezett csoport negatív kúpjának érintkezés nélküli forgatása MV-algebra (osztható IMTL algebra). Ugyancsak bevezeti az annihiláció fogalmát és leírja az érintkezés nélküli, illetve az érintkezéses forgatás-annihiláció konstrukciókat. Rámutat, hogy az állítások tovább nem élesíthetők, a kiindulási műveletek nem választhatók tágabb osztályból. Az érintkezés nélküli konstrukció esetében arra a megállapításra jut, hogy az involutív reziduált hálók osztályozása nem egyszerűbb, mint a reziduált hálóké, mivel bármely reziduált háló beágyazható részalgebraként a forgatásába. A fejezet az érintkezés nélküli forgatás konstrukció egy közvetlen logikai alkalmazásával zárul. (Megjegyezzük, hogy a fejezetben a forgatás-inverz, a pszeudo-inverz tulajdonságok definíciója kissé eltér egy korábbi fejezetben megadottnál.)

2012. 10. 29.

A nyolcadik fejezet involutív uninormák egy osztályának ún. ferde szimmetrizációjával foglalkozik a jelölt, a t-norma fogalmát kissé általánosabb értelemben használva, kommutatív integrál monoidként. Uninorma alatt egy kommutatív monoidot ért, involutív uninorma alatt pedig egy ún. involutív uninorma algebra monoidműveletét. A fejezetben arra mutat rá, hogy bizonyos félcsoportok esetében a reziduált műveletek és a ko-reziduált műveletek nem egymás duális fogalmai, hanem együtt vannak jelen és egyszerre vizsgálandók. Bevezeti a ferde szimmetrizáció konstrukciót, amely a rendezett csoportok kúpreprezentációjának olyan általánosítása, amely egyszerre használ reziduált és ko-reziduált műveleteket. Ennek birtokában megmutatja, hogy teljes, sűrűn rendezett láncon definiált t-involutív uninorma, amely folytonossági pontjainak halmaza sűrű, előáll mind a pozitív, mind a negatív kúpjának ferde szimmetrizációjaként, továbbá a két kúp kölcsönösen egyértelműen meghatározza egymást, egymás ferde módosításai. Végül megmutatja, hogy bármely t-involutív uninorma (a $[0, 1]$ intervallumon) leírható mint ferde szimmetrizációja t-konormájának vagy t-normájának.

A kilencedik fejezetben -folytatva a vizsgálatokat-, azon involutív uninormák osztályozását adja, amelyek t-konormája folytonos. Megmutatja, hogy a $[0, 1]$ valós egységintervallumon tetszőleges t-involutív uninorma, amelynek folytonos valamely kúpművelete, az izomorfizmus erejéig előáll mint az alábbi műveletosztályokból vett művelet ferde szimmetrizációja: szorzat, minimum, egy lexikografikus összeg, melynek minden összeadandója szorzat; valamennyi a $[0, 1]$ intervallumon véve.

A jelölt a tizedik fejezetben annak a kérdésnek a tanulmányozásával foglalkozik, hogy egy involutív FL_e-algebra esetében milyen mértékig határozza meg uninormáját a megfelelő t-normája és t-konormája. A vizsgálatokat a logika kérdései is motiválták, hiszen FL_e-algebrák és az involutív FL_e-algebrák algebrai szemantikák az UL és az IUL logikákra vonatkozóan. A vizsgálatokhoz a jelölt bevezeti az ún. ikerforgatás konstrukciót. Ez általánosítja a szimmetrizációt és egyúttal a rendezett Abel csoportok kúp reprezentációját is. Az ikerforgatás két kúpon értelmezett két műveletet igényel és kiterjeszti őket a kúpok uniójává. Megmutatja, hogy tetszőleges kúpos involutív uninorma algebra előáll kúpjainak (megfelelő t-normájának és t-konormájának) ikerforgatásaként. Majd véges láncokon értelmezett involutív uninormák vizsgálatával foglalkozik. Bevezeti a rang fogalmát, és kölcsönösen egyértelmű összefüggést ír le a pozitív és a negatív rangú algebrák között. Végezetül, az eredmények folyományaként megmutatja, hogy az IUL logika kibővítve a $t \longleftrightarrow f$ axiómával nem elégíti ki a véges modell tulajdonságot.

Összességében elmondhatjuk, hogy Jenei Sándor érdemi eredményekkel, újszerű megközelítésekkel, eredeti gondolatokkal, hasznos módszerekkel járult hozzá az algebrai logika, a logika, az algebra elméletének fejlődéséhez, különös tekintettel a reziduált félcsoportok elméletéhez, és doktori műve, illetve az annak alapjául szolgáló publikációk, a korábbi tudományos fokozat megszerzése óta fontos eredeti tudományos eredményekkel gyarapították a tudományszakot. A doktori mű hiteles adatokat tartalmaz. Doktori művének összefoglalója (tézisfüzet) érdemi összefoglalását adja doktori értekezésének.

Néhány szóban azonban kitérnék az értekezés és a téziseket tartalmazó tézis-

Gy. V. E.!

2012. 10. 2[illegible]

füzet technikai kivitelezésére. Az értekezés esetében a jelölt erősen támaszkodik az értekezés alapjául szolgáló publikációkra, ami nemcsak a fogalmak és állítások, fontos megjegyzések (értelemszerű) átvételét jelenti, hanem sok esetben összekötő, magyarázó szövegrészekét is. (Érdekességként megjegyzem, hogy a 78. oldal első paragrafusában hiányzik a nyitott probléma, ami a megfelelő cikkben szerepel.) Értekezése írásakor azt a megoldást választotta, hogy egy külön bevezető, alapfogalmakat ismertető fejezet helyett minden egyes részfejezetet önálló terminológiai bevezetővel lát el, amely - mint megjegyzi az előszó végén - néhol redundanciához vezet. Illetve az is előfordul, hogy a fogalom nem pontosan ugyanolyan jelentésben szerepel mint előzőleg, bár ezt mindig jelzi. Célja az volt, hogy minden fejezetet külön-külön is könnyen olvashatóvá tegyen. Úgy gondolom, talán mégis célszerűbb lett volna az alapfogalmakat egy külön, rövid fejezetben ismertetni. A tézisfüzet esetében hasznos lett volna egy rövid, konklúziókat tartalmazó fejezetet csatolni, valamint több időt szánni a szöveg nyelvi ellenőrzésére, mivel több helyen elírás, nyelvi pontatlanság található benne (pl. 5. oldal, 3.3. Tétel: a mondat kisbetűvel kezdődik, a tétel alatti második sorban "meghatározatt" szerepel.)

Azonban ezek a megjegyzések nem befolyásolják az értekezés tartalmi, tudományos értékét, melynek alapján Jenei Sándor doktori művének nyilvános vitára való kitűzését és a doktori mű elfogadását javaslom.

Végezetül szeretnék egy kérdést intézni a jelölthöz: eredményeinek milyen jellegű természetes alkalmazási lehetőségeit tudná elképzelni a számítástudományban (elegendő egy vagy két példa említése, ha ilyen alkalmazást elképzelhetőnek lát).

Budapest, 2012. október 29.

Dr. Csuhaj Varjú Erzsébet
az MTA doktora