dc_366_11

REZGÉSAKUSZTIKAI RENDSZEREK DISZKRÉT ÉS MODÁLIS MODELLEZÉSE, KÜLÖNÖS TEKINTETTEL A KÖRNYEZETI ZAJOK OPTIMÁLIS CSÖKKENTÉSÉRE

Az MTA DOKTORA tudományos cím elnyerése érdekében benyújtott értekezés

Készítette: Augusztinovicz Fülöp
okleveles villamosmérnök

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Híradástechnikai Tanszék

Szentendre – Budapest, 2012. szeptember

dc_366_11

TARTALOM

1. fejezet

1. BEVEZETÉS

1.1. Az értekezés célja

Az életminőséget meghatározó környezeti elemek között speciális helyet foglal el a környezeti zaj. Amíg ugyanis a levegő-, víz- és talajszennyezés, valamint a hulladékok a modern emberi életforma velejárójaként keletkező felesleges, sőt gyakran egészségre *káros anyagok*, addig a zaj lényegében *energia*: szűkebb értelemben csak a levegőben, tágabban tekintve a gyártott/épített szerkezetekben és a talajban is terjedni képes hang*hullám*. Az ipari tevékenység és a közlekedés kapcsán keletkező, emberre káros anyagok viszonylag lassan, gyakran évtizedek alatt felhalmozódva érnek el olyan koncentrációt, ami már káros az emberi egészségre. A zaj ezzel szemben mechanikai folyamatok velejárójaként, energiaátalakulási jelenségek révén a folyamattal egy időben keletkezik, keletkezésének helyétől nagy sebességgel távolodik és eközben intenzitása csökken, az őt keltő folyamat leállásakor pedig maga is megszűnik.

Talán ezekkel az eltérésekkel (is) magyarázható, hogy **a környezeti zaj megítélése** az egyén, a társadalom és a politika szemszögéből is **eltér** az egyéb környezeti elemekétől, és ennek vetületeként más a környezeti zaj elleni védekezés módja és eszközrendszere is. Amíg pl. egy lakóterület közelében működő, a talajt nehézfémekkel szennyező vegyi üzem megszüntetésének és kármentesítésének szükségességét nehezen lehet vitatni, a környezeti zajjal kapcsolatos magatartások nagyon eltérőek lehetnek. A zajt a társadalom egy része a modern, iparosított életforma szükségszerű velejárójának, elkerülhetetlen istencsapásnak tekinti és létét passzívan tűri. Más társadalmi csoportok viszont militáns módon veszik fel a harcot nemcsak a nyilvánvaló és kezelést igénylő ártalmak, hanem egy sor fejlesztési elképzeléssel szemben is, legyen az új vagy bővítendő közlekedési létesítmény, a korábbiaknál hatékonyabb vagy olcsóbb energiatermelő beruházás, vagy akár csak egy, a környezetet valamelyest befolyásolni képes nagyobb épület. A különböző érdekcsoportok aztán gyakran nem a probléma valós súlyának megfelelő arányban, hanem politikai és egyéb szempontok meghatározta módon érvényesítik álláspontjukat, és ennek eredményeként a szakmai szempontok nem egyszer háttérbe szorulnak[1].

---

[1] Közismert példa az M1-M7-es autópálya budapesti bevezető szakaszának szerencsétlen kialakítása. „Budapest vőlegénye”, Podmaniczky Frigyes és az általa vezetett Közmunkák Tanácsa bölcs előrelátása következtében mindmáig

A zajvédelmi tevékenység, és ezen belül **a zajvédelmi tervezés hazánkban** jelenleg természetesen nem csak társadalompolitikai, hanem egy sor más ok miatt sem tudja feladatát olyan színvonalon betölteni, ahogy az a fejlett országokban általánosan alkalmazott gyakorlat. Minimálisra csökkent a kutatási tevékenység, fontos tevékenységet végző kutatóintézetek és -helyek szűntek meg vagy zsugorodtak a kritikus működési szint környékére. A szétszóródott és megosztott szakembergárda számos, épp ezért csekély gazdasági erőt képviselő kisvállalkozás keretei között fejti ki tevékenységét, amelyek – kisszámú kivételtől eltekintve – sem eszközállományuk, sem létszámuk és szakképzettségük okán nem alkalmasak nagyobb feladatok megoldására. Bár sok intézményben folyik környezetvédelmi mérnökképzés, mégsem megfelelő a zajvédelmi szakemberképzés volumene és minőségi színvonala, és anyagi eszközök hiányában alig van mód a korszerű elemzési, tervezési eszközök bevezetésére és alkalmazására. A zajforrásokat gyártó ipar saját fejlesztési tevékenységet alig végez, a termékek vagy külföldről származó dokumentáció alapján, vagy erősen behatárolt hazai fejlesztés eredményeként születnek meg. Az EU környezetvédelmi előírásai [1] és a hazai zajvédelmi szabályozás ugyanakkor nem egyszer nehéz és összetett feladatok elé állítja a zajvédelem kérdéskörével kapcsolatba kerülő gyártókat, beruházókat és tervezőket, és ezen feladatok kellően magas színvonalú ellátásához nem mindig, vagy nem a szükséges mértékben tudják – rosszabb esetben gyakran nem is akarják – igénybe venni a zajvédelemmel foglalkozó szakemberek közreműködését.

Ezen értekezés arra törekszik, hogy a zajvédelmi tervezés tudományos megalapozásának erősítésével és alkalmazási lehetőségeinek bővítésével ***segítse elő a pontosabb és eredményesebb tervezési módszerek alkalmazását*** a környezeti zaj elleni védelemben. Tudományos és műszaki szempontból a zaj elleni védelem[2] (ami a nemzetközi gyakorlatban egyre elfogadottabb értelmezés szerint ma már nem csak a zaj csökkentését[3], hanem a zaj minőségének, jellemzőinek különféle igények szerinti módosítását[4], „hangolását” is magában foglalja) a zajt létrehozó energiaátalakulási folyamatok, illetve a hangenergia továbbításában szerepet játszó energiaterjedési jelenségek befolyásolását jelenti. Ezek kapcsán számos bonyolult fizikai jelenség játszódik le, melyeknél a fizika és műszaki akusztika által tárgyalt jelenségek (rezgések szilárd testekben, hullámterjedés szilárd és légnemű közegben és ezek kölcsönhatásai, hangsugárzás, hangelhajlás, visszaverődés és elnyelés stb.) figyelembe vétele mellett természetesen a zajt keltő, vagy azt továbbító objektum fő funkciójának alapvető szempontjait is érvényesíteni kell. A zaj elleni védelem tervezése ennélfogva egy sokparaméteres optimalizációs feladat egyik elemeként fogható fel, melyben a zajvédelem csak egy – bár a jelen értekezés szempontjából alapvető fontosságú – aspektus[5].

beépítetlen területek állnak rendelkezésre Budán a Hungária gyűrű délnyugati szakaszának megépítéséhez. Megfelelő tervezéssel és kivitelezéssel lehetséges lett volna olyan módon megoldani a Lágymányosi híd forgalmának rá- és elvezetését, hogy a környezeti zaj ne növekedjék, sőt a már meglevő vasútvonal zaja is csökkenjen, amint azt a Szerémi úti, zajvédő fallal ellátott rövid szakasz tapasztalatai is igazolják. Ennek ellenére a létesítmény a környezetvédő szervezetek tiltakozása következtében kedvezőtlen nyomvonalú és kis kapacitású utak igénybevételével valósult meg, és mindmáig nehezen megoldható problémákat okoz.

2 Legtöbbször alkalmazott angol megfelelője*: noise control*

3 *Noise reduction* vagy *noise mitigation*

4 *Noise quality engineering* vagy *sound engineering*

5 A feladat komplexitásának egyik jellemző példája a gumiabroncs-zaj problematikája. Az útfelületen gördülő gumiabroncsok hangja a ma gyártott személygépkocsik zajának domináns eleme. A világ számos gyárában és kutatóhelyén sok száz kutató foglalkozik olyan gumiabroncsok és útburkolatok fejlesztésével, amelyek csendesebbek a mostaniaknál, ugyanakkor maradéktalanul megfelelnek a közlekedésbiztonság és a gazdaságosság követelményeinek is.

A szilárd és légnemű közegben lezajló hullámjelenségeket a fizikai akusztika lényegében már a 19. század végére feltárta [2]. A tudományos alapokon nyugvó akusztikai és zajcsökkentési tervezés azonban csak a második világháború utáni helyreállítás igényei és főként a robbanásszerűen fejlődő motorizáció következtében nyert teret [4] - [6], [16]. A fejlődés legfőbb hajtóereje az építőipar[6] és a zajos gépeket előállító gépipar igényei mellett – és mára egyre inkább – az erősen piacorientált autóipar és a repülőgépgyártás[7]. Az összetett rendszerek viselkedésének leírására (a fentieken kívül a haditechnika igényei következtében is) egyre fontosabbá válik a szilárd és a légnemű közegben lejátszódó hullámjelenségek kölcsönhatásainak vizsgálata és tudatos tervezése, ami a mechanikai és akusztikai rendszerek kapcsolatát vizsgáló új tudományterület, a ***rezgésakusztika*** kialakulásához vezetett [8], [9], [11]. A rezgésakusztika fejlődését az ipar igényei mellett nagyban elősegítette a számítástudomány és a számítástechnika gyors fejlődése és ezáltal a ***numerikus technikák térnyerése*** is [12], [13], [15], [20].

A jelen értekezés keretében a legegyszerűbb számítási módszerből, a koncentrált paraméteres (mechanikai és akusztikai) elemek témaköréből kiindulva megmutatjuk a szélesebb frekvenciatartományban használható módszerek lehetséges körét, főbb elveit és alkalmazási lehetőségeit. Áttekintjük a rezgésakusztika terén alkalmazható analitikus és numerikus modelleket és az egyes modellekre kidolgozott számítási módszereket, majd ezek egy részének részletes kifejtésével új, pontosabb és szélesebb körben használható módszerekre teszünk javaslatot és vizsgáljuk a modális megközelítés alkalmazási korlátait is. A tárgyalt elméleti fogalmak és módszerek alkalmazási lehetőségeit gyakorlatban elvégzett elemzéseken, ipari és közlekedési alkllmazási példákon mutatjuk be.

1.2. A értekezés fő tématerületei

Az értekezés által érintett kérdésköröket egy egyszerű rezgésakusztikai kísérlet segítségével szemléltetjük. A kísérleti objektum (ld. a 4.1. ábrán, a 49. oldalon) egy 84×40×40 cm befoglaló méretű, alakját tekintve némileg egy személygépkocsira emlékeztető doboz, melynek falait 1 cm vastag PVC vagy plexi lemezek alkotják a cserélhető fenéklap kivételével, ami az itt ismertetett kísérletnél 1 mm vastag acéllemezből készült.

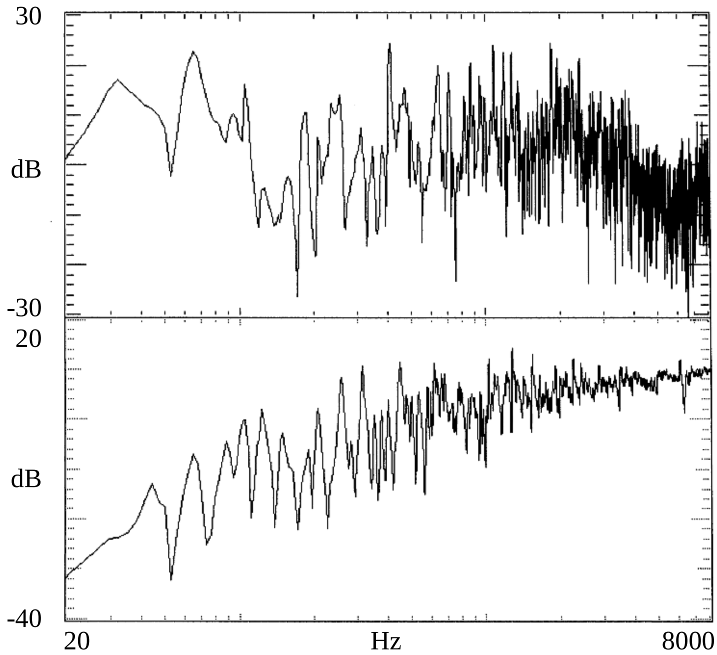
A később még részletesebben ismertetett vizsgálatok során a doboz falai által határolt üreg egy akusztikai, míg a feneket alkotó acéllemez egy mechanikai részrendszert képez az összetett rezgésakusztikai rendszer egy-egy összetevőjeként. A két alrendszer egymással csatolásban van, ezért az üregben hang keletkezik a fenéklemezre gyakorolt erő hatására, és a fenéklemez is rezgésbe jön az üregbe sugárzott hang következtében. A rendszer tehát mind akusztikai, mind mechanikai oldalról gerjeszthető, és válasza is jól mérhető akár akusztikai (mérőmikrofon), akár mechanikai (gyorsulást mérő) érzékelők alkalmazásával.

A csatolás jelenlétére és jellemzőire egyelőre nem térünk ki, most csak a mechanikai részrendszerre adott szélessávú erőgerjesztés egy tipikus mechanikai, és az akusztikai részrendszer ugyancsak szélessávú gerjesztésével nyert jellemző frekvenciaátviteli függvényét szemléltetjük az 1.1 ábrán a frekvencia függvényében.

6 A 2. világháború utáni német újjáépítés egyik kedvező „mellékhatása” volt az épületakusztika ugrásszerű fejlődése az országban, amit számos nemzetközi hírnevet szerzett szaktekintély neve (L. Cremer, K. Gösele, H. Müller, M. Heckl és mások), tudományos munkássága és a létrejött intézetek és tudományos iskolák (pl. Institut für Bauphysik-Stuttgart, Institut für Technische Akustik – Berlin stb.) fémjeleznek.

7 Az autó- és repülőgépiparban a külső zajt nemzetközileg szabványosított, egyre szigorúbb határértékek szorítják lefelé, de ennél is nagyobb hajtóerő a konkurens vállalatokkal és termékekkel szemben, a vevők kegyeiért folytatott verseny a belső zaj csökkentése, ill. újabban az optimális hangminőség kialakítása érdekében.

A mechanikai részrendszerre vonatkozó, alsó diagramon három jól eltérő szakaszt különböztethetünk meg. A mérési tartomány alsó határától, 20 Hz-től kb. 500 Hz-ig jól elkülöníthető csúcsok figyelhetők meg, amelyek nyilvánvalóan a fenéklemez rezonanciáinak, azaz a mechanikai részrendszer sajátfrekvenciáinak (más néven *normál módusainak*[8]) felelnek meg. Növekvő frekvenciák felé a csúcsok egyre sűrűbben lépnek fel, és a mérési tartomány felső részében már egyáltalán nem különíthetők el: az átviteli görbe itt majdnem teljesen kisimul. 500 és 2000 Hz között az átvitelben még megfigyelhetők a csúcsok, de elkülönítésük nehéz, jellemzőik meghatározása pontatlan.



1.1. ábra: *A 4.1. ábrán bemutatott mérőrendszer mechanikai, ill. akusztikai frekvenciaátviteli függvénye egy-egy jellemző pontban. Felső diagram: egységnyi térfogatsebesség hatására létrejövő hangnyomás az üregben, alsó diagram: egységnyi erő hatására létrejövő rezgésgyorsulás az acél fenéklemezen.*

Az akusztikai részrendszer görbéje hasonló, de benne mindenütt jóval kevesebb rezonancia figyelhető meg, ennek megfelelően az akusztikai rezonanciák a mérési sáv felső határán is megkülönböztethetők még.

Az egyszerű kísérlet első eredményeiből is nyilvánvaló, hogy az adott rendszer viselkedésének leírására a kétféle alrendszerben és a különböző frekvenciatartományokban nem használhatók ugyanazon módszerek. A mechanikai részrendszert az alsó frekvenciasávban nagy valószínűséggel jól jellemezhetjük a lemez sajátfrekvenciáival és az ezek lineáris kombinációjával előállítható gerjesztett válasz kiszámításával, de mindenképpen kontinuum modelleket kell igénybe vennünk. A frekvenciatartomány felső részén már ez a megközelítés is alkalmatlan, ezen frekvenciákon a statisztikai energiaelemzés *(Statistical Energy Analysis, SEA)* módszerei lehetnek hasznosak [14]. A két véglet közötti átmeneti tartomány módszertana az előző kettőnél jóval kidolgozatlanabb. (Az e tartományba eső feladatok körét ezért

[8] A „normál módus" kifejezés az angol *normal modes* tükörfordítása; pontos definícióját a (2.2c) egyenlet kapcsán adjuk meg. Angolban használják még a *mode shape* és a – német eredetű – *eigenmodes* kifejezést is, a német szakirodalomban az *Eigenfrequenz*, *Eigenschwingung* kifejezés szokásos. A sajátrezgés és a rezonancia fogalma közti összefüggéseket, ill. eltéréseket részleteiben ld. [189] –ban.

néha – a pszichológia *midlife crisis* fogalmának kölcsönvételével – *mid-frequency crisis* névvel illetik [20].) A sajátfrekvenciák és normál módusok extrakciója itt *már* bizonytalan, a statisztikai módszer feltételei pedig *még nem* teljesülnek, de a kísérletileg meghatározott frekvenciaátviteli függvényekből alkotott tisztán experimentális, vagy hibrid modellek gyakran mégis megfelelő megoldást nyújtanak.

Az akusztikai részrendszer első jól azonosítható sajátfrekvenciája 65 Hz körül érték, innen fölfelé haladva a sajátfrekvenciák egyre sűrűbben követik egymást. Az átviteli görbe azonban nem simul ki teljesen 8 kHz-ig sem, ami arra utal, hogy a teremakusztikából ismert statisztikai számítási módszerek még nem alkalmazhatók. Nem vehetjük igénybe ugyanakkor az elektroakusztikából ismert koncentrált paraméterű helyettesítő elemek módszerét sem, mert a rendszer legnagyobb mérete már a mérhető frekvenciák alsó határán is összemérhető a módszer által megkövetelt $\lambda/8$ értékkel.

A rezgésakusztika elemzési módszereit és főbb jellemzőiket általánosságban az 1. táblázatban foglaltuk össze. A módszerek alkalmazási lehetőségei a vizsgálati frekvenciatartománytól és a rendszer (hullámhosszhoz viszonyított) méretétől is függenek, amit a rendszer egy jellemző d méretét a vizsgálati frekvenciatartománynak megfelelő $\lambda=c/f$ hullámhosszal összevetve veszünk számításba (ahol c az adott rendszerben terjedő jellemző hullámforma hullámterjedési sebessége).

1.1. táblázat: *Különböző méretű mechanikai vagy akusztikai rendszerek különböző frekvenciatartományokban alkalmazható vizsgálati módszerei*

<table>
<tr><th></th><th>Kisfrekvenciás tartomány</th><th>Modális tartomány</th><th>Középfrekvenciás tartomány</th><th>Nagyfrekvenciás tartomány</th></tr>
<tr><td>Frekvencia-(hullámhossz-) határok</td><td>$d \ll \lambda$</td><td>$d \cong \lambda$</td><td>$d > \lambda$</td><td>$d \gg \lambda$</td></tr>
<tr><td>Frekvenciamenet jellegzetességei</td><td>lassan változó</td><td>Rezonanciák meghatározóak</td><td>rezonanciák öszemosódnak</td><td>statisztikus</td></tr>
<tr><td>Alkalmazható számítási módszer</td><td>koncentrált paraméteres helyettesítés</td><td>analitikus és numerikus módszerek (FEM, BEM)</td><td rowspan="2">kísérletek és hibrid FRF modellek</td><td>diffúz közelítés, SEA</td></tr>
<tr><td>Alkalmazható kísérleti módszer</td><td>FRF mérés</td><td>móduselemzés</td><td>energiaáramlási módszerek</td></tr>
<tr><td>Tipikus alkalmazási területek</td><td>elektroakusztika, rezgésszigetelés</td><td colspan="2">gépkocsik, járműalkatrészek, kisméretű termek…</td><td>teremakusztika, épületek, nagyobb járművek…</td></tr>
</table>

Az emberi hallás frekvenciatartománya és a levegőben terjedő hang sebessége alapján az akusztikai hullámhosszak tartománya 17 m és 17 mm között helyezkedik el, tehát a gyakorlatban előforduló akusztikai rendszerek akármelyik tartományba eshetnek. Mechanikai rendszereknél a gyakorlati jelentőséggel bíró frekvenciatartomány nem ilyen egyértelmű, de általában alacsonyabb frekvenciahatárok közé esik, a hullámterjedési sebesség pedig a rezgési formától és ezek egy részénél a frekvenciától is függ, ezért tipikus hullámhosszakat nehéz megjelölni. A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy mechanikai rendszerek esetében is minden tartományra találunk gyakorlati példákat, amelyeket a rezgéstan és a szerkezetdinamika szakirodalma tárgyal – az adott feladat igényeinek megfelelő metodikával és mélységben

A problémák nagyon széles köre ellenére a fenti csoportosítás szerinti második, „modális”-nak nevezett tartománynak kiemelkedő jelentőséget kell tulajdonítanunk. Ebben a tartományban a rendszert már nem lehet koncentrált paraméterű elemekkel modellezni, mert az egyes elemek a hullámhosszal összemérhető nagyságúak és így azokon belül is jelentős változások lépnek fel. Az egészen egyszerű geometriával rendelkező objektumok (pl. téglatest alakú terem, kör vagy négyszög keresztmetszetű rúd stb.) kivételével a rendszer viselkedése analitikusan általában nem határozható meg, a számítások csak numerikus módszerekkel végezhetők. A rendszer eredő viselkedését a rezonanciák döntően befolyásolják, a rezonanciákat eredményező sajátfrekvenciák és jellemző módusalakok még jól azonosíthatók. A gyakorlatban előforduló nagyon sok probléma ebbe a körbe tartozik és az itt nyert eredmények magasabb és alacsonyabb frekvenciák felé, ill. nagyobb méretű, igen sok összetevőt tartalmazó összetett rendszerekre is általánosíthatók. ***A jelen értekezés ezért döntő súllyal e modális tartomány modellezési és számítási metodikáit tárgyalja.***

1.3. Az értekezés felépítése

Az értekezés 2. fejezete a műszaki akusztikai oktatásban fontos szerepet betöltő koncentrált paraméteres akusztikai modellek és az ipari, tervezői gyakorlatban egyre nagyobb teret nyerő diszkrét modellek és az ezek kezelésére szolgáló numerikus technikák közötti szoros kapcsolatot tárja fel, különös figyelemmel a mechanikai és akusztikai diszkrét modellek közötti messzemenő – és nagyon hasznos – analógiákra. A 3. fejezet az értekezésen végigvonuló legfontosabb fogalomkör, a módusok és a modális modellek származtatását (extrakció) és alkalmazását (szuperpozíció) tárgyalja. A 4., 5. és 6. fejezet a műszaki akusztika három alapvető részterületén: a belső terek, a külső térbe történő lesugárzás és a terek közötti hangátvezetés analízisén keresztül ismerteti a modális megközelítés alapján álló módszereket. Az értekezés 7. fejezete az ismertetett technikák gyakorlati alkalmazási lehetőségeit, azok korlátait és az általuk elérhető eredményeket mutatja be néhány olyan esettanulmány rövid ismertetésével, amelyek kapcsán a szerzőnek alkalma volt részt venni az elmúlt évtizedben lezajló nagyberuházások, ill. rekonstrukciók akusztikai tervezésében. E munkák során olyan zaj- és/vagy rezgéscsökkentési feladatok merültek fel, melyek megoldása az értekezés első részében ismertetett modellezési és számítási módszerek nélkül nehezen lehetett volna eredményes.

A 2. – 6. fejezet mindegyike a tématerület meglevő ismereteinek összefoglalásával és a bő irodalomjegyzékre való hivatkozással kezdődik, ezt követően kerül sor a szerző által végzett munka ismertetésére és a fejezetek végén az új tudományos eredcmények összefoglalására, a tézisek kimondására. (Ezen utóbbiak jobb elkülönítése érdekében az összefoglalást tartalmazó szakaszok tipográfiailag is eltérnek az értekezés többi részének formájától.) Az értekezés törzsszövegébe terjedelmi korlátok miatt nem férő, de a dolgozatban szereplő anyag jobb követhetősége és áttekinthetősége miatt szükségesnek vélt, már ismert anyagrészeket, az irodalomjegyzéket és a felhasznált jelölések jegyzékét a Függelékben közöljük.

2. fejezet

2. AKUSZTIKAI RENDSZEREK DISZKRETIZÁLÁSA: KONCENTRÁLT PARAMÉTERŰ ÉS VÉGESELEM MODELLEK

E fejezet célja a kisfrekvenciás tartományban alkalmazható koncentrált paraméterű elemek és a modális tartományban használatos végeselem módszer közötti kapcsolatok vizsgálata. Elsőként áttekintjük a mechanikai és akusztikai rendszerek közötti analógia lehetséges módjait, majd rámutatunk a koncentrált paraméteres és a végeselemes módszer közötti hasonlóságokra és eltérésekre.

2.1. Koncentrált paraméterű mechanikai és akusztikai modellek

A koncentrált paraméterű mechanikai modellek a zaj- és rezgésvédelmi tervezés gyakorlatában rendszeresen előfordulnak gépek és berendezések rezgéscsökkentési feladatai, gépalapozásokhoz szükséges rugalmas alátámasztó elemek tervezése kapcsán. Ilyen esetekben a tömegekből és rugókból felépített modell alkalmazása magától értetődő és a gépek szokásos működési frekvenciatartományában általában maradéktalanul meg is felel a gyakorlat igényeinek.

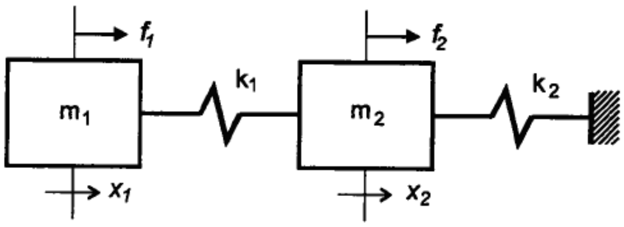
Gyakran használnak első közelítésként ilyen egyszerű modelleket kiterjedt épület- és építményrészek, így pl. úsztatott padlószerkezetek, nagyobb szerkezetek mechanikai jellemzőinek közelítő számítására is, ahol azonban már kétséges lehet a pusztán néhány tömegből és rugóból, esetleg csillapítóból képzett modell pontossága és a közelítés indokoltsága.

Az akusztikai tervező elsősorban elektroakusztikai átalakítók vagy reaktív hangcsillapítók méretezése kapcsán találkozik olyan feladatokkal, amelyek megoldása során sikerrel alkalmazhat koncentrált paraméterű elemekből felépített modelleket [16][17][18][35]. A villamosmérnöki gyakorlatban ezeket a feladatokat legtöbbször az akusztikai modellek és villamos hálózatok közötti analógia alapján oldják meg, bár az elemméretek és az akusztikai hullámhosszak viszonya gyakran korlátozza a modell alkalmazási frekvenciatartományát, és minden esetben gondosan vizsgálni kell az alkalmazás feltételeit.

A következőkben más utat járunk: a koncentrált paraméterű mechanikai és akusztikai modellek olyan matematikai formalizmusát vezetjük be és tesszük összehasonlító vizsgálat tárgyává, amely a papír és ceruza segítségével már nem megoldható, összetettebb problémák szisztematikus, könnyen algoritmizálható megoldására nyújt lehetőséget a mechanikai és akusztikai koncentrált paraméteres rendszerek analógiája alapján.

2.1.1. Erővel vagy hangnyomással gerjesztett koncentrált paraméterű rendszerek

Tekintsünk kezdetben egy nagyon egyszerű, 2-szabadságfokú mechanikai rendszert. (Az elektroakusztikában szokásos módon feltételezzük, hogy a rudak és tömegek csak egy, az ábrán x-el jelölt irányban mozoghatnak, mégpedig súrlódás nélkül. Csak reaktáns elemeket – tömegeket és rugókat – tekintünk, a rendszer csillapítatlan.) Tegyük fel, hogy a rendszert a két tömegre ható f_1 és/vagy f_2 erők gerjesztik, és a rendszer válaszát a tömegek x_1 és x_2 kitérése írja le. (Itt megjegyezzük és később bizonyítjuk is, hogy nem ez az egyetlen lehetséges választás, de a szerkezetdinamikában messzemenően ez a leggyakoribb rendszerleírás.)



***2.1.** ábra: Egy egyszerű két szabadságfokú mechanikai rendszer.*
A gerjesztést az erők biztosítják, a választ kitérésekkel írjuk le.

A 2.1. ábrán bemutatott rendszer alapegyenlete a tömegek gyorsításához és a rugók deformációjához szükséges erők összegezésével kapható meg:

$$m_1\,\ddot{x}_1(t)+k_1\left[x_1(t)-x_2(t)\right]=f_1(t)\,, \tag{2.1a}$$

$$m_2\,\ddot{x}_2(t)+k_1\left[x_2(t)-x_1(t)\right]+k_2\,x_2(t)=f_2(t)\,. \tag{2.1b}$$

Csak szinuszos gerjesztést és választ tekintve a (2.1) egyenlet a mechanikai mozgásegyenletek jól ismert, mátrixos alakjában foglalható össze, ahol x és f a kitérés és erőfüggvény komplex amplitúdóját jelöli:

$$\left[-\omega^2\begin{bmatrix} m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1 & -k_1\\ -k_1 & k_1+k_2\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_1\\ f_2\end{Bmatrix}, \tag{2.2a}$$

azaz

$$\left[[K]-\omega^2[M]\right]\{x\}=\{f\}\,. \tag{2.2b}$$

Az egyenletrendszer megoldása akár homogén, akár inhomogén formában triviális és a mechanikai szakirodalomból jól ismert. Tegyük fel pl., hogy a homogén egyenletrendszer megoldásait keressük, amikor tehát $\{f\}=\{0\}$. A tömegmátrix inverzével mindkét oldalt balról megszorozva és átrendezve ekkor az

$$[M]^{-1}[K]\,\{x\}=\omega^2\{x\} \tag{2.2c}$$

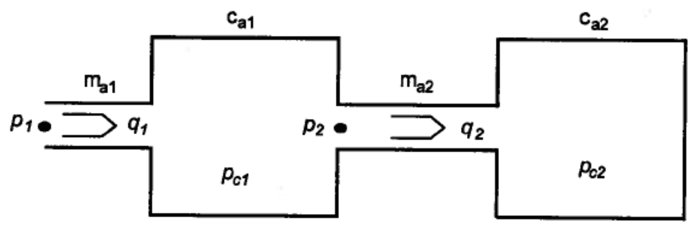
alakot kapjuk, ami a matematika klasszikus sajátértékproblémája. A feladatot megoldva a sajátfrekvenciák (módusfrekvenciák) négyzetével egyenlő λ_1 és λ_2 sajátérték és a megfelelő $\{\phi_1\}$ és $\{\phi_2\}$ sajátvektorok (vagy normál módusok) nyerhetők.

Hasonló elemzést végezhetünk el egy analóg akusztikai rendszeren is, amelyhez a koncentrált paraméterű akusztikai modellezés fogalmait vesszük igénybe. A magyar villamosmérnöki oktatásban Barát Zoltán által bevezetett koncentrált paraméterű elemek fogalmát és alkalmazásának pontos feltételeit itt részleteiben nem tárgyaljuk [17]. Annyit azonban megjegyzünk, hogy egy akusztikai rendszert akkor, és csak akkor van módunk koncentrált paraméterű elemekből összeállított modellel helyettesíteni, ha

- a rendszerben egy dimenzióban lezajló hullámterjedést tételezhetünk fel,
- az egyes elemek hullámterjedés irányú mérete nem nagyobb a hullámhossz nyolcadánál, valamint
- az elem saját hullámimpedanciájának és az őt lezáró terhelő impedanciájának viszonya bizonyos korlátozó feltételeket teljesít.

Ha mindezek fennállnak, akkor az összetett akusztikai hullámvezetőket ideális akusztikai tömegek és akusztikai kapacitások létrehozásával és összekapcsolásával helyettesíthetjük[1] Az így definiált akusztikai tömegek hossza mentén állandó a térfogatsebesség, de lineárisan változik a hangnyomás; az elem kinetikus energiát tárol. Az akusztikai kapacitásban mindenütt állandó a hangnyomás, de változik a térfogatsebesség; az akusztikai kapacitás potenciális energiát tárol.

A 2.1. ábrának megfelelő akusztikai modellt a 2.2 ábrán mutatjuk be, melyben a mechanikai tömegekre ható mechanikai erőknek az akusztikai tömegek bemenetére ható $p_1(t)$ és $p_2(t)$ hangnyomás felel meg, amit ideális hangnyomás-generátorokkal állítunk elő. A rendszer válaszát a tömegekben kialakuló $q_1(t)$ és $q_2(t)$ ismeretlen térfogatsebességgel fejezzük ki; ezen változók alkotják tehát az akusztikai rendszer szabadságfokait.



2.2. ábra: *A 2.1. ábra szerinti mechanikai rendszer akusztikai analógja. A gerjesztést az akusztikai tömegek bemenetére kapcsolt hangnyomás-generátorok biztosítják, a választ térfogatsebességek meghatározásával származtatjuk.*

A $p_1(t)$ hangnyomás az m_{a1} akusztikai tömegben létrehozza a $q_1(t)$ térfogatsebességet, továbbá a c_{a1} akusztikai kapacitásban kialakítja az ott uralkodó $p_{c1}(t)$ hangnyomást. Az első akusztikai tömegre, azaz az egyik akusztikai szabadságfokra vonatkozó egyenlet ezzel

[1] A koncentrált paraméterű elemek létrehozására és mechanikai elemekkel való analógiáinak kihasználására kétféle megközelítés ismeretes [16]. A magyar szakirodalomban és az akusztikai oktatásban csak a direkt vagy impedancia alapú analógia terjedt el, ezért a jelen értekezésben is ennek alkalmazására szorítkozunk [17][18].

$$j\omega m_{a1} q_1(t) + \frac{1}{j\omega c_{a1}} \left[q_1(t) - q_2(t) \right] = p_1(t) \tag{2.3a}$$

alakú lesz. Hasonló megfontolásokkal írható fel az m_{a2} akusztikai tömegre a második egyenlet:

$$j\omega m_{a2} q_2(t) + \frac{1}{j\omega c_{a1}} \left[q_2(t) - q_1(t) \right] + \frac{1}{j\omega c_{a2}} q_2(t) = p_2(t)\,. \tag{2.3b}$$

A (2.3a) és (2.3b) egyenletek összefogásával és a p, q változókat az egyszerűség kedvéért a továbbiakban komplex amplitúdóknak tekintve

$$\left[j\omega \begin{bmatrix} m_{a1} & 0 \\ 0 & m_{a2} \end{bmatrix} + \frac{1}{j\omega} \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{1}{c_{a1}} & -\dfrac{1}{c_{a1}} \\ \hline -\dfrac{1}{c_{a1}} & \dfrac{1}{c_{a1}} + \dfrac{1}{c_{a2}} \end{array} \right] \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \tag{2.4a}$$

mátrixegyenlet írható fel. Ha most a térfogatsebesség integrálásával bevezetjük a $\xi = \int q\,dt = q/j\omega$ változót, amit célszerűen *térfogatkitérésnek* nevezhetünk, végeredményként a

$$\left[[\mu_a] - \omega^2 [\chi_a] \right] \{\xi\} = \{p\}\,, \tag{2.4b}$$

egyenletet kapjuk.

A (2.4b) egyenlet az akusztikai gerjesztést képviselő hangnyomásokat formailag ugyanolyan módon kapcsolja össze az akusztikai válaszok oszlopvektorával, mint a mechanikai rendszerre vonatkozó (2.2b) egyenlet. A $[\mu_a]$ mátrix akusztikai tömegekből, míg a $[\chi_a]$ mátrix az akusztikai kapacitások reciprokából állítható össze[2].

A (2.2) és (2.4) egyenletek közötti teljes analógia nagyon vonzó, mert azzal az előnnyel kecsegtet, hogy a mechanikai rendszerekre több évtizede kidolgozott és jól kezelhető, kereskedelmi forgalomban beszerezhető mérnöki programcsomagok minimális változtatással akusztikai problémák megoldására is alkalmazhatók [34]. Sajnos meg kell állapítanunk, hogy a (2.4) egyenlet a gyakorlatban mégsem feltétlenül alkalmas, ha ennek alapján kísérleteket, méréseket kívánnánk végezni, mert a térfogatsebességgel vagy -kitéréssel arányos jelet szolgáltató, megbízható és széles tartományban alkalmazható akusztikai érzékelő beszerzése jelen pillanatban még komoly nehézséget jelent. Az irodalomból ismerünk ugyan próbálkozásokat térfogatsebesség szenzor létrehozására [21] [22], és hitelesített részecskesebesség-érzékelő is beszerezhető kereskedelmi forgalomban. Ezen eszközök alkalmazása azonban erős korlátokkal terhelt, ma még nem tekinthető általánosnak és széles

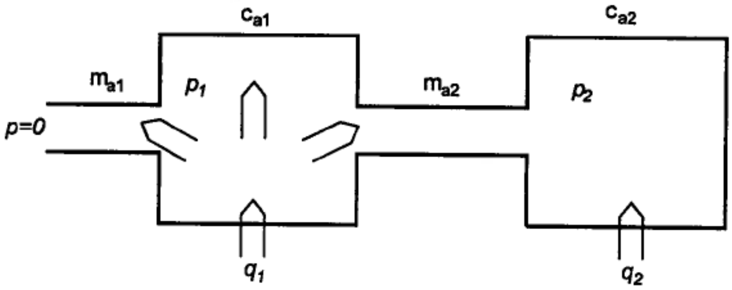
[2] A magyar akusztikai szaknyelv azért alkalmazza az akusztikai elemek egy csoportjára az „akusztikai kapacitás” elnevezést, mert ilyen módon formailag is teljes analógiát tud létrehozni a villamos hálózatok elemeivel és a vonatkozó villamos mennyiségekkel. Értekezésünk azonban elsősorban a mechanikai és az akusztikai rendszerek közötti kapcsolatokat tárgyalja, ahol a magyarul akusztikai kapacitásnak, angolul inkább *acoustic compliance*-nek nevezett mennyiségek reciproka, az „akusztikai merevségnek” (*acoustic stiffness*) nevezhető mennyiség mutat szoros analógiát a megfelelő mechanikai mennyiségekkel. Ezért, valamint a továbbiakban részletezendő, a modális és a koncentrált paraméteres megközelítés közötti fennálló speciális kapcsolatok miatt is, ezen a helyen kerüljük a $[\mu_a]$ és a $[\chi_a]$ mátrix megnevezését.

körben elfogadottnak. (Könnyen lehetséges azonban, hogy fenti megállapításunknak a jövőben már nem lesz helye.)

2.1.2. Kitéréssel vagy térfogatsebességel gerjesztett koncentrált paraméterű rendszerek

A fenti, alapjában véve gyakorlati jellegű probléma megkerülhető, ha gerjesztésként térfogatsebesség-generátort tételezünk fel és a rendszer válaszát a mikrofonos mérés gyakorlatának megfelelően hangnyomásokkal fejezzük ki. Bemutatjuk, hogy ez a megközelítés ugyanolyan megoldásra vezet és a modell és a belőle nyerhető eredmények fizikai interpretációja is plauzibilis marad [212].

Tekintsük továbbra is a 2.2. ábrán bemutatott rendszert, amelyet most térfogatsebesség-generátorokkal gerjesztünk:



2.3. ábra: *A 2.2. ábra szerinti akusztikai rendszer, amelyet itt térfogatsebességekkel gerjesztünk és a választ a hangnyomások mérésével származtatjuk.*

Az m_{a1} jelű elem akkor tekinthető akusztikai tömegnek, ha lezárása jóval kisebb impedanciájú, mint az elem hullámimpedanciája. Az elemzés egyszerűsítése érdekében zérus hangnyomást tételezünk fel az elem nyitott végén, ami egyben azt is jelenti, hogy a sugárzási impedanciát is nullának vesszük, tehát eltekintünk a rendszeren kívüli akusztikai környezet visszahatásától. Ez az elhanyagolás természetesen hibát okozhat. (Megjegyezzük, hogy a probléma nem csak az itt tárgyalt elemi feladatnál, hanem számos gyakorlati, belsőtéri akusztikai probléma pontos megoldásánál felmerül és kezelése általában nem könnyű.)

A generátor által szolgáltatott q_1 térfogatsebesség hangnyomást hoz létre a kapacitásban, ennek következtében véges térfogatsebességű közegáramlás jön létre a szomszédos elemekben is. Merev falú elemeket (azaz elhanyagolható mechanikai-akusztikai csatolást) alapul véve a három szomszédos elem térfogatsebessége öszszegének egyenlőnek kell lennie a bemenő térfogatsebességgel:

$$\frac{p_1(t)}{1/j\omega c_{a1}}+\frac{\left[p_1(t)-0\right]}{j\omega m_{a1}}+\frac{\left[p_1(t)-p_2(t)\right]}{j\omega m_{a2}}=q_1(t). \tag{2.6a}$$

Hasonló egyenlet írható fel a másik kapacitásra is:

$$\frac{p_2(t)}{1/j\omega c_{a2}}+\frac{\left[p_2(t)-p_1(t)\right]}{j\omega m_{a1}}=q_2(t). \tag{2.6b}$$

Az egyenleteket átrendezve és a $\dot{q}=\partial q/\partial t=j\omega q$ *térfogatgyorsulást* bevezetve a korábbiakkal azonos módon kapjuk:

$$\left[\left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{m_{a1}}+\frac{1}{m_{a2}} & -\frac{1}{m_{a2}} \\ \hline -\frac{1}{m_{a2}} & \frac{1}{m_{a2}} \end{array}\right] - \omega^2 \begin{bmatrix} c_{a1} & 0 \\ 0 & c_{a2} \end{bmatrix}\right] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}, \tag{2.7a}$$

vagyis

$$\Big[[S] - \omega^2 [P]\Big]\{p\} = \{\dot{q}\}. \tag{2.7b}$$

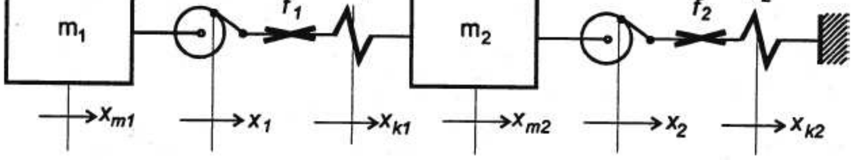
Ez az egyenlet egyrészt megfelel a jelenleg általános kísérleti technikák gyakorlatának, másrészt szintén formai egyezésben van a mechanikai rendszerekre megállapított (2.2) egyenlettel: az $[S]$ mátrix a mechanikai merevségmátrix, $[P]$ a mechanikai tömegmátrix helyén jelenik meg. A (2.7a) egyenlet azonban világosan megmutatja a mátrixok helyes fizikai interpretációját: a $[P]$ mátrixot valójában akusztikai kapacitások alkotják, ennek megfelelően a mátrix elemeinek dimenziója $\mathrm{m^4 s^2/kg}$; az $[S]$ mátrix pedig akusztikai tömegek reciprokából tevődik össze és így elemeinek dimenziója $\mathrm{m^4/kg}$.

A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy elvben semmi akadálya nincs a 2.3 ábra szerinti akusztikai rendszer mechanikai analógja elemzésének. Ebben az esetben szintén a 2.1 ábráéval azonos mechanikai rendszerből indulunk ki, de nem erőkkel gerjesztjük a tömegeket, hanem kitérés-generátorokat iktatunk be a rugók és a tömegek közé (2.4 ábra) A forgattyús hajtóművel szimbolizált generátorok állandó és ismert relatív kitérést hoznak létre a rugók és a tömegek között, a rendszer válaszai, azaz az egyenletrendszer ismeretlenjei pedig a rudakban ébredő erők lesznek. A rendszert leíró egyenletek ebben az esetben a relatív elmozdulások összege alapján írhatók fel és végeredményben a

$$\left[\begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} \end{bmatrix} - \frac{1}{\omega^2}\left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2} & -\frac{1}{m_2} \\ \hline -\frac{1}{m_2} & \frac{1}{m_2} \end{array}\right]\right] \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

egyenletre vezetnek.

Ez a megközelítés elvben ugyanúgy helyes, számítással megoldható és azonos végeredményre is vezet, de épp oly előnytelen a kísérleti munka szempontjából (ezért nem is használatos a szerkezetdinamikában), mint a 2.2. ábra szerinti rendszer az akusztikában.



2.4. ábra: *A 2.1. ábrával azonos mechanikai rendszer, amelyet kitérésgenerátorokkal gerjesztünk és a rendszer válaszát erők meghatározásával képezzük.*

Az akusztikai rendszerre vonatkozó kétféle megközelítés természetesen szoros összefüggésben áll, amit úgy szemléltethetünk a legjobban, hogy a (2.7.b) egyenletet balról megszorozzuk az $\left[[S]-\omega^2[P]\right]$ mátrix inverzével és az eredményt összevetjük a (2.4.b) egyenlettel:

$$-\omega^2\left[\,[S]-\omega^2[P]\,\right]^{-1}=\left[\,[\mu_a]-\omega^2[\chi_a]\,\right] \qquad (2.9)$$

Azt mondhatjuk tehát, hogy a koncentrált paraméteres akusztikai modellek közül mindkét megközelítés (akár a hangnyomással, akár térfogatsebességgel kifejezett szabadságfokok módszere) rendelkezésre áll (és az elektroakusztikában használatos is, amikor egy rendszer frekvenciaátviteli tulajdonságait kívánjuk meghatározni). Amennyiben azonban a rendszer modális viselkedésének meghatározására van szükségünk és ennek során a mechanikában már jól bevált kísérleti és számítási módszereket kívánjuk igénybe venni, a vizsgálandó rendszert egy térfogatsebesség-generátoros gerjesztést és hangnyomás választ alkalmazó modellel célszerű közelítenünk.

2.2. Az akusztikai végeselem módszer

Amint a korábbiakban már utaltunk rá, az akusztikai rendszerek jellemző méretei és a tipikus működési frekvenciatartományok következtében csak kevés feladatot lehet megoldani koncentrált paraméterű modellek alkalmazásával. Az akusztika tankönyvei Lord Rayleigh alapvető munkája [2] óta kiterjedten és nagy matematikai apparátus igénybe vételével tárgyalják különféle alapelemek és ezekből alkotott rendszerek mechanikai és akusztikai viselkedését (ld. pl. [3],[5],[8],[9],[10],[16]). Az analitikus módszerek azonban – az alkalmazott eszközök komplexitása ellenére is – csak viszonylag egyszerű geometriák esetében szolgáltatnak megoldást. A jelen értekezés arra törekszik, hogy olyan módszerek bevezetésére és tudatos, körültekintő alkalmazására tegyen javaslatot, melyek a gyakorlati feladatok minél szélesebb körében alkalmazhatók. Az akusztikai végeselem módszer ezek közé tartozik.

A végeselem módszer alapjainak kidolgozásában matematikusok, fizikusok és mérnökök egyaránt szerepet vállaltak. Az első, klasszikus alapvetés egy matematikustól (Courant, 1943, [37]) származik, akit később számos más matematikus, fizikus, majd az ötvenes évek közepétől kezdve egyre inkább mérnökök követtek [38]-[42]. A technika ma már a hazai mérnökképzés és mérnöki gyakorlat számos ágában meghonosodott (ld. pl. [44]-[46]), így ebben az értekezésben adottnak vehetjük a módszer alapfogalmait és -összefüggéseit.

Az **akusztikai végeselem módszer** azonban hazánkban még csak kevéssé ismert. A jelen értekezés szerzőjének tudomása szerint a módszer magyar nyelven csak egy, általa írott jegyzet alapján tanulmányozható [59] és tudtával idegen nyelven sem íródott róla összefoglaló munka. Az irodalomjegyzékben ezért felsoroltunk néhányat a fontosabb irodalmi források közül [47]-[58], és a teljesség kedvéért a Függelékben közöljük a módszer egy lehetséges származtatási módját is. A továbbiakban ennek alapján hivatkozunk a fontosabb összefüggésekre.

Az akusztikai végeselem módszer általunk a

$$\left[[K_a]-\omega^2[M_a]\right]\{p\}=-j\omega\rho\{G\} \qquad (2.10)\equiv(\text{F.18})$$

formulával megadott alapegyenlete tetszőleges alakú, zárt, merev felületekkel határolt belső akusztikai térre vonatkozik, amelyet veszteségmentes, izotróp, nyugalomban levő légnemű közeg tölt ki. (A $\{G\}$ általánosított gerjesztési vektor származtatását ld. a Függelékben.) Ebben az egyszerűsített esetben a rendszer csillapítástól mentes, és feltételezésünk szerint a térben kialakuló hangnyomás, p lineárisan függ a teret határoló felületek rezgéssebességétől, amit a jobb oldali gerjesztési vektor reprezentál. A gerjesztést egyelőre szinuszos rezgéssebességre korlátozzuk és a rendszer válaszát is csak állandósult állapotú szinuszos hangnyomás-amplitúdók formájában keressük.

A gerjesztés és a válasz közötti kapcsolatot leíró rendszermátrix két tagból áll. Ezek a mátrixok $N \times N$ elemű négyzetes, szimmetrikus, valós elemű mátrixok (itt N a végeselemek kialakításakor keletkező diszjunkt rácspontok összes számát jelenti). A mátrixban csak viszonylag kevés nullától különböző elem található, mert a modellben levő elemek mindegyike csak nagyon kevés elemmel szomszédos és csak ezekkel lehet közös rácspontja, ezért a keletkező akusztikai tömeg- és merevség-mátrixok ritkák. Megfelelő algoritmusok segítségével viszonylag kis sávszélességű szalagmátrixokká lehet átrendezni őket, ami kezelésük és a lineáris egyenletrendszerek megoldásának időszükségletét jelentősen csökkenti.

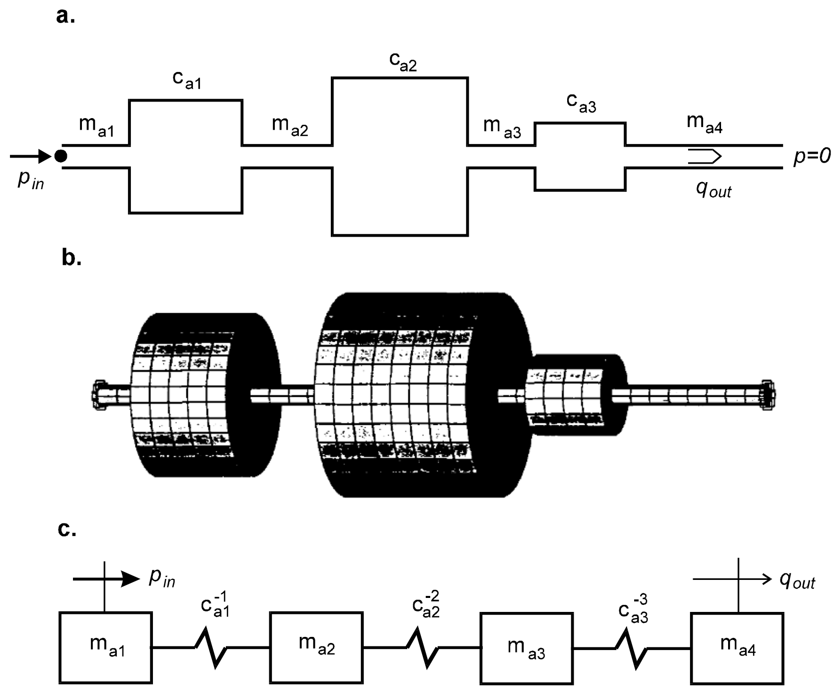
Fontos megemlíteni, hogy a mátrixok elnevezése sajnos nagyon eltérő a különböző szakirodalmi forrásokban. Az akusztikai végeselem módszer egyik úttörője, A. Craggs a $[K_a]$ mátrixot „akusztikai potenciális energia” és $[M_a]$-t „kinetikus energia” mátrixnak nevezi. Más szerzők, pl. Vandepitte és Desmet [56] a „mobilitási” és „kompresszibilitási” mátrix elnevezést alkalmazzák (ennél az elnevezésnél külön zavaró tényező lehet, hogy a szavak kezdőbetűje és a jelölés éppen fordított), leggyakrabban azonban – nyilván a formai analógia okán – $[K_a]$-ra az „akusztikai merevségmátrix”, $[M_a]$-ra az „akusztikai tömegmátrix” kifejezést részesítik előnyben.

Amint a levezetésből kiviláglik, a (2.10) egyenlet jobb oldalán valójában sűrűséggel szorzott térfogatgyorsulások vektora szerepel, és ennek megfelelően a $[K_a]$ mátrix m^2, az $[M_a]$ mátrix $\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$ dimenziójú elemeket tartalmaz, ami sajnos egyik, fent említett elnevezést sem teszi igazán plauzibilissá. Ha tudatában vagyunk a matematikai forma valódi fizikai tartalmának, akkor végső soron nincs akadálya, hogy a legalább formai analógiát kielégítő „akusztikai tömeg” és „akusztikai merevség” fogalmakat alkalmazzuk, ezért értekezésünkben mi is ezt tesszük a továbbiakban.

2.3. Koncentrált paraméteres és végeselem modell alkalmazása egy reaktív hangtompító elemzésének példáján

A bemutatott formalizmusok gyakorlati alkalmazását egy egyszerű reaktív hangtompító példáján szemléltetjük. Reaktív hangtompítókat gyakran alkalmaznak belső égésű motoroknál és kompresszoroknál, valamint légkezelő rendszerekben. Az ilyen hangtompítók működése az egymás után kapcsolt hullámvezető-szakaszok gyors, nagymértékű és többszöri akusztikai impedanciaváltásán alapul, ami végeredményben egy akusztikai aluláteresztő szűrőt eredményez. A rendszert koncentrált paraméterű modellel könnyen lehet helyettesíteni, de a számítás pontosságát és alkalmazási tartományát az elemek sajátfrekvenciáinak megjelenése erősen korlátozza. A továbbiakban egy ilyen rendszer párhuzamos elemzését végezzük el mindkét tárgyalt módszerrel, hogy a koncentrált paraméterű modell alkalmazási korlátairól képet alkothassunk.

A vizsgált rendszer vázlatát a 2.5a, numerikus modelljét a 2.5.b ábra szemlélteti. A 2.5.c ábrán – további megfontolások érdekében – az akusztikai rendszernek megfelelő mechanikai analóg modellt is felrajzoltuk. A rendszert – szándékosan – úgy méreteztük, hogy a várható sajátfrekvenciák egy része a *λ/8* szabály által meghatározott frekvenciakorlát alá, más részük azonban afölé essen.



2.5. ábra: *Egy reaktív hangtompító háromféle modellje.* ***(a)*** *a rendszer vázlata,* ***(b)*** *a végeselem rácsmodellje és* ***(c)*** *mechanikai analóg modell*

2.3.1. Módusok meghatározása koncentrált paraméterű modell alapján

A rendszert leíró egyenletrendszert először a műszaki akusztikában szokásos módon: a térfogatsebességekkel kifejezett akusztikai szabadságfokok alapján (azaz a (2.3) és (2.4) egyenleteknek megfelelő módon) alkottuk meg. A kapott $[\mu_a]$ mátrix most is diagonális, a $[\chi_a]$ mátrix szimmetrikus, pozitív szemi-definit szalagmátrix, mindkettő 4×4-es méretű. Behelyettesítve és a (2.4b) egyenlet sajátérték-feladatát megoldva négy sajátfrekvenciát kapunk: 0, 20.6, 54.7 and 131.7 Hz, a hozzájuk tartozó sajátvektorokból alkotott modális mátrix

$$[\Phi]_q = \left[\left\{ \Phi \right\}_1 \ldots \left\{ \Phi \right\}_4 \right] = \begin{bmatrix} -0.50 & -0.63 & 0.82 & 0.00 \\ -0.50 & -0.48 & -0.57 & 0.03 \\ -0.50 & 0.40 & 0.00 & -0.97 \\ -0.50 & 0.46 & -0.04 & 0.23 \end{bmatrix}. \qquad (2.11)$$

Amint az a 2.5.c ábrán feltüntetett mechanikai analóg képből is várható volt, az első sajátfrekvencia egy 0 frekvenciájú, ún. *„merevtest" módus*[3]. Ez az adott modellel leírt akusztikai rendszerben olyan állapotnak felel meg, amikor a teljes rendszer minden egyes elemén ugyanazon térfogatsebességű közeg áramlik igen lassan, dinamikus jelenségek nélkül.

[3] Mechanikai rendszerekben a „merevtest" módust az jellemzi, hogy minden rugalmas elem deformálatlan állapotban van. Egyszerűen szólva ez annyit jelent, hogy a három rugóval összekapcsolt, négy tömegből álló, nyugalomban levő rendszert következmények (azaz állapotváltozás) nélkül át lehet helyezni, mivel az adott rendszerben nincs olyan rugó, amely a rendszer valamelyik pontját a végtelen tömeghez kapcsolná. Matematikailag a merevtest módus azáltal jön létre, hogy a merevségmátrix szinguláris, ezért determinánsa nulla értéket vesz fel. Amikor a sajátérték problémának egy vagy több nulla sajátértéke van, akkor szemidefinit sajátérték problémával állunk szemben.

A másik három módus esetében két szomszédos akusztikai tömeg mindig viszonylag nagy, de ellentétes előjelő (azaz irányú) térfogatsebességgel rendelkezik. Az előjelváltás a 20,6 Hz-es módusnál a második és harmadik tömeg között, az 54,7 Hz-esnél az első és második, a 131,7 Hz-nél pedig a harmadik és negyedik tömeg között jön létre. Ezek az adatok pontosan megfelelnek az egyes expanziós kamrák helyének, csökkenő térfogatuk sorrendjében. Ez arra utal, hogy minden egyes módus egy-egy hangnyomás-maximumnak felel meg az egyes expanziós kamrákban, amelynek két oldalán így nagy, ellenkező irányú térfogatsebességeknek kell fellépnie. Mint látni fogjuk, ez valóban így is van.

A számítások második sorozatát a (2.7) egyenletnek megfelelően végeztük el. Mivel a modell a 4 induktív mellett csak 3 kapacitív elemet tartalmaz, az akusztikai szabadságfokok száma is 3-ra csökken. A kapott sajátfrekvenciák rendre 20.6 Hz, 54.7 and 131.6 Hz, a megfelelő módusmátrix

$$[\Phi]_p = \begin{bmatrix} -0.32 & 0.97 & 0.00 \\ -0.73 & -0.16 & -0.07 \\ -0.6 & -0.16 & 0.99 \end{bmatrix}. \qquad (2.12)$$

A kapott sajátfrekvenciák természetesen azonosak a korábban számítottakkal, azzal a különbséggel, hogy „elveszítettük” a merevtest módust. (Ennek is jól értelmezhető fizikai oka van: a merevtest módus ebben az esetben a rendszer minden pontján fennálló állandó, statikus nyomást jelentene, ami a mindkét végén nyitott csőrendszer esetében lehetetlen: akárhogyan juttatunk véges térfogatú gázmennyiséget a rendszerbe, a nyomás a nyitott csővégeken kiegyenlítődik és a rendszer idővel alapállapotba tér vissza.) Ebben a megközelítésben a sajátvektorok értelmezése egyértelműbb, de az előző megközelítéssel azonos eredményre vezet: a három módusvektor az egyes expanziós kamrákon belül kialakuló nyomásmaximumokra utal.

2.3.2. Módusok meghatározása numerikus modell alapján

A numerikus számításokhoz alkalmazott, 2.5.b ábrán bemutatott végeselem mofell 1564 rácspontot és 1808 elemet tartalmazott. Az elméleti számításnak megfelelően a nyitott csővégeket képviselő rácspontokra mindkét oldalon p = 0 hangnyomás peremfeltételt tettünk, a többi szabadságfokot „merevnek” hagytuk (v = 0). Összesen 20 módust határoztunk meg, amelyek közül néhányat a 2.1 táblázatban foglaltunk össze. (A számításokat a SYSNOISE kereskedelmi programcsomag 5.3. verziója csatolatlan opciójával végeztük.)

A numerikusan számított sajátfrekvenciák között szintén nincs merevtest módus, és az értékek szisztematikusan alacsonyabbak a koncentrált paraméterű modellek sajátfrekvenciára vonatkozó eredményeinél. Az eltérés a két első módusnál 4 %-nál kevesebb, de a harmadiknál majdnem eléri a 10 %-ot. Az eltérést minden bizonnyal az okozza, hogy az m_{a4} jelű akusztikai tömeg, a harmadik módus kialakításában fontos szerepet betöltő elem esetében a koncentrált paraméterű modell alkalmazásának frekvenciahatára már alig haladja meg a sajátfrekvencia értékét, azaz ezen csőszakasz már alig tekinthető akusztikai tömegnek.

A numerikusan meghatározott első három módusalak alátámasztja a koncentrált paraméterű modell alapján tett megállapításainkat. Bár a numerikus elemzés jóval szemléletesebb képet nyújt a rendszerben lezajló jelenségekről, az első három módus esetében lényegileg nem nyújt több információt a kevésbé igényes módszerrel nyerhető eredményeknél. Amíg azonban a magasabb frekvencián várható eseményekről a koncentrált paraméterű modell már semmit nem tud mondani, a numerikus számításból megtudhatjuk, hogy hogyan viselkedik a rendszer magasabb frekvenciákon.

2.1. táblázat: *Végeselemes, valamint térfogatsebességként (2.4b) vagy hangnyomásként (2.7) definiált szabadságfokokat alkalmazó, koncentrált paraméteres modell segítségével számított sajátfrekvenciák összehasonlítása*

Sorszám	Végeselem számításból	Koncentrált paraméteres modell alapján	
		SzF = *q*	SzF = *p*
1	-	0	-
2	19.9	20.6	20.6
3	52.7	54.7	54.7
4	120.3	131.7	131.6
≥5	530 *etc.*	-	-

A vizsgált modellek a frekvenciaátviteli függvények számítására is alkalmasak. Terjedelmi okoknál fogva ezen számítások eredményeit itt nem közöljük, azok [212] -ben találhatók meg.

2.4. A koncentrált paraméterű és numerikus modellek összehasonlítása

A 2.3 fejezet eredményei a vizsgált rendszernél jóval általánosabb körben is érvényesek, amit a módszerek származtatásában meglevő hasonlóságok indokolnak.

Az eljárások alapja mindkét megközelítésnél az, hogy egy kontinuum rendszert térben kvantálunk (diszkretizálunk). Koncentrált paraméterű elemek generálása céljából a vizsgálandó rendszert legfeljebb λ/8 méretű elemekre bontjuk [17], végeselemek alkalmazása esetén ennél nagyobb, de legfeljebb λ/6 méretű elemet is megengedünk [12]. A koncentrált paraméterű elemek állapotának leírására az elem belsejében konstansnak tekintett változó (hangnyomás vagy térfogatsebesség), végeselemeknél a rácspontok hangnyomása szolgál, ami jóval több szabadságfokot eredményez. A fő elvi eltérés a két megközelítés között azonban nem a szabadságfokok számában, hanem abban van, hogy a végeselem módszer a rácspontok közötti térben is információkat szolgáltat a hangtér változóiról egy megfelelő interpolációs eljárás révén, míg a koncentrált paraméteres modell elemenként csak egy ismeretlen értékét képes szolgáltatni. A gyakorlat szempontjából viszont nyilvánvalóan az a legfontosabb különbség, hogy míg koncentrált paraméterű esetben csak egydimenziós hullámterjedést tekinthetünk (vagyis az elemek hullámterjedésre merőleges irányú méretének – elvben – még a hosszirányú méretnél is jóval kisebbnek kell lennie), a végeselem modell méretének azonban bármely irányban csak a rendelkezésre álló számítási kapacitás és futási idő szab határt.

Láttuk, hogy a két módszer másodrendű standard alakban felírt egyenletrendszerei is szoros rokonságot mutatnak. A koncentrált paraméterű modellt leíró

$$\left[[S]-\omega^2[P]\right]\{p\}=\{\dot{q}\}. \tag{2.7b}$$

és a végeselem módszer

$$\left[[K_a]-\omega^2[M_a]\right]\{p\}=\left[B_a(\omega)\right]\{p\}=-j\omega\rho\{G\} \tag{2.10}$$

alapegyenlete mindkét esetben a hangnyomásokat tekinti ismeretleneknek, a gerjesztést képviselő jobb oldali vektorok pedig közvetlenül, vagy egy konstanstól eltekintve mindkét esetben térfogatgyorsulásban adottak (végeselem módszernél a gerjesztés a vizsgált térrészt határoló felületek normális irányú sebességéből származik). Amennyiben csak a rendszer modális modelljét (sajátfrekvenciák és a módusmátrix) kívánjuk meghatározni, a gerjesztéseket nullákkal kell helyettesíteni, így a két egyenletrendszer formailag teljesen azonossá válik. A mátrixok azonban természetesen jelentősen különböznek és így jelentősen eltérnek a sajátvektorok is. Az eredményként nyert sajátfrekvenciák azonban – a módszerek alkalmazási tartományán belül – közel azonosak, amint azt a fenti példa is mutatja.

A koncentrált paraméteres és a numerikus módszerek egyenértékűségét tovább gondolva azt is kijelenthetjük, hogy a koncentrált paraméterű akusztikai modellezés módszere nem más, mint a véges differencia módszerének alkalmazása egydimenziós akusztikai hullámvezetők esetére. A mikrohullámú technikában gyakran alkalmazott módszert [33],[46] Botteldooren akusztikai problémákra alkalmazva ugyanis kimutatta [75], hogy a módszer akusztikai rendszerekben nem szabályos derékszögű rácspontokból álló rácsra (más kifejezéssel: hálóra) is alkalmazható. Az általa alkalmazott, szabálytalan alakú és nem szükségszerűen egyforma méretű Voronoi cellák akusztikai paraméterei a koncentrált paraméterű akusztikai modellek üzemi paramétereinek jól megfeleltethetők, a numerikus integrálás alapját képező

$$\begin{aligned} p_i^{(l+1)} &= p_i^l - \frac{\rho c_0^2 dt}{V_p^i} \sum_j \vec{v}_j^{(l+0.5)} \cdot \vec{S}_p^j \\ \vec{v}_j^{(l+0.5)} &= \vec{v}_j^{(l-0.5)} - \frac{dt}{\rho d_j}\left(p_{i+}^l - p_{i-}^l\right) \end{aligned} \qquad (2.13)$$

alapegyenletek pedig ekvivalensek a hangtér

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\kappa p_0}\frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \qquad (2.14)$$

I. és II. alapegyenletével, amelyek a koncentrált paraméterű elemek definíciójának alapjául szolgáló hullámegyenletre vezetnek. A koncentrált paraméterű közelítéstől ezért – amennyiben a módszer alkalmazási feltételei fennállnak – a jóval nagyobb igényeket támasztó akusztikai véges differencia, ill. a végeselem számításával ekvivalens eredményeket kaphatunk. Ez ugyanakkor nem jelenti azt, hogy maga a két módszer is ekvivalens, hiszen a numerikus modellek nagyságrendekkel nagyobb mérete sokkal részletesebb, alaposabb és pontosabb elemzéseket tesz lehetővé, mint a koncentrált paraméteres megközelítés.

További fontos megállapításunk, hogy a (2.10) egyenletet az akusztikai rendszerek diszkrét alapegyenletének is nevezhetjük, amely a rendszer egyes elemeinek hangnyomás-vektorát kapcsolja össze a rendszert gerjesztő térfogatsebességek vektorával, a rendszer akusztikai tömeg- és merevségmátrixa, vagy még tömörebben a (frekvenciafüggő) rendszermátrix segítségével. Az egyenlet ezért – a végeselemes és a koncentrált paraméteres származtatástól egyaránt elszakadva – bármely akusztikai rendszer leírására, kísérleti vagy analitikus vizsgálatára alkalmazható, feltéve, hogy a diszkretizálás feltételei teljesültek.

2.5. Új tudományos eredmények összefoglalása és tézisek

I. téziscsoport: A koncentrált paraméteres, a diszkrét mechanikai rendszerek standard másodrendű modelljei alapján történő és a végeselem módszerrel végzett akusztikai modellezés összefüggései

I.1 tézis: *Igazoltam és numerikus példán be is mutattam, hogy a koncentrált paraméteres akusztikai modellezés egyenletei az akusztikai szabadsági fokok és a gerjesztést leíró vektorváltozó alkalmas megválasztásával a standard másodrendű mechanikai modellek alakjára hozhatók, így ezen analógia alapján könnyen megoldhatók.*

Kidolgoztam egy olyan kanonikus leírási módszert, mely szerint a vizsgált rendszert leíró üzemi változók – a hangnyomás és a térfogatsebesség – közül célszerűen kiválasztott szabadságfokok mindegyikére felírható egy egyenlet (feltéve természetesen, hogy teljesülnek a koncentrált paraméterű akusztikai modellalkotás feltételei). Ezen egyenletekben a hangnyomások és térfogatsebességek közötti kapcsolatokat az érintett elemek egyszámadatos jellemző paramétere – az akusztikai tömeg vagy az akusztikai kapacitás – teremti meg. A felírt egyenletek egy lineáris egyenletrendszerben foglalhatók össze, amelyben az adottnak tekintett gerjesztési paraméterek vektora és a rendszer válaszát leíró ismeretlenek, azaz az akusztikai szabadságfokok vektora közötti kapcsolatot egy standard másodrendű mechanikai modellnek megfelelő inhomogén mátrixegyenlet írja le. Kimutattam, hogy ez az egyenlet (a csillapítások elhanyagolása esetén)

$$\left[[\mu_a]-\omega^2[\chi_a]\right]\{\xi\}=\{p\} \tag{2.4.b}$$

vagy

$$\left[[S]-\omega^2[P]\right]\{p\}=\{\dot{q}\} \tag{2.7.b}$$

alakú, ahol a $[\mu_a]$ és $[S]$ mátrixok akusztikai tömegeket, a $[\chi_a]$ és $[P]$ mátrixok akusztikai kapacitásokat tartalmaznak. Az első egyenletben az akusztikai szabadságfokokat a $\{\xi\}$ térfogatkitérés-, a másodikban a $\{p\}$ hangnyomásvektor reprezentálja, a gerjesztés pedig a $\{p\}$ hangnyomás vektorban vagy a $\{\dot{q}\}$ térfogatgyorsulás vektorban adott.

Megmutattam, hogy a két egyenlet a

$$-\omega^2\left[[S]-\omega^2[P]\right]^{-1}=\left[[\mu_a]-\omega^2[\chi_a]\right], \tag{2.9}$$

összefüggés értelmében ekvivalens, ezért adott feladat megoldásához a két mátrixegyenlet közül szabadon, célszerűségi megfontolások alapján választhatunk.

A rendszer sajátfrekvenciái a (2.4.b) vagy (2.7.b) egyenletek homogén (zérus jobboldali vektort tartalmazó) alakjának megoldásából, a szokásos mátrixalgebrai módszerek alkalmazásával nyerhetők. A két egyenlet ekvivalenciája következtében nyilvánvaló, hogy a releváns (nem zérus értékű) sajátfrekvenciák is azonosak lesznek. A kinyerhető sajátvektorok fizikai tartalma azonos, de formailag jelentősen eltérnek.

I.2. tézis: *Bebizonyítottam, hogy a koncentrált paraméteres akusztikai modell és az akusztikai végeselem modell formailag és fizikai tartalmát tekintve is ekvivalens összefüggésekre vezet.*

Megmutattam, hogy az

$$\left[[S] - \omega^2 [P] \right] \{p\} = \{\dot{q}\} \tag{2.7b}$$

másodrendű standard modális mátrixegyenlet alakjában felírt koncentrált paraméteres modell az akusztikai végeselem módszer alapját képező

$$\left[[K_a] - \omega^2 [M_a] \right] \{p\} = -j\omega\rho \{G\} \tag{2.10}$$

alapösszefüggéssel ekvivalens, ahol $[K_a]$ és $[M_a]$ az akusztikai merevség- és tömegmátrix, ρ a hanghullámot vivő közeg sűrűsége és $\{G\}$ a rendszert gerjesztő térfogatsebesség-eloszlás vektora.

Az ekvivalencia plauzibilis, hiszen a módszerek azonos alapokon: az akusztikai hullámegyenlet valamilyen közelítő megoldásán nyugszanak. Hasonlóság van a módszerek alkalmazásának feltételeiben is: a koncentrált paraméterű modell alkalmazásának egyik alapfeltétele, hogy az akusztikai elemek ne legyenek nagyobbak a hullámhossz nyolcadánál, míg a végeselemek legnagyobb mérete a hullámhossz hatodánál nem lehet nagyobb. Amíg azonban a végeselem módszer tetszőleges geometriájú zárt rendszerre, a koncentrált paraméteres modell csak egydimenziós hullámterjedésre alkalmazható. Előbbi mind térbeli felbontását, mind frekvenciatartományát tekintve jóval szélesebb alkalmazási területtel bír, utóbbi azonban alkalmasabb várható tendenciák megállapítására, egyszerűbb problémák gyors megoldására.

Mindezek alapján a (2.10) egyenletet az *akusztikai rendszerek diszkrét alapegyenletének* is nevezhetjük, amely bármely akusztikai rendszer leírására, kísérleti vagy analitikus vizsgálatára alkalmazható mindaddig, amíg a diszkretizálás feltételei teljesülnek.

A tézisekkel kapcsolatos publikációk: [186] [212].

3. fejezet

3. AKUSZTIKAI MÓDUSOK EXTRAKCIÓJA ÉS SZUPERPOZÍCIÓJA

Az akusztikai rendszerek (2.10) diszkrét alapegyenlete segítségével egy tetszőleges, zárt akusztikai térben uralkodó hangnyomást meghatározni nem jelent elvi nehézséget. Az akusztikai tömeg- és merevségmátrix elemei a definíciós egyenletekből könnyen algoritmizálható módon számíthatók, az akusztikai tér külső felületét alkotó rácspontok rezgéssebessége feltételezésből, mérésből, vagy szerkezeti végeselem számításból kapható meg. Az egyenletbe a számítás kívánt frekvenciáit egyenként behelyettesítve a feladat a lineáris egyenletrendszerek szokásos algoritmusai segítségével megoldható. A gyakorlatban ezt a *direkt*-nek nevezett módszert mégis viszonylag ritkán alkalmazzák, mert a gyakorlat igényeihez képest feleslegesen nagy erőforrás-igénye van.

További hátránya, hogy bár a vizsgált jelenségről igen nagy mennyiségű információt szolgáltat, ebből csak nehezen lehet a rendszerben lejátszódó jelenségek lényegére következtetni. A numerikus módszerek ellenzőinek gyakran hangoztatott – és nem is alaptalan – kifogása, hogy a numerikus számítások mindig csak az adott, egyedi rendszerre vonatkozó specifikus információkat képesek szolgáltatni, a rendszer viselkedésére vonatkozóan nem lehet általános következtetéseket levonni.

Mindkét hátrányt segít leküzdeni, ha a megoldást a minden dinamikai rendszer viselkedésére jellemző *normál módusok* felől közelítve keressük. Az akusztikai feladatok egy részében arra törekszünk, hogy egy valóságos fizikai rendszerből „kibontsuk", extraktáljuk a rendszer viselkedését meghatározó módusokat. A fordított feladat: az akusztikai rendszerek gerjesztett válaszának meghatározása, azaz a módusok szuperpozíciója is gyakori igény a mérnöki munkában.

A jelen fejezetben a modális megközelítés elsősorban mechanikai rendszerekre kidolgozott módszertanát akusztikai problémákra adaptáljuk, megalapozva ezzel a következő fejezetek saját kutatások alapján elért eredményeinek tárgyalását. Rámutatunk a dinamikus rendszerek e két fajtája közötti eltérésekre és azok következményeire, és két egyszerű példán mutatjuk be az akusztikai rendszerek esetében felmerülő specifikus problémákat.

3.1. Normál módusok akusztikai rendszerekben

Az akusztikai problémák egy részénél azzal a feltételezéssel élhetünk, hogy a hanghullámok terjedése akadálytalan. Ilyen esetben a hullámegyenlet tetszőleges frekvenciákra megoldható. A gyakorlati fontosságú feladatok többségénél azonban a hullámterjedést biztosító közeget hangvisszaverő felületek határolják, amelyek részben vagy teljes egészében zárt felületet alkothatnak. A problémát matematikai eszközökkel leíró hullámegyenlet megoldását ilyenkor a felületeken teljesítendő peremfeltételek is befolyásolják és azt eredményezik, hogy bizonyos frekvenciákon a homogén hullámegyenletnek gerjesztés nélküli esetben is lehetséges a triviálistól különböző megoldása. Az ilyen frekvenciákat a rendszer sajátfrekvenciájának vagy önfrekvenciájának, az adott frekvencián a térben kialakuló hullámformát ön- vagy sajátrezgésnek, módusnak, normál módusnak vagy módusalaknak nevezzük.

Fizikailag a módusok kialakulása azáltal lehetséges, hogy a rendszerben levő energiát a határoló felületek a rendszeren belül „fogva tartják”. Ha egy rendszerrel valamilyen módon energiát közöltünk és ezt az energiát semmilyen disszipatív folyamat nem emészti fel, akkor a rezgések elvben végtelen ideig fennmaradhatnak. A térben sokszorosan visszaverődő és interferáló hullámok eredőjeként jönnek létre a normál módusok, ezért térbeli jellemzőik szoros hasonlóságot mutatnak a tér és a határoló felületek geometriájával. (Mint a 4. fejezetben tárgyaljuk, a térbeli hasonlóság lesz az alapja a szerkezet-közeg kölcsönhatásoknak is.) Valóságos rendszerekben mindig van csillapítás, ezért a rezgések sem maradhatnak fent korlátlan ideig. Komplex frekvenciák bevezetésével azonban a csillapított, valós rendszerekben is lehet modális modelleket alkalmazni.

A következőkben az akusztikai rendszerek modális viselkedését a legegyszerűbb, egydimenziós hullámvezető normál módusainak számításával vizsgáljuk, majd a módusok szuperpozíciójának és extrakciójának analitikus és kísérleti megközelítését tárgyaljuk. A tágyalt módszerek alkalmazását két esettanulmány segítségével mutatjuk be.

3.1.1. Egydimenziós hullámvezető normál módusai

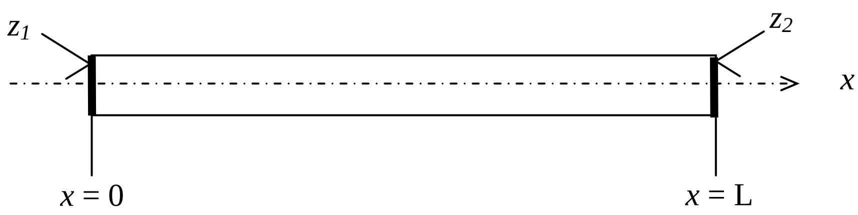
Tekintsük a 3.1. ábrán szereplő, L hosszúságú hullámvezetőt, melyet az $x=0$ helyen z_1, az $x=L$ helyen z_2 specifikus impedancia zár le. A rendszert leíró egydimenziós hullámegyenlet

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{3.1}$$

másodrendű parciális differenciálegyenlet, amelyet a változók

$$p(x,t) = p_x(x)\, p_t(t) \tag{3.2}$$

szeparálásával könnyen megoldhatunk. A kapott egyenletek:



***3.1. ábra**: Egydimenziós hullámvezető modellje*

$$\frac{d^2 p_x(x)}{dx^2} + k^2 p_x(x) = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{d^2 p_t(t)}{dt^2} + k^2 p_t(t) = 0 \tag{3.4}$$

(3.3) az ismert Helmholtz-egyenlet homogén alakja, melyből a hangnyomás térbeli eloszlása állapítható meg, (3.4) pedig a hullámok időbeli változását írja le. Az első egyenlet $p_x(x)$ megoldásának a (3.3) egyenlet mellett a

$$\left.\frac{p_x(x)}{v_x(x)}\right|_{x=0} = -z_1 \quad \text{és} \quad \left.\frac{p_x(x)}{v_x(x)}\right|_{x=L} = z_2 \tag{3.5}$$

peremfeltételeket is teljesítenie kell. (A negatív előjelet az okozza, hogy a hullámvezető bal oldali lezárása felé haladó hullám részecskesebességének iránya ellentétes a koordinátarendszer +*x* tengelyével.) Jól látható, hogy itt egy klasszikus sajátérték-problémával állunk szemben: meg kell határoznunk, mely k-ra van a Helmholtz-egyenletnek nemtriviális megoldása és milyen hangtér tartozik e sajátértékhez.

A megoldást a jól ismert

$$p(x,t) = p e^{j\omega t}\left(a e^{-jkx} - b e^{jkx}\right)$$

alakban keresve a rendszer

$$\frac{z_1 + \rho c}{z_1 - \rho c}\,\frac{z_2 + \rho c}{z_2 - \rho c} e^{j2kL} = 1 \tag{3.6}$$

alakú karakterisztikus egyenletéhez jutunk. Ez az egyenlet a komplex logaritmikus függvény segítségével zárt alakban megoldható, és belőle az

$$\underline{\omega}_n = \omega_n + j\delta_n$$

komplex sajátfrekvencia adódik, melynek valós része,

$$\omega_n = \frac{n c_0 \pi}{L} - \frac{c_0 \arctan(\zeta_{12})}{2L} \tag{3.7}$$

az n-edik sajátrezgés frekvenciáját reprezentálja, a képzetes rész pedig a rendszer energiaveszteségét leíró csillapítás:

$$\delta_n = \frac{c_0 \ln|\zeta_{12}|}{2L} \tag{3.8}$$

ahol

$$\zeta_{12} = \frac{z_1 + \rho c_0}{z_1 - \rho c_0} \frac{z_2 + \rho c_0}{z_2 - \rho c_0}$$

A k hullámszámot a

$$\underline{k}_n \equiv \frac{\underline{\omega}_n}{c_0} = k_n + j\kappa_n$$

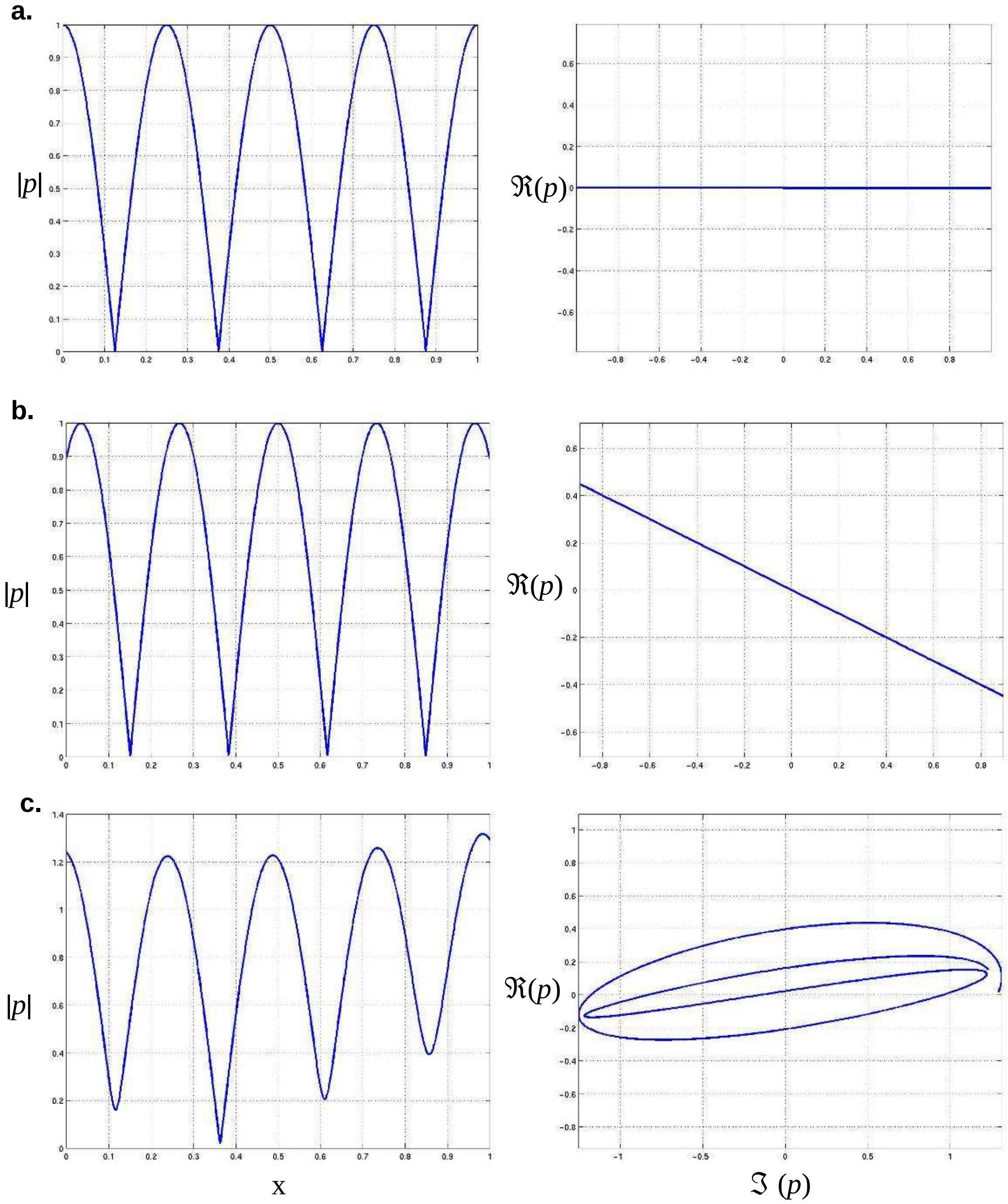
formulából meghatározva és a Helmholtz-egyenletbe visszahelyettesítve a

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) = & \frac{\cosh \kappa_n x \left(z_1 \cos k_n x + j\rho c_0 \sin k_n x \right)}{z_1 - \rho c_0} - \\ & - \frac{\sinh \kappa_n x \left(\rho c_0 \cos k_n x + j z_1 \sin k_n x \right)}{z_1 - \rho c_0} \end{aligned} \tag{3.9}$$

módusalakot nyerjük. (Megjegyezzük, hogy az egydimenziós akusztikai hullámvezetőre nyert összefüggések szoros formai és tartalmi analógiában vannak az elektromos tápvonalakra vonatkozó összefüggésekkel [31] [32]. Ezzel az analógiával azonban értekezésünk terjedelmi korlátok miatt nem foglalkozik.)

Tanulságos a (3.7) - (3.9) formulák eredményét megvizsgálni speciális, ill. általánosabb esetekre. Merev lezárások esetén a sajátfrekvencia a jól ismert $nc_0\pi / L$ képlettel számolható. A módusalak a 3.2.a ábrán látható módon öt egyenlő lokális maximumot és négy zérus értékű minimumot („csomópontot”) tartalmaz, a Nyquist-diagram pedig egy tisztán valós értékű szakasz lesz. Amennyiben a lezárások tisztán képzetesek és végesek (azaz a hullámvezetőt ideális akusztikai tömeggel vagy kapacitással zárjuk le), a sajátfrekvencia ismét valós, melynek értéke – a reaktáns elem előjelétől függően – a mereven lezárt hullámvezető eseténél kisebb vagy nagyobb. (Ezen összefüggés gyakorlati alkalmazása ismerhető fel pl. az orgonasípok hangolását végző intonatőr tevékenységében, aki az orgonasípok finomhangolását a nyitott orgonasípok végeinek kitágításával vagy beszűkítésével végzi, egy pozitív és negatív kúpot egyaránt tartalmazó szerszám segítségével.) A módusalak már nem valós, de Nyquist-diagramon ábrázolva még mindig egyenest kapunk (ld. a 3.2.b ábrát). A móduselemző rendszerek képernyőjén tapasztalható álló hullámkép alapján ezeket a módusokat is „valós módusoknak” szokás nevezni, de ez láthatóan félrevezető; ehelyett helyesebb a „kollineáris módus” elnevezés.

Általános esetben a hullámvezetőket lezáró akusztikai impedanciák valós és képzetes tagokat egyaránt tartalmaznak. Ilyen körülmények között valódi komplex módusokról beszélhetünk: a sajátfrekvencia már komplex, a módusalak Nyquist-diagramon ábrázolva komplex görbe (3.2.c. ábra) és a móduselemző rendszeren nem álló, hanem haladó hullámkép figyelhető meg, amint azt a 3.5.2. szakaszban egy kísérlet segítségével is bemutatjuk.



3.2.ábra: *Különféle specifikus impedanciákkal lezárt egydimenziós hullámvezető számított módusalakjai a hely függvényében és Nyquist-diagramon.*

a: $z_1 = z_2 = \infty$, ***b:*** $z_1 = z_2 = 2j$, ***c:*** $z_1 = 4 - 2j,\ z_2 = 2 + j$

3.1.2. Háromdimenziós akusztikai tér normál módusai

Az analitikus móduselemzés térbeli rendszerekre is könnyen kiterjeszthető, a témának igen bő szakirodalma van. A kérdéssel jelen értekezésünkben azonban nem foglalkozunk, ehelyett a szakirodalomra [7],[16], ill. saját publikációinkra [59], [189] utalunk.

3.2. Rezgésakusztikai rendszerek válaszának számítása módusok szuperpozíciójával

3.2.1. Folytonos akusztikai rendszerek

Tekintsünk elsőként egy egyszerű, folytonos rendszert: egy ideális pontforrást (szokásos megnevezéssel egy akusztikai *monopólus*t), ami szinuszos térfogatsebességet kelt egy ideálisan merev (energiát el nem nyelő) S felülettel határolt, tetszőleges alakú, V térfogatú zárt térben. E rendszert a

$$\left(\nabla^2+k^2\right)p=-\dot{q}\,\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right) \tag{3.10}$$

alakú Helmholtz-egyenlet írja le. Az inhomogén másodrendű differenciálegyenlet megoldása erre az esetre a Green-függvény, ami a forrás $\vec{r}_0$ és a megfigyelési hely $\vec{r}$ helyvektora mellett még a frekvenciától is függ:

$$p\left(\vec{r}\right)=g\left(\vec{r},\vec{r}_0,\omega\right) \tag{3.11}$$

Ezen kívül a megoldásnak az akusztika Euler-egyenlete értelmében a teret határoló merev felületeken a $\dfrac{\partial p}{\partial \vec{n}}=0$ peremfeltételt is teljesítenie kell.

A kontinuum-akusztika területén is gyakran alkalmazott módszer, hogy a feladat megoldását a normál módusok lineáris kombinációjából alkotott sorfejtés alakjában keressük [5]:

$$g\left(\vec{r},\vec{r}_0,\omega\right)=\sum_m a_m\,\psi_m \tag{3.12}$$

ahol a ψ_m függvény a homogén Helmholtz-egyenlet m-edik megoldása:

$$\left(\nabla^2+k_m^{\;2}\right)\psi_m=0 \tag{3.13}$$

A (3.12) egyenlet alapján alapuló módszert ezért *módus-szuperpozíciónak*, vagy *modális sorfejtésnek* is nevezik. A fent megadott, egyszerű akusztikai rendszerekre A. Pierce [5] és E. Skudrzyk [10] adott levezetést, melynek eredménye az alábbi:

$$p\left(\vec{r}\right)=g\left(\vec{r},\vec{r}_0,\omega\right)=\sum_m \frac{\dot{q}}{\Lambda_m^2\left(k_m^2-k^2\right)}\,\psi_m\left(\vec{r}\right)\;\psi_m\left(\vec{r}_0\right) \tag{3.14}$$

Az egyenlet fontos fizikai tartalma az, hogy egy monopólussal gerjesztett rendszer válasza a gerjesztés térfogatgyorsulásán és az egyes módusok frekvenciafüggő súlytényezőin kívül elsősorban a módusalaktól, pontosabban a gerjesztési és a megfigyelési pont normál módushoz viszonyított elhelyezkedésétől függ. Egy rendszert nem lehet jól gerjeszteni olyan pontban, amelyben az adott módusvektor értéke kis értékű vagy nulla, és eredményes gerjesztés mellett is lehet gyenge a válasz, ha azt egy csomóponthoz közeli helyen kívánjuk megfigyelni. A rendszer eredő válasza – elvben – a homogén Helmholtz-egyenlet összes lehetséges megoldásának szummájából tevődik össze, és az egyes módusok eredőben betöltött szerepe attól is függ, hogy a gerjesztés frekvenciája milyen közel esik a rendszer sajátfrekvenciáihoz. $k \cong k_m$ esetén *rezonancia* lép fel és az amplitúdó végtelenhez tart.

A (3.14) egyenlet értelmezése kapcsán két fontos megállapítás tehető. Kimutatható, hogy az *akusztikai rendszerek módusai* – feltételezve, hogy a rendszernek nincsenek többszörös sajátértékei – mindig *ortogonálisak*:

$$\iiint_V \psi_n \psi_m \, dV = 0, \text{ ha } n \neq m \tag{3.15}$$

Lényeges továbbá, hogy a forrás és a megfigyelés helye az összefüggésben felcserélhető, ami az *akusztikai rendszerek reciprocitásának* matematikai kifejezése. A reciprocitás és a leíró egyenletek szimmetriájának összefüggéseit a 4. fejezetben még részletesen tárgyaljuk.

3.2.2. *Diszkrét akusztikai rendszerek*

Tekintsük ismét a (2.10) egyenletet, amit továbbra is a csillapításmentes esetre, most kissé még tovább egyszerűsített formában írunk fel:

$$\left[[K_a] - \omega^2 [M_a]\right] \{p\} = \{\dot{Q}\} \tag{3.16}$$

amennyiben a gerjesztést az általánosított $\{\dot{Q}\}$ térfogatgyorsulás vektor képviseli. Legyen ezen egyenlet homogén változatának r-edik és s-edik megoldása a $\{p\} = \{\psi\}_r$ és a $\{p\} = \{\psi\}_s$ vektor, akkor

$$\left[[K_a] - \omega_r^2 [M_a]\right] \{\psi\}_r = \{0\} \quad \text{és} \tag{3.17}$$

$$\left[[K_a] - \omega_s^2 [M_a]\right] \{\psi\}_s = \{0\} \tag{3.18}$$

(3.17)-t $\{\psi\}_s$ transzponáltjával balról beszorozva kapjuk:

$$\{\psi\}_s^T [K_a] \{\psi\}_r - \omega_r^2 \{\psi\}_s^T [M_a] \{\psi\}_r = 0 \tag{3.19}$$

és ugyanilyen lépésekkel (3.18)-ból kapható

$$\{\psi\}_r^T [K_a] \{\psi\}_s - \omega_s^2 \{\psi\}_r^T [M_a] \{\psi\}_s = 0 \tag{3.20}$$

Ha (3.19) mindkét oldalát transzponáljuk, a tömeg- és a merevségmátrix szimmetriája következtében a

$$\{\psi\}_r^T [K_a] \{\psi\}_s - \omega_r^2 \{\psi\}_r^T [M_a] \{\psi\}_s = 0 \tag{3.21}$$

egyenletet kapjuk. (3.21)-ből (3.20)-at kivonva az

$$\left(\omega_s^2 - \omega_r^2\right) \{\psi\}_r^T [M_a] \{\psi\}_s = 0 \tag{3.22}$$

összefüggést nyerjük. Ha $s \neq r$ (és feltesszük, hogy a rendszernek most sincsenek többszörös gyökei), akkor ez csak úgy teljesülhet, ha

$$\{\psi\}_r^T [M_a] \{\psi\}_s = 0 \tag{3.23}$$

fennáll. Ez az egyenlet azt mondja ki, hogy a diszkrét akusztikai rendszerek két különböző sajátvektora súlyozottan ortogonális, ahol a súlyozó tényező az akusztikai tömegmátrix.

Amennyiben $s=r$, (3.23) egy véges ${}_rM_a$ értéket ad:

$$\{\psi\}_r^T[M_a]\{\psi\}_r = {}_rM_a, \tag{3.24}$$

amit a mechanikai móduselemzésből kölcsönzött kifejezéssel az r-edik módushoz tartozó akusztikai modális tömegnek nevezhetünk.

Teljesen hasonló lépésekkel kapjuk az ${}_rK_a$ akusztikai modális merevséget:

$$\{\psi\}_r^T[K_a]\{\psi\}_r = {}_rK_a = \omega_r^2\,{}_rM_a \tag{3.25}$$

Nyilvánvaló, hogy a (3.17) egyenletnek a $c\{\psi\}_r$ vektor is megoldása bármilyen c konstans esetén, azaz a sajátvektorok a homogén egyenletnek nem unikális megoldásai. Ez a tulajdonság arra nyújt lehetőséget, hogy a sajátvektorokat megfelelően skálázva a modális tömeg minden r-re egységnyire adódjék. Ebben az esetben azt mondhatjuk, hogy a sajátvektorok nem csak ortogonálisak, hanem ortonormáltak is egyben. (3.24) és (3.25) ebben az esetben az alábbi tömör formába írható:

$$\{\psi\}_r^T[M_a]\{\psi\}_s = \delta_{rs} \tag{3.26}$$

és

$$\{\psi\}_r^T[K_a]\{\psi\}_s = \omega_r^2\,\delta_{rs}, \tag{3.27}$$

ahol a δ_{rs} szimbólum a Kronecker-deltát jelenti, amelynek értéke $r=s$ esetben 1, egyébként 0, és a $\{\psi\}_r$, $\{\psi\}_s$ vektorok az egységnyi akusztikai modális tömegre, ill. merevségre normált sajátvektorokat jelölik. Ugyanezen összefüggés még tömörebb formában is megjeleníthető:

$$[\Psi]^T[M_a][\Psi] = \lceil I \rfloor \tag{3.28}$$

$$[\Psi]^T[K_a][\Psi] = \lceil \Omega^2 \rfloor \tag{3.29}$$

ahol az $\lceil I \rfloor$ mátrix csak 1-eseket tartalmazó diagonálmátrix és

$$\lceil \Omega^2 \rfloor = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & . & . & . \\ . & . & \omega_i^2 & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

a sajátértékekből alkotott diagonálmátrix. $[\Psi]$ a fentiek szerint az egységnyi akusztikai modális tömegnek megfelelően normalizált sajátvektorok alkotta módusmátrix:

$$[\Psi] \equiv \left[\begin{Bmatrix} \\ \psi \\ \\ \end{Bmatrix}_1 \dots \begin{Bmatrix} \\ \psi \\ \\ \end{Bmatrix}_r \dots \begin{Bmatrix} \\ \psi \\ \\ \end{Bmatrix}_N \right] \tag{3.30}$$

Most visszatérünk a megoldani kívánt (3.16) egyenlethez, amelynek megoldását a sajátvektorok lineáris szuperpozíciójával kívánjuk megadni:

$$\{p\} = \sum_{r=1}^{N} a_r \{\psi\}_r = [\Psi]\{a\} \tag{3.31}$$

(3.31)-et (3.16)-ba helyettesítve és mindkét oldalt a módusmátrix transzponáltjával balról megszorozva adódik:

$$\left[[\Psi]^T [K_a] [\Psi] - \omega^2 [\Psi]^T [M_a][\Psi] \right]\{a\} = [\Psi]^T \{\dot{Q}\} \tag{3.32}$$

A (3.17) és (3.18) összefüggések alapján a bal oldal egyetlen diagonálmátrixszá degradálódik, melynek átlójában a sajátfrekvenciák és a „futó” frekvencia négyzetének $\omega_r^2 - \omega^2$ különbségei szerepelnek:

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \omega_2^2 - \omega^2 & . & . & . \\ . & . & \omega_i^2 - \omega^2 & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & \omega_N^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \\ \\ a \\ \\ \\ \end{Bmatrix} = [\Psi]^T \{\dot{Q}\}$$

Ez azt jelenti, hogy az eredetileg N ismeretlen tartalmazó, N darabból álló lineáris egyenletrendszer N darab egyismeretlenes egyenletre bomlik szét. Az a súlyozó tényezők így már könnyen meghatározhatók:

$$a_r = \frac{\{\psi\}_r^T \{\dot{Q}\}}{\omega_r^2 - \omega^2} \tag{3.33}$$

és (3.31)-ra visszatérve megkapjuk a gerjesztett válaszfüggvényt a teljes modell minden egyes rácspontjára:

$$\{p\} = \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2} \{\psi\}_r^T \{\dot{Q}\} \{\psi\}_r \tag{3.34}$$

Kapott eredményünk a folytonos akusztikai rendszerekre érvényes (3.14) egyenlet diszkrét rendszerre vonatkozó, fontos analóg párja, és tartalma is hasonló: egy zárt akusztikai rendszer válasza a rendszer sajátvektorainak lineáris szuperpozíciójával állítható elő. A válasz most is egyenesen arányos a gerjesztés (térfogatgyorsulás) vektorával és fordított arányban áll a sajátfrekvenciák és a számítási frekvencia négyzetének különbségével. Ha a számítás frekvenciája minden határon túl közeledik egy sajátfrekvenciához (rezonancia), akkor a rendszer válasza végtelenhez tart, ami itt is a rendszer csillapítatlanságának következménye.

A lehető legpontosabb eredmények érdekében a szummázásnak – elvben – az összes szabadságfokok N számának megfelelő sajátvektorig el kell mennie. Amennyiben azonban egy n-edik módustól kezdve a sajátfrekvenciák értéke már jóval meghaladja a vizsgálni kívánt frekvenciatartomány felső határát, a (3.33)egyenlet nevezői mindenképpen nagyok és ezáltal a súlyozó tényezők kicsik lesznek, ezért ezek a nagyfrekvenciás módusok már nem fogják számottevően befolyásolni az eredményt. A tapasztalat azt mutatja, hogy a szummázást (sőt azt megelőzően már a módusok meghatározni kívánt számát és így a módusmátrix oszlopainak számát is) jóval kisebbre lehet választani, ami hatalmas számítókapacitás-megtakarítást eredményez. A gyakorlatban végzett akusztikai végeselem számítások ezért a legtöbb esetben csak néhány módus kiszámítására és az ezekkel végzett, (3.32) egyenlet szerinti transzformációval redukált probléma megoldására szorítkoznak.

3.3. Módusok extrakciója kísérleti móduselemzéssel

Az eddig ismertetett számítási módszerek a tervezés fázisában, ill. akkor használatosak, ha a vizsgálandó rendszeren valamilyen oknál fogva nem lehet méréseket végezni. A számítás minden esetben véges pontosságú és számos tényezőt nem tud figyelembe venni, ezért a termékfejlesztés egy bizonyos pontján szükséges lehet a modellek megfelelőségét valóságos rendszeren, általában egy prototípuson végzett kísérletekkel igazolni.

Szemben a mechanikai rendszerekkel, ahol a tömegekből és rugókból alkotott modellek viszonylag széles körben alkalmazhatók[1], általános akusztikai rendszerek móduselemzése során csak a legritkább esetben van módunk az akusztikai tömeg- és merevségmátrix elemeit külön meghatározni. A rendszert valamilyen módon gerjesztve azonban számos pontban megmérhetjük a választ és átviteli függvényeket határozhatunk meg a bemenő és kimenő pontok között a valós frekvencia függvényében. A kísérleti móduselemzés módszere ezen átviteli függvényekből határozza meg a rendszer sajátfrekvenciáit és módusalakjait, azaz a modális modellt. Ebben a fejezetben a kísérleti mechanikai móduselemzés elméleti eszköztárát [107] [108], [111] akusztikai rendszerekre adaptáljuk és a kísérleti akusztikai móduselemzés (a továbbiakban: K-AME) gyakorlati aspektusait tárgyaljuk.

3.3.1. A kísérleti akusztikai móduselemzés elvi alapjai

Tekintsünk egy ideálisan merev vagy véges impedanciájú felületekkel határolt teret, melyet tetszőleges számú pontban elhelyezkedő, ideálisnak tekintett akusztikai monopólus gerjeszt! E rendszer diszkrét alapegyenletét a (3.16) összefüggés adja meg, amelyben a p és Q üzemi változók eddig szinuszos jelek amplitúdóját jelölték. Térjünk át az egyenlet időfüggő

$$[M_a]\ddot{p}(t)+[K_a]p(t)=\{\dot{Q}(t)\} \tag{3.35}$$

alakjára és – zérus kezdeti állapotokat feltéve – vegyük mindkét oldal Laplace-transzformáltját:

$$\left[s^2[M_a]+[K_a]\right]\{P(s)\}=\{sQ(s)\} \tag{3.36}$$

A bemenet és kimenet vektorainak kapcsolatát együttesen egy $[B(s)]$ jelű, a komplex frekvenciától függő rendszermátrixban foglalhatjuk össze:

[1] Az utóbbi időben, elsősorban az autóiparban egyre szélesebb körben alkalmaznak soktest dinamikai problémák megoldására alkalmas számítási módszereket és programcsomagokat.

$$\left[B(s)\right]\{P(s)\}=\{sQ(s)\} \tag{3.37}$$

A rendszermátrix inverze a $H(s)$ transzfer mátrix:

$$\begin{aligned}\{P(s)\}&=\left[B(s)\right]^{-1}\{sQ(s)\}=\frac{\left(\left[B(s)\right]\right)^{A}}{\left\|\left[B(s)\right]\right\|}\{sQ(s)\}\\&=\left[H(s)\right]\{sQ(s)\}=\left[H(s)\right]\{sQ(s)\}\end{aligned} \tag{3.38}$$

Ez az összefüggés egy s faktortól eltekintve teljes formai analógiában van a diszkrét mechanikai rendszereket Laplace-tartományban leíró

$$x(s)=H(s)F(s) \tag{3.39}$$

egyenlettel, ami a mechanikai móduselemzés szakirodalmából [108], [111] jól ismert módon résztörteket tartalmazó sorba fejthető:

$$H(s)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{R_r\{\Psi\}_i\{\Psi\}_i^T}{s-\lambda_i}+\frac{R_r^*\{\Psi\}_i^*\{\Psi\}_i^{*T}}{s-\lambda_i^*}\right) \tag{3.40}$$

ahol R_r a sorfejtés reziduumát jelöli. s-t $j\omega$-val helyettesítve és a (3.38) összefüggés utolsó alakját alkalmazva nyilvánvaló, hogy az akusztikai rendszer modális paramétereit olyan frekvenciaátviteli függvények méréséből nyerhetjük, melyeket ismert térfogatsebességű gerjesztő források és hangnyomást mérő mikrofonok segítségével végzünk. Akusztikai fogalmainkat alkalmazva ez azt jelenti, hogy a hangtér transzfer akusztikai impedancia mátrixát kell meghatároznunk, melynek elemei

$$Z_{a_{re}}(\omega)=\frac{p(\omega)}{q(\omega)}=j\omega\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(rez_{re})_i}{j\omega-\lambda_i}+\frac{(rez_{re})_i^*}{j\omega-\lambda_i^*}\right) \tag{3.41}$$

(3.38) és (3.41) teljes analógiában van a (3.39) és (3.40) egyenlettel, így nyilvánvaló, hogy a vizsgált akusztikai rendszer modális paramétereit a mechanikai móduselemzésre kifejlesztett szoftvereszközökkel és a változók megfelelő helyettesítésével könnyen megkaphatjuk.

3.3.2. Kísérleti eszközök és technikák

A K-AME legfőbb nehézségét a megfelelő gerjesztő források biztosítása jelenti. A fent leírt módszer alkalmazásának elvben elengedhetetlen feltétele, hogy a mérések ideális monopólust képező gerjesztő forrással történjenek. A gyakorlati problémák – járművek belső terének zavaró, búgó hangjai, kis és közepes termek sajáthangjai, stb. – legnagyobb része az alacsony frekvenciák tartományába esik. Megfelelően kisméretű, ugyanakkor kellő forráserősségű kisfrekvenciás forrást készíteni azonban nehéz, és további problémát jelent a forrás térfogatsebességének, mint a rendszer bemenő jelének mérése.

A probléma megoldása többféle módon is lehetséges, melyeket a 3.3 ábrán mutatunk be. A térfogatsebességet a 3.3.a ábra szerint a hangszórómembrán kitérésének méréséből származtathatjuk:

$$q=\frac{dV}{dt}=\frac{A\,dx}{dt}=Av\text{ , ill. }q(\omega)=A\frac{a(\omega)}{j\omega} \tag{3.42}$$

A sebességgel arányos jelet lézeres sebességmérő segítségével a méréseket megelőző kalibrálási lépésben, vagy a hangszóró membránjára ragasztott kisméretű gyorsulásérzékelő segítségével mérés közben állíthatjuk elő. (Ez utóbbi jobb megoldást nyújt, mert a hangszórót terhelő sugárzási impedancia esetleges jelentős megnövekedése esetén is helyes referenciajelet szolgáltat.)

Hangnyomást mérő mikrofon segítségével is végezhetünk kalibrációt: vagy a 3.3.b. ábra szerint egy hangszóró elé helyezett üregben előzetesen, vagy zárt hangsugárzó alkalmazása esetén a membrán mögötti üregben elhelyezett mikrofonnal (ld. 3.2.c.) mérés közben monitorozhatjuk a hangnyomást, melyből a

$$p(\omega) = q(\omega)\frac{\rho c_0^2}{j\omega V} = const\frac{v(\omega)}{j\omega} = const\, x(\omega) \qquad (3.43)$$

összefüggés szerint a hangszórómembrán kitérésével arányos jelet kaphatunk. A 3.4. ábrán egy ilyen hangszórót és az általa szolgáltatott kétféle kalibrációs függvényt mutatjuk be.

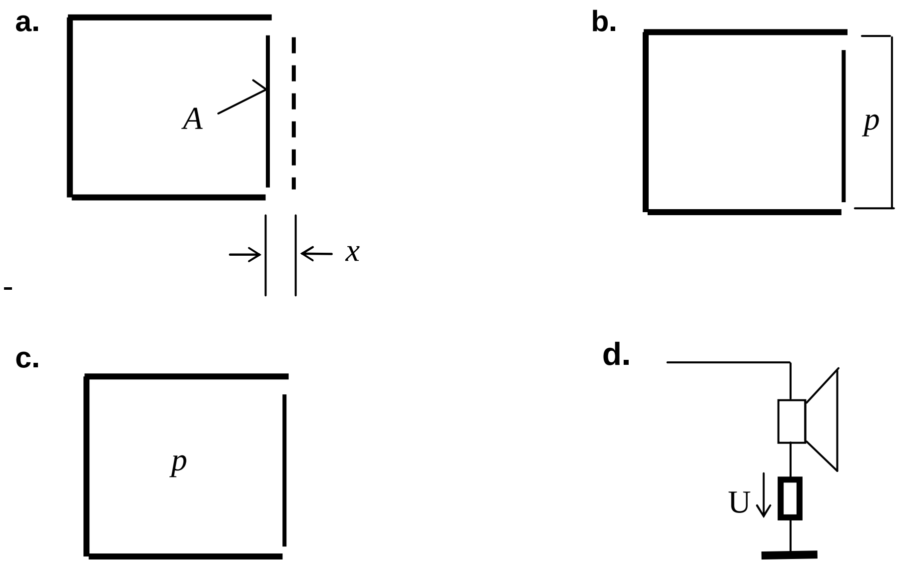
A legegyszerűbb és a gyakorlat szerint kielégítő pontosságot nyújtó módszer a 3.3.d. ábra szerinti, melyben a monitorozást a hangszóró áramával végezzük, pl. a lengőtekerccsel sorba kötött kis ellenálláson eső feszültség mérésével. Az összefüggés a dinamikus hangszóró alapösszefüggéseinek [17] alkalmazásával

$$f(\omega) = B\,l\,I(\omega) = m\,a(\omega) = m\frac{\dot{q}(\omega)}{A} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}(\omega) = const\, I(\omega) \qquad (3.44)$$

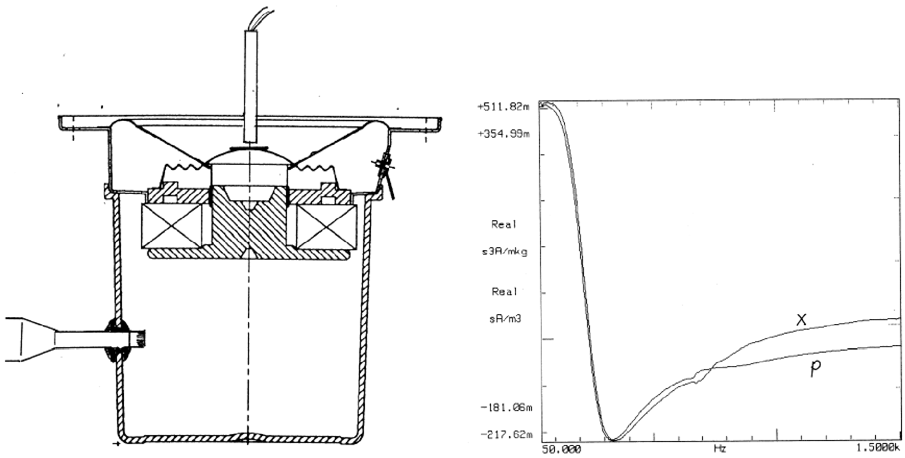
Megjegyezzük még, hogy részben a fenti módszerek valamelyikével, részben a kétmikrofonos intenzitásmérés elvének alkalmazásával működő, kalibrált mérőforrások ma már kereskedelmi forgalomban, műszergyártó cégektől is beszerezhetők [126].

Számos akusztikai móduselemzés [190] tapasztalatait összefoglalva az alábbi javaslatok és tanácsok adhatók:

- a méréssorozat megkezdése előtt analitikusan vagy numerikus módszerek alkalmazásával célszerű becslést végezni a várható módusokról, hogy a gerjesztés és a válaszmikrofonok megfelelő helyekre kerüljenek;
- a gerjesztést biztosító forrás(oka)t lehetőleg a hangtér valamelyik sarkába, de legalábbis az élek közelébe célszerű elhelyezni, hogy ezáltal a lehető legtöbb módus gerjeszthető legyen;
- az átviteli függvény mátrix válaszjeleit szolgáltató mikrofonokat a végeselem módszerek „ökölszabályának” megfelelő, egymástól a $d<\lambda/6$ szabályt kielégítő távolságra kell elhelyezni;
- elsősorban nem jó minőségű, hanem a lehető legnagyobb számú mérőmikrofon alkalmazására van szükség. Ennek oka az, hogy a mérést viszonylag rövid időn belül, azonos fizikai állapotban (hőmérséklet, környezeti nyomás, változatlan mérendő rendszer és határfelületek) levő rendszeren kell elvégezni, hogy a frekvenciaátviteli mátrix elemei konzisztensek legyenek.



***3.3. ábra:** Kísérleti akusztikai móduselemzésre szolgáló zárt hangsugárzók kalibrálásának elvi lehetőségei*



***3.4. ábra:** A 3.3.a. és 3.3.c. ábra szerinti térfogatsebesség monitorozás megvalósítása és a kétféle módon nyert kalibrációs görbék összehasonlítása*

3.4. A csillapítás figyelembe vétele akusztikai rendszerekben

Energiaelnyelési folyamatok – a mechanikaiakhoz hasonlóan – akusztikai rendszerekben is mindig jelen vannak, ezért az itt fellépő disszipációs folyamatok leírásához is csillapítási paramétereket kell bevezetnünk. Amennyiben a vizsgált rendszerek méretei a néhányszor tíz métert nem haladják meg és a vizsgálati frekvencia a hallható frekvenciasáv alsó részébe esik, a levegő molekuláris csillapítása elhanyagolható, és ilyenkor csak a hanghullámok és a hangteret körülvevő, vagy abba benyomuló mechanikai elemek okozta energiaelnyelést kell figyelembe vennünk. Ezen kölcsönhatások egy része valódi energiadisszipációs folyamat, amikor a hanghullám mechanikai energiája a porózus anyagok egymással összefüggő kis csatornácskáiban kialakuló súrlódások következtében hővé alakul [68]-[71]. Az akusztikai rendszer szempontjából azonban csillapításnak kell tekintenünk a rendszerből mechanikai energia formájában elvezetett, illetve hang formájában elsugárzott és ezáltal a vizsgált akusztikai rendszerből szintén eltávozó energia-komponenseket is.

Az akusztikai csillapítás figyelembe vételére a legegyszerűbb (bár korántsem minden körülmények között megfelelő) eljárás a specifikus akusztikai impedancia előírása a hangelnyelést képviselő anyag vagy szerkezet felületén. A jellemezni kívánt anyag felületén kialakuló hangnyomás és a felületre merőleges részecskesebesség komplex amplitúdóinak (általában szintén komplex) hányadosát adjuk meg teljesítendő peremfeltételként, mérés vagy számítás alapján:

$$z_n = \frac{p}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \tag{3.45}$$

Az így megadott mennyiséget *felületi normál impedanciának* nevezzük. Egy merev felület felületi normál impedanciája elvben végtelen értékű. A nevezőben szereplő vektoriális mennyiségek kezelése nehézséget okozhat, ezért célszerűbb az impedancia reciprokával, a *felületi normál admittanciával* dolgozni:

$$A_n = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{p} \tag{3.46}$$

Mind a felületi normál impedancia, mind az admittancia szigorúan véve csak merőlegesen beeső hullám esetén lenne alkalmazható és csak egy adott pontra érvényes, mert nem veszi figyelembe a vizsgált pont környezetének befolyásoló hatását. Az ilyen hangelnyelőt – amikor tehát az anyagban laterálisan vagy mélységében terjedő hullámokat figyelmen kívül hagyjuk – *helyileg reagáló* anyagnak nevezzük, szemben a *teljes terjedelmében reagáló* anyagokkal és szerkezetekkel[2], ahol a hangelnyelőben tovaterjedő hullámok nem elhanyagolhatók.

Az akusztikai végeselem módszer származtatása során (ld. az F3. Függelékben) a diszkretizálás a Helmholtz-egyenlet gyenge formáján történik (F.7) amelyben a normál felületi admittanciával jellemzett S_3 felületszakaszt egy

$$j\omega\rho \iint_{S_3} w \overline{A}_n \tilde{p} \, d\overrightarrow{A}$$

alakú integrál képviseli. Ha a csillapítást figyelembe akarjuk venni, akkor ezt az integrált nem hanyagolhatjuk el. Az alkalmazandó diszkretizáló lépések igen hasonlóak az akusztikai tömeg- és merevségmátrix származtatásához, és végeredményben egy újabb mátrix bevezetését eredményezik, ami az (F.18) egyenlet

$$\left[[K_a] - j\omega [C_a] - \omega^2 [M_a] \right] \{p\} = - j\omega\rho \{G\} \tag{3.47}$$

alakú kiegészítéséhez vezet.

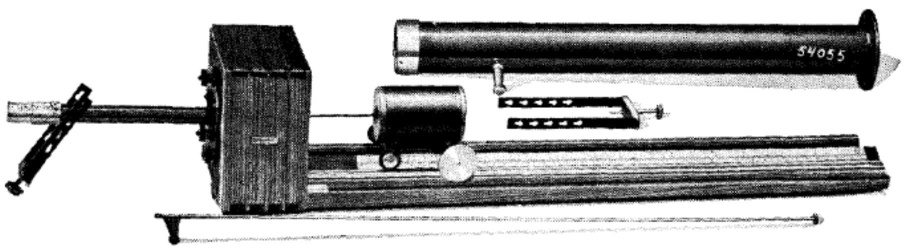
A $[C_a]$ mátrix – egy előjeltől eltekintve – ugyanolyan formában jelenik meg, mint a mechanikai rendszerekben feltételezett viszkózus (a sebességgel arányos) csillapítás. Amíg azonban mechanikai rendszerekben több-kevesebb joggal feltételezhetjük, hogy a csillapítás térbeli eloszlása a tömeg- és merevségeloszlással arányos, akusztikai rendszerekben ez nem tehető meg, hiszen az akusztikai tereket alkotó szabadságfokok döntő többsége nem a teret határoló felületeken, hanem a terek

[2] A *locally reacting / bulk reacting* kifejezések tükörfordítása.

belsejében helyezkedik el. A proporcionális csillapítás feltételezése ezért akusztikai rendszerekben csak ritkán helytálló.

3.5. Akusztikai módusok kísérleti extrakciójának specifikus problémái és jellemzői

3.5.1. Egydimenziós hullámvezetőben kialakuló módusok különféle csillapítások esetén



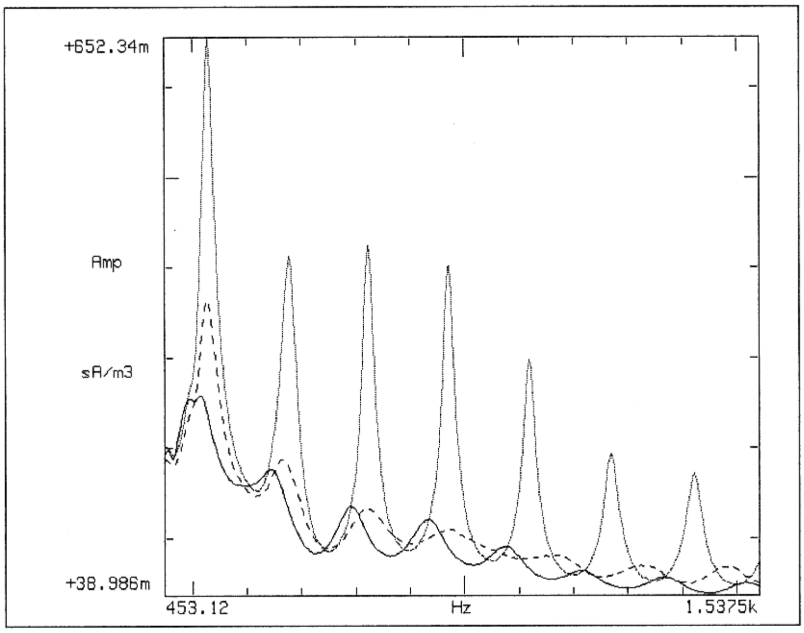
3.5. ábra: *Brüel & Kjær gyártmányú impedanciacső v. Kundt-cső*

Az egydimenziós hullámterjedés vizsgálatára szolgáló impedanciacső vagy Kundt-cső gyakran használt akusztikai mérőeszköz. A 3.5. ábrán bemutatott, B&K 4002 típusú impedanciacsőben különféle hangelnyelő anyagok behelyezése mellett kísérleteket végeztünk akusztikai módusok vizsgálatára. A mérésekhez nem a berendezés szokásos üzemmódját alkalmaztuk, hanem szélessávú gerjesztés mellett a hangtérbe helyezett kisméretű, egyenletes frekvenciaátvitelű mérőmikrofont helyezve egymástól 3 cm távolságban felvett mérőpontokban tapogattuk le a hangteret és vettünk fel frekvenciaátviteli függvényeket. A kapott átlagos frekvenciaátviteli függvényeket háromféle hangelnyelő elrendezés mellett a 3.6. ábra mutatja. A csillapítatlan átviteli függvény éles lokális maximumai a csillapítóanyag behelyezése után ellapulnak és a maximum kisebb frekvenciák irányába tolódik, ami a csillapítás jól ismert hatása. A csillapítatlan és a cső egyik végére koncentrált hangelnyelő anyaggal kapott módusalak Nyquist-diagramja (ld. a 3.7.a. és b. ábrán) jó összhangban van az egydimenziós rendszer 3.1.1. szakaszban adott elemzésével. (A (3.7) ábra bal oldalán a $\{\Psi\}$ módusalakokat az idő- és térbeli függés jobb szemléltetésére az $e^{j2\pi t/T}$ fazor $t = kT/16,\ k = 0,1,2,...15$ értékeinek megfelelően ábrázoljuk, a jobb oldali diagramon pedig a módusalakok valós és képzetes értékpárjait Nyquist-diagramban mutatjuk be a hullámvezető x-tengelye mentén felvett pontokra.)

A cső mentén egyenletesen elosztott hangelnyelő csík még jobban csillapított frekvenciaátviteli függvényt eredményez, módusalakja azonban nem komplex, hanem jó közelítéssel kollineáris Nyquist-görbét mutat, amit ismét állóhullám reprezentál (3.7.c. ábra). A jelenség magyarázata az, hogy a cső mentén elosztott hangelnyelőt tartalmazó rendszer rendszermátrixában a csillapítást képviselő tagok – most kivételesen – térben egyenletesen, azaz az akusztikai tömegek és merevségek arányában helyezkednek el:

$$[C_a] \cong \alpha[M_a] + \beta[K_a] \tag{3.48}$$

Az ilyen, proporcionálisnak nevezett csillapítással bíró rendszerek módusalakjai ugyancsak kollineárisak [108]. Az akusztikai rendszerek komplex módusai kialakulásának oka tehát nem a csillapítás jelenléte, hanem a csillapítás improporcionális eloszlása. Ez a helyzet azonban a legtöbb, valós gyakorlatban előforduló akusztikai rendszerben fennáll, ami nagyon megnehezíti az akusztikai rendszerek módusainak azonosítását.

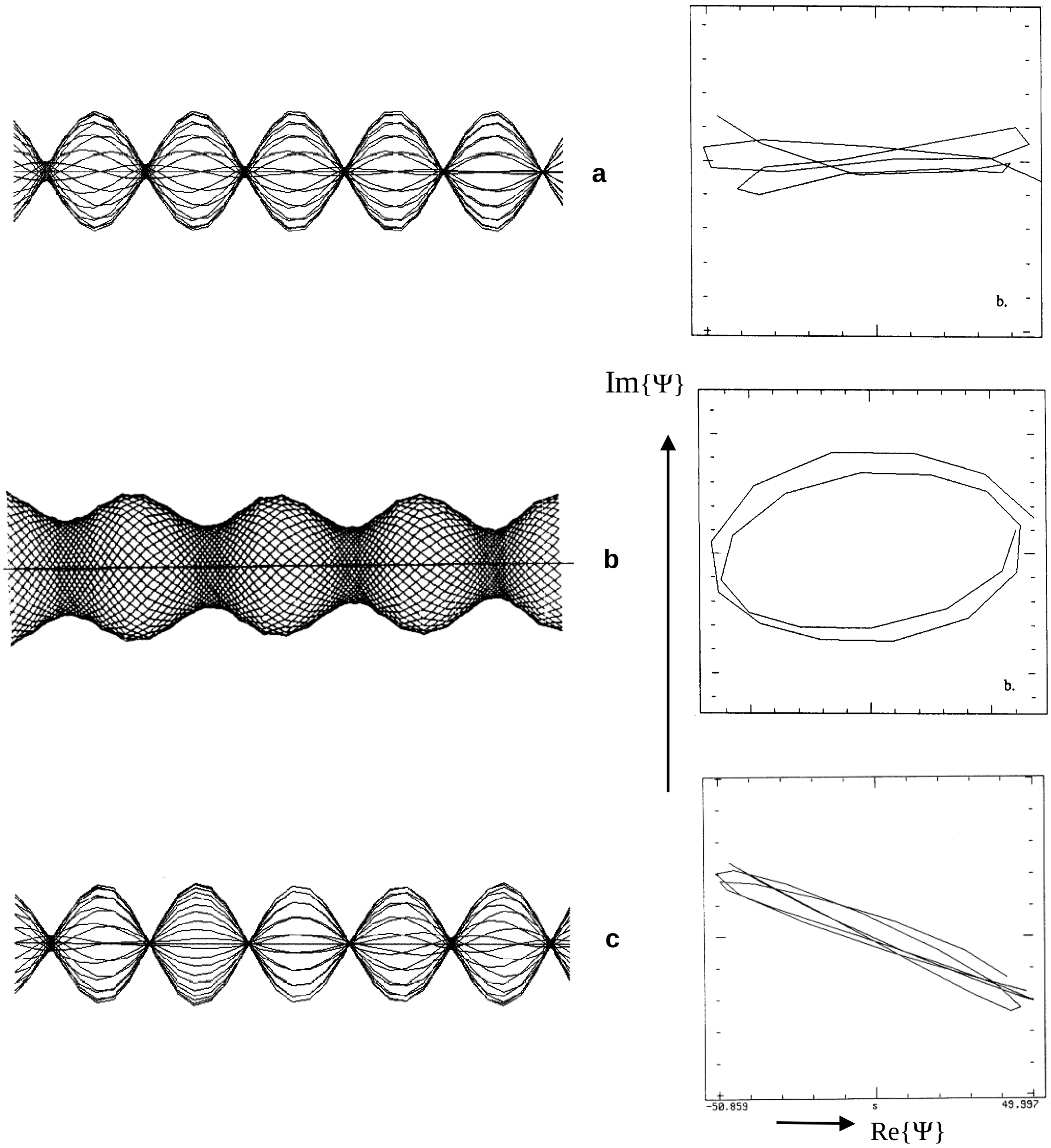


***3.6. ábra:** Átlagos frekvenciaátviteli függvények különféle hangelnyelő elrendezések mellett.*
***a:** merev lezárás, **b:** 5 cm vtg. üveggyapot tárcsa a hosszú mérőcső végén;*
***c:** hangelnyelő poliuretánhab csík végig az impedanciacső mentén*

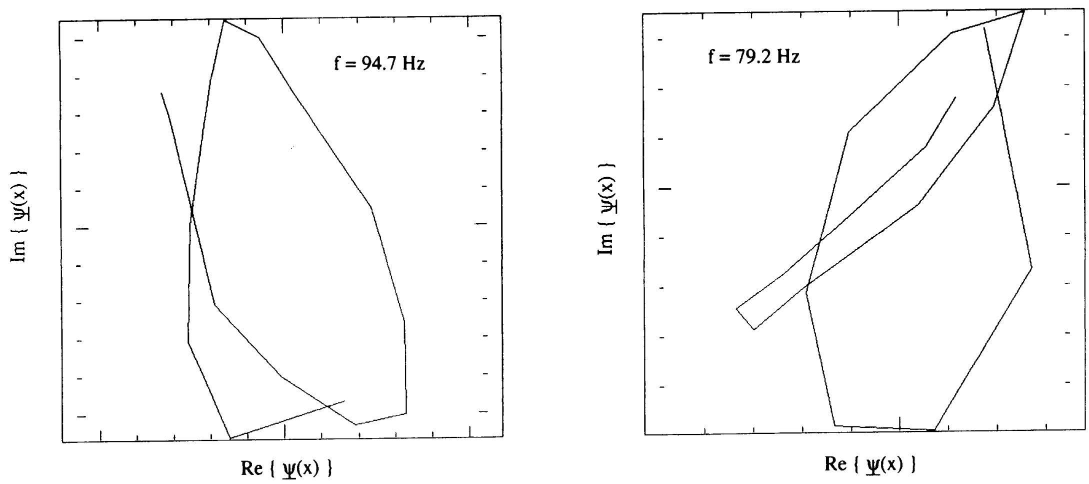
3.5.2. Kisrepülőgép utasterének móduselemzése

A destruktív hulláminterferenciák elvén alapuló aktív zajcsökkentés technikája közel 80 éve ismert [170], ennek ellenére mindmáig nem terjedt el az ipari alkalmazások szélesebb körében. Egy európai kutatási projekt keretében [247] repülőgépeken telepített aktív rendszerek optimalizálásának érdekében végeztek kiterjedt vizsgálatokat. Ennek keretében méréseket végeztünk egy Fokker 70-es repülőgépen és alkalmunk volt egy Dornier 228-as típusú kisrepülőgép belsejében végzett akusztikai méréssorozat kiértékelésére is, melyek célja az utastér hangterének, valamint a géptörzs és az utastér közötti rezgésakusztikai csatolások feltárása volt.

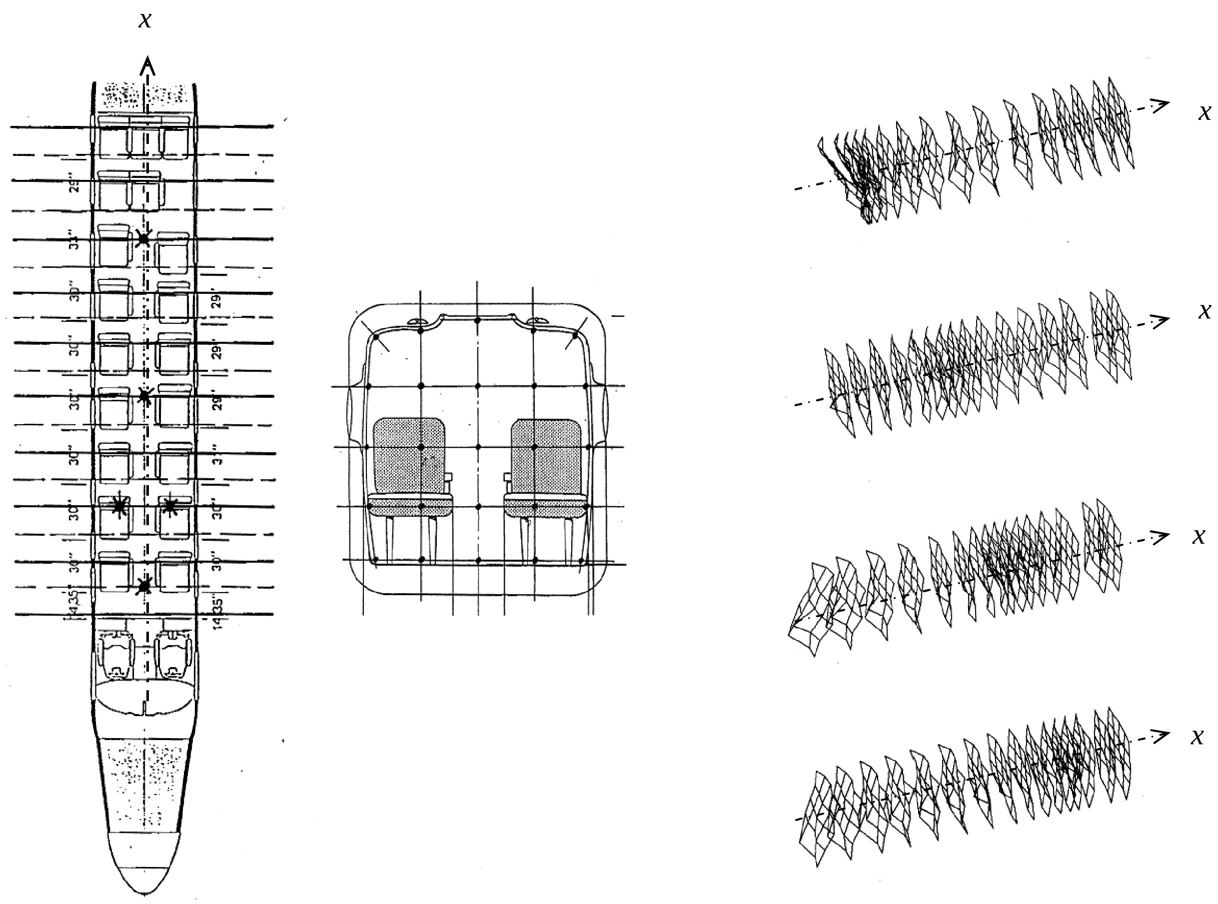
A Fokker gép utasterének méretei és az ülések erős csillapítása miatt csak olyan frekvenciatartományban (50 Hz alatt) sikerült módusokat kinyernünk, amelyek a sugárhajtású gépek zajának frekvenciaartományában nem relevánsak. A mérési eredmények kiértékelése a Dornier gépnél is nagy nehézséget okozott, mindössze a 25 és 100 Hz közötti tartományban sikerült néhány sajátfrekvenciát azonosítani. Két sajátfrekvencia módusalakját a 3.8. ábrán, a mérőpontokat és a 94.7 Hz-es sajátfrekvencia módusalakját négy fázisban a 3.9. ábrán mutatjuk be. (A hangteret az utastér elején és végén elhelyezett hangszóró gerjesztette, a választ az utastéren végigvonultatott 5×5-ös mikrofontömb szolgáltatta. Az átviteli függvény mátrixból mechanikai mérésekre feljesztett szoftvercsomag segítségével azonosítottunk módusokat.) Jól látható, hogy a térben kialakuló módusok komplexek, ennek megfelelően haladóhullám jellegűek.



3.7. ábra: *A 3.6. ábra szerinti hangelnyelő elrendezések mért módusalakjai. {Ψ} módusvektorok a hely függvényében (bal oldalon) és Nyquist-diagramban (jobb oldalon)*



3.8. ábra: *A 3.9. ábrán bemutatott repülőgép utastér tengelyében mért módusalakok Nyquist-diagramja*



3.9. ábra: *Mérőpontok egy Dornier 228 típ. kisrepülőgép utasterében és egy jellegzetes módusalak (94,7 Hz) négy fázisa*

3.6. Új tudományos eredmények összefoglalása és tézisek

II. tézíscsoport: Akusztikai módusok extrakciója és szuperpozíciója a mechanikai és akusztikai rendszerek folytonos és diszkrét modelljének analógiája alapján

Az akusztikai rendszerek leírása a módusok és sajátfrekvenciák meghatározásán keresztül egyszerűbben és szemléletesebben adható meg, mintha a rendszer folytonos vagy diszkrét alapegyenleteit oldanánk meg. Egyszerű, szabályos geometriájú rendszerek esetében ez analitikus módszerrel, gyors, közelítő számítással is történhet, szabálytalan geometriájú terekben azonban csak numerikus módszerrel vagy kísérletesen végezhető el. Kutatásaim célja a modális szuperpozíció és extrakció mechanikai rendszerekre gyakran és rutinszerűen alkalmazott numerikus módszereinek és eszközeinek akusztikai célokra történő adaptációja, a kétféle megközelítés azonosságainak és eltéréseinek vizsgálata, az akusztikai móduselemzés speciális eszközeinek kifejlesztése és az eredményeket befolyásoló paraméterek vizsgálata.

II.1. tézis: *Az akusztikai rendszereket leíró diszkrét alapegyenlet megoldásával bebizonyítottam, hogy egy zárt akusztikai rendszer válasza diszkrét megközelítésben is a rendszer sajátvektorainak lineáris szuperpozíciójával állítható elő.*

Megmutattam, hogy a folytonos akusztikai rendszerekre

$$p(\vec{r}) = g(\vec{r},\vec{r}_0,\omega) = \sum_m \frac{\dot{q}}{\Lambda_m^2\left(k_m^2 - k^2\right)} \psi_m(\vec{r})\ \psi_m(\vec{r}_0) \qquad (3.14)$$

alakban érvényes modális sorfejtés vagy módus-szuperpozíció a

$$\{p\} = \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2} \{\psi\}_r^T \{\dot{Q}\} \{\psi\}_r \qquad (3.34)$$

összefüggés szerint diszkrét akusztikai rendszerekre is érvényben van. A $\{\Psi\}_r$ és $\{\Psi\}_s$ vektorok a

$$\{\Psi\}_r^T [M_a] \{\Psi\}_s = 0 \qquad (3.23)$$

összefüggés szerint súlyozottan ortogonálisak (feltéve, hogy $r \neq s$), ahol a súlyozási tényező az $[M_a]$ akusztikai tömegmátrix. (A fenti összefüggésekben g a szabadtéri Green-függvényt, $\vec{r}$ a hangnyomás vizsgálati pontját, Λ a módusok frekvenciafüggő súlytényezőjét, k a hullámszámot és a ψ folytonos függvények, ill. a $\{\Psi\}$ vektorok a módusalakokat jelölik.)

Tapasztalat szerint a rendszerválasz gyakorlati igényeket kielégítő pontosságú meghatározásához nem szükséges az összegzést a rendszer összes meghatározható (tehát a szabadságfokokkal egyenlő számosságú) módusáig kiterjeszteni. Ez az a meghatározó tényező, ami jelentősen csökkenti a gyakorlati feladatok megoldásának számításigényét.

II.2. tézis: *Megmutattam, hogy az akusztikai rendszerek modális paraméterei a hangtér akusztikai transzfer impedancia mátrixából határozhatók meg. A tisztán akusztikai rendszerek módusainak meghatározása a mechanikai móduselemzéshez kifejlesztett szoftvereszközökkel lényeges módosítások nélkül elvégezhető.*

Az akusztikai transzfer impedanciákat ismert térfogatsebességű gerjesztés hatására kialakuló hangnyomások mérésével határozzuk meg. Az *e*-edik pontban alkalmazott gerjesztés és az *r*-edik pontban mért hangnyomás válasz közötti frekvenciaátviteli függvény a $[Z_a]$ mátrix *r*-edik sorában és *e*-edik oszlopában levő elemet adja meg, ami a

$$Z_{a_{re}}(\omega) = \frac{p(\omega)}{q(\omega)} = j\omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(rez_{re})_i}{j\omega - \lambda_i} + \frac{(rez_{re})_i^*}{j\omega - \lambda_i^*} \right) \tag{3.41}$$

összefüggés szerinti résztörtekre bontható. A mechanikai móduselemzés eszköztárát alkalmazva a törtek nevezőjében levő λ_i értékek az *i*-edik módus sajátfrekvenciáját, a számlálókban szereplő reziduumok a megfelelő módusalakokat szolgáltatják.

A kísérleti munka szempontjából a legfőbb problémát az ismert térfogatsebességű, kellő hangteljesítménnyel rendelkező, ugyanakkor a hangteret jelenlétével számottevően nem befolyásoló hangforrás biztosítása jelenti. A feladat megoldására kisméretű, zárt dobozos, megfelelő frekvenciamenettel rendelkező elektrodinamikus hangsugárzók alkalmazását javasoltam. A zárt dobozban kialakuló hangnyomás méréséből a membrán kitérésével arányos jelet, a hangszóró áramának mérésével térfogatgyorsulással arányos jelet állíthatunk elő, melyekből a térfogatsebesség könnyen származtatható.

II.3. tézis: *Kísérletekkel igazoltam, hogy az akusztikai rendszerek módusalakjainak komplex voltát az akusztikai csillapítások térben egyenetlen eloszlása (a csillapítás improporcionalitása) okozza.*

Móduselemzési kísérleteket végeztem laboratóriumi körülmények között különböző módokon csillapított egydimenziós hullámvezetőn. Kimutattam, hogy az akusztikai csillapítás egyenletes eloszlása Nyquist-diagramon komplex, de kollineáris módusalakot, a módusalakok térbeli megjelenítése állóhullámot eredményez. A határoló felületeken koncentrálódó akusztikai csillapítás esetén – ami a valóságos akusztikai rendszerek túlnyomó többségében fennáll – a Nyquist-diagram komplex görbét, a móduselemző rendszer haladó hullámot mutat.

A járműveken, két repülőgép utasterében és egyéb, valóságos rendszereken végzett móduselemzési vizsgálatok eredményei a laboratóriumi kísérletek eredményei alapján jól értelmezhetők.

A tézisekkel kapcsolatos publikációk: [186], [189], [190], [194], [196], [198], [200], [210], [214], [216] és [220].

4. fejezet

4. REZGÉSAKUSZTIKAI KÖLCSÖNHATÁSOK SZEREPE BELSŐTÉRI PROBLÉMÁK ESETÉN

A rezgésakusztika körében felmerülő feladatok egy lehetséges csoportosítása szerint belsőtéri és külsőtéri feladatokról beszélünk. Belsőtéri problémának olyan feladatokat nevezünk, amelyeknél egy zárt üregben uralkodó hangtér jellemzőit kívánjuk kapcsolatba hozni az üreget határoló szerkezet rezgésének paramétereivel. A külsőtéri probléma esetében a rezgést végző szerkezet által a környezetben létrehozott hangteret vizsgáljuk a felület kifelé mutató normálisának irányában. A kétféle probléma néha nem választható szét egyértelműen; a gyakorlati feladatok egy részében a hangtér a rezgő szerkezetek belsejében és – a szerkezet technológiai nyílásainak következtében – azon kívül is elemzés tárgyát képezheti.

Egyelőre a belsőtéri problémák körében maradva megállapíthatjuk: az akusztikai tervezés gyakorlatában gyakran adódik olyan feladat, amikor egy összetett rendszer mechanikai és akusztikai elemeinek viselkedését a kétféle részrendszer közötti kölcsönhatások lényeges mértékben befolyásolják. Az üreget határoló falak rezgése az üregben hangot kelt, ugyanakkor az üregbe zárt gáztömeg nyomásingadozása vissza is hat a falak rezgésére, ha azok kellően rugalmasak. Fordított helyzet is lehetséges: egy zárt üregben uralkodó hangnyomás rezgésbe hozza az üreget határoló felületeket, ugyanakkor a felületek rezgése befolyásolja az üreg hangnyomását. A személygépkocsik és repülőgépek utasterei, tehergépkocsik vezetőfülkéje vagy egy fejre helyezett fülhallgató belsejében kialakuló hangtér csak néhány a számtalan lehetséges gyakorlati példa közül. A két részrendszer között fennálló szoros csatolás lehetősége következtében a teljes rendszert csak egységében tekintve, a kölcsönhatások figyelembe vételével lehet pontosan leírni.

A kérdés akkor került először a kutatás gyújtópontjába, amikor az Egyesült Királyságban az első kísérleti szuperszónikus repülőgépek hangrobbanásai ablaktörések sorozatát eredményezték [76]. Az első elemzések ezért az egyik oldalán merev falú üreggel határolt rugalmas rezgő lemez problémáját vizsgálták, kezdetben csak analitikus megközelítésben. A közeg-szerkezet kölcsönhatásokat a modális szuperpozíció módszerével közelítették meg, az elméleti analízist kísérletekkel is igazolták [77], [80], [81], [82]. A későbbiek során a mechanikai rendszerek elemzésére kidolgozott numerikus módszereket is adaptálták akusztikai feladatokra, a két megközelítés hasonlósága a csatolt rezgés-akusztikai problémák közös numerikus kezelését is lehetővé tette. A probléma fontosságából következően ma már nagyon sok közeg-szerkezet kölcsönhatási modell és technika ismeretes. Külön megemlítendő az alrendszer szintézisnek vagy komponens módus szintézisnek nevezett eljárás[1], amely főként az autóipari fejlesztés igényeinek kielégítésére terjedt el széles körben. Főként erre a terméktípusra jellemző, hogy az új típusokban rendszerint csak néhány elemet változtatnak meg, amelyek viselkedését azután a régi elemekkel összekapcsolva lehet – és kell is – vizsgálni. A tervezési idő jelentősen csökkenthető, ha a teljes rendszert alrendszerekre bontják és az egyes elemek modális paramétereit egyenként határozzák meg, majd egy külön lépésben egyesítik az alrendszereket a teljes rendszer eredő paramétereinek meghatározása érdekében. (A téma irodalmát részletesebben ld. a [112]-[119] forrásokban.)

A jelen értekezés e fejezetében a közeg-szerkezet csatolás problémáját az általánosság szintjén: egy olyan rezgésakusztikai modell segítségével tárgyaljuk, amelyet nem szimmetrikus mátrixok jellemeznek. Kimutatjuk, hogy a mechanikai rendszerek Maxwell-féle, és az akusztikai rendszerek Ljamsev által leírt reciprocitása ebben a modellben sem sérül. Az eredményekből a csatolt rezgésakusztikai rendszer modális modelljének kísérleti meghatározására és gyakorlati felhasználására vonatkozóan is értékes megállapításokat nyerhetünk.

4.1. Szerkezet-közeg kölcsönhatás analitikus elemzése modális sorfejtéssel

Tekintsünk egy általános feladatot: egy tetszőleges alakú térben nyugalomban levő légnemű közeget (levegőt), melyet vékony lemezekből álló, rugalmas héjszerkezet vesz körül ([11], 6.4. fejezet). A közegnek a héjszerkezetre gyakorolt dinamikus nyomásváltozása az az ágens, ami a csatolást a közegtől a szerkezet felé létrehozva mozgásba hozza a szerkezetet, és a szerkezet felületre merőleges gyorsulása a ellenkező irányú csatolás létrehozója, ami által a szerkezet viselkedése befolyásolja a közeg terét.

A modális sorfejtés módszerének lényege, hogy a két részrendszert – amelyek egymással az S felület mentén érintkeznek – a csatolás nélküli esetben kialakuló módusokkal jellemezzük. A csatolt rendszert leíró egyenletrendszer (melyben az első sor a mechanikai rendszer p-edik, a második pedig az akusztikai rendszer r-edik módusára vonatkozik)

$$\ddot{x}_p + \omega_p^2 x_p = \frac{S}{\Lambda_p} \sum_r p_r C_{rp} + \frac{F_p}{\Lambda_p} \tag{4.1}$$

$$\ddot{p}_r + \omega_r^2 p_r = -\rho c_0^2 \frac{S}{\Lambda_r} \sum_p \ddot{x}_p C_{rp} + \frac{\rho c_0^2}{\Lambda_r} \dot{Q}_r \tag{4.2}$$

alakú, ahol az általánosított modális erő

$$F_p = \oint_S f(\vec{r}_s)\, \varphi_p(\vec{r}_s)\, dS \, , \tag{4.3}$$

az általánosított modális térfogatgyorsulás

$$\dot{Q}_r = \iiint_V \dot{q}(\vec{r})\, \psi_r(\vec{r})\, dV \, , \tag{4.4}$$

[1] *Substructuring* vagy *Component mode synthesis*

φ_p a mechanikai és ψ_r az akusztikai módusalak, C_{rp} a dimenzió nélküli csatolási tényező:

$$C_{rp} = \frac{1}{S} \oint_S \psi_r(\vec{r}_s)\, \varphi_p(\vec{r}_s)\, dS\,, \tag{4.5}$$

továbbá

$$\Lambda_p = \oint_S m(\vec{r}_S)\, \varphi_p^2(\vec{r}_S) dS \quad \text{és} \quad \Lambda_r = \int_V \psi_r^2(\vec{r})\, dV\,. \tag{4.6}$$

A (4.1) és (4.2) kifejezés valójában kétszer végtelen számú parciális differenciál-egyenletből álló egyenletrendszert jelent, amelyet nyilvánvalóan véges számú egyenletre korlátozva lehet csak megoldani.

További nehézséget okoz, hogy az egyenletek nem szimmetrikusak: az elsőben a kitérés és annak második időbeli deriváltja mellett maga a hangnyomás jelenik meg, míg (4.2)-ben a hangnyomás és annak második deriváltja mellett a jobb oldalon a kitérés második időbeli deriváltját találjuk. Az aszimmetria úgy szüntethető meg, ha a – könnyen mérhető – hangnyomás helyett a sebességpotenciál fogalmát vezetjük be. Egy rotációmentes tér (amilyennek az akusztika alapfeltételezései és nyugalomban levő közeg mellett a hangtérnek is lennie kell) teljes mértékben leírható a $\mathbf{\Phi}$ sebességpotenciállal, melyből mind a hangnyomás, mind a részecskesebesség származtatható:

$$p = -\rho \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial t} \quad \text{és} \quad \vec{v} = \nabla \mathbf{\Phi} \tag{4.7}$$

(4.7) alapján (4.1)-et és (4.2)-t átírva kapjuk:

$$\ddot{x}_p + \omega_p^2 x_p = -\frac{\rho_0 S}{\Lambda_p} \sum_r \dot{\mathbf{\Phi}}_r C_{rp} + \frac{1}{\Lambda_p} F_p \tag{4.8}$$

$$\ddot{\mathbf{\Phi}}_r + \omega_r^2 \mathbf{\Phi}_r = \frac{c_0^2 S}{\Lambda_r} \sum_p \dot{x}_p C_{rp} - \frac{c_0^2}{\Lambda_r} Q_r \tag{4.9}$$

Az (4.8) és (4.9) egyenlet most már teljes szimmetriát mutat a változókban. A csatolást a szerkezeti egyenletben megjelenő, első derivált akusztikai változó, illetve az akusztikai egyenletben ugyanazon helyen szereplő első derivált mechanikai változó reprezentálja. A viszkózus mechanikai csillapítástól eltérően az első derivált ezen a helyen nem energiaelnyelést, hanem a csatolás következtében a mechanikai energia akusztikaivá, illetve az akusztikai energia mechanikaivá való átalakulását képviseli. A csatolásnak ezen formáját Rayleigh után *girosztatikus* csatolásnak nevezzük.

A modális sorfejtés analitikus módszeréből levonható, a közeg-szerkezet kölcsönhatások fizikai tartalmára vonatkozó következtetéseket és a gyakorlati alkalmazás kapcsán szerzett tapasztalatokat az 5. fejezetben tárgyaljuk.

4.2. Szerkezet-közeg kölcsönhatás diszkrét modelljének elemzése

Legyen a numerikus leírás alapjául szolgáló rendszer a 4.1 szakaszban vizsgálttal azonos, azzal az eltéréssel, hogy itt most nem feltétlenül jön létre csatolás a közeget határoló teljes felület mentén, hanem annak csak egy S_b-vel jelölt részén. A rendszer diszkrét elemzéséhez a végeselem módszer alapegyenleteiből indulunk ki, amelyeket a másik részrendszer hatását figyelembe vevő további tagokkal egészítünk ki.

A mechanikai részrendszer (2.2b) egyenletét a csillapítási mátrixszal és a szerkezeti erőgerjesztés mellé felvett, az akusztikai rendszer hangnyomásából eredő terhelési vektorral bővítjük:

$$\left[-\omega^2\left[M_s\right]+j\omega\left[C_s\right]+\left[K_s\right]\right]\{x\}=\{f\}+\left\{l_p\right\} \qquad (4.10)$$

ahol

$$\left\{l_p\right\}=\int_{S_b} p\,dS \qquad (4.11)$$

és az akusztikai rendszertől való megkülönböztetés és a jelölések szimmetriája érdekében a mechanikai rendszerre vonatkozó mátrixokat s indexszel láttuk el.

Az akusztikai problémát a (2.10) akusztikai végeselem alapegyenlet írja le, ahol a térben kialakuló hangnyomást a térfogatgyorsulással leírt akusztikai források mellett a határfelület rezgése is befolyásolja:

$$\left[-\omega^2\left[M_a\right]+j\omega\left[C_a\right]+\left[K_a\right]\right]\{p\}=\rho\{\dot{q}\}+\omega^2\left\{l_a\right\} \qquad (4.12)$$

és

$$\left\{l_a\right\}=\int_{S_b}\rho\, x_n\ dS\ , \qquad (4.13)$$

amelynél x_n a szerkezet határfelületre merőleges kitérése.

(4.10) - (4.13)-at átrendezve és kombinálva a csatolt rezgésakusztikai rendszer eredő alapegyenletét kapjuk:

$$\left[-\omega^2\begin{bmatrix}[M_s] & [0]\\ [M^c] & [M_a]\end{bmatrix}+j\omega\begin{bmatrix}[C_s] & [0]\\ [0] & [C_a]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ p\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}[K_s] & -[K^c]\\ [0] & [K_a]\end{bmatrix}\right]\times$$
$$\times\begin{Bmatrix}\{x\}\\ \{p\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{f\}\\ \rho\{\dot{q}\}\end{Bmatrix} \qquad (4.14)$$

A (4.10) egyenletben szereplő $[M_s]$, $[C_s]$ és $[K_s]$ mátrixok a csatolatlan mechanikai részrendszere vonatkoznak, mintha a szerkezet vákuumban mozogna; az $[M_a]$, $[C_a]$ és $[K_a]$ mátrixok az akusztikai részrendszert úgy tekintik, mintha az üreget mindenütt merev falak határolnák. Az egyenletekben a $[K^c]$ és $[M^c]$ mátrixok hozzák létre a két részrendszer kapcsolatát, amelyek szoros kapcsolatban állnak egymással. A végeselem módszerek származtatásából (ld. [57] és az F1 függelék) levezethetően

$$K_{ij}^c=\int_{s_b}\vec{N}_i\vec{n}\ N_j\ dS \qquad (4.15)$$

$$M_{ji}^c=\int_{s_b}\rho_0\,N_i\ \vec{N}_j\vec{n}\ dS \qquad (4.16)$$

A két csatolási mátrix kapcsolatát ezek alapján az

$$[M^c] = \rho [K^c]^T \tag{4.17}$$

egyenlet adja meg, mely szerint a transzponáláson kívül még egy multiplikatív konstansban is különböznek egymástól.

Az (4.14) egyenlet a csatolt rendszer rezgésakusztikai viselkedésének egy olyan másodrendű modellje, ami a korábban tárgyalt modális modellhez nagyon hasonló. (4.17) alapján azonban világos, hogy a korábbiaktól eltérően egyenletünk nem szimmetrikus, ami még nyilvánvalóbbá válik, ha (4.14) -et tömörebb formába írjuk át:

$$\begin{bmatrix} [A_s] & -[K^c] \\ -\omega^2 [M^c] & [A_a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \rho\{\dot{q}\} \end{Bmatrix} \tag{4.18}$$

ahol

$$[A_s] = [K_s] + j\omega[C_s] - \omega^2 [M_s] \text{ és}$$

$$[A_a] = [K_a] + j\omega[C_a] - \omega^2 [M_a] \tag{4.19}$$

A csatolás következtében az alkotó részrendszerekhez képest megváltoznak az eredő rendszer sajátfrekvenciái és módusalakjai, így a rendszer gerjesztett válaszai is. A változások számos tényezőtől függnek, általános megállapítás így alig tehető. Kétféle, egyszerű csatolt szerkezet-közeg rendszernél a csatolás hatását a 4.3.3. és 6.1. szakaszban elméleti számítással és kísérletileg is vizsgáljuk.

4.3. Szimmetria és reciprocitás rezgésakusztikai rendszerekben

Mind mechanikai, mind akusztikai rendszerekre a reciprocitási tulajdonság jellemző, ami annyit jelent, hogy a rendszert egyik pontján gerjesztve és válaszát egy másik ponton mérve ugyanolyan átvitelt tapasztalhatunk, mint amikor a gerjesztés és válasz helyét felcseréljük. A mechanika reciprocitástételét J.C. Maxwell munkáira szokás visszavezetni, aki 1863-ban mondta ki lineáris villamos hálózatokra [100]. Akusztikai rendszerekre 1860-ban H. von Helmholtz fogalmazta meg elsőként és J. W. Strutt (Lord Rayleigh) pontosította 1873-as előadásában [104], míg rezgésakusztikai rendszerre Lyamshev ismertette 1954-ben [101]. Az általa

$$\left. \frac{p_i}{f_j} \right|_{\dot{q}_i = 0} = \left. \frac{-\ddot{x}_j}{\dot{q}_i} \right|_{f_j = 0} \tag{4.20}$$

alakban felírt reciprocitás érvényességét később Ten Wolde et al [102], Fahy [103] és Norris and Rebinsky [105] is igazolta.

Az egyenlet szavakban úgy fogalmazható meg, hogy egy összetett rezgésakusztikai rendszert a szerkezet j pontján f_j erővel gerjesztve (és közben akusztikai gerjesztést nem alkalmazva) az akusztikai tér i pontjának hangnyomása egységnyi erőre vonatkoztatva ugyanakkora átvitelt eredményez, mintha az i pontban alkalmazott $\dot{q}_i$ térfogatgyorsulás hatására a j pontban (gerjesztő vagy reakcióerőtől mentes esetben) fellépő rezgésgyorsulást mérnénk és egységnyi akusztikai gerjesztésre vonatkoztatnánk. Az egyenlőség további feltétele, hogy az akusztikai és mechanikai beavatkozó és érzékelő elemek azonos iránykarakterisztikákkal rendelkezzenek. Mechanikailag ez azonos irányban elhelyezett, csak a főtengely mentén érzékeny erő- és gyorsulásmérőt, akusztikai részről a legegyszerűbb esetben ideális monopólust és gömbkarakterisztikájú mikrofont feltételez.

Bár első pillanatban nem nyilvánvaló, belátható, hogy a (4.18) egyenlőség teljesíti a reciprocitás (4.20) feltételét. A (4.18) egyenletből, (4.17)-et is felhasználva a

$$\begin{gathered}[A_s]\{x\}-[K^c]\{p\}=\{f\}\\ -\rho\omega^2\left[K^c\right]^T\{x\}+[A_a]\{p\}=\rho\{\dot{q}\}\end{gathered}\tag{4.21}$$

egyenletpár nyerhető, amelyből csak a $\{p\}$ vektor i-edik elemére van szükségünk, amelyet az $\{f\}$ vektor j-edik elemével kívánunk kifejezni, miközben $\dot{q}_i = 0$. Mindezeket figyelembe véve a

$$\left.\frac{p_i}{f_j}\right|_{\dot{q}_i=0}=\left[[A_s]\frac{[K^c]^{T-1}}{\rho\omega^2}[A_a]-[K^c]\right]_{ij}^{-1}\tag{4.22}$$

összefüggést kapjuk a hangnyomás és az erő viszonyára, és hasonló módon az

$$\left.\frac{\ddot{x}_j}{\dot{q}_i}\right|_{f_j=0}=-\left[[A_a]\frac{[K^c]^{-1}}{\rho\omega^2}[A_s]-[K^c]^T\right]_{ji}^{-1}\tag{4.23}$$

egyenletet a gyorsulás és a térfogatgyorsulás kapcsolatára. Ha a csatolatlan rendszerekre vonatkozó mátrixok szimmetrikusak (ami lineáris esetben mindig teljesül), akkor (4.22) és (4.23) jobb oldala – az előjeltől eltekintve – egyenlő, amivel (4.20)-at igazoltuk.

Az (4.18) egyenlet és a belőle levont következtetések jelentősége abban rejlik, hogy megmutatja: a rezgésakusztikai rendszerek reciprocitása akkor is teljesül, ha a rendszert leíró alapegyenlet nem szimmetrikus. Amint az 4.2 szakaszban is kimutattuk, a modell szimmetriájának megléte vagy hiánya nem a rendszer, hanem csak a választott megközelítés sajátja: pl. egy új változó (a leírt megközelítésben a sebességpotenciál) bevezetésével egy analitikus, aszimmetrikus egyenlet-párt szimmetrikussá lehet tenni. Ha a (4.18) egyenlet felírásánál a térfogatgyorsulás, azaz a térfogatsebesség deriváltja helyett a térfogatsebesség integrálját választottuk volna, akkor az egyenletben az ω^2 tényező az akusztikai tömegmátrix mellett jelent volna meg és az egyenlet szimmetrikus lett volna. (Ebben az esetben azonban a móduselemzéshez szükséges másodrendű modellt nem kaptuk volna meg, így a modell további elemzésünk számára használhatatlan lenne.) Míg a tisztán mechanikai vagy akusztikai részrendszerek modellje az üzemi paraméterek választásától függetlenül mindig szimmetrikus, a csatolt modellek esetében a szimmetria az üzemi paraméterek megválasztásától függ, miközben a reciprocitás minden esetben teljesül. A reciprocitás tehát a rezgésakusztikai rendszerek elidegeníthetlen, a szimmetriánál jóval általánosabb karakterisztikuma.

4.3.1. Rezgésakusztikai rendszerek elméleti móduselemzése

Az (4.14) és (4.18) egyenletekből egyértelműen látható, hogy csatolatlan esetben (amikor $[K^c]$ és $[M^c]$ zérus mátrix) az összetett rendszer két, egymástól független és szimmetrikus részből áll, így a teljes rendszer is egy szimmetrikus egyenletrendszerrel jellemezhető. A $p/\dot{q}$ (hangnyomás per térfogatgyorsulás) típusú akusztikai frekvenciaátviteli függvények egyenértékűek az x/f (kitérés per erő) típusú mechanikai átviteli függvényekkel, ezért a csatolatlan akusztikai probléma megoldására – amint azt a 3. fejezetben bemutattuk – ugyanazon paraméter-becslési és módus-dekompozíciós módszerek alkalmasak, amelyeket már hosszú ideje használnak mechanikai rendszerek móduselemzésére. Kérdéses azonban, hogy hogyan módosul a helyzet csatolt rezgésakusztikai rendszerek elemzése esetében.

(4.21) alapján, a $[B]$ rendszermátrixot bevezetve a

$$\begin{bmatrix} [A_s] & -[K^c] \\ -\omega^2[K^c]^T & [A_a]/\rho \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} \tag{4.24}$$

egyenletet kapjuk. A $[B]$ rendszermátrix inverze a $[H]$ transzfer mátrix, ami a – komplex frekvenciatartományban felírt (3.38) egyenlet szerint a

$$[H(s)] = [B(s)]^{-1} = \frac{[B(s)]^A}{\left|[B(s)]\right|} \tag{4.25}$$

alakba írható át és a szerkezeti móduselemzés ismert módszerét alkalmazva a

$$[H(s)] = \frac{[B(s)]^A}{const \prod_{r=1}^{n}(s-\lambda_r)(s-\lambda_r^*)} = \sum_{r=1}^{n}\left[\frac{[A_r]}{(s-\lambda_r)} + \frac{[A_r]^*}{(s-\lambda_r^*)}\right] \tag{4.26}$$

egyenletre vezet, melyben a reziduumok az

$$[A_r] = P_r\left[B(\lambda_r)\right]^A \tag{4.27}$$

egyenletből kaphatók meg (itt P_r egy pólustól függő állandó).

A (4.25) egyenletet $[B(s)]$-sel egyszer jobbról, egyszer balról szorozva a

$$[B(s)]^A[B(s)] = \left|B(s)\right|[I] \tag{4.28}$$

és a

$$[B(s)][B(s)]^A = \left|B(s)\right|[I] \tag{4.29}$$

egyenletet kapjuk, amelyek jobb oldala egyenlő (hiszen bármely mátrixot inverzével szorozva az egységmátrixot nyerjük).

(4.28)-at és (4.29)-et az $s=\lambda_r$ sajátértéknél véve a rendszermátrix determinánsa mindkét egyenletben eltűnik (hiszen λ_r a karakterisztikus egyenlet egyik gyöke), ezért a jobb oldalon egy nulla mátrix marad. Az adjungált mátrixnak csak egy, tetszőleges oszlopát véve egy nulla oszlopvektort kapunk, a formula viszont ezzel olyan alakot ölt, ami a sajátvektorok definíciójával egyező:

$$\left\{B(\lambda_r)\right\}_i^{A\,T}\left[B(\lambda_r)\right] = \{0\} = \left\{{}^b\psi\right\}_r^T\left[B(\lambda_r)\right] \tag{4.30}$$

és

$$\left[B(\lambda_r)\right]\left\{B(\lambda_r)\right\}_j^A = \{0\} = \left[B(\lambda_r)\right]\left\{{}^j\psi\right\}_r \tag{4.31}$$

(Ezekben az összefüggésekben és a továbbiakban a bal felső b és j index a bal és jobb oldali sajátvektor megjelölésére szolgál.)

A (4.30) egyenlet szerint tehát a rendszermátrix adjungáltjának bármelyik sora az r-edik pólus sajátértékénél véve arányos az r-edik bal oldali sajátvektorral, és hasonlóképpen, (4.31) szerint a rendszermátrix adjungáltjának bármelyik oszlopa arányos a megfelelő jobb oldali sajátvektorral. Mivel azonban a rendszermátrix most nem szimmetrikus, a bal és jobb oldali sajátvektorok sem egyenlők. Itt nem részletezett módon belátható [201] [211], hogy a bal és jobb oldali sajátvektorok között a

$$\begin{Bmatrix} {}^b\psi_s \\ {}^b\psi_a \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} {}^j\psi_s \\ \dfrac{1}{\lambda_r^2}\,{}^j\psi_a \end{Bmatrix}_r \quad \text{vagy} \quad \begin{Bmatrix} {}^b\varphi \\ {}^b\psi \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} {}^j\varphi \\ \dfrac{1}{\lambda_r^2}\,{}^j\psi \end{Bmatrix}_r \tag{4.32}$$

összefüggés áll fenn (ahol a mechanikai és az akusztikai részrendszerre vonatkozó sajátvektor-részeket a korábban is használt $\psi_s \equiv \varphi$ és $\psi_a \equiv \psi$ jelöléssel különböztetjük meg).

Az (4.26), (4.27), valamint (4.30) - (4.32) egyenletek alapján a jobboldali sajátvektorok segítségével felírhatók az összetett rezgésakusztikai rendszer átviteli függvényei. A j-edik szabadsági foknál alkalmazott f_j mechanikai gerjesztés hatására a szerkezet i-edik pontján és az akusztikai üreg l-edik pontján kialakuló választ a

$$\frac{x_i}{f_j} = \sum_{r=1}^{N} \frac{P_r\,{}^j\varphi_{rj}\,{}^j\varphi_{ri}}{(s-\lambda_r)} + \frac{(P_r\,{}^j\varphi_{rj}\,{}^j\varphi_{ri})^*}{(s-\lambda_r^*)} \tag{4.33}$$

és

$$\frac{p_l}{f_j} = \sum_{r=1}^{N} \frac{P_r\,{}^j\varphi_{rj}\,{}^j\psi_{rl}}{(s-\lambda_r)} + \frac{(P_r\,{}^j\varphi_{rj}\,{}^j\psi_{rl})^*}{(s-\lambda_r^*)} \tag{4.34}$$

egyenlet adja meg. Az akusztikai rendszer k-adik szabadsági fokán alkalmazott gerjesztés hatására a szerkezet i-edik és az üreg l-edik pontján létrejövő válasz az

$$\frac{x_i}{\dot{q}_k} = \sum_{r=1}^{N} \frac{P_r\,{}^j\psi_{rk}\,{}^j\varphi_{ri}}{\lambda_r^2\,(s-\lambda_r)} + \frac{(P_r\,{}^j\psi_{rk}\,{}^j\varphi_{ri})^*}{\lambda_r^2\,(s-\lambda_r^*)} \tag{4.35}$$

és

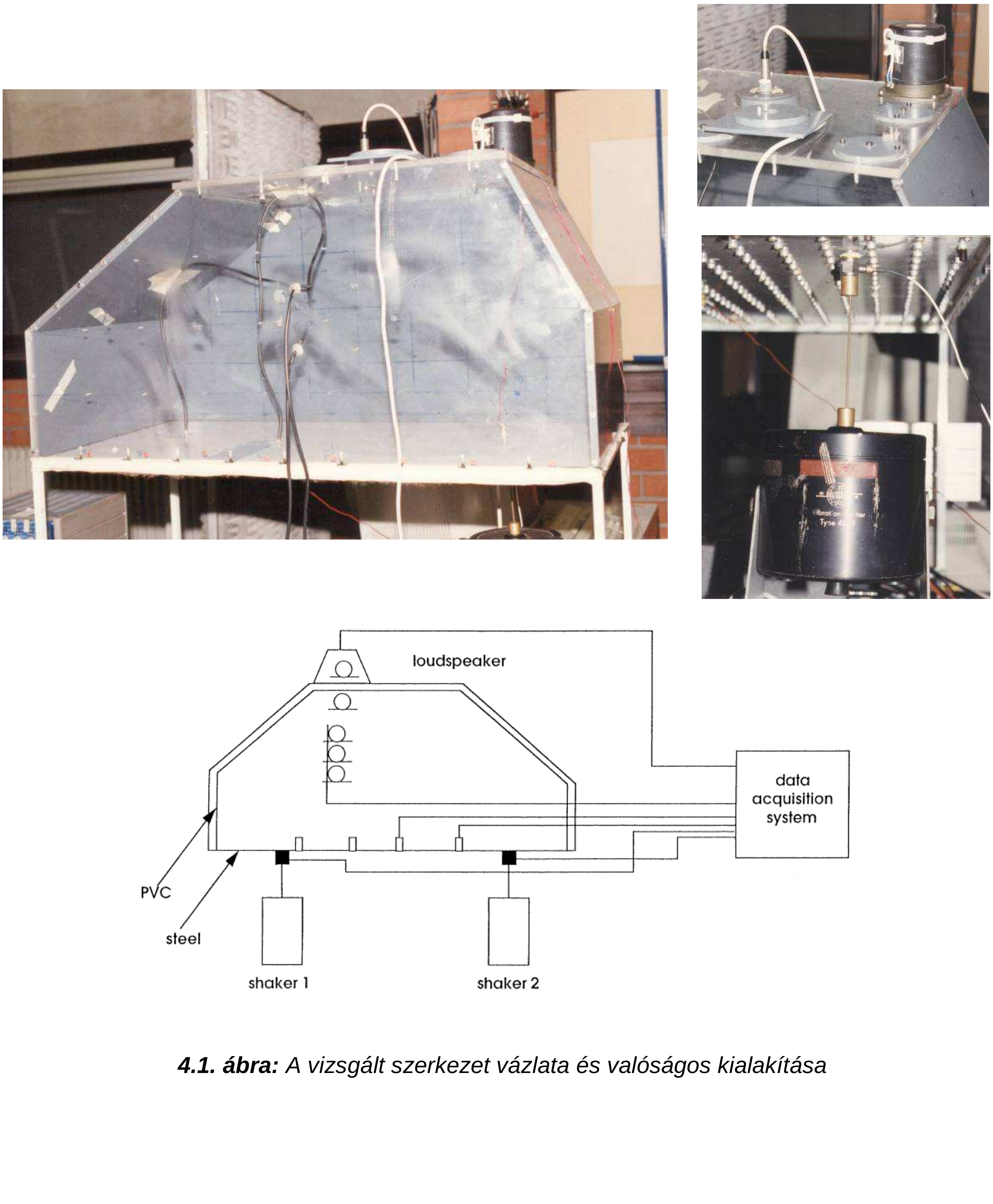
$$\frac{p_l}{\dot{q}_k} = \sum_{r=1}^{N} \frac{P_r\,{}^j\psi_{rk}\,{}^j\psi_{rl}}{\lambda_r^2\,(p-\lambda_r)} + \frac{(P_r\,{}^j\psi_{rk}\,{}^j\psi_{rl})^*}{\lambda_r^2\,(p-\lambda_r^*)} \tag{4.36}$$

összefüggésekkel kapható.

Az egyenletek közösen úgy interpretálhatók, hogy a jobb oldali sajátvektorok – egy globális skálatényezőtől eltekintve – a rendszer rezgésakusztikai, vagy csatolt módusait reprezentálják, a bal oldali sajátvektorok viszont a módusok részesedési tényezőjét adják meg. A bal és jobb oldali sajátvektorok különbözősége miatt a részesedési tényezők a mechanikai és az akusztikai gerjesztés esetében eltérők: a skálatényező a sajátértékek négyzete, ami így módusonként változó.

4.3.2. Kísérleti móduselemzésre vonatkozó következtetések

A szokásos több bemenetű – több kimenetű módusparaméter-becslési eljárások nem követelik meg a rendszermátrix szimmetriáját. Az (4.24) egyenlet és a belőle levezetett (4.33) - (4.36) egyenletek alkalmazása semmilyen nehézséget nem jelent a sajátfrekvenciák és a csillapítási tényezők meghatározásánál. Mivel a sajátvektorok tetszőlegesen skálázhatók, tulajdonképpen ugyanez vonatkozik a sajátvektorok meghatározására is mindaddig, amíg a vektorokat csak külön tekintjük a mechanikai vagy akusztikai részrendszerek vonatkozásában. A csatolt rendszer kombinált frekvenciaátviteli függvényeinek felhasználása során azonban nem lehet az aszimmetriát figyelmen kívül hagyni, mert ellenkező esetben a teljes rendszert magában foglaló, globális rezgésakusztikai módusalakok meghatározásánál jelentős hibák léphetnek fel. A korrekt rezgésakusztikai módusalakok meghatározásának elsősorban akkor van jelentősége, ha a módusalakokkal további számításokat kívánunk végezni (pl. a rendszeren végrehajtandó módosítások, optimalizáló lépések hatásának numerikus előrebecslése érdekében).



4.1. ábra: *A vizsgált szerkezet vázlata és valóságos kialakítása*

4.3.3. Kísérleti verifikáció egy egyszerű rendszeren

A kísérleti bizonyítás egy síklapokkal határolt, némileg egy személygépkocsi alakjára hasonlító PVC doboz segítségével történt (ld. a 4.1. ábrán), melynek fenéklapjai cserélhetők és tetőlemezei eltávolíthatók voltak. A doboz mérete 0.84×0.4×0.4 m, a PVC lapok vastagsága 1 cm volt. A méréseket három változatban végeztük el:

a. Minden határoló PVC lemez helyén van. Ha a PVC lemezeket merevnek tekinthetjük, akkor a doboz ilyenkor egy csatolatlan, zárt akusztikai rendszert vesz körül.

b. A fenéklemezt 1 mm vastag acéllemezre cseréljük, a fedőlemezeket eltávolítjuk. A megmaradó PVC-lemezek által a peremek mentén befogott acéllemez így egy tisztán mechanikai rendszert közelít.

c. A dobozt bezárjuk, a feneket PVC helyett acéllemez alkotja. Ilyen módon egy csatolt rezgésakusztikai rendszert nyerünk.

A mérések gerjesztését egyrészt az acél fenéklemezhez rögzített rezgésgerjesztők[2] vagy egy mérőkalapács, másrészt a doboz tetején elhelyezett hangszóró biztosította. A bemenő jelet a mérőkalapács, a rezgésgerjesztők és a lemez közé helyezett erőérzékelő, valamint a hangszóró hátsó üregébe helyezett mérőmikrofon, a válaszjeleket a dobozban elhelyezett mikrofontömb és az acél fenéklemezre helyezett gyorsulásérzékelők szolgáltatták. Az alkalmazott hangszórót a méréssorozat megkezdése előtt és után Doppler-elven működő lézeres rezgéssebességmérő segítségével, a 3.3.2 szakaszban ismertetett módszer alkalmazásával térfogatsebességben kalibráltuk. Nagy figyelmet fordítottunk arra, hogy a vizsgált rendszer jellemzőit az érzékelők elhelyezése a lehető legkisebb mértékben befolyásolja. A (4.20) egyenlet feltételeit (zérus térfogatsebesség mechanikai gerjesztésnél és zérus erő akusztikai gerjesztés közben) a hangszóró merev PVC-lemezzel történő letakarásával, ill. a rezgésgerjesztő eltávolításával biztosítottuk.

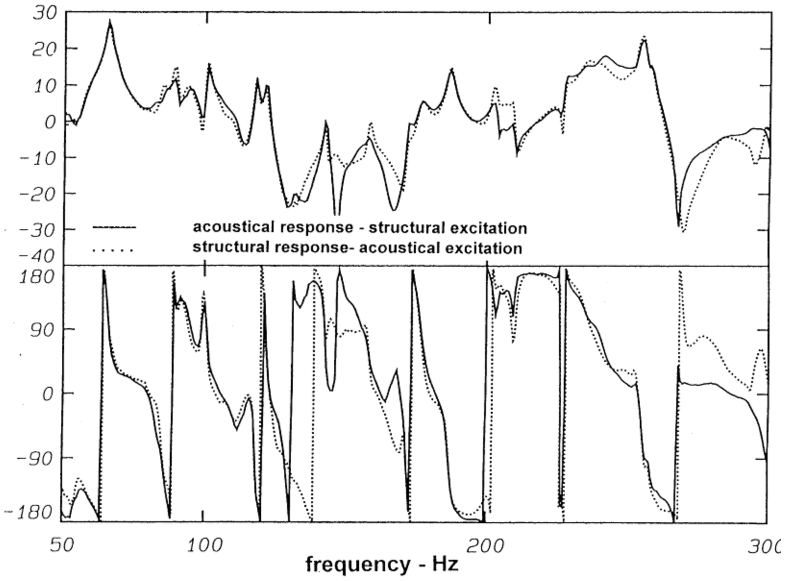
Az előkészített mérőrendszerrel p/q, p/f, a/q és a/f frekvenciaátviteli függvényeket határoztunk meg, amelyekből a

$$[H]\begin{Bmatrix} f \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ p \end{Bmatrix} \tag{4.37}$$

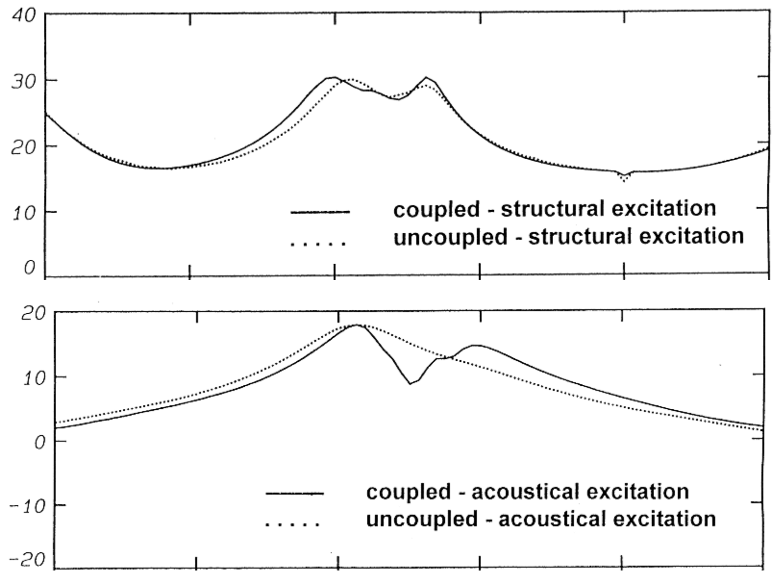
egyenlet szerinti H frekvenciaátviteli mátrix volt előállítható. Ezen frekvenciaátviteli mátrix mérete $d \times d$, ahol az összes szabadságfokok d száma egyenlő az akusztikai és mechanikai szabadságfokok számának összegével. A frekvenciaátviteli mátrixból a 4.3.1. szakasz szerinti módszerek segítségével sajátfrekvenciákat és módusalakokat határoztunk meg csatolt és csatolatlan rendszerre, és ennek megfelelően négyféle gerjesztés/válasz esetre (tisztán akusztikai, tisztán mechanikai, mechanikai/akusztikai és akusztikai/mechanikai rendszer).

A vizsgálatsorozat eredményeit a 4.2 – 4.6 ábrák szemléltetik. A *rezgésakusztikai reciprocitás* teljesülését az 4.2. ábra mutatja, ahol a pontvonal az egyik rezgésgerjesztő pontjában mért gyorsulás frekvenciafüggvényétt mutatja egységnyi térfogatgyorsulás mellett, a folytonos vonal pedig a rezgésgerjesztő által a hangszóró előtti merev felületen keltett hangnyomást szemlélteti egységnyi gerjesztő erőre vonatkoztatva. A két görbe kisebb eltérésektől eltekintve jó egyezést mutat, ami igazolja (4.20) helyességét.

[2] *[Electrodynamic] shaker* vagy *vibration exciter*

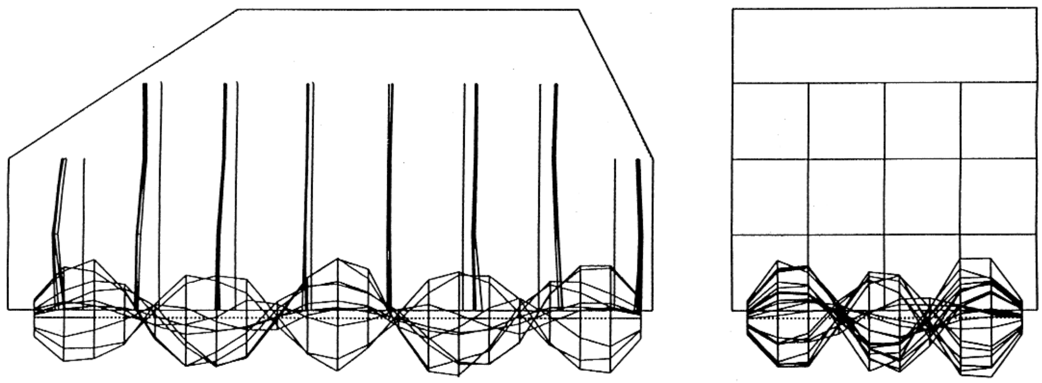


4.2. ábra: *Reciprok frekvenciaátviteli függvények összehasonlítása. Felső diagram: átvitel dB-ben, alsó diagram: fázis fokokban. Folytonos görbék: hangszóró helyén levő merev felület előtt mért hangnyomás / az egyik rezgésgerjesztő által keltett erő, pontvonalak: a (lebontott) rezgésgerjesztő helyén mért gyorsulás / térfogatsebesség.*

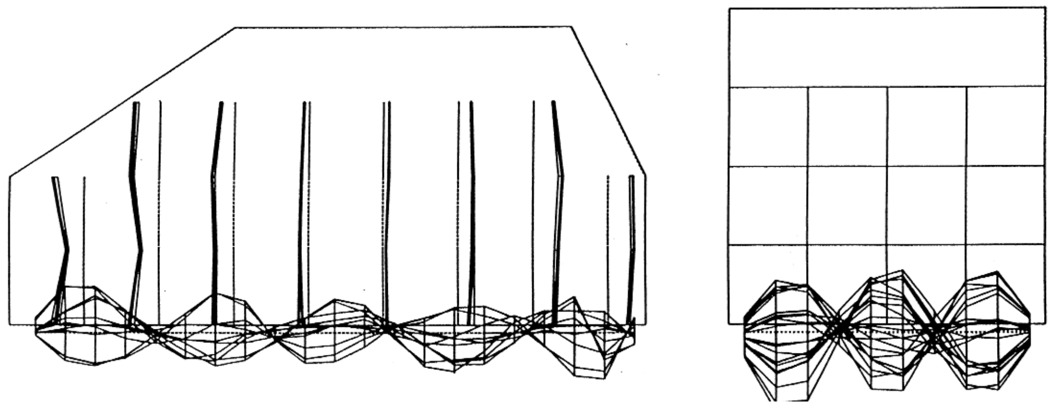


4.3. ábra: *A gyorsulás/erő, ill. a hangnyomás/térfogatsebesség változókkal kapott átviteli függvények átlaga*

Az elemzésből nyert 200 és 250 Hz közötti *sajátfrekvenciák* a csatolás hatására különböző változásokat mutatnak. A 4.3. ábrán a gyorsulás/erő, ill. a hangnyomás/térfogatsebesség változókkal kapott átviteli függvények átlagát mutatjuk be. Amíg a tisztán szerkezeti átviteli függvények a csatolás hatására csak kismértékben változtak, az akusztikai átviteli függvényekben jól megfigyelhető egy új sajátfrekvencia megjelenése. Ennek okára a 4.4 ábra diagramjai adnak magyarázatot: a vizsgált frekvenciák környékén az akusztikai üreg (1,0,0) módusa mindössze egy félhullámot foglal magában a doboz hossztengelye mentén, míg a fenéklemez (5,3) rezgési módusa jóval összetettebb, tehát nagyon kismértékű a geometriai hasonlóság.

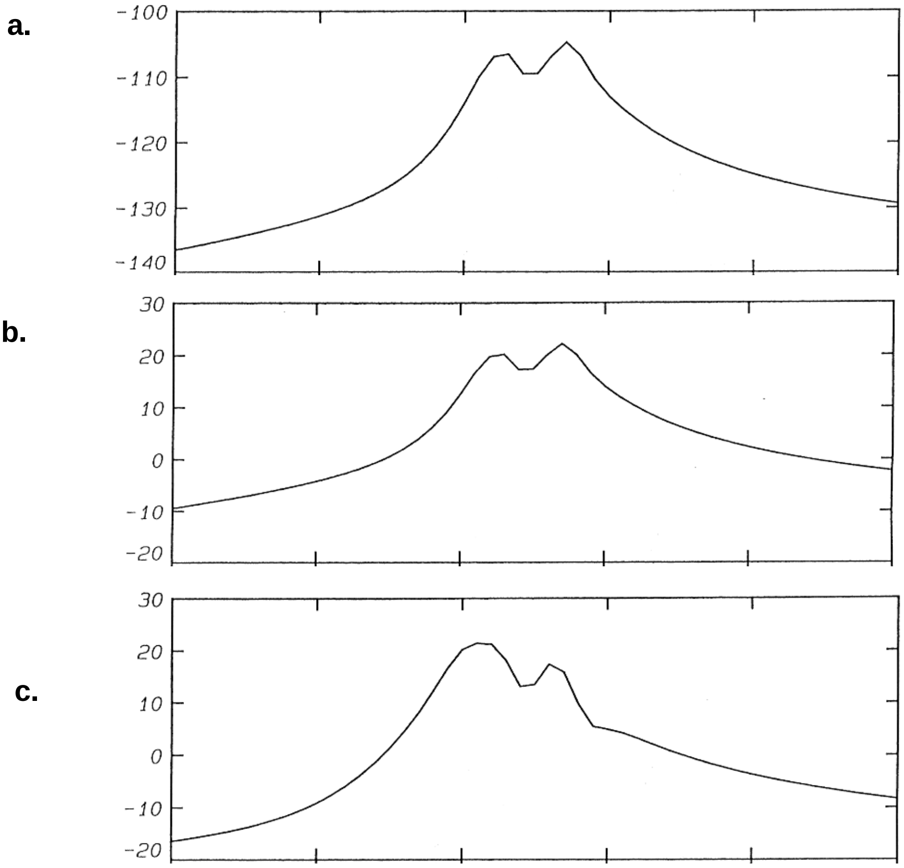


4.4. ábra: *Erővel gerjesztett csatolt rendszer 236.4 Hz-es módusának módusalakja oldal- és hátulnézetben*



4.5. ábra: *Térfogatsebességgel gerjesztett csatolt rendszer 236.4 Hz-es módusának módusalakja*

A 4.4. és 4.5. ábrán a csatolt rendszer akusztikai, ill. mechanikai gerjesztésével nyert módusalakokat szemléltetjük. A kétféle módusalak egymáshoz (és a megfelelő csatolatlan módusalakhoz) képest mutatott hasonlósága igazolja, hogy a csatolt rezgésakusztikai rendszer elemzése a gerjesztés fajtájától függetlenül azonos eredményre vezet. Ez igazolja azt az elméleti megállapítást, hogy egy csatolt rezgésakusztikai rendszer modális modellje (azaz sajátfrekvenciái és módusalakjai) az elemzéshez felhasznált bemenetektől függetlenek. E kijelentés gyakorlati szempontból is nagy jelentőségű, ugyanis így egy csatolt rendszer tulajdonságainak kísérleti meghatározásánál tetszőlegesen vegyíthetők a mechanikai és akusztikai gerjesztések és válaszok. (Fontos ugyanakkor, hogy a rendszer vizsgálni kívánt módusai valamilyen módon gerjesztve legyenek, és a kialakuló módusokról az érzékelők megfelelő felbontású jeleket szolgáltassanak.)



4.6. ábra: Szintetizált átlagos frekvenciaátviteli függvények összehasonlítása.
a: helytelen skálatényezővel, akusztikai gerjesztésből szintetizált átlagos szerkezeti válasz,
b: helyes skálatényezővel, akusztikai gerjesztésből szintetizált átlagos szerkezeti választ,
c: közvetlenül szerkezeti gerjesztésből szintetizált átlagos szerkezeti válasz.

Amennyiben az elemzést a modális modell meghatározásán túlmenően további, kvantitatív számításokra is fel kívánjuk használni, a probléma összetettebbé válik. A teljes rezgésakusztikai rendszert leíró (4.37) egyenlet szerint a teljes frekvenciaátviteli mátrix, H megkonstruálható annak egyetlen sorából vagy oszlopából. Ez azt is jelenti, hogy az egyetlen akusztikai vagy mechanikai gerjesztéssel meghatározott átviteli függvények alapján – bizonyos, szükséges feltételek fennállása esetén – bármely más gerjesztésre vonatkozó frekvenciaátviteli függvények is szintetizálhatók, azok típusától függetlenül. Ezen szintézis során azonban figyelembe kell venni, hogy a leíró egyenlet nem szimmetrikus, ezért az eltérő típusú módusalakokat a megfelelő, gerjesztési típusonként eltérő skálatényezőkkel kell figyelembe venni. A számítás részletei [211]-ben részletesen megtalálhatók, a helyes és helytelen módon szintetizált frekvenciaátviteli függvényeket a közvetlenül számított görbéhez viszonyítva a 4.6 ábra szemlélteti. Mint látható, a görbék alakja nagyjából azonos (eltérést csak a sajátfrekvenciák kismértékű eltolódása okoz, ami a kb. egy hetes méréssorozat környezeti körülményeinek ingadozásával magyarázható), a helytelenül szintetizált átviteli függvény azonban igen nagy (kb. 130 dB mértékű) skálázási hibával terhelt.

4.4. Új tudományos eredmények összefoglalása és tézisek

III. téziscsoport: Reciprocitás és szimmetria a rezgésakusztikai kölcsönhatások leírásában belsőtéri problémák esetén

Az akusztikai tervezés gyakorlatában gyakran adódik olyan belsőtéri feladat, amikor egy összetett rendszer mechanikai és akusztikai elemeinek viselkedését a kétféle részrendszer közötti kölcsönhatások lényeges módon befolyásolják. A két részrendszer között fennálló szoros csatolás következtében a teljes rendszert csak a kölcsönhatások figyelembevételével lehet pontosan leírni. Amennyiben ezt a leírást a (2.10) diszkrét alapegyenlettel összhangban végezzük, aszimmetrikus mátrixegyenletet kapunk.

III.1. tézis: *Elméleti úton kimutattam és kísérletileg is igazoltam, hogy a villamos hálózatokra, mechanikai, akusztikai és csatolt rezgésakusztikai rendszerekre egyaránt érvényes, Lyamshev által folytonos rezgésakusztikai rendszerekre megadott*

$$\left.\frac{p_i}{f_j}\right|_{\dot{q}_i=0} = \left.\frac{-\ddot{x}_j}{\dot{q}_i}\right|_{f_j=0} \tag{4.20}$$

reciprocitás nincs ellentmondásban a rezgésakusztikai rendszereket leíró diszkrét egyenletek aszimmetriájával.

A csatolt rezgésakusztikai rendszerek

$$\begin{bmatrix} [A_s] & -[K^c] \\ -\omega^2[M^c] & [A_a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \rho\{\dot{q}\} \end{Bmatrix} \tag{4.18}$$

alakú, nem szimmetrikus másodrendű modellje felhasználásával kimutattam, hogy a rendszert az *i* pontban gerjesztő erő hatására a *j* pontban létrejövő hangnyomás közötti

$$\left.\frac{p_i}{f_j}\right|_{\dot{q}_i=0} = \left[[A_s] \frac{[K^c]^{T^{-1}}}{\rho\,\omega^2} [A_a] - [K^c] \right]^{-1}_{ij} \tag{4.22}$$

átviteli függvény és az *i* pontban alkalmazott térfogatgyorsulás hatására a *j* pontban kialakuló gyorsulás közötti

$$\left.\frac{\ddot{x}_j}{\dot{q}_i}\right|_{f_j=0} = -\left[[A_a] \frac{[K^c]^{-1}}{\rho\,\omega^2} [A_s] - [K^c]^T \right]^{-1}_{ji} \tag{4.23}$$

átviteli függvény abszolút értéke egyenlő, feltéve, hogy a rendszer lineáris. (A fenti egyenletekben az $[A_s]$ és $[A_a]$ mátrixok a szerkezeti, ill. akusztikai rendszermátrixot, $[K^c]$ és $[K^a]$ a csatolást reprezentáló almátrixokat, $[B]$ a csatolt rendszer eredő rendszermátrixát, f erőt és x kitérést jelöl.)

Az összefüggés mind elvi, mind gyakorlati szempontból jelentőséggel bír. Az eredő rendszermátrix elemeit az *r*-edik sajátértéknél véve és annak aszimmetriáját figyelembe véve kimutattam, hogy a csatolt rezgésakusztikai rendszer frekvenciaátviteli mátrixának bal és jobb oldali sajátvektorai eltérők. Ezen eredményemet felhasználva szerzőtársaim igazolták, hogy a jobb oldali sajátvektorok – egy globális skálatényezőtől eltekintve – a rendszer rezgésakusztikai, vagy csatolt módusait reprezentálják, a bal oldali sajátvektorok viszont a módusok részesedési tényezőjét adják meg. A módusrészesedési tényezők a mechanikai és az akusztikai gerjesztés esetében eltérők és módusonként változók, amit figyelembe kell venni, ha a rezgésakusztikai rendszerek modális modelljét további kvantitatív számításoknál, pl. optimalizálási számításoknál akarjuk felhasználni [201] [205].

A rezgésakusztikai reciprocitás sértetlensége a kísérleti móduselemzési feladatok gyorsabb és hatékonyabb megoldását teszi lehetővé a következő tézis alapján:

III.2. tézis: *Kísérletileg igazoltam a rezgésakusztikai rendszerek reciprocitásából következő azon elméleti megállapítást, hogy egy csatolt rendszer modális modellje (azaz a rendszer sajátfrekvenciái és módusalakjai) függetlenek a gerjesztés módjától, azaz attól, hogy a gerjesztés a mechanikai vagy akusztikai részrendszer oldaláról történik.*

A megállapítás értelmében egy csatolt rendszer tulajdonságainak kísérleti meghatározásánál tetszőlegesen vegyíthetők a mechanikai és akusztikai gerjesztések és válaszok. A kísérleti munka ezáltal jelentősen könnyebbé, gyorsabbá és megbízhatóbbá tehető, amit laboratóriumi méréseken kívül egy Fokker 70-es repülőgépen végzett kiterjedt méréssorozat eredményei is alátámasztanak.

A III. téziscsoporttal kapcsolatos publikációk: [194], [198], [200], [201], [205], [210], [211], [214] és [224].

5. fejezet

5. A HANGSUGÁRZÁS MODELLEZÉSE

A hangsugárzás témaköre az akusztika, és ezen belül a műszaki akusztika egyik széles és fontos részterülete. Rezgésakusztikai értelemben akkor beszélünk hangsugárzásról, amikor a szerkezetek mechanikai energiája bizonyos feltételek megléte esetén hangenergiává alakul, ami a térben hanghullámok formájában terjed a tér minden irányába. (Megjegyzendő, hogy a hangok keletkezésének sok másféle mechanizmusa is létezik. Lighthill alapvető munkája [4] óta egyre többet tudunk a közegáramlási folyamatok szabálytalanságai következtében létrejövő hangkeltésről, amellyel az aerodinamika és a hidrodinamika résztudományai foglalkoznak. Ezen kérdésköröket azonban a jelen értekezés nem érinti.) A rezgésakusztikai energiaátalakulás sok területen, pl. hangszerek, hangjelző berendezések, elektroakusztikai elemek és rendszerek esetében kívánatos folyamat, és a kívánt hangenergia-mennyiség mellett elsősorban a megfelelő, ill. a lehető legjobb hangminőséget igyekszünk biztosítani. Járművek, gépek, gépi berendezések esetében viszont a hangsugárzás legtöbbször zavaró, sőt káros, ezért az energiaátalakulási folyamatot a tervezés során lehetőség szerint gátolni igyekszünk.

Amilyen széles a hangsugárzás folyamataiban érintett eszközök, tárgyak és rendszerek köre, annyira sokrétű a hangsugárzás számítására alkalmazott módszerek tárháza is. A jelen értekezés az alapfogalmak és -összefüggések áttekintése után a peremelem módszer gyakorlati alkalmazásának megkönnyítésére kidolgozott forráshelyettesítési módszert tárgyalja.

5.1. Komplex források hangsugárzásának modellezése elemi sugárzókkal

Elsősorban a környezeti zaj elleni védelemben merül fel annak igénye, hogy összetett, nagy méretű, sokszor időben és/vagy térben is változó források zajkeltését számítással határozzák meg. Az Európai Unió környezetvédelmi irányelve [1] a zajtérképezés kötelező európai bevezetéséről különösen időszerűvé teszi ezen módszerek alkalmazását. Közúti, vasúti, légi közlekedési zajforrásokra és ipari üzemekre számos módszert dolgoztak ki az elmúlt időkben [131]. Ezen nagyszámú eljárás azonban mind egyszerű elemi sugárzók alkalmazásán alapszik [132], [133].

A környezetvédelmi célú becslések általában a hangforrás W hangteljesítményéből indulnak ki, amelyet valamely szabványos módszerrel, méréssel határoznak meg. A feladatok döntő többségénél háromféle elemi sugárzót vesznek számításba: pont-sugárzót, vonalforrást és felületi forrást. A módszer elvileg egyszerű és számos gyakorlati feladat kielégítő módon megoldható ilyen módon (ld. pl. [233], [249]).

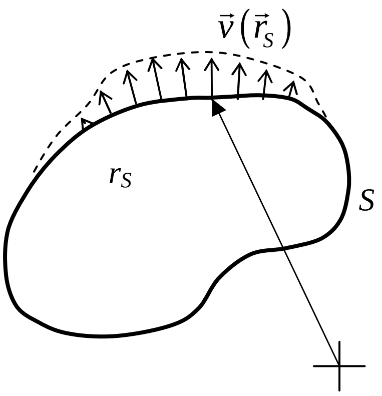
Huyghens elve értelmében minden hullám helyettesíthető pontsugárzók halmazával, tehát végeredményben a másik két hullámforma sem más, mint pontsugárzók hangterének szuperpozíciója. A forrásoktól nagy távolságban tekintve viszont bármely forrás hangja gömbhullámok formájában terjed, ami elvben egyszerűsíti a számítást, de felveti a közeltér-távoltér közötti különbségtétel gyakorlati problémáját. (A témát Márki F. vizsgálta részletesen PhD értekezésében [180].)

A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy a hangsugárzás számítására számos analitikus módszer is létezik, melyek egyszerű geometriájú források esetén közvetlenül alkalmazhatók. [136], [137], [138].

5.2. A hangsugárzás numerikus számítása direkt peremelem módszerrel

A hangsugárzás számítására leggyakrabban alkalmazott numerikus módszer a peremelem módszer. Ennek részletes tárgyalására itt nem térünk ki, mert a téma az akusztikai végeselem módszernél szélesebb körben ismert és több, a BME híradástechnikai Tanszékén készült értekezés is részletesen tárgyalja [141], [180], [181]. Ezért itt csak a továbbiakban alkalmazni kívánt, legfontosabb összefüggéseket foglaljuk össze és utalunk az irodalmi forrásokban fellelhető bő irodalomjegyzékre [13], [59], [147].

5.2.1. A peremelem módszer alapjai



5.1. ábra: *A peremelem módszer általános sugárzó modellje*

Tekintsünk egy tetszőleges alakú, egyszerűség kedvéért zárt S felületet, mely a felületen végigfutó $\vec{r}_S$ helyvektorral jelölt pontokban a felületre merőleges irányban (amit az $\vec{n}$ kifelé mutató felületi normálissal jellemzünk) $\vec{v}(\vec{r}_S)$ sebességeloszlással szinuszos rezgést végez. A felületi rezgések hatására a minden irányban akadálytalannak tekintett, nyugalomban levő, homogén és veszteségmentes levegővel kitöltött térben hanghullámok keletkeznek, melyek tulajdonságait a Helmholtz-féle hullámegyenlet írja le:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) p = 0 \tag{5.1}$$

A hullámegyenleten kívül peremfeltételeket is teljesíteni kell, ami adott felületi rezgéssebesség esetében az Euler-egyenletből vezethető le és az S felületen teljesítendő

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = -j\omega\rho_0\vec{v} \tag{5.2}$$

összefüggéssel adható meg, ami a felületi rezgéssebesség időbeli deriváltjának és a hangnyomás kifelé mutató normális mentén vett térbeli deriváltjának arányosságát írja elő.

Az (5.1) differenciálegyenlet és a (5.2) peremfeltétel kettősét Neumann-féle peremérték problémának nevezzük. Amennyiben nem a rezgéssebesség, hanem a hangnyomás adott a felületen, akkor Dirichlet-féle peremérték-feladatot kell megoldanunk; ha pedig egy vegyes kifejezésben mindkét üzemi változó szerepel és azok valamilyen függvényét kell teljesítenünk, akkor impedancia-típusú vagy Robin-féle peremérték-feladattal állunk szemben. Ez utóbbi két feladattal értekezésünkben nem foglalkozunk.

Végül az a plauzibilis fizikai követelmény, hogy minden hanghullámnak el kell távolodnia a sugárzótól, a Sommerfeld-féle peremfeltétellel adható meg [142]:

$$\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial p}{\partial R} + jkp\right) = 0 \tag{5.3}$$

amit a végtelenben vett peremfeltételnek is tekinthetünk.

A feladat megoldását a Helmholtz-féle (más irodalmi forrásokban Helmholtz-Kirchoff-féle) integrálegyenlet nyújtja:

$$\oiint_S \left(-p(\vec{r}_S)\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}_S)}{\partial \vec{n}} + G(\vec{r},\vec{r}_S)\frac{\partial p(\vec{r}_S)}{\partial \vec{n}}\right)\vec{n}dS(\vec{r}_S) = \begin{cases} p(\vec{r}) & \text{a térben,} \\ \frac{1}{2}p(\vec{r}_S) & \text{a felületen} \\ 0 & \text{másutt} \end{cases} \tag{5.4}$$

ahol G a szabadtéri Green-függvény

$$G(\vec{r},\vec{r}_S) = \frac{1}{4\pi R}e^{-jkR} \tag{5.5}$$

és $R = \left\|\vec{r} - \vec{r}_S\right\|_2$.

Az (5.4) integrálegyenlet tehát a felületi rezgéssebességet és a felületen uralkodó hangnyomást kapcsolja össze a forráson kívüli térben kialakuló hangnyomással. Általános esetben, tetszőleges geometriákra analitikus módszerrel nem oldható meg, ezért itt is numerikus módszerhez folyamodunk. A diszkretizálás a peremelem módszer esetében is a végeselem módszerhez hasonló módon történik, azzal a jelentős könnyebbséggel, hogy térfogati integrál helyett itt most csak felületi integrálokat kell numerikusan kiértékelnünk. A sugárzó teljes térfogatát kitöltő térbeli rács helyett ezért elegendő csak a felületet elemekkel és rácspontokkal behálózni, ami sokkal kisebb mátrixokat eredményez. A diszkretizálás eredményeként az integrálok helyett az adott geometriától és a frekvenciától függő mátrixokat kapunk.

A megoldás a leggyakrabban alkalmazott kollokációs módszernél két lépésben történik. Első lépésben a távoltéri pontot a felület rácspontjaiba helyezve egy

$$[A]\left\{p\left(\vec{r}_S\right)\right\}=[B]\left\{v\left(\vec{r}_S\right)\right\} \tag{5.6}$$

alakú egyenletrendszert kapunk, melyből a felületi sebességek ismeretében a felületi hangnyomások meghatározhatók. Ezek alapján a (5.4) egyenlet diszkrét alakjának közvetlen alkalmazásával a hangtér tetszőleges pontjában meghatározható a hangnyomás:

$$\left\{p\left(\vec{r}\right)\right\}=\left[d\right]\left\{p\left(\vec{r}_S\right)\right\}-\left[m\right]\left\{v\left(\vec{r}_S\right)\right\} \tag{5.7}$$

ahol a $[d]$ és $[m]$ mátrixok a sugárzó egyes elemeinek valamely távoltéri pont hangnyomásához való relatív hozzájárulását adják meg. Ha a feladatot csak egyetlen pontra kívánjuk megoldani, a mátrixoknak csak egy-egy sorát kell felhasználnunk:

$$p\left(\vec{r}_i\right)=\{d\}_i^T\left\{p\left(\vec{r}_S\right)\right\}-\{m\}_i^T\left\{v\left(\vec{r}_S\right)\right\}$$

A (5.6) és (5.7) egyenletek egy közös mátrixegyenlet formájában is összefoghatók:

$$\left\{p\left(\vec{r}\right)\right\}=\left[\left[d\right]\left[A\right]^{-1}\left[B\right]+\left[m\right]\right]\left\{v\left(\vec{r}_S\right)\right\}=\left[T\right]\left\{v\left(\vec{r}_S\right)\right\} \tag{5.8}$$

amelyben a $[T]$ transzfer impedancia mátrix közvetlen kapcsolatot teremt a felületi rezgéssebesség és a távoltéri hangnyomás között. Ennek alapján tetszőleges sebességeloszlásra és tetszőleges pontokra meghatározhatók a hangtérjellemzők. Fordított, ún. inverz probléma esetén, a hangnyomás térbeli alakulásának ismeretében a mátrixot invertálva megkapható a felület sebességeloszlása [222].

A (5.6) egyenlet megoldása és a (5.7) összefüggés kiértékelése sajnos közel sem olyan egyszerű, amint azt az egyenletek formai egyszerűsége alapján feltételezhetjük. A peremelem módszer mátrixai ugyanis – bár a kétdimenziós diszkretizáció folytán méretükben kisebbek, de – teljesen kitöltöttek (minden elemük nullától különböző), aszimmetrikusak, komplexek, frekvenciafüggők és minden egyes elem minden frekvencián történő kiszámításához közel szinguláris integrálokat kell numerikus Gauss-kvadratúra segítségével kiértékelni. A direkt számítás további nehézsége, hogy a (5.6) egyenletnek nincs unikális megoldása olyan frekvenciákon, amelyek a sugárzó belsőtéri problémának tekintett modellje sajátfrekvenciáival egyenlők; a (5.8) egyenlet invertálása pedig az általában rosszul kondicionált transzfer mátrix miatt okoz komoly nehézségeket. Ezekkel a numerikus problémákkal azonban értekezésünk nem foglalkozik, helyette Márki kimerítő elemzésére utalunk [180].

5.2.2. A peremelem módszer fizikai tartalma

Amint az egy más megközelítéssel [147] kimutatható, a Helmholtz-integrálegyenlet fizikailag a sugárzó felületén elhelyezkedő kettős elemi sugárzó-rétegnek felel meg: az (5.4) egyenlet egyik tagja vdS forráserősségű monopólsugárzókból, a másik tag pedig a felületi hangnyomással arányos dipólsugárzókból álló réteg hangterét képviseli. E két réteget leíró változót a numerikus akusztika szakirodalmában egyrétegű, ill. kétrétegű potenciálnak[16] is nevezik, és innen származik a (5.7) egyenlet jelölése is.

Ha a sugárzó felülete sík és minden irányban a végtelenbe tart (azaz a sugárzó két oldalát egy végtelen, sík hangfal választja el egymástól), akkor a dipólsugárzókat képviselő tag eltűnik és a (5.4) Helmholtz-integrálegyenlet a

[16] *Single-layer potential*, ill. *double-layer potential*.

$$p(\vec{r}) = \iint_S j\omega\rho\,\vec{v}(\vec{r}_S)\,G\,\vec{n}dS = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega\rho\, v_n \frac{e^{-jkR}}{2\pi R}\, dx_S dy_S \qquad (5.9)$$

Rayleigh-integrállá degradálódik. Ez nem más, mint a $v_n\, dx_S\, dy_S$ forráserősségű monopólusok alkotta réteg féltérbe való sugárzásának összegzése. Egyszerű sugárzók esetében ennek az integrálnak zárt alakban megadható analitikus megoldása is létezik [139], [140].

A (5.6) egyenlet a hangforrás felületén uralkodó hangnyomást és a felületi rezgéssebességet kapcsolja össze, ezért impedancia jellegű összefüggéssé is átrendezhető. Az egyenletet az $[A]$ mátrix inverzével balról szorozva egy olyan összefüggést kapunk, amelyben a főátló elemei az egyes peremelemek saját specifikus impedanciái, a főátlón kívüliek pedig kölcsönös specifikus impedanciákat képviselnek:

$$\{p(\vec{r}_S)\} = [A]^{-1}[B]\{v(\vec{r}_S)\} = [z]\{v(\vec{r}_S)\} = $$
$$= \begin{bmatrix} z_{11} & . & . & z_{1N} \\ . & z_{ii} & z_{ji} & . \\ . & z_{ij} & . & . \\ z_{N1} & . & . & z_{NN} \end{bmatrix} \{v(\vec{r}_S)\} \qquad (5.10)$$

A forrás felületén (és *mutatis mutandis* a távoltérben) kialakuló hangnyomás tehát az összes peremelem együttes hatására, azok hozzájárulásának fázishelyes szuperpozíciójaként jön létre. A nullától különböző kölcsönös impedanciák jelenléte azt eredményezi, hogy valamelyik elem sebességének változása nem csak a megváltozott elem felületén kialakuló hangnyomást változtatja meg, hanem az összes többi elemét is. Fordított megállapítás is tehető: a felület i-edik elemének rezgés közben nem csak a saját maga által előállított hangnyomást kell ellensúlyoznia, hanem az összes többi elem által létrehozottat is. A $[z] = [A]^{-1}[B]$ specifikus impedancia mátrix tehát a forrás sugárzási impedancia mátrixával szoros kapcsolatban van[17]. A számításához felhasznált mátrixoktól eltérően, az akusztikai rendszerekre érvényes reciprocitás miatt szimmetrikusnak kell lennie, azaz a

$$[z]^T = [z] \qquad (5.11)$$

összefüggés mindig érvényben van.

5.3. Hangforrások leírásának és helyettesítésének módszerei

A “klasszikus” peremelem módszer azzal a hallgatólagos feltételezéssel él, hogy a sugárzó felületén a rezgéssebesség minden pontban ismert. A gyakorlatban azonban ez a kedvező állapot nagyon nehezen érhető el.

Elvben a rezgéssebességet méréssel is meg lehet állapítani, a szokásos peremelem modellek mérete és a gyakorlatban előforduló források jellemzői azonban csak ritkán teszik ezt lehetővé. Sok ezer pontban, reális időn belül megbízható rezgésmérést végezni jelenleg csak pásztázó funkcióval rendelkező Doppler-lézeres rezgés-

[17] A $[z]$ mátrix elemeit azért nem nevezhetjük közvetlenül sugárzási impedanciáknak, mert a magyar akusztikai szakirodalomban és nomenklatúrában a forrás felületének egy-egy kiválasztott pontján vagy felületén kialakuló hangnyomás és térfogatsebesség hányadosát nevezzük annak.

mérővel, vagy a folt-interferencia elvén[18] működő berendezésekkel lehetséges. A forrásnak a mérés teljes időtartama alatt megbízhatóan stabilnak kell lennie, és a forrás pontos geometriájának alapján, elektronikus képfeldolgozási eljárásokkal azt is biztosítani kell, hogy a mérés a felületi normális irányába eső sebességkomponenst szolgáltassa.

A leggyakrabban alkalmazott megoldás ezért az, hogy a sugárzónak egy végeselem modelljét alkotjuk meg, és fizikai, vagy modális koordináták segítségével számítjuk ki a mechanikai részrendszer gerjesztett válaszát. A szükséges – és megfelelő – rácspontokat kiválogatva, szükség szerint interpolálva és a kitéréseket sebességre átszámítva határozható meg a peremelem számítás bemeneti adathalmazaként szolgáló sebességvektor. Amennyiben a mechanikai és akusztikai részrendszer közötti kölcsönhatások lényegesen befolyásolhatják a szerkezet rezgését, e két számítási lépést – megfelelő csatolási mátrixok korábbihoz hasonló bevezetésével – a teljes, csatolt rezgésakusztikai rendszer válaszának meghatározására is ki kell terjeszteni.

A numerikus számítási metodika és a modális megközelítés előnyeit egyesíthetjük, ha az eredetileg aktív zajcsökkentés céljából bevezetett sugárzási módusok fogalmát a hangsugárzás számításához is igénybe vesszük. A módszert a következő fejezetben tárgyaljuk részletesen.

Nem ritka eset, hogy a rendszer méretei, összetettsége vagy a modellezéshez szükséges paraméterek (pl. anyagjellemzők) hiánya miatt a szerkezet végeselem modelljének megalkotása is nehézségekbe ütközik. Ilyen esetekben a helyettesítő források módszere nyújt megoldási lehetőséget. Számos ilyen módszer ismeretes a szakirodalomban.

Cremer alkalmazta elsőként [143], majd Ochmann monopólusok alkalmazásával fejlesztette tovább azt a forrásszimulációs módszert, melynél a vizsgált forrást az annak felületén belül elhelyezett, hipotetikus források: gömbsugárzók, ill. monopólusok halmazával helyettesítik [145], [146]. A helyettesítő monopólusok forráserősségét úgy állapítják meg, hogy azok hangterében a forrás felületének helyén vett részecskesebesség az előre megadott rezgéssebességet a lehető legpontosabban közelítse. Ha ez teljesül, akkor a monopólusok hangterének szummázásával tetszőleges távoltéri pontban is jól közelíthető az eredeti forrás által keltett hangnyomás. Ez a módszer jelentős időmegtakarítást jelent, minthogy elmarad a peremelem módszer mátrixainak hosszadalmas összeállítása és invertálása. Variánsai is léteznek, melyek a monopólusok helyett egyéb elemi forrásokat alkalmaznak [149]. Gyakorlati jelentőségre azonban tudomásunk szerint mindeddig nem tett szert, elsősorban a számítás alapjául szolgáló és fent már részletezett mérési nehézségek következtében.

Verheij és munkatársai kísérleti munka céljára dolgozták ki az energia szerinti egyenértékű térfogatsebesség módszerét[19], amelynél az eredeti forrást azonos hangteljesítmény lesugárzására képes, korrelálatlan, véletlen zajt sugárzó monopólusokkal helyettesítik [150]. A jelen értekezés szerzője a módszert numerikus számítások céljára adaptálta; a módszer részletei a következő szakaszban, gyakorlati alkalmazásának tapasztalatai a 6.2 fejezetben kerülnek kifejtésre.

Az energia szerinti egyenértékű térfogatsebesség módszerének továbbfejlesztését jelenti a Márki F. által javasolt és statisztikus peremelem módszernek nevezett eljárás [151], [180]. Ennél a helyettesítéshez nem monopólusokat alkalmazunk, hanem az eredeti felületet kisebb szakaszokra bontjuk és azok mentén egyszerű, elemi se-

[18] *Laser speckle interferometry*, vagy *Electronic speckle pattern interferometry*

[19] *Equivalent power volume velocity method*

bességeloszlásokat (konstans sebesség: dugattyúsugárzó, szinuszos sebességeloszlás: hajlítóhullámot vezető lemez stb.) tételezünk fel. A forrás közelterében hangnyomásszint méréseket végzünk és a helyettesítő források paramétereit úgy hangoljuk, hogy a helyettesítő források ugyanazon pontra számított hangnyomásai a mért adatokat lehető legjobban közelítsék. Feltéve, hogy a részforrások statisztikusan függetlenek (innen származik a módszer elnevezése is), a helyettesítő források távoltere energia szerint összegezhető.

5.3.1. Hangsugárzás számítása energia szerint egyenértékű térfogatsebesség módszerével

Kiindulásként a rezgést végző, jellemezni kívánt hangforrást egy hipotetikus, zárt mérőfelülettel vesszük körbe, melyet részfelületekre osztunk. Hangintenzitásmérés segítségével meghatározzuk az egyes részfelületeken áthaladó hangteljesítményt, melyek összege a forrás teljes hangteljesítményével egyenlő. A módszer alapgondolata az, hogy e részleges hangteljesítményeket nem a rezgő felület, hanem az egyes részfelületekhez rendelt helyettesítő monopólusok hatásának tulajdonítjuk. A helyettesítő, korrelálatlanoknak feltételezett monopólusokat a felületre „helyezzük” és feltesszük, hogy időegység alatt ugyanannyi energiát sugároznak ki, mint a rezgő felület. Megfelelő számú és alkalmasan választott monopólus esetén a kialakuló hangtér közelíti az eredeti forrás hangterét, így a forrással elvégzendő számítások jelentősen leegyszerűsíthetők és gyorsíthatók.

Egy félszabad térbe – azaz végtelen, merev fal elé – helyezett, Q térfogatsebességű monopólus által kisugárzott hangteljesítmény az akusztika alapösszefüggései szerint a

$$P = \frac{\rho \omega^2 Q^2}{2\pi c_0} \tag{5.12}$$

egyenlettel adható meg. Egy távoltéri r pontban (ahol a hangnyomás és a részecskesebesség már fázisban van) kialakuló p hangnyomás és a Q forráserősség között egy kvadratikus T átviteli függvényt értelmezhetünk:

$$T = \frac{|p(r)|^2}{Q^2} = \left(\rho c_0 \frac{k}{2\pi r} \right)^2 \tag{5.13}$$

Ha a j-edik részfelületen mérhető hangteljesítményhez n_j darab helyettesítő monopólust rendelünk és ezeket egyenlő forráserősségűnek tételezzük fel, akkor a j-edik részfelület P_j hangteljesítményéhez hozzájáruló i-edik monopólus Q_{ij} forráserősségére (5.12) alapján a

$$Q_{ij} = \sqrt{\frac{P_j}{n_j} \frac{2\pi c}{\rho \omega^2}} \tag{5.14}$$

összefüggés adódik. A forrás eredő hangteljesítményét az egyes monopólusok által kisugárzott hangteljesítmény összege adja. Az r pontban kialakuló eredő hangnyomás a

$$p(r) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} T_{jr} Q_j^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left[\frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} \left| \frac{p_r}{Q_{ij}} \right|^2 \right] \left[\sum_{i=1}^{n_j} Q_{ij}^2 \right]} \tag{5.15}$$

összefüggéssel adható meg, ahol T_{jr} a forráserősség és a távoltéri hangnyomás közötti kvadratikus átvitelt jelöli és a j-edik részfelület távoltéri hangnyomáshoz való hozzájárulását reprezentálja, Q_j pedig a részfelülethez tartozó monopólusok összes forráserőssége.

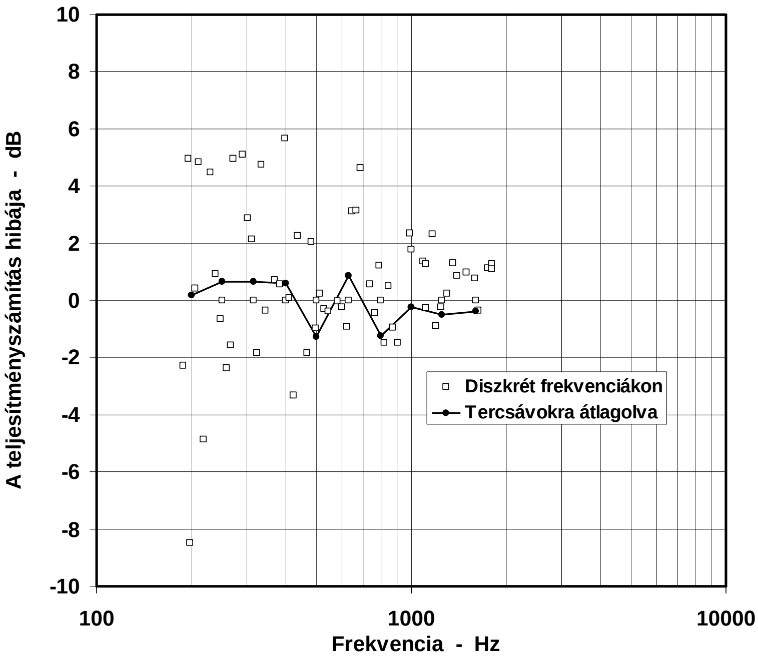
A módszer kísérleti változatánál nemcsak a részfelületeken áthaladó hangteljesítményt, hanem az átviteli függvényt is méréssel határozzák meg. A numerikus alkalmazásnál az átviteli függvényt pl. peremelem módszerrel számíthatjuk, a forrás jellemzésére azonban mindenképpen a hangteljesítmény mért értékeire van szükség. A módszer numerikus implementálása elvben egyszerű, de néhány elvi megfontolásra és a gyakorlat igényei szerinti módosításra mindenképpen szükség van.

Az ipari gyakorlatban használt peremelem szoftverek megengedik pontforrások alkalmazását, a numerikus stabilitás azonban csak akkor őrizhető meg, ha a forrás felülete elé helyezett pontforrás mögött nagyon erősen finomítják, sűrítik a felület rácsozását. Célszerőbb, ha a megfelelő helyeken egy-egy peremelemet magát tekintünk egyenértékű monopólusnak, melynek forráserősségét az (5.14) egyenlet alapján határozzuk meg.

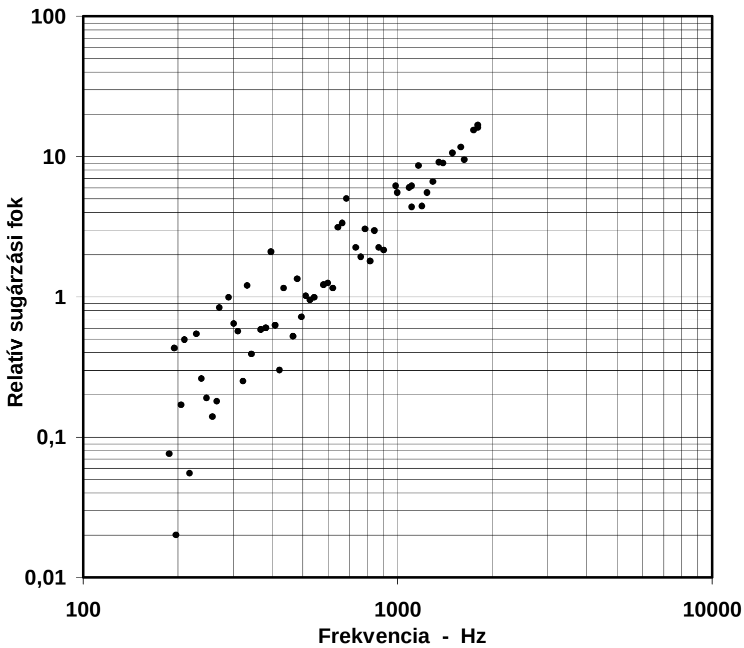
Egy peremelem probléma megoldásához a források rezgéssebessége mellett azok fázisát is meg kell adnunk. A helyettesítő módszer alapfeltevése a források korrelálatlansága, a peremelem módszer azonban szinuszos jelekkel és konkrét frekvenciákkal dolgozik, ami teljes mértékben korrelált változókat jelent. A sugárzási átvitel számítását ezért minden egyes monopólussal (és minden frekvenciára) külön-külön el kell végezni és a kapott eredményeket négyzetesen átlagolni kell. Az ipari gyakorlatban előforduló modellek mérete (általában több ezer elem és csomópont) reális időn belül nem teszi lehetővé ezt a megközelítést.

Egy lehetséges kerülő út az, hogy minden egyenértékű monopólust egyidőben „rezgetünk”, de fázisukat véletlenszerűen állapítjuk meg. Számításokat végeztünk ezen – a továbbiakban „direkt”-nek nevezett – módon egy egyszerű példán: egy végtelen hangfalba helyezett 0.5 m átmérőjű dugattyún. Feltettük, hogy a dugattyú egy 2 m sugarú hipotetikus félgömbre átlagolva minden tercsávban 1 W/m^2 hangintenzitást kelt, amelyet a dugattyú felületén 20 véletlenszerűen megválasztott monopólussal kívánunk helyettesíteni. Egyszerűség kedvéért egyetlen részfelületet felvéve meghatároztuk a megfelelő térfogatsebességeket és a fenti, direkt utat követve számítottuk a félgömb felületén áthaladó, a helyettesítő forrásokból származó eredő hangteljesítményt. Az 5.2. ábra jól mutatja, hogy az eredmények pontossága nem kielégítő: szinuszos jelekre a hiba -9 és +6 dB között ingadozik, és tercsávonként 6 frekvenciát átlagolva is -2 és +1 dB közötti hiba mutatkozik. A kedvezőtlen eredmény az 5.3. ábra alapján jól magyarázható: az egyes helyettesítő elemek közötti kölcsönös akusztikai impedancia jelentősen befolyásolja az elemek sugárzási impedanciáját, ami a térbeli és frekvenciasávonként végzett átlagolás ellenére még mindig nagy hibát okoz.

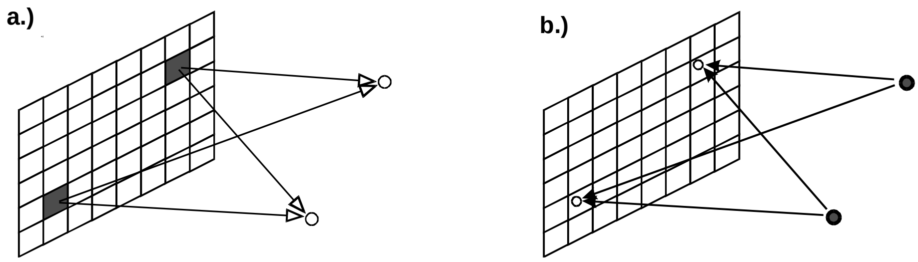
A direkt módszer helyett célszerűbb, ha a számítás – az 5.4.b ábrán látható módon – reciprok módon történik: a vizsgálandó távoltéri r pontban ismert forráserősségű pontforrást tételelezünk fel és az első lépésben már kiválasztott, forrást helyettesítő elemeken kialakuló felületi hangnyomást számítjuk. A megkapott átviteli függvények fázisát mellőzve az (5.15) egyenlet alapján meghatározzuk az átlagos teljesítményátvitelt, amiből a forráserősségek ismeretében az eredő hangnyomásszint nyerhető.



***5.2. ábra**: A direkt módszerrel számított eredő hangteljesítmény bemenő értékhez viszonyított eltérései*

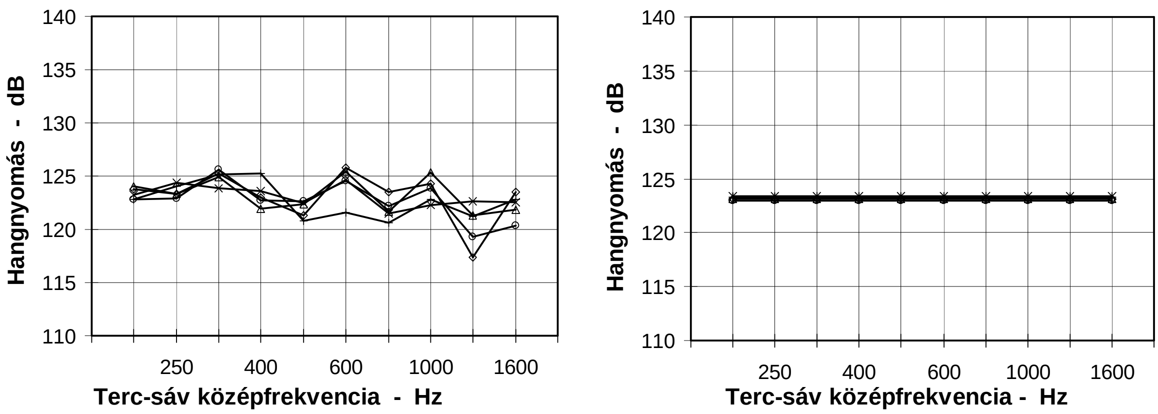


***5.3. ábra:** A helyettesítő peremelemek mint monopólusok relatív sugárzási hatásfoka direkt eljárás esetén. Az elemek sebesség peremfeltételeit az (5.14) egyenlet szerint, fázisukat véletlenszámok alapján generáltuk minden számítási frekvenciára.*



***5.4. ábra:** A helyettesítő monopólus módszer **a)** direkt és **b)** reciprok megvalósításának vázlata*

A kétféle módszer eredményeit az 5.5. ábrán hasonlítottuk össze. Az ipari igényeknek megfelelően a hangnyomásszinteket nem felület mentén átlagolva, hanem 5 véletlenszerűen választott pontra határoztuk meg a kétféle módszerrel. Amíg a direkt módszer az elméleti 123.4 dB-hez képest -6 és +3 dB közötti eltéréseket mutatott, a reciprok eljárás hibája igen csekély (a szórásmező 0.5 dB-en belüli) és ráadásul a frekvenciától független.



***5.5. ábra:** A számított hangnyomásszintek összehasonlítása az 5.2 ábra szerinti mérőfelület öt véletlenül választott pontjára a direkt (bal oldali diagram), ill. a reciprok (jobb oldali diagram) megvalósítás alapján.*

A reciprok módon implementált forráshelyettesítő módszer ipari validációját a következő fejezetben ismertetjük.

5.4. Új tudományos eredmények összefoglalása és tézisek

IV. tézis: Hangsugárzók hangterének numerikus meghatározása az energia szerinti egyenértékű helyettesítő monopólusok alkalmazásával

A rezgő felületek által létrehozott hangtér számítására analitikus és numerikus módszerek egyaránt rendelkezésre állnak. Összetettebb, ugyanakkor nagyobb pontosságot igénylő gyakorlati feladatok esetében azonban numerikus, leggyakrabban a peremelem módszerhez kell folyamodnunk. A peremelem módszer széleskörű gyakorlati alkalmazását részben a nagy számításigény, részben a felületi rezgéssebességekre vonatkozó részletes adatok hiánya korlátozza. Ez utóbbi megkerülésére az energia szerinti egyenértékű források módszerét adaptáltam hangsugárzási feladatok hatékony megoldására.

Numerikus kísérletekkel és ipari körülmények között is igazoltam, hogy egy rezgő forrás $\vec{r}$ *pontban keltett hangnyomását a gyakorlat igényeit kielégítő pontossággal úgy is meg lehet határozni, hogy a forrást* m *darab részfelületre osztjuk és sugárzását az egyes részfelületekhez rendelt* n *db monopólussal helyettesítjük.*

A helyettesítő monopólusok térfogatsebessége és a távoltéri pont hangnyomás közötti p/Q *átviteli függvényt gyorsabban és pontosabban lehet meghatározni, ha a rezgésakusztikai reciprocitás elve alapján nem a sugárzó felülettől a távoltéri pont felé haladó hullámok képviselte átvitelt, hanem a távoltéri pontba helyezett egységnyi forráserősségű monopólus és a felületen kialakuló hangnyomás közötti átviteli függvényt számítjuk.*

A helyettesítő monopólusok Q_{ij} forráserősségét a részfelületek hangteljesítmény-kontribúciójából számítjuk, a helyettesítő monopólusok forráserőssége és az $\vec{r}$ távoltéri pontban kialakuló hangnyomás közötti T_{jr} átviteli függvényt peremelem számítással határozzuk meg. Az eredő hangteret a

$$p(\vec{r})=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}T_{jr}Q_j^2}=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\left|\frac{p_r}{Q_{ij}}\right|^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n_j}Q_{ij}^2\right]} \tag{5.16}$$

egyenlet adja meg.

A tézishez kapcsolódó publikációk: [193], [197], [199], [202], [204]és [225].

6. fejezet

6. HANGGÁTLÓ SZERKEZETEK OPTIMALIZÁLÁSA

A különféle hanggátló szerkezetek a leggyakrabban alkalmazott passzív zajcsökkentési eljárások közül valók. A hanggátló szerkezetek működésmódjának lényege, hogy a hangterjedés útjában álló szerkezetek impedanciája jóval nagyobb a levegő impedanciájánál, ezért a hanghullám és a hanggátló szerkezet közötti energiacsatolás kismértékű marad, a hangenergia a szerkezetről – legalábbis valamilyen mértékben – “visszaverődik”.

A hanggátlás számítása és tervezése a nagyméretű és a forrás oldali hangteret körülzáró hanggátló szerkezetek esetén (pl. hagyományos, gyakran használt épület- és gépszerkezetek esetében) jól megalapozott és általában kielégíti a gyakorlati igényeit. L. Cremer adta meg elsőként egy végtelen, vékony, homogén és izotróp, négyzetméterenként m' tömegű lemez hanggátlásának képletét [155], mely szerint a felületi normálishoz képest θ szöggel beeső síkhullám esetén

$$R(\omega,\theta)=10\log\left\{\left[1+\eta\left(\frac{m'\omega\cos\theta}{2\rho_0 c}\right)\frac{\omega^2 B\sin^4\theta}{c^4 m'}\right]^2+\left(\frac{m'\omega\cos\theta}{2\rho_0 c}\right)^2\left(1-\frac{\omega^2 B\sin^4\theta}{c^4 m'}\right)\right\} \tag{6.1}$$

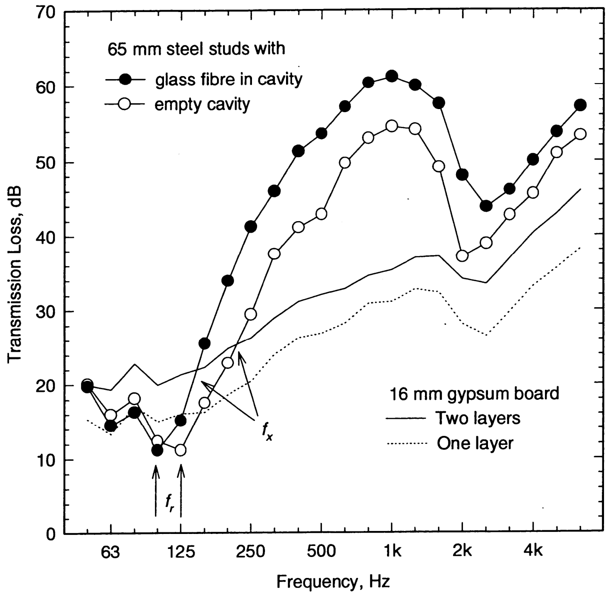
Viszonylag alacsony frekvenciákon a B hajlítómerevséget és a körfrekvencia négyzetét tartalmazó tagok jóval kisebbek lesznek egynél, ezért az összefüggés az

$$R(\omega,\theta)=10\log\left[1+\left(\frac{m'\omega\cos\theta}{2\rho_0 c}\right)^2\right] \tag{6.2}$$

alakra egyszerűsödik. Eltekintve az egészen alacsony frekvenciáktól, e formula szerint mind a frekvencia, mind az egységnyi felületre jutó tömeg kétszerezése egyaránt 6 dB hanggátlásnövekedést eredményez. Az egyszerűsített összefüggést ezért leggyakrabban tömegtörvénynek nevezik (korábban szokásban volt a Berger-törvény, ill. Szlavin-törvény elnevezés is).

A hanggátlás nagyobb frekvenciák felé egy kritikus frekvencián jelentősen leromlik, amit a hanggátló szerkezetben terjedő hajlító-, és a levegőben terjedő longitudinális hullámok hullámhosszának bizonyos körülmények között fellépő egybeesése (a *koincidencia* jelensége) okoz és amit a (6.1) összefüggés is helyesen közelít. Amint a

6.1. ábra példája is mutatja, a gyakorlati mérések tanúsága szerint az anyagok és szerkezetek jelentős része a közepes frekvenciák tartományában sem követi teljes mértékben a tömegtörvényt, a frekvenciafüggés általában elmarad a 6 dB-es kettőződéstől. Más, újabb modellek segítségével (ld. pl. [160]-ban) ebben a tartományban is kaphatunk pontosabb közelítést, analitikus módszerekkel azonban nagyon nehéz a kisfrekvenciás tartományt pontosan leírni.



6.1. ábra: *Egy- és kétrétegű gipszkarton falak hanggátlása [157] alapján*

A hanggátló szerkezeteket nagy számban alkalmazzák épületszerkezetekben, gépek hanggátló burkolataként, járműszerkezetekben, ezenkívül egyre gyakrabban a szabadban is, zajárnyékoló falként. Mindezen esetekre szabványos mérési és minősítési módszerek, termékkatalógusok és nagy tapasztalati adathalmaz áll a tervező rendelkezésére [158] [159], ezért a számítások fent részletezett hibái ellenére a tipikus hangátló szerkezetek tervezése kielégítő pontossággal elvégezhető. Az igazi nehézséget azok az esetek jelentik, amikor a működés megkívánt frekvenciatartománya és az egyéb paraméterek (súlykorlát, rendelkezésre álló hely, illetve erőgépek és géptokozások esetében a működtetés és hűtés miatt szükséges nyílások a hanggátló burkolaton stb.) nem teszik lehetővé a rutinszerű méretezési módszerek alkalmazását, vagy a passzív szerkezetek alkalmazásával elérhető hanggátlást nem elegendő. Ez a fejezet néhány ilyen speciális zajcsökkentési feladat megoldásának a megszokottól eltérő, új módszereivel foglalkozik.

6.1. Kettősfalú szerkezet hanggátlásának javítása aktív zajcsökkentés módszerével

Ha a szükséges hanggátlást nem lehet a fajlagos tömeg igény szerinti növelésével biztosítani, akkor legtöbbször többrétegű falakat, ill. speciális anyagokat és/vagy szerkezeteket alkalmaznak. Kétretegű falak esetén a többszörös impedanciaváltás a közepes frekvenciatartományban az egyrétegűnél nagyobb hanggátlást eredményez, de kisebb frekvenciák irányában a hanggátlás jóval kisebb is lehet, mint ugyanolyan vastag egyrétegű fal esetén. Nagyobb frekvenciák felé – a koincidencia jelenségén túl – a falak közötti térben kialakuló állóhullámok, egészen kisfrekvenciákon pedig a tömeg-rugó-tömeg rezonancia jelensége és a lemezekben kialakuló sajátrezgések is jelentősen csökkenthetik az eredő hanggátlást [11], [158], [159]. A rendszer viselkedésének klasszikus számítási módszerekkel való követése különösen problematikussá válik akkor, ha a szerkezet mérete a hangterjedés irányában is összemérhetővé válik a hullámhosszal.

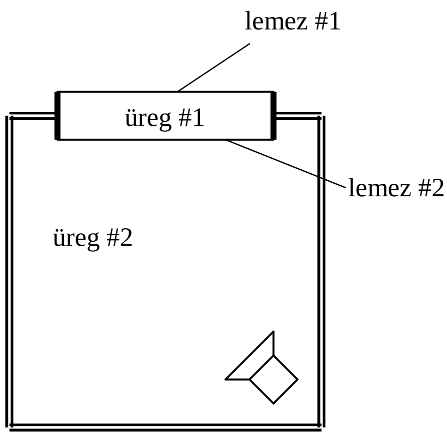
Az elmúlt egy-két évtizedben több vizsgálat és kísérletsorozat célozta meg a többrétegű falszerkezetek hanggátlásának aktív módszerekkel történő javítását. A csillapítani kívánt zajból vagy rezgésből akusztikai vagy mechanikai érzékelőkkel nyert primer jelek alapján egy digitális jelfeldolgozó rendszer szekunder rezgéseket állít elő, melyeket a megfelelő amplitúdóval, ellentétes fázisban a védett oldalon hang vagy rezgés formájában a rendszerbe juttatunk. Helyes vezérlés esetén csökken a védett oldalra átjutó hangteljesítmény, azaz nő a hanggátlás. A témának mára már kiterjedt irodalma van (ld. pl. [161] - [163]), néhány, védelmi vonatkozású megoldástól eltekintve azonban széles körben elterjedt gyakorlati alkalmazásról még nincs tudomásunk.

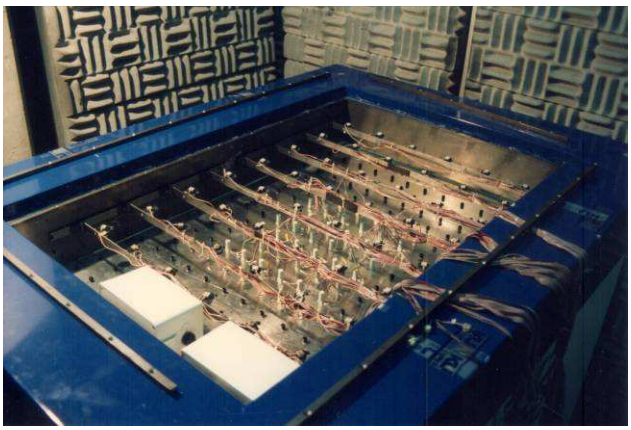
Az aktív rendszerek működésének egyik sarkalatos pontja mindig az, hogy a beavatkozással érintett rendszer működését nagyon pontosan ismernünk kell, ellenkező esetben a rendszer nem lesz kellően hatékony, könnyen instabillá válhat, sőt lehetséges, hogy a csillapítás erősítésbe csap át. Többrétegű falszerkezetek esetében ez az egyes rétegek mint mechanikai, és a közöttük levő üreg, mint akusztikai részrendszer közötti csatolások részletes feltárását és figyelembe vételét igényli.

A jelen elemzés egy olyan vizsgálatsorozatot tárgyal, melynek végcélja az aktív zajcsökkentési technológia repülőgépiparban alkalmazható módszereinek megalapozása volt [247]. Laboratóriumi körülmények között épített, egyszerű modellen végeztünk elméleti számításokat és igazoló kísérleteket. A kapott eredmények alapján sikeres aktív zajcsökkentési kísérletek lebonyolítására is sor került.

6.1.1. *Szerkezet-közeg kölcsönhatás analitikus elemzése*

Az alkalmazott analitikus, ill. kísérleti modell (ld. a 6.2. ábrát) egy hosszúságához és szélességéhez képest alacsony, téglatest alakú üreg, melyet oldalról merev falak, alulról és felülről rugalmas lemezek határolnak. A lemezeket a kerethez légzáróan és merev befogást biztosító elemekkel rögzítettük, és az egész modellt egy zárt, kettős falú doboz fedőlapjában helyeztük el, hogy a vizsgálandó szerkezeten átjutó hanghullámok hangtere a gerjesztéstől elválasztva, szabad hangtérben vizsgálható legyen.





6.2. ábra: *Elvi modell és annak megvalósítása (a felső, 1-es számú lemez eltávolítva)*

A szerkezet méretezése és az anyagválasztás – a tervezett ipari alkalmazás érdekében – olyan volt, hogy mind az akusztikai üregnek, mind a lemezeknek számos sajátfrekvenciája essék a vizsgálat 50-250 Hz közötti frekvenciatartományába.

A kettős falak hagyományos akusztikai irodalomban szokásos megközelítése szerint [158], [159] a rendszer legegyszerűbben egy két szabadságfokú, tömeg-rugó-tömeg modellel helyettesíthető, amelynek két sajátfrekvenciája

$$\omega_1 = 0 \quad és \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\rho c_0^2}{d}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)} \tag{6.3}$$

A szerkezetnek a nem zérus sajátfrekvencián nulla, sőt negatív hanggátlása is lehet, jóval afölött azonban a hanggátlás a két lemez együttes hatásaként az azonos tömegű egyrétegű szerkezetnél meredekebben emelkedik (ld. a 6.1 ábrán).

Céljainkra ennél sokkal pontosabb elemzés szükséges, melynek alapját a 4.1 szakasz szerinti, az adott feladathoz és a rendelkezésre álló kísérleti lehetőségekhez adaptált modális sorfejtés képezi. A (4.1) és (4.2) egyenleteket kissé átrendezve az alapegyenletek a következők:

$$\ddot{x}_p + \varpi_p^2 x_p + \frac{\rho_0 S}{\Lambda_p}\sum_r \dot{\Phi}_r C_{rp} = \frac{F_p}{\Lambda_p} \tag{6.4}$$

$$\ddot{\Phi}_r + \omega_r^2 \Phi_r - \frac{c_0^2 S}{\Lambda_r}\sum_p \dot{x}_p C_{rp} = -c_0^2 \frac{Q_r}{\Lambda_r} \tag{6.5}$$

ahol p = 1, 2, 3, …, ∞ és r = 0, 1, 2, …, ∞.

A megoldáshoz a figyelembe vett módusok számát véges értékre kell korlátoznunk. A mechanikai rendszerek módusaiból m, az akusztikai módusok közül n +1 darab módust tekintve (azért így, mert a mechanikai részrendszernek nincs merevtest módusa, de – a légmentesen zárt rendszer következtében – az akusztikai részrendszernek igen) a kétszeresen végtelen számú differenciálegyenletből $m+n+1$ darab egyenlet marad. Csak ω frekvenciájú szinuszos jeleket tekintve ezzel az alábbi egyenletrendszer írható fel:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \varpi_1^2-\omega^2 & 0 & 0 & j\omega A_{01} & \cdots & j\omega A_{n1} \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \varpi_m^2-\omega^2 & j\omega A_{0m} & \cdots & j\omega A_{nm} \\ \hline -j\omega B_{01} & \cdots & -j\omega B_{0m} & 0-\omega^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ -j\omega B_{n1} & \cdots & -j\omega B_{nm} & 0 & 0 & \omega_n^2-\omega^2 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} X_1 \\ \vdots \\ X_m \\ \hline P_0 \\ \vdots \\ P_n \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} F_1' \\ \vdots \\ F_m' \\ \hline Q_0' \\ \vdots \\ Q_n' \end{array}\right\} \tag{6.6}$$

ahol

$$A_{rp} = \frac{\rho S}{\Lambda_p} C_{rp} = \frac{\rho S}{\Lambda_p}\frac{1}{S}\oiint_S \psi_r\left(\vec{r}_s\right)\varphi_p\left(\vec{r}_s\right) dS\,, \tag{6.7}$$

$$B_{rp} = \frac{c_0^2 S}{\Lambda_r} C_{rp} = \frac{c_0^2 S}{\Lambda_p} \frac{1}{S} \oiint_S \psi_r(\vec{r}_s) \varphi_p(\vec{r}_s) dS\,, \tag{6.8}$$

$$F_p' = F_p / \Lambda_p = F_p \Big/ \oiint m(\vec{r}_S) \varphi_p^2(\vec{r}_S) dS\,, \tag{6.9}$$

$$Q_r' = -c_0^2 Q_r / \Lambda_r = -c_0^2 Q_r \Big/ \iiint_V \psi_r^2(\vec{r}) dV\,, \tag{6.10}$$

a (4.3) - (4.6) összefüggésekkel összhangban.

A (6.6) egyenlet ismeretlenjei a szerkezeti módusok X_1 - X_m és az akusztikai módusok P_0 - P_n súlyozó tényezői. Ezek segítségével az eredő megoldás a csatolatlan szerkezeti és akusztikai módusok súlyozott összegezésével kapható meg:

$$x(\vec{r}_s, \omega, t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\vec{r}) X_j(\omega, t) \tag{6.11}$$

$$p(\vec{r}, \omega, t) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i(\vec{r}) P_i(\omega, t) \tag{6.12}$$

Ha csatolás nem lenne a rendszerben, akkor a kölcsönhatásokat képviselő jobb felső és bal alsó almátrix minden eleme nulla lenne. Ebben az esetben egy tetszőleges, i-edik akusztikai módus súlyozótényezőjére a

$$P_i = -\frac{c_0^2}{\left(\omega_i^2 - \omega^2\right)} \frac{\iiint_V q \psi_i dV}{\iiint_V \psi_i^2 dV} \tag{6.13}$$

összefüggést kapnánk. Ha most az akusztikai gerjesztés csak egyetlen pontra korlátozódik, akkor a számlálóban csak a térfogatsebesség és az akusztikai módus szorzata marad, ami a monopólussal gerjesztett akusztikai rendszerekre vonatkozó (3.14) egyenlettel összhangban levő összefüggéshez vezet.

Csatolás esetén az almátrixok elemei nullától különbözők: a (6.7) és (6.8) egyenletek értelmében annál nagyobbak, minél nagyobb a szerkezeti és akusztikai módusok közötti hasonlóság a két szerkezet határfelületén. (A módusokkal kapcsolatos geometriai hasonlóság más kontextusban már korábban is felmerült elemzéseink során. A dinamikus – mechanikai, akusztikai stb. – rendszerek sajátrezgéseinek mindig szoros rokonságot kell mutatniuk a rendszer geometriai jellemzőivel, hiszen csak így érvényesülhetnek a peremfeltételek korlátozó hatásai.) A szerkezet valamelyik sajátrezgésének módusalakja akkor tudja legjobban befolyásolni az akusztikai részrendszer viselkedését (és viszont), ha a sajátrezgéseik alakja az illeszkedő felületeken hasonló, netán teljesen megegyezik.

A (6.6) egyenlet tömörebb formába is írható:

$$\begin{bmatrix} \lceil \Omega_s \rfloor & [A_{as}] \\ [B_{sa}] & \lceil \Omega_a \rfloor \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F'\} \\ \{Q'\} \end{Bmatrix} \tag{6.14}$$

ahol $\lceil \Omega_s \rfloor$ és $\lceil \Omega_a \rfloor$ a csatolatlan rendszerek sajátfrekvenciát tartalmazó diagonálmátrixok, $[A_{as}]$ és $[B_{sa}]$ pedig a (Rayleigh által girosztatikusnak nevezett) csatolást képviselő mátrixok. A csatolt rendszer sajátfrekvenciájának meghatározásához a (6.14) egyenlet jobb oldalát nulla vektorral kell helyettesíteni. Mivel a csatolási mátrixokban a körfrekvencia is szerepel első hatványon, a feladat sajnos nem-standard sajátérték-problémához vezet, de megfelelő mátrixtranszformáció [81] segítségével viszonylag könnyen megoldható.

A csatolt rendszer (6.14) egyenlete fizikailag úgy interpretálható, hogy amíg az eredeti, csatolatlan részrendszerek válaszát m, ill. $n+1$ db módusalak szuperpozíciójával külön-külön elő lehetett állítani, addig az eredő rendszernek $n+m+1$ darab közös módusa van. E közös módusok sajátfrekvenciái kisebb-nagyobb mértékben eltérnek a részrendszerek sajátfrekvenciáitól, és mindegyikükhöz olyan súyozótényezők kapcsolódnak, amelyek az eredeti részrendszerek tulajdonságaitól valamilyen módon és mértékben eltérő eredő hang- és rezgésállapotot hoznak létre a csatolt rendszerben.

Eredeti problémánkra visszatérve a (6.14) egyenletet tovább kell bontanunk, hiszen az egyelőre nem alkalmas a kettősfalú rendszer lemezeinek külön-külön történő kezelésére. A 6.1. ábra szerint a vizsgálandó szerkezetet egy másik üreg és az abban elhelyezett, pontforrásnak tekinthető hangszóró segítségével gerjesztjük, és a rendszer válaszát a felső, 1-el jelölt lemez rezgésével jellemezzük.[1] Mindezek alapján a rendszert leíró eredő egyenletrendszer a következő sematikusan felírt alakot ölti:

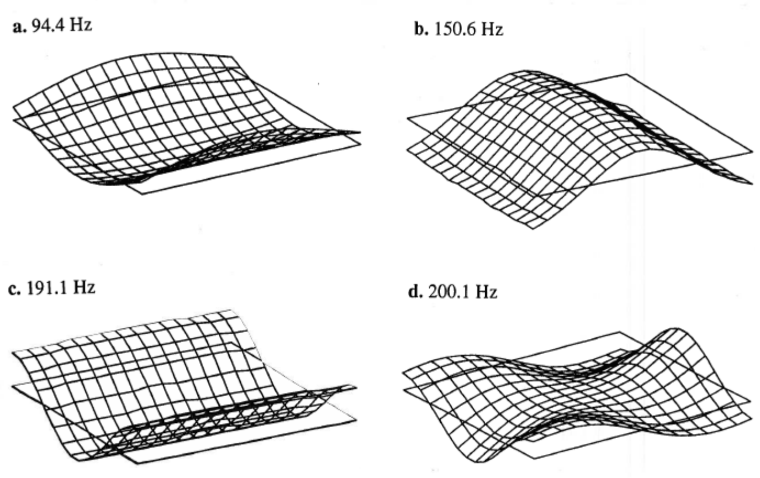
$$\left[\begin{array}{c:c:c:c} \left[\Omega_{üreg1}\right] & \left[cs_{ü1l1}\right] & [0] & [0] \\ \hdashline \left[cs_{l1ü1}\right] & \left[\Omega_{lemez1}\right] & \left[cs_{l1ü2}\right] & [0] \\ \hdashline [0] & \left[cs_{ü2l1}\right] & \left[\Omega_{üreg2}\right] & \left[cs_{ü2l2}\right] \\ \hdashline [0] & [0] & \left[cs_{l2ü2}\right] & \left[\Omega_{lemez2}\right] \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \{P\}_{ü1} \\ \hline \{X\}_{l1} \\ \hline \{P\}_{ü2} \\ \hline \{X\}_{l2} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c} \{Q'\} \\ \hline \{0\} \\ \hline \{0\} \\ \hline \{0\} \end{array}\right] \tag{6.15}$$

A sajátfrekvenciák ebből az egyenletből az előzőhöz hasonló módszerrel határozhatók meg a jobboldal nullává tétele után. Az ismeretlen $\{P\}$ és $\{X\}$ vektorok a futó frekvencia behelyettesítésével, direkt módszerrel kaphatók meg. A megkapott súlyozótényezőket és a csatolatlan módusok módusalakjait a (6.11) és (6.12) egyenleteknek megfelelő módon összegezve nyerjük az eredő gerjesztett válaszokat a csatolt rendszer egyes elemein.

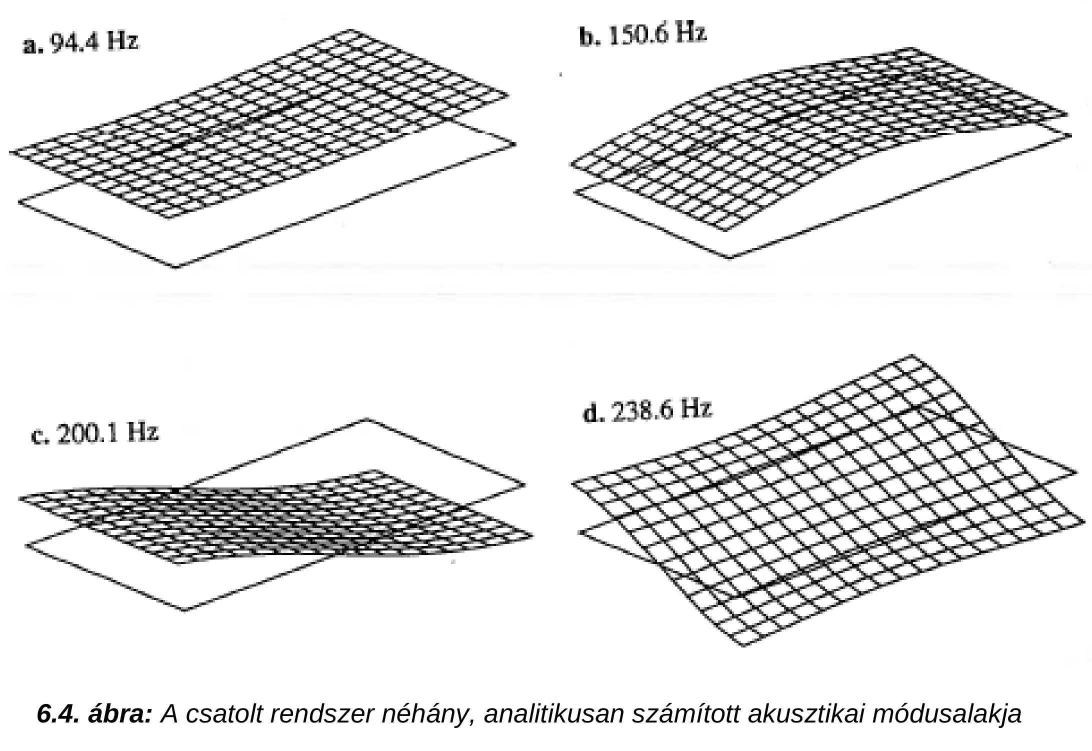
[1] Megjegyezzük, hogy ez a kísérleti összeállítás eltér a zajcsökkentési gyakorlatban használatos, szabványos hanggátlásvizsgálati módszertől. Az adott vizsgálatsorozat célja azonban nem az abszolút hanggátlás meghatározása, hanem az aktív módszerrel elérhető relatív hanggátlásnövekedés vizsgálata volt, ezért a rendelkezésünkre álló laboratórium körülményei között, egyszerű eszközökkel biztosítható mérési összeállítás is megfelelt az adott célnak.

6.1.2. Számítási eredmények

Az analitikus vizsgálat eredményeit kísérletekkel ellenőriztük, melyek részletei a [186], [187], [188] és [196] forrásokban találhatók. Amint az az elmélet alapján várható, a számítással meghatározott csatolt rendszer viselkedése a (6.7) és (6.8) egyenletben szereplő csatolási tényezőkön fordul meg. A csatolás erősen szelektív: a vizsgált rendszer szabályossága és a részrendszerek nagyon hasonló geometriája következtében csak viszonylag kevés móduskombináció ad nullától különböző értéket (azaz a csatolási mátrixok szórványosak), és a magasabb rendszámú, nem nullát erdményező kombinációk csatolási együtthatója is alacsony, a szummában gyakorlatilag elhanyagolható. Mindezek következtében a csatolt módusalakok is viszonylag kevés számú csatolatlan módus jellemzőit viselik magukon.



6.3. ábra: *A csatolt rendszer néhány analitikusan számított szerkezeti módusalakja*



6.4. ábra: *A csatolt rendszer néhány, analitikusan számított akusztikai módusalakja*

6.1. táblázat: *Csatolt sajátfrekvenciák összevetése az in vacuo mechanikai és merev falú üregre számított akusztikai részrendszer sajátfrekvenciáival*

A csatolatlan szerkezet numerikusan számított sajátfrekvenciái		A csatolt rendszer analitikusan számított sajátfrekvenciái, a megadott két csatolatlan akusztikai módus figyelembe vételével			
Frekvencia [Hz]	Módusalak	0 Hz	149.1 Hz	233 Hz	279.8 Hz
		(0,0,0)	(1,0,0)	(0,1,0)	(1,1,0)
		301.8 Hz	447.4 Hz	378 Hz	504.3 Hz
		(2,0,0)	(3,0,0)	(2,1,0)	(3,1,0)
16.6	(1,1)	0			
24.8	(2,1)		22.0		
38.9	(3,1)	35.7			
41.1	(1,2)			38.9	
48.5	(2,2)				46.8
58.7	(4,1)		57.0		
61.3	(3,2)			60.0	
78.2	(1,3)	68.7			
79.6	(4,2)				78.6
83.9	(5,1)	82			
85.1	(2,3)		83.9		
96.9	(3,3)	94.4			
103.4	(5,2)			102.9	
113.5	(4,3)		112.3		
114.5	(6,1)		113.8		
127.6	(1,4)			126.3	
132.6	(6,2)				132.1
134.2	(5,3)	134.3			
136.3	(2,4)				135.5
145.3	(3,4)			144.7	
150.3	(7,1)	150.6			
161.1	(4,4)				160.7
163.9	(6,3)		162.8		
167.5	(7,2)			167.0	
182.2	(5,4)			182.0	
189.5	(8,1)		191.3		
191.2	(1,5)	191.1			
195.4	(7,3)	195.5			
197.1	(2,5)		200.1		
205.5	(8,2)				204.9
206.4	(6,4)				206.3
208.4	(3,5)	208.3			
221. 1	(4,5)		221.3		
234.7	(8,3)		234.8		
237.2	(9,1)	237			
239.1	(7,4)			238.6	
241.3	(5,5)	241.3			
25 2. 3	(9,2)			247.3	
		101.7	171.6	255.5	293.9
		317.5	456.7	388.7	511.7

Az *in vacuo* szerkezeti, ill. merev falú akusztikai módusokat és a (6.15) egyenletből meghatározott csatolt sajátfrekvenciákat a 6.1 táblázatban foglaltuk össze, a 6.3 és 6.4. ábrán pedig a csatolt rendszer néhány jellegzetes módusalakját mutatjuk be.

(A 6.3. ábrán csak az alsó lemez módusalakjait szemléltetjük, a felső lemez módusai gyakorlatilag azonos alakúak, de ellentétes fázisúak.)

Látható, hogy az adott rendszer geometriai és anyagjellemzői következtében az *in vacuo* szerkezeti sajátfrekvenciák a merev falú akusztikai részrendszer sajátfrekvenciáinál jóval alacsonyabbak. Ennek a nagy eltérésnek tulajdonítható, hogy a csatolt rendszer szerkezeti sajátfrekvenciái a csatolatlan szerkezeti sajátfrekvenciák értékétől alig térnek el, és a csatolatlan és csatolt rendszer szerkezeti módusalakjai is meglehetősen hasonlók.

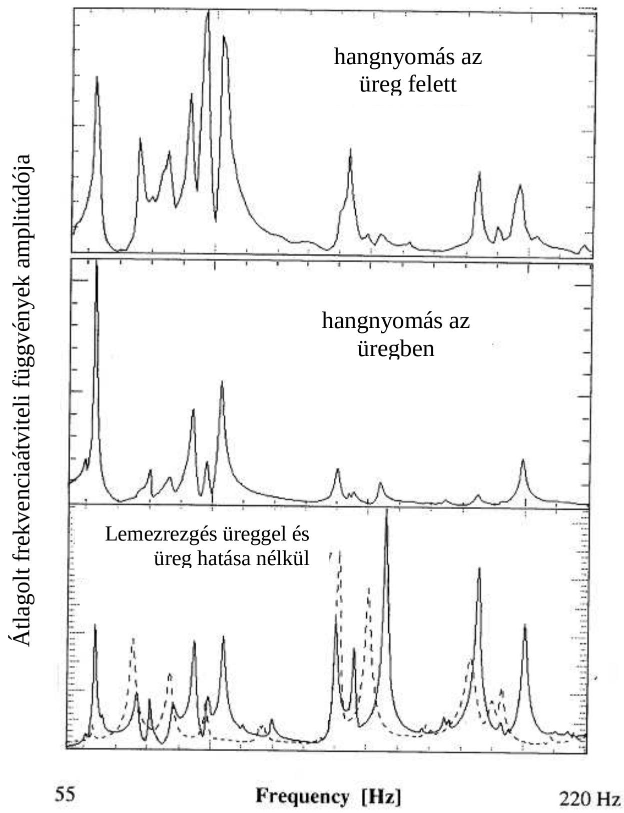
6.1.3. Kísérleti vizsgálatok eredményei

Az elméleti eredményeket a 6.2. ábra berendezésén elvégzett kísérletek segítségével verifikáltuk, melynek részleteit a [188] és [196] publikációk tartalmazzák.

6.2. táblázat: *Kísérleti móduselemzéssel megállapított sajátfrekvenciák*

Szerkezeti módusok				Akusztikai módusok	
csatolatlan		csatolt		csatolt	
f [Hz]	módusalak	f [Hz]	módusalak	f [Hz]	módusalak
43.8	(3,1)				
62.7	(4,1)	63.4		62.8	(0,0,0)
		65.8			
75.4	(1,3)	76.9	(1,3)		
		80.9		79.9	(0,0,0)
86.8	(5,1)	87.8		86.7	(0,0,0)
		94.8		93.5	(0,0,0)
		98.9		98.2	(0,0,0)
98.5	(3,3)	104.0	(3,3)	102.7	(0,0,0)
116.5	(4,3)	119.9		118.0	
121.5				121.0	
123.2					
134.4	(6,2)	136.3			
		140.2		140.0	
140.9	(5,3)	146.5	(5,3)	144.8	
150.6	(7,1)	155.8	(7,1)	153.7	
163.9	(4,4)	167.9	(4,4)	164.6	
169.4	(7,2)	175.3	(7,2)	174.4	
182.8	(1,5)	185.3		184.7	
190.0	(8,1)	193.2			
		195.6			
193.0	(2,5)	200.3		199.3	(1,0,0)
208.5		211.9			
211.4	(3,5)	213.8			
216.0	(6,4)	221.6	(6,4)	220.6	
223.8	(4,5)	228.4	(4,5)	226.6	
233.8	(9,1)	238.6	(9,1)	237.5	(0,1,0)
251.0	(9,2)	249.1		249.5	

A 6.2. táblázatban a sikeresen extraktált módusok sajátfrekvenciáit gyűjtöttük össze, melyek számossága jóval elmarad a számítottakétól. A csatolatlan és csatolt mérésből származtatott szerkezeti módusok hasonlósága az elméletnek megfelelő. Különösen figyelemre méltóak az akusztikai részrendszerben megállapított módusok: az első hat csatolt akusztikai sajátrezgés módusalakja a nulla frekvenciás, „akusztikai merevtest” módusnak felel meg, és csak a sokadik, 199 Hz-es módusalak azonosítható az (1,0,0) merev falú akusztikai sajátrezgés módusalakjával.



***6.5. ábra**: A 6.2. ábra szerinti rendszerrel nyert kísérleti eredmények. Felső diagram: a kettősfalú szerkezet felett 10 cm magasságban mért átlagos hangnyomás, középső: az 1-es üregben mért átlagos hangnyomás, alsó diagram: a 2-es lemez átlagos rezgésgyorsulása zárt üreg (folytonos vonal), ill. eltávolított 1-es lemez esetén (szaggatott vonal). Vonatkoztatási jel a hangszóró gerjesztő feszültsége.*

6.1.4. A kettősfalú szerkezetek hanggátlására vonatkozó következtetések

A kettősfalú rendszer hanggátlását befolyásoló tényezőkre a 6.5. ábra alapján következtethetünk, ahol az üregben és az üreg felett mérhető hangnyomás, valamint az alsó lemezen mért rezgésgyorsulás átlagos frekvenciaátviteli függvényét hasonlítottuk össze. A legnagyobb eredő átvitelek – azaz a legkisebb hanggátlások – frekvenciái a csatolt rendszer közös sajátfrekvenciái; ezen frekvenciákon a rendszerben szereplő minden elem válasza lokális maximumot mutat. A hanggátlás növelése érdekében tehát a csatolt rendszer módusalakjainak maximális kitérésű pontjain kell ellenfázisú gerjesztéssel beavatkozni. A mechanikai részrendszer sajátrezgéseit bonyolult, magas rendszámú módusalakok jellemzik, amelynél nem elegendő egy vagy két mechanikai beavatkozó elem (Active Structural Acoustic Control, ASAC) alkalmazása. Könnyebb megvalósítani és jobb eredményeket várhatunk az akusztikai rendszer módosításától, amelyet a fennálló akusztikai módusok maximális amplitúdójú pontjainak egyikében, célszerűen az üreg sarkában kell elhelyezni (Active Acustic Control, AAC). Az elvégzett numerikus optimalizáció és a kísérleti eredmények igazolták e megállapításokat [195], [208], az aktív zajcsökkentés módszerének és eredményeinek ismeretetése azonban meghaladja értekezésünk terjedelmi korlátait.

6.2. Részleges közeltéri tokozás hanggátlásának számítása

Az akusztikában akkor beszélünk tokozásról, ha egy zajos gép, motor vagy egyéb hangforrás zaját a forrást viszonylag kis távolságban körülvevő, hanggátló anyagból készült burkolattal kívánjuk csökkenteni. Ez a tokozás technológiai és hőtechnikai okok miatt általában nem lehet teljesen zárt. Amennyiben a nyílások felülete összemérhető a tokozás méretével, részleges tokozásról beszélünk. Ilyen részleges, közelfekvő tokozást gyakran alkalmaznak a magasabb minőségi kategóriába eső személygépkocsik motorterének alsó lezárására, nagyteljesítményű autóbusz- és tehergépkocsi motorok körül, zajos fa- és fémmegmunkáló gépek körül és számos más berendezés közelében. A tokozások tervezésére nincs megfelelő analitikus számítási módszer; az ipari gyakorlat kísérletezésen, a korábban már alkalmazott és ismert tulajdonságokkal rendelkező tokozások adott feladatra való adaptációján alapul. Célunk olyan számítási módszer kidolgozása volt, mellyel a részleges, közelfekvő tokozások jellemzői meghatározhatóvá, így a tokozás tervezhetővé válik.

6.2.1. Kölcsönhatások közelfekvő tokozás alkalmazása esetén

A közelfekvő tokozások zajcsökkentő hatását a beiktatási csillapítással[2] szokás jellemezni. E fogalom alatt azt a szintkülönbséget értjük, amennyivel az azonos üzemállapotban működtetett forrás adott pontban mért hangnyomása vagy előírt módon meghatározott hangteljesítménye a tokozás elhelyezésének következményeként lecsökken[3].

A tokozás hatásának számítása azért nehéz, mert annak elhelyezésekor egyidejűleg számos jelenség zajlik le. A közelben elhelyezkedő felületről visszaverődő hullámok miatt megváltozik a sugárzó felület sugárzási ellenállása, ezzel az azonos rezgéssebesség mellett lesugárzott hangteljesítmény is. (Nagyon kis belső impedanciával rendelkező hangforrás, pl. egy nagyméretű elektrodinamikus hangszóró esetén határesetben az is előfordulhat, hogy a környezet visszahatása a rezgéssebességet is befolyásolja. Nagyméretű, gépi vagy épületszerkezeti hangforrások esetében azonban ettől a kölcsönhatástól bízvást eltekinthetünk.) A forrásból kiinduló hanghullámok bonyolult kölcsönhatásba lépnek a tokozást képező szerkezettel: a forrás oldaláról rezgésbe hozzák, így az külső oldalán szekunder hangsugárzóvá válik. A tokozás résein, nyílásain és hiányzó felületein keresztül ugyanakkor továbbra is érvényesül a primer hangforrás sugárzása, amely többszörös reflexiók és diffrakciós jelenségek által módosítva jut a környező, általában egy vagy több oldalon merev felületekkel határolt hangtérbe. Mindezen hatásokat analitikusan nagyon nehéz számításba venni, és bár kísérletes módszerrel sok információt nyerhetünk [197], a tokozás előzetes megtervezésének általában nincs más alkalmas módja, mint a numerikus módszerek alkalmazása.

6.2.2. Tokozás hatásának számítása részleteiben ismert forrásmodell esetén

Amennyiben a hangforrás jellemzői jól ismertek – például egy megfelelő szerkezeti végeselem modell formájában – , a részleges tokozás hatásának vizsgálata a megfelelő numerikus módszerek közvetlen alkalmazásával megoldható. Egy európai kutatási projekt [248] keretében készült az az egyszerű motormakett, amelyet az ilyen módon alkalmazott numerikus módszerek verifikálására alkalmaztunk. A 6.6.a ábrán bemutatott szerkezet kialakítása olyan, hogy valamelyest közelítse egy tipikus motorblokk rezgési tulajdonságait: egy 400×300×150 mm külméretű, 5 mm vastagságú acéllemezből készült téglatest, amely alul nyitott és középen egy függőleges válaszfallal van merevítve. Az acéltestet vastag szilikongumi csíkok segítségével rögzítettük egy keményfa alaphoz, hogy így zárt sugárzót kapjunk, amit kívülről, egy

---

[2] *Insertion Loss*, röv.: *IL*

[3] A beiktatási csillapítás nem azonos a hanggátlással (*Transmission Loss*, *TL*), ami a szerkezetre beeső és az azon átjutó hangteljesítmény aránya, és meghatározásához a szerkezet mindkét oldalán hangteljesítményt kell mérni. A beiktatási csillapítás értékét ugyanazon helyen/helyeken végzett méréssel kell meghatározni a tokozás jelenlétében és anélkül, és hangnyomás- és hangteljesítményszintben egyaránt értelmezhető.

elektrodinamikus rezgésgerjesztő segítségével hoztuk rezgésbe. Az egész rendszert félszabad hangterű akusztikai mérőszobában állítottuk fel, hogy jól definiált akusztikai körülményeket teremthessünk a kialakuló hangtér méréséhez.

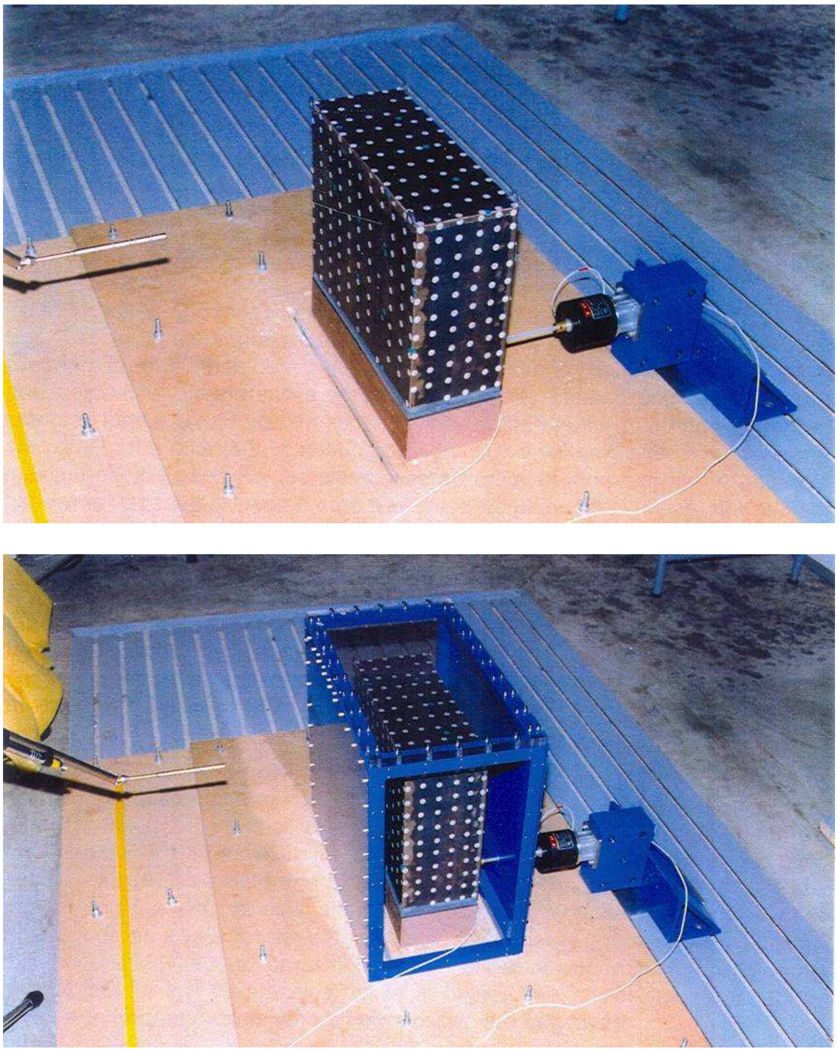
A méréssorozatot a makett modális modelljének meghatározásával kezdtük, amelyet a gerjesztő és a makett közé helyezett erőmérő cella és Doppler-lézeres sebességmérő segítségével nyert frekvenciaátviteli függvényekből generáltunk. (A fényképeken látható fehér pontok a jó fényvisszaverés érdekében felragasztott papírdarabkák, amelyek a szerkezet térbeli hálójának szemléltetésére is alkalmasak.) A modális modell és a gerjesztés frekvenciaspektrumának ismeretében meghatározható volt a makett felületi rezgéssebessége, ami a továbbiakban az indirekt peremelem számítási lépés bemenő adataiként szolgált. A hangtér mérésére egy hangintenzitás-mérő szondát használtunk, amelyet pozicionáló robot vitt végig a kiválasztott merőfelületek – általában téglalap alakú ponthálók – mentén. A makett néhány jellemző kitérésformáját a 6.7. ábrán szemléltetjük.

A méréseket először a magában álló maketten végeztük el, majd különféle zajárnyékoló elemek elhelyezésével megismételtük. Háromféle tokozást készítettünk: a makett legnagyobb oldalfalával egyező méretű merev árnyékoló lemezt, a makett kisebbik oldalai felé nyitott „alagút”-tokozást, illetve egy 5 × 5 cm méretű nyílás kivételével körül mindenütt zárt tokot. Az árnyékoló felületek 2-3 mm vastag acéllemezekből készültek, amelyeket erősen viszkózus dübörgésgátló lemez felragasztásával csillapítottunk. A kialakuló hangteret hangintenzitás térképekkel, ill. térben átlagolt hangintenzitás spektrumokkal jellemeztük és ezekből beiktatási csillapításgörbéket számítottunk.

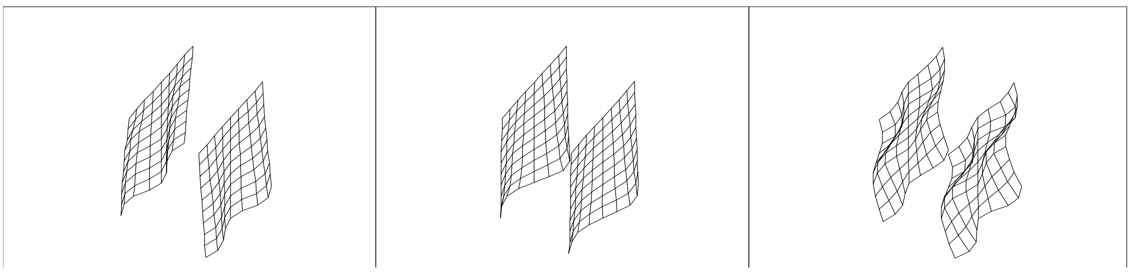
A kísérleti vizsgálatokat numerikus számítással követtük: a felületi háló pontjainak rezgéssebességét a SYSNOISE akusztikai peremelem program sebesség peremfeltételeként vittük be, az árnyékoló lemezt és a tokozásokat merev felületként kezeltük. Direkt kollokációs, ill. indirekt variációs módszer segítségével számítottuk a hangnyomásokat és hangintenzitásokat a mérési összeállításoknak megfelelő pontokban.

A sík lemezzel végzett mérések és a verifikációs számítások igazolták azt a lehetőséget, hogy egy közeltéri árnyékoló felület – hangelnyelő burkolat hiányában – meg is növelheti a forrás által lesugárzott hangteljesítményt. (A kapott eredményeket részletesen ld. [197]-ben.)

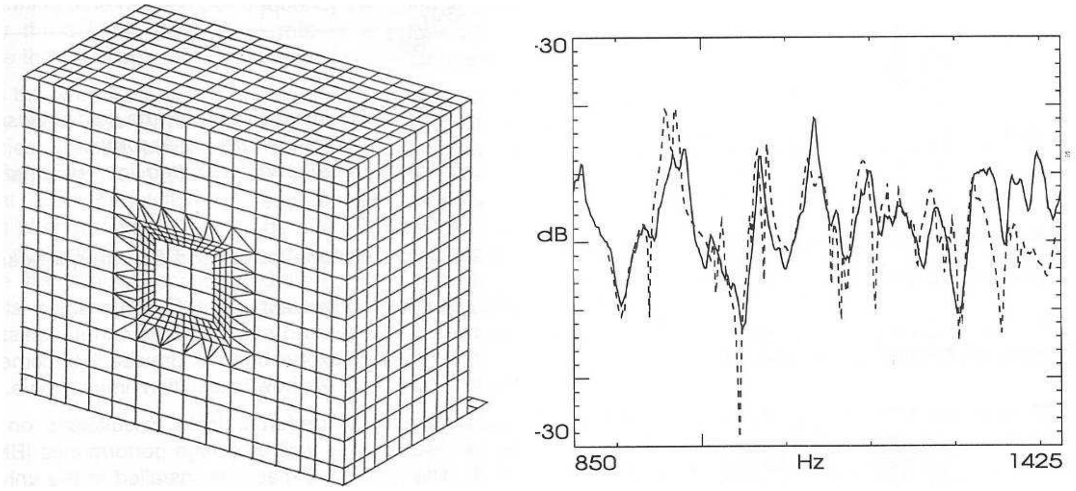
A 6.8. és 6.9. ábrán a valóságos alkalmazásokhoz közelebb álló elrendezés mért és számított beiktatási csillapítás görbéit mutatjuk be. A tokozás hatása ezekben az esetekben már kedvezőbb, a mérés és számítás egyezése jónak mondható, mind a csúcsok frekvenciái, mind pedig a csillapítási értékek tekintetében. Levonhatjuk tehát azt a következtetést, hogy megfelelően részletes és kellően pontos forrásmodell esetén a részleges, közelfekvő tokozások hatása standard numerikus módszerekkel jól becsülhető.



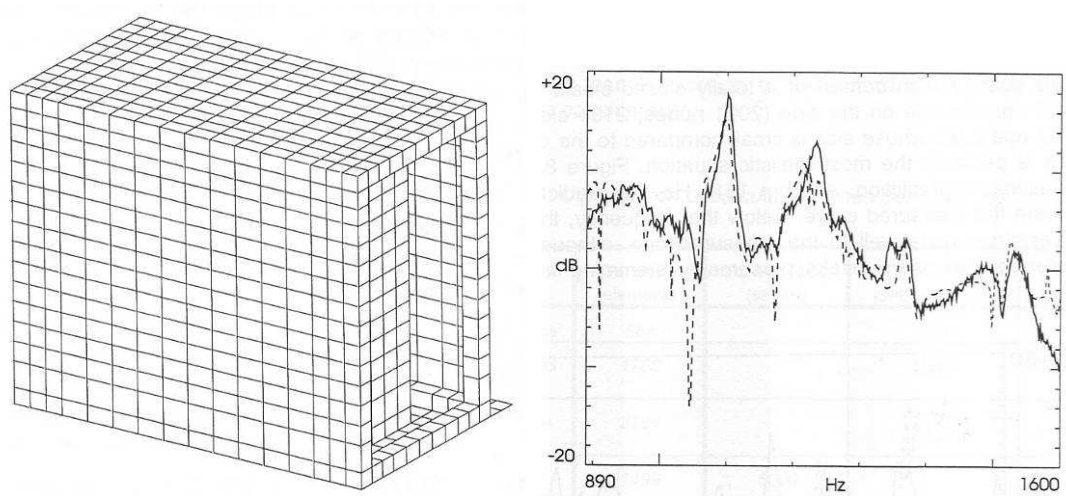
6.6. ábra: *Motormakett a félszabad terű mérőszobában rezgésgerjesztővel és pozicionáló robottal mozgatott hangintenzitásmérő szondával.*
Felső kép: tokozatlan forrás, alsó kép: merev alagút tokozás



6.7. ábra: *A motormakett előlapjainak néhány jellemző kitérési formája a 495, 515 és 1100 Hz sajátfrekvenciákhoz közeli frekvenciákon.*



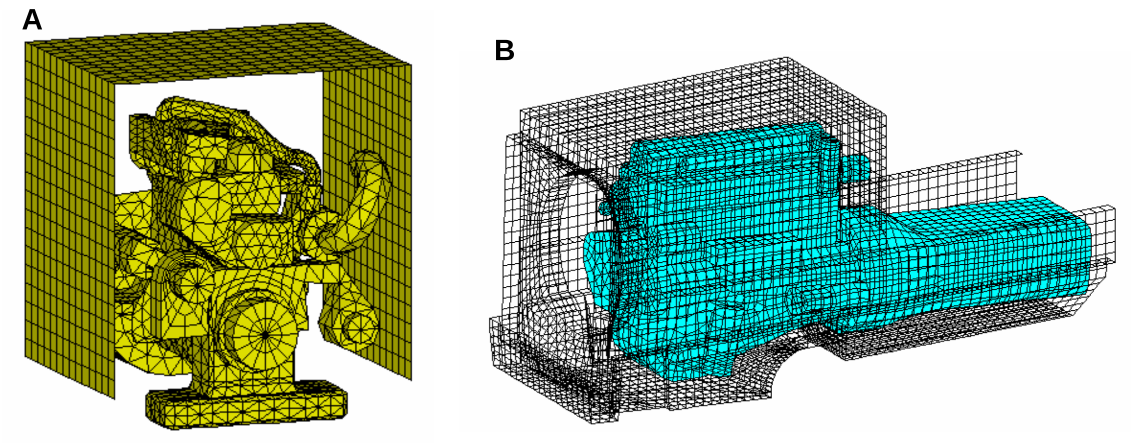
6.8.ábra: *Apertúra tokozás modellje, mért és számított beiktatási csillapításgörbéje*



6.9. ábra: *Alagút tokozás modellje, mért és számított beiktatási csillapításgörbéje*

6.2.3. Dízelmotorok részleges tokozásának számítása

A 6.2.2. szakasz szerinti numerikus technikák valóságos ipari körülmények között, így pl. nehéz tehergépkocsik motortokozásának tervezésére közvetlenül nem alkalmasak, mert a forrásról általában nem állnak rendelkezésre a szükséges részletességű rezgésadatok. (Egy európai kutatási projekt keretében ugyan dolgoztak ki belsőégésű motorok rezgésének számítására alkalmas komplett programrendszert [169], de ennek rutinszerű alkalmazása egyelőre elképzelhetetlen a napi ipari gyakorlatban.) A már említett kutatási projekt ezért részben kísérleti módszereket vizsgált [150], részben pedig az 5.1.3. szakaszban bemutatott helyettesítő források módszerével igyekezett megoldani a feladatot.



6.10. ábra: *Az **A** és **B** jelű dízelmotor tokozásának számítására kidolgozott peremelem modellek. (A Centro Ricerche Fiat S.C.p.A. és a DAF Trucks N.V. szívességéből)*

6.3. táblázat: *A vizsgált motorok mérési és modellezési paramétereinek összefoglalása*

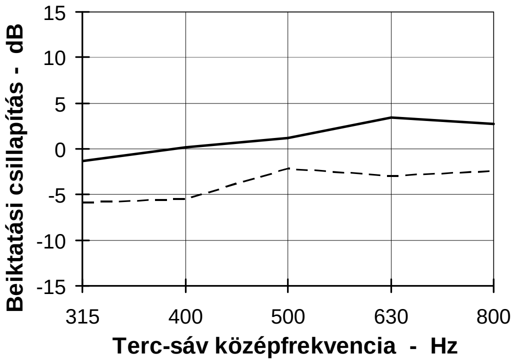
Mérési és számítási paraméterek	**A motor**	**B motor**
Üzemállapot a forrás körülmérése idején	állandó fordulatszám, maximális teljesítmény	állandó fordulatszám,, részterhelés
Üzemállapot a beitatási csillapítás mérése idején	állandó fordulatszám, maximális teljesítmény	ISO elhaladás szerint, max. töltés
Részfelületekhez rendelt ekv. monopólusok átlagos száma	2 - 7	< 1
Értékelési pont helye	Viszonylag közel, kb. 1.3 m	standard ISO pont (7.5 m)
A csupasz motormodell adatai	6556 elem, 3618 rács-pont, 168 térpont	4247 elem, 4278 rács-pont, 45 térpont
A tokozott motormodell adatai	7094 elem, 4312 rács-pont, 151 térpont	9804 elem, 9889 rács-pont, 45 térpont
Tercsávonkénti számítási frekvenciák száma	6	6
Közelítő számítási idő a csupasz motornál[4]	41 h	37 h
Közelítő számítási idő a tokozott motornál	54 h	286 h

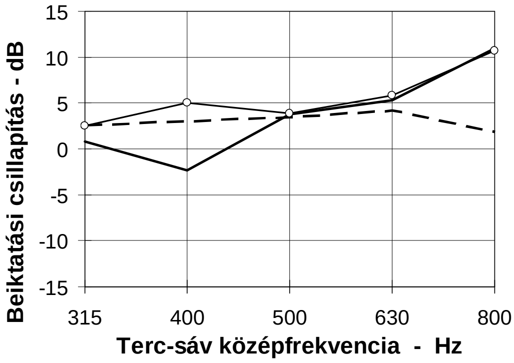
A vizsgált motorok adatait és a számítási paramétereket a 6.3. táblázatban foglaltuk össze, az elkészített peremelem modelleket a 6.10. ábrán mutatjuk be. A 6.10.a ábra szerinti modell és tokozás próbapadi körülményeket szimulált. A 6.10.b. modell egy tehergépkocsiba beépített, tokozott motor és az ISO 362 szabvány szerinti elhaladási zajmérés valóságos körülményeinek számítására készült, amelyben a motort egy alagút típusú tokozás veszi körül.

[4] A vizsgálatok idejében, 1996-ban igen korszerűnek számító, IBM RISC 6000 / Power 2 munkaállomáson

A vizsgált tokozásokon mindkét esetben hangelnyelő anyagot is alkalmaztak: 2 cm vastag üveggyapot paplant, ill. a gépjárműiparban szokásos lángmentesített hablemezt. A vizsgálatok idején rendelkezésünkre állt kereskedelmi szoftvercsomag indirekt variációs opciója azonban csak úgy tudta volna befogadni az anyagok mérésből származó admittanciaértékeit mint további teljesítendő peremfeltételt, hogy a tokozások külső oldalán ellenkező, tehát irreális előjelű admittanciaértékek jöttek volna létre a modellben, ezért a hangelnyelő anyagok hatását a szimulációban nem tudtuk figyelembe venni.

A forrás jellemzőit a kutatásban részt vevő ipari partnerek munkatársai mindkét esetben motorfékpadon végzett intenzitásméréssel határozták meg, és a vizsgált motorok ismeretében ők jelölték ki a legalkalmasabbnak vélt helyettesítő monopólusok helyét és a hozzájuk tartozó mérőfelületet is. Ezen adatokból határoztuk meg a helyettesítő monopólusok forráserősségét, majd a 5.3.1. szakaszban ismertetett reciprok módszer segítségével számítottuk a várható hangnyomást az értékelési pontokban.





***6.11. ábra**: Mért és számított beiktatási csillapítás az A és B motornál. Folytonos, vastag vonal: mérés, folytonos, vékony vonal: becslés kísérleti adatok alapján [150], szaggatott vonal: becslés egyenértékű források és peremelem módszer alapján*

A végeredményül kapott beiktatási csillapítás értékeket a 6.11. ábrán mutatjuk be. Az A motor esetében a számított csillapítások jelentősen alatta maradnak a mért értékeknek, és mivel az egyszerű alagút árnyékolás csillapítása eleve kicsi, a számítási hiba zajcsökkenés helyett erősítést valószínűsít az egész frekvenciatartományban. Pontosabb eredményt kapunk a B típusú motorra, ahol 315, 500 és 630 Hz-en a számítás minimális hibával működik. 400 és 800 Hz-en azonban itt is jelentős, +4 és - 6 dB nagyságú hiba lép fel. A vizsgált motor zajspektrumát és a szabvány szerinti, A-súlyozású eredő szinteket figyelembe véve azonban az elért pontosság a B motor esetében kielégíti az ipar igényeit.

A kapott eredmények részletes elemzése a tokozások hangelnyelő burkolatának mellőzésén kívül két további modellezési problémát is feltárt [209], ezeket azonban a vizsgálat idején rendelkezésünkre álló korlátozott számítógép-kapacitás miatt nem volt lehetőségünk korrigálni. Bizonyosra vehető, hogy mai számítástechnikai eszközeink birtokában a futásidő szükséglet ennek töredéke lehetne (a sokpólusú peremelem módszer által nyújtott jelentős teljesítménynövekedést nem is tekintve), így lehetőség adódna a modell javítására és a hibák számottevő csökkentésére.

6.3. Új tudományos eredmények összefoglalása és tézisek

V. téziscsoport: Hanggátló szerkezetek optimalizálása diszkrét modellek és numerikus számítási eljárások segíségével

A környezeti zajok csökkentésére gyakran alkalmazott hanggátló szerkezetek hatása analitikusan csak akkor számítható kielégítő pontossággal, ha erős közelítő feltételezéseket tehetünk: a forrás- és vevőoldali hangterek kellően nagy méretűek és diffúzak, az elválasztó/hanggátló szerkezet összefüggő, homogén struktúrával rendelkezik és méreteinél fogva benne több hullámhosszúságban hajlítóhullámok alakulhatnak ki, ezáltal teljesülnek a Cremer-féle hullámkoincidencia-jelenség fennállásának feltételei. Mindezen körülmények közelítően fennállnak az épületakusztikai tervezés gyakorlatában, de nem érvényesek a jármű- és gépiparban szokásos közelfekvő hanggátló tokozások, ill. összetett járműszerkezetek, pl. a repülőgépgyártásban szokásos kettős falú szerkezetek esetében. Értekezésemben ezen esetek közül kettőre adtam numerikus számítási módszert, melyet kísérletekkel is ellenőriztem és igazoltam.

A *kettős falú szerkezetek* hatásosságát döntően befolyásolják a két fal és az általuk bezárt üreg között fellépő rezgésakusztikai kölcsönhatások, melyek leírására a gyakorlat számára fontos, alacsony frekvenciatartományban jól alkalmazható az értekezés 4.3. fejezetében ismertetett diszkrét modális expanzió módszere. Ennek segítségével leírhatókká és részleteiben is jól értelmezhetővé váltak a kettősfalú szerkezetekben lezajló jelenségek, amelyből szerzőtársaim gyakorlatban alkalmazható következtetéseket tudtak levonni a kettősfalú szerkezetek hanggátlásának aktív módszerekkel történő növelésére.

V.1. tézis: *A csatolt rezgésakusztikai rendszerek általános diszkrét modelljét véges méretű, rugalmas falakból és az általuk határolt légrétegből álló rezgésakusztikai rendszerre alkalmazva kimutattam, hogy egy ilyen csatolt rendszer modális viselkedése a csatolatlan mechanikai és akusztikai részrendszerek módusainak összegezésével nyerhető. Az összegzésben azok a módusok szerepelnek jelentős súllyal, melyek a határfelületeken geometriai hasonlóságot mutatnak.*

Egy kettősfalú szerkezet kísérleti példányán végzett mérésekkel igazoltam, hogy az energiaátvitel jelentősen megnő (és így az eredő hanggátlás lecsökken) a fenti módon létrejövő csatolt módusok közös sajátfrekvenciáján.

A vizsgálat tárgyát képező, mechanikai és akusztikai részekből álló rezgésakusztikai rendszer kölcsönhatásait tömör formában a

$$\begin{bmatrix} \lceil \Omega_s \rfloor & [A_{as}] \\ [B_{sa}] & \lceil \Omega_a \rfloor \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F'\} \\ \{Q'\} \end{Bmatrix}, \tag{6.6}$$

egyenlet, egy kettősfalú üregre mint speciális esetre vonatkozó összefüggéseket részletesebben a

$$\begin{bmatrix} [\Omega_{üreg1}] & [cs_{ü1l1}] & [0] & [0] \\ [cs_{l1ü1}] & [\Omega_{lemez1}] & [cs_{l1ü2}] & [0] \\ [0] & [cs_{ü2l1}] & [\Omega_{üreg2}] & [cs_{ü2l2}] \\ [0] & [0] & [cs_{l2ü2}] & [\Omega_{lemez2}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_{ü1} \\ \{X\}_{l1} \\ \{P\}_{ü2} \\ \{X\}_{l2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{Q'\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{6.15}$$

egyenlet írja le, melyben az $[\Omega]$ -k $\omega_i^2-\omega^2$ elemekből álló diagonálmátrixokat, $[A_{as}]$, $[B_{sa}]$ és a $[cs_\times]$ mátrixok az egyes mechanikai és akusztikai részrendszerek csatolását kifejező almátrixokat jelölnek.

A megoldás a csatolatlan $\varphi(\vec{r})$ szerkezeti és $\psi(\vec{r})$ akusztikai módusok súlyozott összegzésével kapható meg:

$$x(\vec{r}_s,\omega,t)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(\vec{r})X_j(\omega,t)=\{\varphi(\vec{r})\}^T\{X(\omega,t)\} \tag{6.11}$$

$$p(\vec{r},\omega,t)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i(\vec{r})P_i(\omega,t)=\{\psi(\vec{r})\}^T\{P(\omega,t)\} \tag{6.12}$$

amihez az $\{X\}$ és $\{P\}$ módus részesedési tényezők a (15) egyenlet megoldásából nyerhetők.

A csatolást leíró $[A_{as}]$ és $[B_{sa}]$ almátrixok *rp* indexű elemei az

$$A_{rp}=\frac{\rho S}{\Lambda_p}C_{rp}=\frac{\rho S}{\Lambda_p}\frac{1}{S}\oiint_S\psi_r(\vec{r}_s)\varphi_p(\vec{r}_s)dS \quad \text{és} \tag{6.7}$$

$$B_{rp}=\frac{c_0^2 S}{\Lambda_r}C_{rp}=\frac{c_0^2 S}{\Lambda_r}\frac{1}{S}\oiint_S\psi_r(\vec{r}_s)\varphi_p(\vec{r}_s)dS\,, \tag{6.8}$$

összefüggésekből származtathatók, melyben S a két részrendszer közös határfelülete. Amenynyiben a sajátrezgések szorzatának integrálja az S felületen zérus vagy alacsony értékű (azaz a függvények nem hasonlók), akkor a csatolás mértéke elhanyagolható. Ilyen esetben az eredő rendszer viselkedése a csatolatlan részrendszer jellemzőit mutatja. Az egyes részrendszerek sajátrezgései akkor képesek nagymértékben befolyásolni az eredő rendszer jellemzőit, ha sajátrezgéseik a határfelület mentén hasonlók, netán teljesen egyezők.

A kísérletben vizsgált mechanikai és akusztikai részrendszer sajátfrekvenciái meglehetősen távol esnek egymástól, a csatolt rezgések módusalakjainak kialakításában ezért csak kevés módus vesz részt. A legnagyobb eredő átvitelek ezeken a közös sajátfrekvenciákon alakulnak ki, melyeken minden részrendszer válasza lokális maximumot mutat a frekvencia függvényében. Egy kettősfalú szerkezet hanggátlásának javítása ezek alapján aktív módszerrel úgy érhető el legkönnyebben, hogy megfelelően alkalmazott ellenfázisú gerjesztéssel e domináns módusokat igyekszünk semlegesíteni. Az akusztikai módusok a lemezrezgések módusainál jóval alacsonyabb rendszámúak, ezért egyszerűbben és hatásosabban gerjeszthetők. A szerzőtársaim által elvégzett aktív zajcsökkentési vizsgálatok igazolták következtetéseim helyességét [208], [214].

A főként a járműipari gyakorlatban, de másutt is gyakran előforduló ***közelfekvő zajcsökkentő tokozások*** tervezése többféle problémát is felvet. Egyrészt a valóságos zajforrások, pl. egy belsőégésű motor felületének rezgésállapotát praktikus okoknál fogva nem lehet olyan részletességgel meghatározni, hogy abból a lesugárzott hangtér numerikus módszerrel meghatározható legyen. Másik nehézség, hogy a forrás és az árnyékoló szerkezet közötti kis távolság azonos rezgéssebesség esetén is jelentősen befolyásolhatja a lesugárzott hangteljesítményt a megváltozott sugárzási impedancia következtében. A közelfekvő tokozások alkalmazása kapcsán fellépő jelenségeket laboratóriumi körülmények között vizsgáltam egy mechanikai motor-makett és különféle zajárnyékoló szerkezetek és tokozások segítségével. A kapott eredményeket ipari problémákra is kiterjesztettem.

V.2. tézis: *Numerikus számításokkal kimutattam és laboratóriumi mérésekkel igazoltam, hogy a részleges közelfekvő tokozások hangelnyelő burkolat nélkül nem csökkentik a lesugárzott hangenergia mennyiségét (sőt meg is növelhetik azt), csak módosítják terjedésének irányát. A számítás az indirekt peremelem módszerrel jó pontossággal elvégezhető, ha a forrás rezgésállapota ismert.*

Megmutattam továbbá, hogy az egyenértékű energia szerinti helyettesítő hangforrások módszere alkalmas az ipari gyakorlatban felmerülő tokozási problémák indirekt peremelem módszerrel történő számítására, de pontossága korlátozott, ha az alkalmazott numerikus módszer nem tudja megfelelően figyelembe venni a hangelnyelő anyagok hatását.

Az energia szerinti egyenértékű helyettesítő források és indirekt peremelem módszer alkalmazásával egy könnyű és egy nehéz dízelmotor kísérleti, ill. gyártásban levő tokozásának számítását végeztem el. A könnyű dízelmotor esetében az eredmény pontossága nem volt kielégítő, a nehéz dízelmotor esetében a kapott beiktatási csillapítás görbe kielégítette a mérnöki gyakorlat igényeit.

A tézisekhez kapcsolódó publikációk: [185], [187], [188], [191], [192], [193], [195], [196], [197], [199], [202], [204], [206], [207], [208] és [209].

7. fejezet

7. NAGYMÉRETŰ RENDSZEREK REZGÉSAKUSZTIKAI MODELLEZÉSÉNEK LEHETŐSÉGEI ÉS KORLÁTAI

Az előző fejezetekben elsősorban metodikai szempontból vizsgáltuk a modális tartományban alkalmazható módszerek körét, így az alkalmazási példák valós, de nagyobbrészt mégiscsak modellértékű problémák megoldását érintették. Ebben a fejezetben megfordítjuk tárgyalásunk szemléletmódját: azt mutatjuk be, hogy az elmúlt másfél évtized akusztikai tervezési gyakorlatában felmerült feladatokhoz milyen megoldási módszerek voltak párosíthatók; mely módszerek lehetnek alkalmasak hasonló problémák megoldására és melyek nem, illetve hol vannak az alkalmazási lehetőségek határai.

A kiválasztott példák – a mai magyar ipari tevékenység jellemző tükörképeként – nem gyártmányfejlesztéssel, hanem építészeti és infrastrukturális beruházásokkal kapcsolatosak, melyekben az elmúlt másfél évtizedben lezajlott nagyberuházások előkészítése vagy lebonyolítása révén volt alkalmunk részt venni. Ennek megfelelően közös vonásuk, hogy az érintett rendszerek nagy méretűek és igen összetettek. A felhasznált, beépített anyagok jellemzői gyakran nem ismertek és a mérési lehetőségek is nagyon korlátozottak, vagy – pl. a tervezés fázisában – egyáltalán nem adottak. Mindezek következtében a modellezési, számítási lehetőségek erősen korlátosak, a feladat gazdaságos és megbízható megoldása ugyanakkor mindenképpen szükségessé teszi az adott körülmények között igénybe vehető módszerek lehető legeredményesebb alkalmazását.

7.1. Két budapesti fűtőmű zajcsökkentése

Az elmúlt évtizedben az ország számos fűtőművébe építettek be gázmotort, amelyek a kettős energiahasznosítás révén gazdaságosabban működtethetők a korábban általánosan alkalmazott gáz- vagy olajtüzelésű kemencéknél. A budapesti lakótelepek távhőszolgáltatását végző nagy fűtőművek akkor épültek, amikor a környezetvédelmi zajelőírások még nem léteztek vagy a jelenleg érvényes zajhatárértékeknél jóval kevésbé szigorú követelményeket tartalmaztak. A 30-40 éves fűtőművek berendezései el is használódtak, így amikor a Fővárosi Távfűtő Művek gázmotor telepítésére kért hatósági engedélyt két fűtőművében, az ellenőrző mérés során kiderült, hogy a meglevő berendezések gázmotor nélkül is jóval zajosabbak a megengedettnél. A gázmotorok telepítésére ezért csak azután kerülhetett sor, hogy a már meglevő rendszereken igen jelentős zajcsökkentést hajtottak végre.

A zajcsökkentési tervezést megalapozandó arra kaptunk megbízást, hogy részletes méréssorozat segítségével tárjuk fel az érintett fűtőművek domináns zajforrásait, határozzuk meg az egyes részforrások részesedését az eredő zajban és részforrásonként adjunk javaslatot a megvalósítandó zajcsökkentésre.

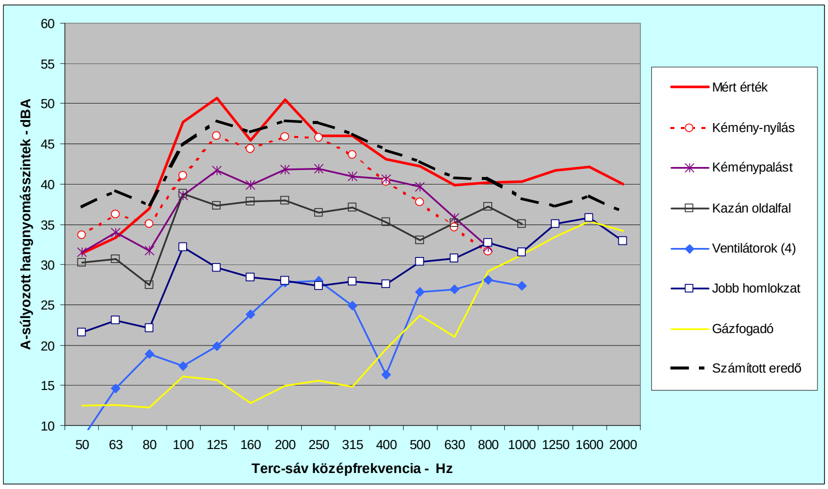
A vizsgálatok során az egyes potenciális rész-zajforrásokon zajkibocsátási méréseket és a nagy rezgő felületeken rezgésméréseket végeztünk, majd szakirodalmi adatok, a zajterjedés számítására szolgáló szabványos módszerek [128]-[130] és numerikus sugárzási számítások segítségével egy reprezentatívnak tekinthető távoltéri pontban összegeztük a rész-zajforrások hatását.

A következő rész-zajforrásokat vettük számításba:

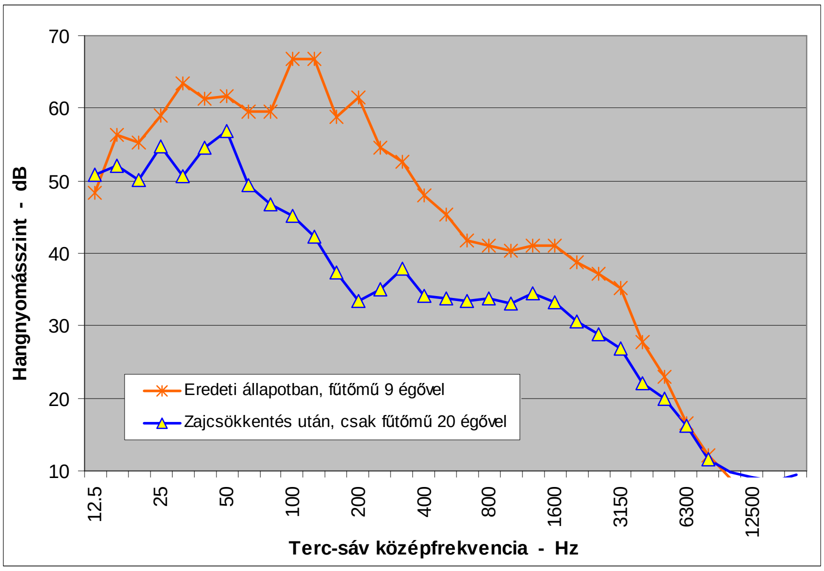
- a kémények szájnyílásának léghangja,
- kéménypalástok lesugárzása,
- kazán oldalfalak lesugárzása,
- aláfúvó tetőventilátorok zaja,
- a kazánház kritikus épületek felé eső oldalának lesugárzása,
- a gázfogadó állomás zaja.

7.1. ábra: *A Füredi úti fűtőmű a zajcsökkentés előtti és utáni állapotban.*

A fentiek közül a kéménynyílásokat és tetőventilátorokat pontforrásnak, a kéménypalástot vonalforrásnak, a fennmaradókat pedig felületi forrásként modelleztük; a források és a közelben levő épületek közötti átvitelt szabványos hangterjedési számítási módszerek alkalmazásával vettük számításba. A komponensek összegezésével számított eredőt a helyszíni mérések eredményeivel összevetve elfogadható pontosságú egyezést tapasztaltunk: az eltérések a két legalsó frekvenciasáv kivételével 3 dB-nél nem nagyobbak, és az összes sávra vett átlagos eltérés -0,2 dB, ami kifejezetten jónak mondható. Az egyes rész-zajforrások 7.2. ábrán is bemutatott, egymáshoz viszonyított értékeiből – a módszer adta pontosság korlátain belül – meghatározható volt az egyes részek zajkeltésének relatív fontossági sorrendje és az eredő szintet meghatározó rész-zajforrások abszolút részesedése. Egyértelművé vált, hogy a mértékadó rész-zajforrások a kémények és a kazánok épületből kiemelkedő részei, melyhez az 1 kHz fölötti tartományban a gázfogadó állomás zajai társulnak.



7.2. ábra: *A Füredi úti fűtőmű rész-zajforrásainak számított spektruma, a számított eredő és a kritikus immissziós ponton mért zajspektrum összehasonlítása*



7.3. ábra: *A Gvadányi utca 64 sz. ház tetején a zajcsökkentés előtti, ill. az utáni állapotban mért zajspektrumok összehasonlítása.*

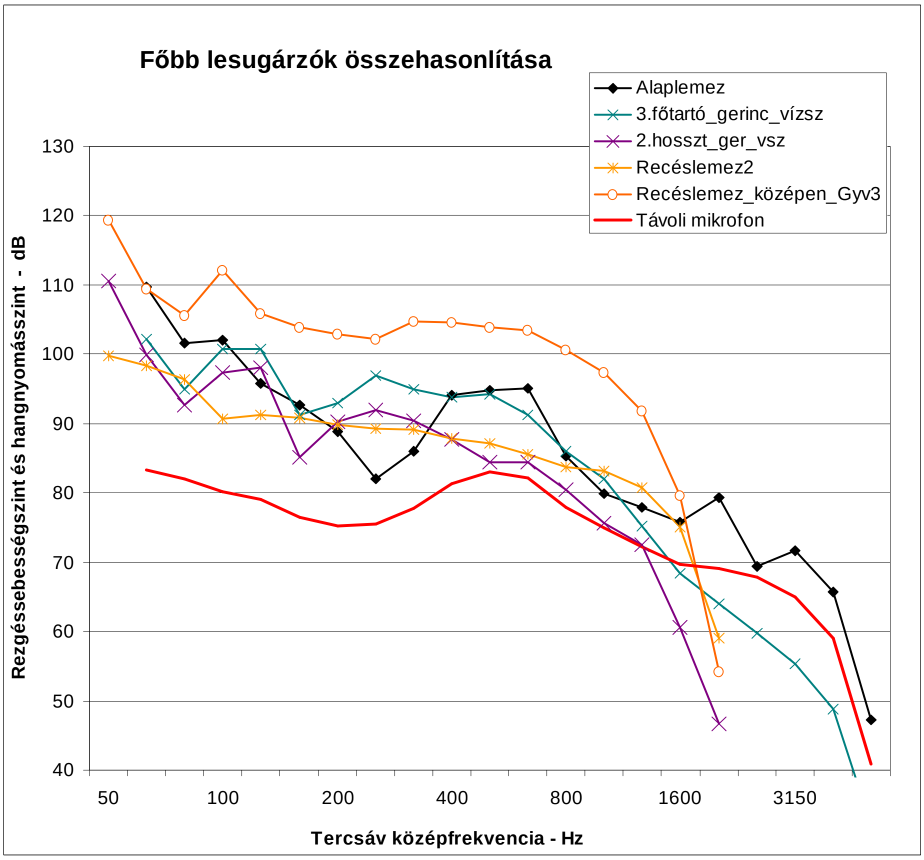
Az elemzés eredményei alapján, élettartam- és számos egyéb szempontot is figyelembe véve a fűtőmű 2005-ben lényeges átalakításon esett át. (A zajcsökkentés kiviteli terveit Pintér János készítette, a kivitelezést az Edilmat Kft. végezte.) A három kéményt lebontották és helyettük jóval alacsonyabb Edilmat kéményeket építettek, melyekbe tokozott ventilátoros füstgázelszívókon keresztül jutnak az égéstermékek. A kazánokat zajárnyékoló falakkal vették körül, az épület homlokzatán a törött ablaküvegeket kicserélték és zajárnyékoló falakkal látták el a gázfogadó állomást is [233]. A zajcsökkentési intézkedések eredményeként az immissziós zajszint több mint 14 dBA-val csökkent; az átalakítás előtti és utáni állapotban mért zajok frekvenciaösszetételét a 7.3. ábra szemlélteti. A fűtőmű jelen állapotában az időközben megépített gázmotor működése közben is teljesíti a vonatkozó zajhatárértékeket.

7.2. Hidak zajcsökkentése

7.2.1. A Déli összekötő vasúti híd zajcsökkentése

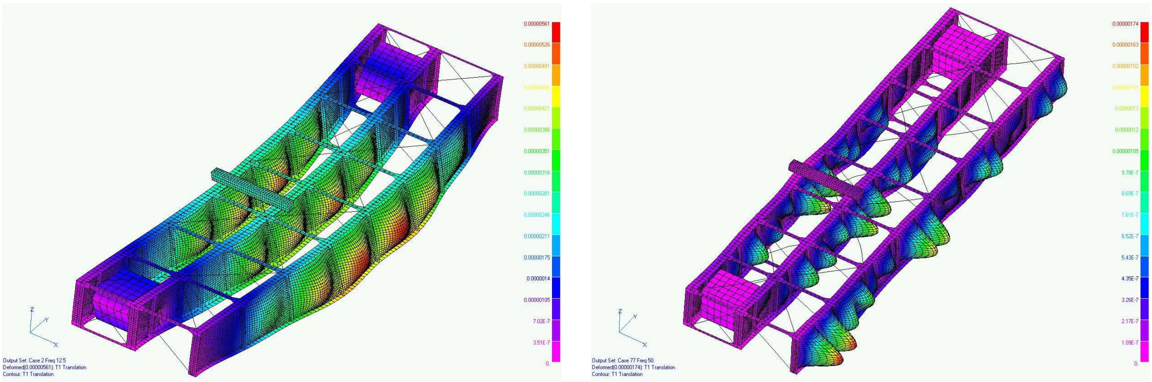
A főváros déli városrészei között fekvő vasúti híd a többszöri átépítés ellenére lényegében változatlan formában áll a helyén közel száz esztendeje. Lévén a keleti és nyugati országrész vasúthálózatát összekötő legfontosabb kapocs, forgalma nappal és éjszaka is igen nagy. A gerinclemezes, szegecselt acélszerkezetű híd zaja a Millenniumi városrész, benne az új Nemzeti Színház és különösen a Művészetek Palotája építése közben egyre zavaróbbá vált, ezért a Budapest – Győr közötti vasúti fővonal felújításához kapcsolódóan a hídon 2001-2002-ben zajcsökkentést is végrehajtottak. Ennek előkészítéséhez, a Közlekedéstudományi Intézet Rt. és az Építésügyi Minőségellenőrző Innovációs Rt. munkatársaival együtt, részletes zajforráselemzést végeztünk.

Az elemzés célja a felszerkezet egyes elemeinek eredő zajhoz való hozzájárulásának megállapítása, és ezáltal itt is az optimális zajcsökkentés megalapozása volt. A munka során részletes helyszíni zaj- és rezgésméréseket végeztünk a pesti parti hídszakaszon és annak környezetében. A nyert adatok alapján módszert és számítógépes modellt dolgoztunk ki a híd zajkeltési mechanizmusainak feltárására, a nyert szimulációs eredményeket mérési adatokkal vetettük össze.



7.4. ábra: *Gyorsvonat elhaladása közben mért mértékadó rezgésspektrumok és a távoltéri hangnyomásszint spektrum összevetése*

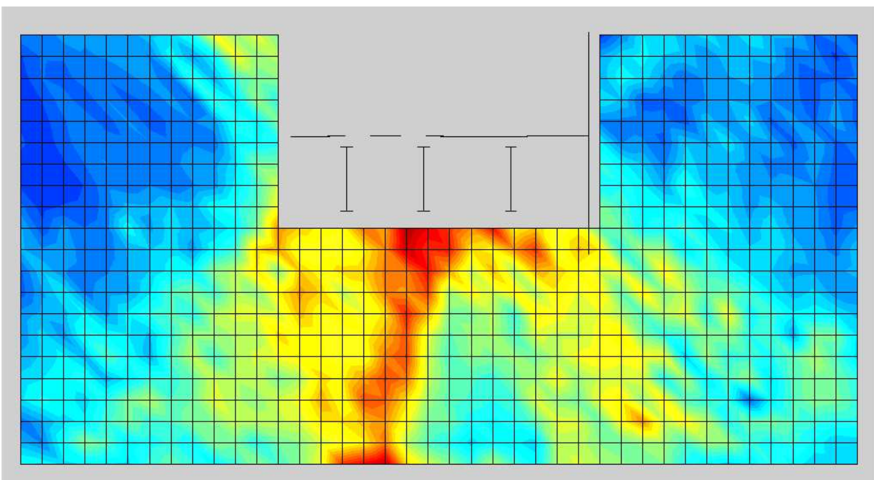
Amint a 7.4. ábra mutatja, az eredő zajszint meghatározásában a 400 és 800 Hz közötti frekvenciaösszetevők dominálnak. A szimulációs számításokhoz az acél-szerkezetek végeselemes modelljét is elkészítettük, két tipikus sajátrezgés módusalakját a 7.5. ábrán mutatjuk be. A kapott sajátfrekvenciák és módusalakok és a zajspektrumok összevetése alapján nyilvánvaló, hogy a kritikus jelenségeket ilyen módon nem lehet megközelíteni. A zajlesugárzás modellezéséhez ezért a Márki F. által kidolgozott statiszitkus peremelem módszert alkalmaztuk, amely a vizsgált szerkezetekben terjedő nagyszámú, a vizsgált szerkezethez képest rövid hullámhosszúságú hajlítóhullámok feltételezésén alapul [151].



7.5. ábra: *Egy főtartó két jellegzetes módusalakja (a modellt Nagy Attila Balázs készítette)*

A vizsgálatok a következő következtetések levonását tették lehetővé:

- a hídszerkezet rezgéseinek kialakulásában és jellemzői meghatározásában a statikai szempontból deformációképes, de a zajlesugárzás csökkentésére alkalmatlan sínszál / sínleerősítés / hídfa / csúszóléc / acél hídszerkezet rezgésátviteli részrendszernek van kiemelkedő szerepe;
- a rezgés a hídszerkezet egyes elemein keresztül a járófelületet alkotó és rezgésszigetelés nélkül rögzített recéslemezekről, valamint a vágányok alatt elhelyezkedő két főtartó gerinclemezéről sugárzódik a környezetbe;
- a sugárzás domináns iránya lefelé mutat (ld. a 7.6. ábrát);
- a gerinclemezek és az acél recéslemezek nagyjából egyenlő súllyal vesznek részt a lesugárzásban (ezt a megállapítást a járólemezek ideiglenes eltávolításával kísérletileg is igazolni lehetett).

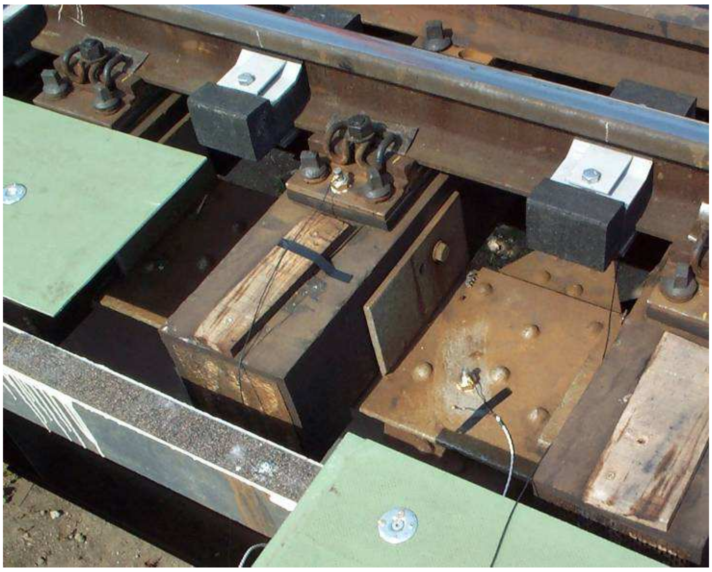


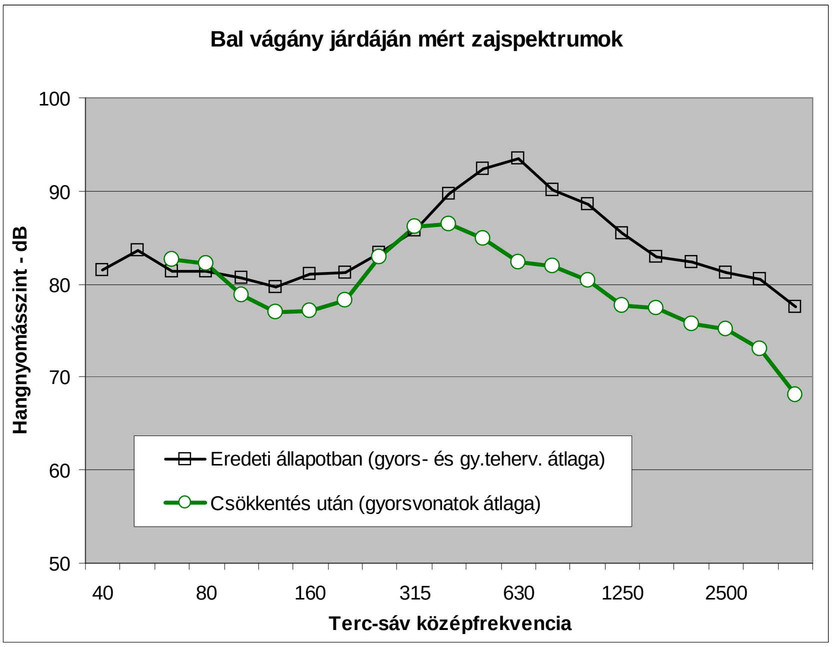
7.6. ábra: *A vasúti híd egyszerűsített modelljének statisztikus peremelem módszerrel szimulált zajsugárzása [180].*

A híd acélszerkezetének zajcsökkentési célú módosítása természetesen nem jöhetett szóba. A fentiek alapján szükséges járólemez cserére és a gerinclemezek rezgéscsillapítására azonban a vasútvonal korszerűsítéséhez kapcsolódóan mód nyílott.

Az átépítés során a rezgésszigetelést a CDM belga vállalat által szállított speciális rezgésszigetelő sínleerősítés és egyéb csillapító elemek beépítésével, a járólemezek zajcsökkentését pedig az acél bordáslemez helyett kompozit lemezek beépítésével oldotta meg a MÁV kivitelezője [227],[229],[230].

Az átalakítással elért zajcsökkentés a vasúti szerelvények típusától, sebességétől és az ellenőrzéshez választott mérőpontoktól függően 4 és 12 dBA között, átlagosan 8 dBA volt, az átalakítás során kialakított új pályaszerkezetet és két átlagos zajspektrumot a 7.7. ábrán mutatunk be.





7.7. ábra: *Ellenőrző rezgésmérés az átalakított pályaszerkezeten és egy ellenőrző zajmérés eredménye*

7.2.2. Az 1-es villamos pályájának rezgésszigetelése a Lágymányosi hídon

Az 1995-ben elkészült Lágymányosi (jelenlegi nevén Rákóczi) híd közepére beké-szítették az 1-es villamos pályaszerkezetét, annak elhelyezésére azonban mindeddig nem kerülhetett sor. Az eredeti tervek szerinti konstrukció azonban az időközben a híd környékére települt igényes – a Duna bal partján kulturális, a jobb partján oktatási és irodaépületek – közelsége miatt idejét múlttá vált, ezért annak felülvizsgálata vált szükségessé.

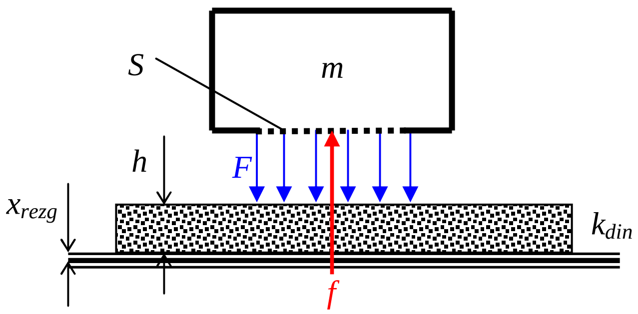
A pályaszerkezet vizsgálata és áttervezése kapcsán méréseket végeztünk a híd acélszerkezetén, numerikus szimulációval becsültük a várható zajsugárzást, megállapítottuk a szükséges rezgéscsillapítás mértékét és részt vettünk a kellően rugalmas pályaszerkezet kialakításában. A felhasznált módszerek sok tekintetben azonosak voltak az előző fejezetben ismertetett technikákkal. A tervek elkészültek, kivitelezésre – és így a számítások és tervek validálására – azonban financiális és egyéb okok miatt még nem kerülhetett sor. A projekt részleteit illetően ezért a vonatkozó publikációkra utalunk [234] [24], [239].

7.3. Épületek rezgésszigetelésének tervezése

A zsúfolt közlekedési infrastruktúrával rendelkező nagyvárosok lakosságát egyre nagyobb mértékben zavarja a kötöttpályás járművektől származó, talajban terjedő rezgés és az épületszerkezetek lesugárzása révén kelekező zaj. Amennyiben a rezgéscsökkentés nem oldható meg a vasúti pályaszerkezetben, de beavatkozás nélkül a rezgések már megengedhetetlen mértékűek lennének, ma már szóba kerülhet az épületek rezgésszigetelése is. A talajban terjedő rezgések és a talaj és épület közötti rezgéscsatolás témakörét Fiala Péter tárgyalta részletesen értekezésében [181], e helyen a gyakorlati tervezés metodikáját tárgyaljuk.

7.3.1. Tervezés egy szabadságfokú modell alapján

Az épületszerkezetek vagy rezgésre érzékeny gépek, berendezések rezgésszigetelésének tervezése a jelenleg szokásos ipari, tervezői gyakorlat szerint legtöbbször egy szabadságfokú modellek segítségével történik. A tervek készítése során a statikus tervezőnek is igen fontos szerepe van, mert a legtöbbször alkalmazott elasztomer anyagok nemlinearitása következtében a statikus és dinamikus tervezést csak párhuzamosan lehet végezni. A két szakterület összekapcsolódását egy ilyen, egy szabadságfokú modellen mutatjuk be.



7.8. ábra: *Épület rezgésszigetelésének egy szabadságfokú modellje*

[24] A *8. International Workshop on Railway Noise* konferencián e témában tartott előadásunk elnyerte a legjobb előadás díját.

Tekintsük a 7.8. ábra modelljét, amelyben a környezetből származó rezgések ellen szigetelendő m tömeget egy h vastagságú rugalmas elasztomer rétegre helyezzük! Ha a felfekvő felület nagysága S, akkor a támaszelemre ható statikus nyomás

$$p_{stat} = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} \tag{7.1}$$

Legyen a környezetből származó dinamikus erőgerjesztés amplitúdója f, az ennek hatására a rugalmas anyagban kialakuló dinamikus feszültség σ, a relatív nyúlás ε! A rugalmas réteg dinamikus rugalmassági modulusa ezekkel

$$E_{din} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{f/S}{x/h} = \frac{f}{x}\frac{h}{S} = k_{din}\frac{h}{S} \tag{7.2}$$

ahol k_{din} az anyag dinamikus merevsége. A fentiekből a tömeget és a merevséget kifejezve kapható az egyszabadságfokú modell sajátfrekvenciája:

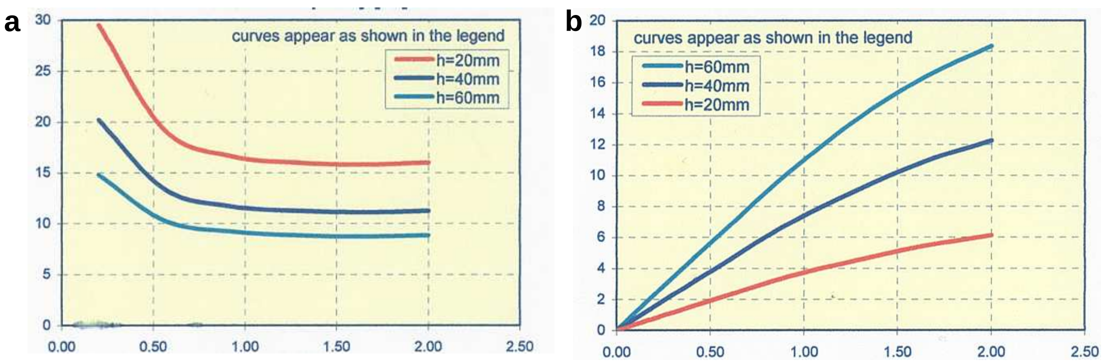
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{din}}{m}} = \sqrt{\frac{SE_{din}}{h}\frac{g}{p_{stat}S}} = \sqrt{\frac{E_{din}}{h}\frac{g}{p_{stat}}} \tag{7.3}$$

A képlet szerint tehát a rezgő rendszer sajátfrekvenciája a támasz – terhelés előtti – vastagságával és rugalmassági modulusával, azaz anyagjellemzőivel és méretével, valamint a támaszelemre ható statikus terheléssel megadható. A 7.9.a ábra egy kereskedelmi forgalomban beszerezhető elasztomer anyagra mutat Ilyen összefüggést. (Megjegyezzük, hogy a (7.3) egyenlet szerinti elméleti hiperbolikus görbe helyett elnyúló diagramot kapunk, aminek oka az elasztomer anyag 7.9.b. ábra szerinti nemlinearitása.)

A rezgésszigetelő gépalapok méretezésének klasszikus

$$\frac{x(\omega)}{f(\omega)} = \frac{1}{m}\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 2\sigma j\omega + \sigma^2} \cong \frac{1}{m}\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \tag{7.4}$$

alapösszefüggése szerint rezgésszigetelő hatás csak a rendszer ω_0 sajátfrekvenciája felett jön létre, tehát ezt a sajátfrekvenciát célszerű a lehető legalacsonyabb értékre beállítani.



7.9. ábra: *Egy elasztomer anyagfajta jellemzői [178] alapján. Abszcissza értékek:* σ *statikus terhelés [MPa];* ***a*** *diagram ordinátája:* ω_0 *sajátfrekvencia [Hz],* ***b*** *ordináta:* x_0 *statikus deformáció [mm]*

A rugalmas támaszon nyugvó tömeg rezgési amplitúdója adott frekvencián a rugalmas támaszt támadó dinamikus erővel egyenesen arányosnak tekinthető. Ezt az erőt a talaj-szerkezet kölcsönhatás számítására vonatkozó, a [179] irodalmi forrás szerinti módszerrel határozhatjuk meg:

$$f(\omega) = x_{rezg}(\omega)\ k_{talaj} \tag{7.5}$$

ahol $x_{rezg}(\omega)$ a talaj terheletlen állapotban mért rezgéskitérése a szerkezet és a talaj illeszkedési felületén és $k_{talaj} = k_{din}$ a talaj dinamikus merevsége. Előbbit a tervezett épület helyén végzendő közönséges talajrezgés-mérések, a talaj dinamikus rugalmassági jellemzőit pedig egy felületi hullámsebesség-mérés (SASW - spectral analysis of surface waves, ld. pl. [181]) eredményeiből kaphatjuk meg.

A tervezés menete ezek alapján a következő:

- A telepítendő épületet vagy más szerkezetet terhelő dinamikus talajerők meghatározása mérések és a (7.5) összefüggés alapján;
- a szükséges csillapítás számítása a gerjesztő erő, a szerkezet tömege és a megengedni kívánt rezgéserősség alapján;
- az elérni kívánt csillapításhoz tartozó sajátfrekvencia meghatározása (7.4)-ből;
- a rugalmas támaszelemek optimális statikus nyomásának leolvasása a terhelési tartomány alapján kiválasztott rugalmas anyag 7.9.a. szerinti jelleggörbéjéből;
- a támaszelem szükséges felületének (vagy előregyártott elemek esetében az elemek számának) számítása az épület tömegéből;
- a számítás ismétlése más anyagminőséggel vagy méretekkel, amennyiben irreális felület vagy gazdaságtalan elemszám adódik.

A fenti eljárás tetszőleges szerkezet rezgésszigetelésének tervezésére alkalmas, de csak azzal a feltétellel, hogy a rugalmas támaszelemek statikus deformációja mindenütt egyforma. A rugalmas támaszra helyezett nagyobb szerkezetek, pl. épületek azonban egyenlőtlen statikus deformációt szenvedhetnek, így az alátámasztást biztosító rugalmas elemek statikus terhelése is eltérő lehet. A 7.9.b. görbesereg példája szerint azonban a gyakorlatban használatos rugalmas anyagok viselkedése nemlineáris, így az eltérő statikus terhelés hatására beálló dinamikus rugómerevség is más lesz. A felmerülő statikai problémák megoldásán túlmenően ez a dinamikai számítások többszöri ismétlését, iterációs eljárás alkalmazását teheti szükségessé.

7.3.2. Esettanulmány: egy irodaépület rezgésszigetelésének tervezése

Egy vasúti pálya közelébe tervezett irodaépület beruházóját nyugtalanította a vasúti forgalomból keletkező, esetleg zavaró mértékű épületrezgések lehetősége, ezért megbízást adott a probléma vizsgálatára. A talajrezgés-mérések és korábbi hasonló épületeken szerzett tapasztalataink arra utaltak, hogy vasúti szerelvények elhaladása közben az épületben nagy valószínűséggel jól érezhető födémrezgések várhatók.

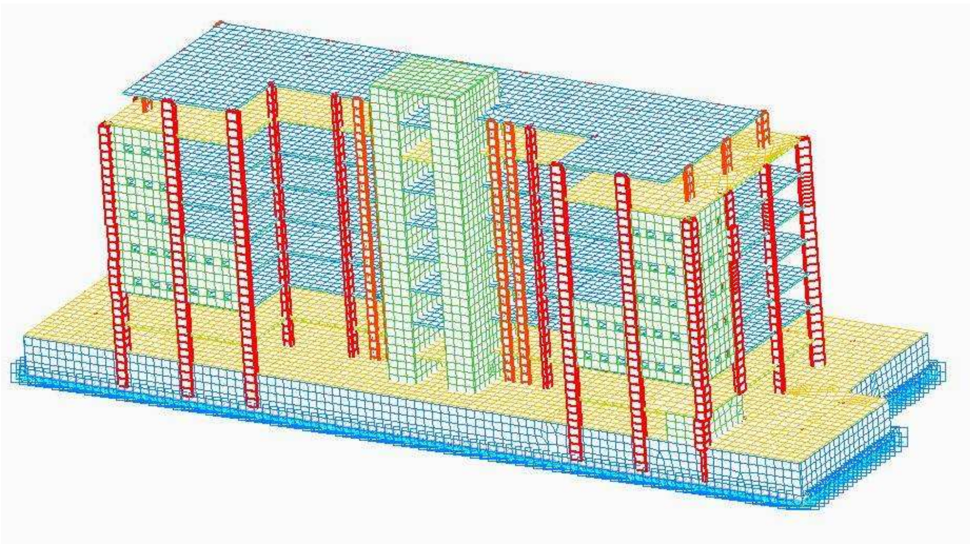
A probléma kiküszöbölésére felvetettük az épület rugalmas alátámasztásának lehetőségét. A szigetelés terve és a rezgésszigetelés számítása több változatban is elkészült, melyek közül a fontosabbak az alábbiak:

1. változat: rezgésszigetelés nélküli, referencia eset;

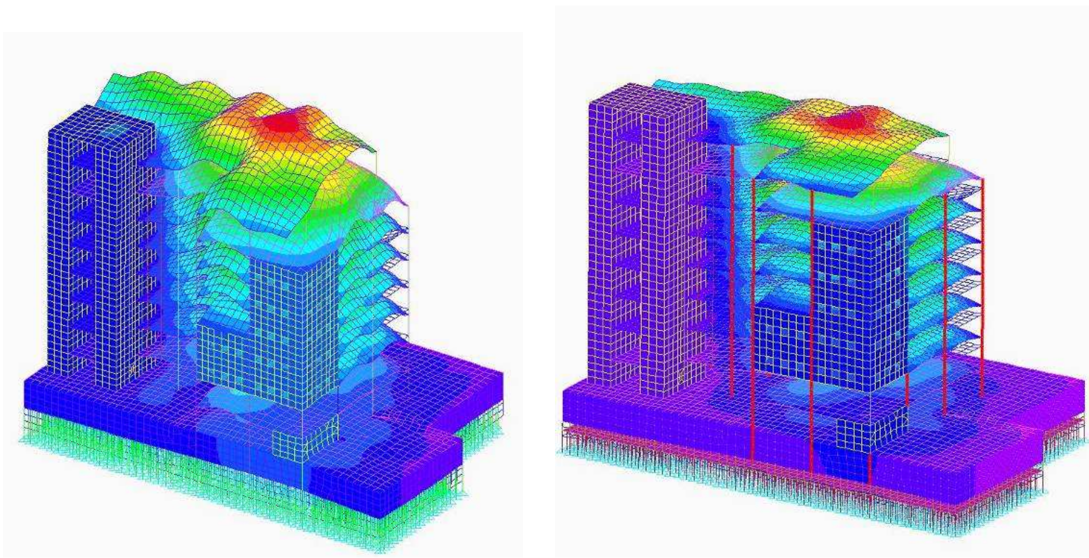
2. változat: mindenütt azonos dinamikus merevségű szigetelő réteg („*paplan*") az épület alatt és a pinceszint homlokfalai mentén;

3. változat: az épület a helyfüggő statikus terhelésnek megfelelően kiosztott, optimális rugalmassági jellemzőkkel bíró, de még összefüggő réteget alkotó előregyártott rugalmas elemeken nyugszik, amelyek alá 1,2 m vastag beton alaplemez készül;

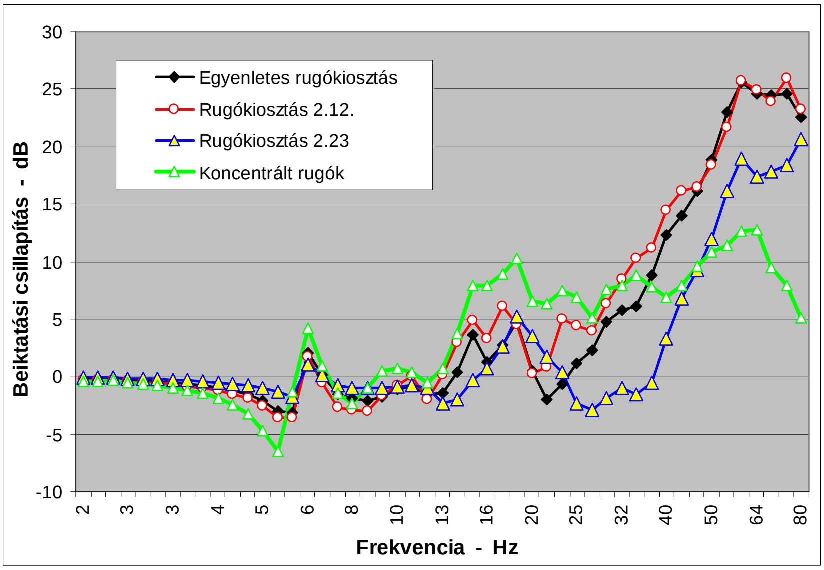
4. változat: költségcsökkentés céljából az alaplemez vastagsága 0,5 m-re csökken, a rezgésszigetelő elemek a pillérvázas épület pillérei alatt, *koncentrált* módon kerülnek elhelyezésre, a teherhordó falak alatt szintén rugalmas csíkokkal.



7.10. ábra: *Egy tervezett irodaépület végeselemes modellje*



7.11. *ábra: Tipikus elmozdulások kétféle modellre. Baloldali ábra: rugalmas paplanon, jobb oldali ábra: koncentrált támaszelemeken nyugvó épület.*



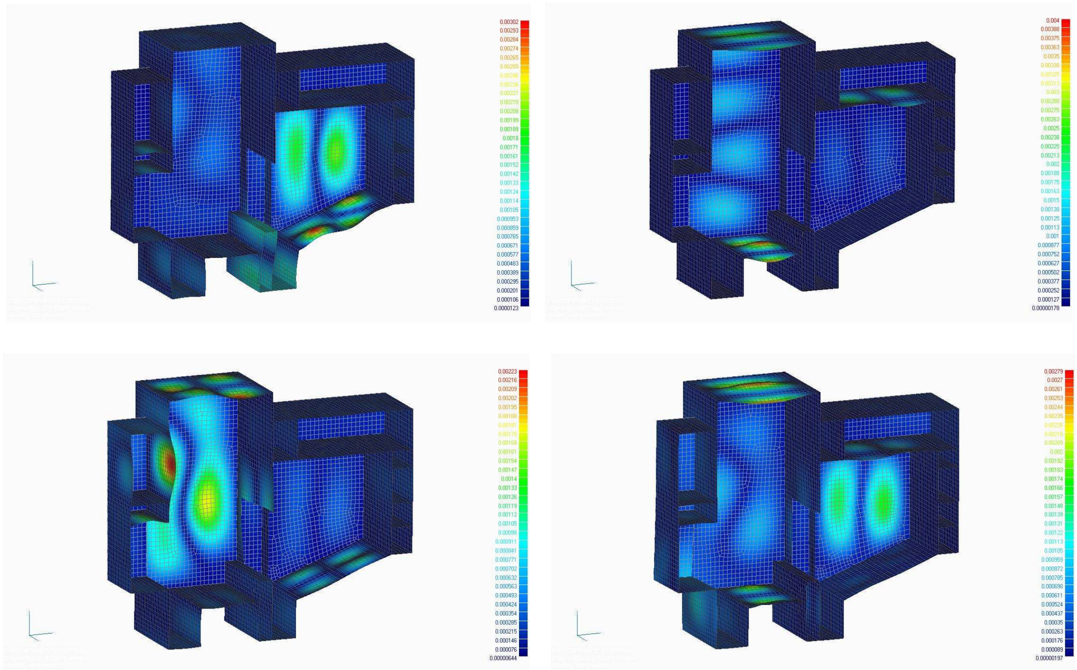
7.12. ábra: *A tervezési változatok várható átlagos beiktatási csillapítása*

A statikus tervezés alapján, a gyártó közreműködésével kiválogatott rugalmas anyagokkal és elemekkel minden változatra kiszámítottuk az épület várható rezgéseit a 2 és 80 Hz közötti frekvenciatartományban. A kapott sajátrezgések két tipikus módusalakját a 7.11, a várható átlagos beiktatási csillapítást a 7.12. ábrán szemléltettük. Mindkét ábrázolás azt mutatja, hogy az egy szabadságfokú modell nem írja le kielégítő módon a várható rezgéseloszlást. Annak ellenére, hogy a koncentrált rugókiosztású változat jóval laposabb frekvenciafüggést mutat a többieknél (amelyek így közelebb állnak a klasszikus rezgéscsillapítási modellhez), az emberi szervezet erősen frekvenciafüggő rezgésérzékenységét is figyelembe véve a 4. változat tekinthető optimálisnak mind költségek, mind pedig az elérni kívánt műszaki paraméterek tekintetében. (Sajnálatos, hogy a beruházó ezt a változatot is túl költségesnek találta, ezért végül nem került rezgéscsillapítás az épületbe.)

7.3.3. A Művészetek Palotája rezgés-és hangszigetelésének tervezése

Amint a 7.2. szakaszban már érintettük, a Művészetek Palotája helyének kiválasztása a környezeti zaj- és rezgéscsökkentés szempontjait alapul véve nem tekinthető a legszerencsésebb döntésnek. Minthogy az új Nemzeti Színház építése során már merültek fel ilyen jellegű problémák, az építtető a kezdetektől fogva különös gondot fordított az épület akusztikai tervezésére.

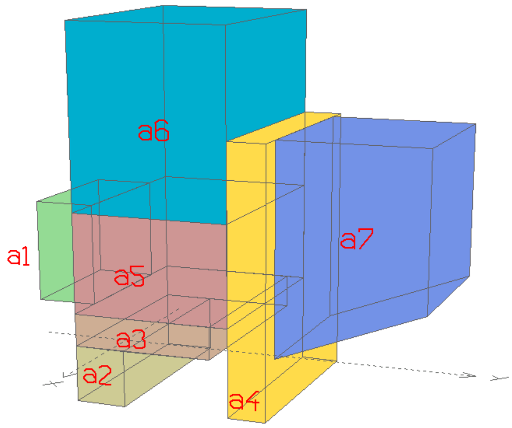
A vizsgálatokat az épület leendő helyén több ponton végzett rezgésmérésekkel kezdtük. Az adatokat a mérésben részt vevő szakértők mellett a későbbi Bartók Béla Nemzeti Hangversenyterem tervezését végző külföldi akusztikai szakértő és az ő altervezőik is kiértékelték, eredményeiket velünk egyeztették. Az elemzések végeredményeként az a közös álláspont alakult ki, hogy az épületben megfelelő rezgésszigetelés nélkül nem biztosítható olyan alacsony zajszint, ami minőségi hangfelvételek kompromisszumok nélküli készítését lehetővé tenné. Az építtetőt közös erővel sikerült meggyőzni a rezgésszigetelés – és az ezzel együtt járó komoly költségtöbblet – elkerülhetetlenségéről.



***7.13. ábra:** A Fesztiválszínház szigetelendő épületrészének néhány jellemző – 48-54. rendszám közötti, 9.5, 9.6, 9.8 és 10.0 H-es – módusalakja. (Az elemzés a teljes tömbre történt, az ábrázolás a jobb szemléltetés kedvéért történt elmetszett épületrészeken.)*

A Fesztiválszínház nézőtere, fő- és felső színpada alatti rezgésszigetelés tervezése a statikai tervezéssel szoros együttműködésben, Forián Szabó Péter épületdinamikai szakértő bevonásával folyt; a tervezés általunk végzett egyik legfontosabb lépése a szükséges rezgéscsillapítás meghatározása volt. Az építkezés megkezdése előtti rezgésméréseket a kérésünkre a végleges alapozási síkig lemélyített beton cölöpökön megismételtük, a nyert adatokból tervezési rezgés- ill. erőspektrumot határoztunk meg. A színházterem talajrezgéssel gerjesztett falai által lesugárzott hangteljesítmény számításához kezdetben az épület betonszerkezetének numerikus móduselemzésével kísérleteztünk. Amint a 7.13 ábra mutatja, a végeselemes szerkezeti modellek több mint 50 szerkezeti módust mutattak ki már a 10 Hz alatti (azaz infrahang) tartományban is, ezért ez az út nem volt járható.

A végső számítást Nagy Attila Balázs közreműködésével, az értekezés témakörén kívül eső numerikus eljárással: a statisztikus energiaelemzés (Statistical Energy Analysis – SEA) módszerével végeztük. Ennek lényege, hogy a vizsgálandó szerkezetet viszonylag kis számú és nagyméretű elemekre: lemezekre, rudakra és akusztikai üregekre bontjuk és csak az ezek között fellépő energiaátviteli, illetve a bennük lezajló energiaelnyelési folyamatokat vesszük figyelembe. (A vizsgált modell részei közül a 7.14. ábrán a modellben felvett akusztikai elemeket ábrázoltuk.) A gerjesztéshez a modell fenéklemezére ható egységnyi energiát tételeztünk fel, ebből meghatároztuk az egyes épületrészek rezgését és az üregek hangnyomását, majd a kapott eredményeket a talajból várható mért rezgések szintjéhez skáláztuk. A terekben kialakuló hangnyomásszint spektrumot az épület tervezésekor megállapított háttérzaj-követelményhez viszonyítva meghatározható volt a szükséges zaj- (azaz rezgés-)csillapítás mértéke.



7.14. ábra: *Az SEA modell akusztikai elemei*

A statikai és rezgésakusztikai tervezés alapján megállapított rugalmas támaszelemek acél házba befogott, a gyártáskor a várható terhelés 80 %-ára előfeszített gumi-parafa-kevlar blokkokból készültek (7.15. ábra). Az épület elkészülte után a rugalmas kapcsolatok rezgésátvitelét méréssel ellenőriztük, a hibás helyeket megjelöltük és a javítás után visszaellenőriztük. Az átviteli függvények végül a vizsgált helyek mindegyikénél megfeleltek a specifikációs görbének.

7.15. ábra: *A Fesztiválszínház színpadi tömbje alá beépített rugalmas támaszelemek*

7.4. A Zeneakadémia nagytermi pódiumának rekonstrukciója

A budapesti Liszt Ferenc Zeneművészeti Egyetem nagy hangversenytermének akusztikája a fellépő művészek, a felvételeket készítő hangmérnökök és a koncertlátogató közönség egybehangzó véleménye szerint kitűnő. A hangtér kialakításában a tér alakján kívül a teret határoló felületek akusztikai tulajdonságai játsszák a fő szerepet. A 100 éves, mára jelentős mértékben elhasználódott épület jelenleg folyó átépítése során bekerülő új vagy felújított burkolatok, székek és más szerkezeti elemek hangelnyelési jellemzőinek alkalmas megválasztása ezért nagyon fontos, de korántsem egyszerű feladat.

***7.16. ábra**: A Nagyterem pódiumának szerkezete az előzetes felmérés idején*

A dobogó megfelelő, esetleg az eredetinél még jobb tulajdonságokkal bíró kialakítása különösen nehéz probléma elé állítja a tervezőt. A pódium padlójának szerepe ugyanis jóval összetettebb, mint a terem egyéb felületeinek az akusztikára gyakorolt hatása. A padló hangvisszaverőként, hangterelőként, sőt esetleg hangelnyelő felületként is számottevően befolyásolhatja a pódiumon megszólaló hangszerek hangerejét és hangszínét. Mindezeken túlmenően a rezgésbe hozott padló másodlagos hangsugárzóként is működhet.

A pódium teljes átépítésre kerül, az átépítés azonban természetesen itt sem járhat minőségromlással. Nagy és nehezen megválaszolható kérdés, hogy vajon melyek azok a mechanikai-akusztikai paraméterek, amelyek lényegesen befolyásolják a minőséget – s mint ilyenek, feltétlenül megőrzendők vagy „visszaépítendők” – , s melyek azok, melyek nem érintik az akusztikát, tehát szükség esetén módosíthatók, ha a célszerű használat ezt igényli?

A kérdés megválaszolása érdekében a pódium eredeti állapotában kiterjedt rezgés- és akusztikai méréseket végeztünk, a mérési eredményeket számítógépes elemzés eredményeivel vetettük egybe, s az ilyen módon pontosított modellen próbáltuk ki azokat a tervezési megoldásokat és variációkat, amelyek egyaránt megfelelnek az akusztikai és logisztikai követelményeknek. (A munka részleteit ld. [245]-ben.)

A méréssorozat keretében a pódium faszerkezetének rezgéseit vizsgáltuk mesterséges gerjesztésekkel, valamint cselló- és bőgőművész közreműködésével. A pódium alatti gerendaszerkezeten és a padló különböző pontjain rezgésérzékelőket helyeztünk el és mértük a rezgések erősségét és frekvencia-összetételét. A mérések alapján egyrészt a szerkezet sajátrezgéseire, másrészt a rezgésterjedés jellemzőire vonatkozó számításokat végeztünk. Vizsgáltuk továbbá a szerkezet viselkedését operaénekeseket kísérő szimfonikus zenekar fellépése közben is.

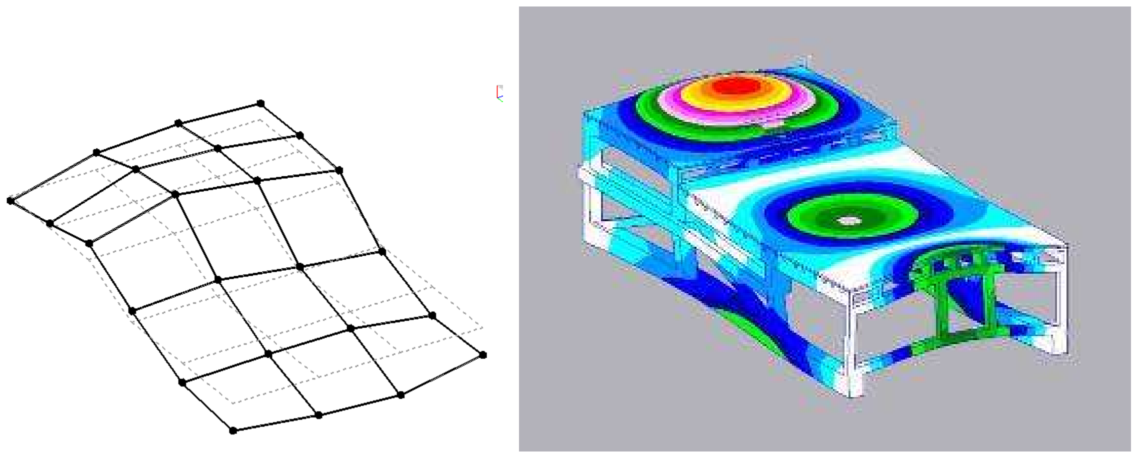
A szerkezet alapos felmérése után elkészítettük a pódium egyik szektorának végeselemes modelljét és meghatároztuk sajátfrekvenciáit. A modellből számított sajátfrekvenciák ortotróp anyagjellemzők bevezetése és többszöri paraméter-hangolás után sem egyeztek meg pontosan a mért értékekkel. Ennek fő oka, hogy az összeszáradt, deformálódott, ácskapcsokkal és ékekkel összetartott százéves faszerkezet pontos anyagjellemzői nem ismertek és a kötések, kapcsolatok alig modellezhetők. A rezgésalakok azonban így is kielégítő hasonlóságot mutattak a mérésekkel, ezért a kapott modellt alkalmasnak találtuk az átépítendő szerkezet tervezési variánsainak vizsgálatára.

A szerkezeti modell akusztikai peremelem modellé történt transzformációja után a faszerkezet és a fölötte kialakuló hangtér közötti kölcsönhatások elemzése is lehetővé vált, melyet kísérletileg csak nagyon nehezen lehetett volna elvégezni. A számítások azt mutatták, hogy a Nagyterem pódiumának padlója jelenlegi állapotában nem működik számottevő hangelnyelőként, és nem tekinthető jelentős energiát le-adó szekunder sugárzónak sem, de hangszínezetet befolyásoló hatása nem zárható ki teljes mértékben.

7.17. ábra: *Rezgésérzékelők elhelyezése és mérőkalapácsos gerjesztés a szerkezeten a rezgésterjedés vizsgálatához*

7.18. ábra: *A padlóban terjedő szerkezeti rezgések és a hangtérbe lesugárzott léghang-komponensek vizsgálata mélyvonós hangszerek segítségével*

Az akusztikai elemzések eredményei, a célszerűség és a műemlékvédelmi szem-pontok együttes mérlegelése alapján az építtetővel és a tervezőkkel együtt végül úgy döntöttünk, hogy a padlószerkezetet az eredetinek megfelelő módon építsék újra. Miután a pódium alatti teret a jövőben tároló térnek is használni kívánják, s így ott több helyre van szükség, a tartószerkezet anyagaként a korábbi gerendaváz helyett vasbeton oszlopok alkalmazása kívánatos. Különböző tervezési variánsokat vizsgálva megállapítottuk, hogy a pódium alatti vasbeton födémmel összevasalt monolit vasbeton oszlopok alkalmazása esetén a pódium padlószerkezetének rezgésakusztikai jellemzői nagyjából azonosak lehetnek az eredetiével. A vasbeton oszlopok és a fa padlószerkezet közé rugalmas támaszelemek kerülnek, hogy az épület vázában terjedő rezgések semmiképpen ne adódhassanak át a Nagyterem padlójára.



7.19. ábra: *A pódium egy jellemző szerkezeti sajátrezgése mérések és végeselemes modell alapján*

7.5. Az ipari alkalmazások tapasztalatainak összefoglalása

Értekezésünk korábbi fejezeteiben olyan elméleti modelleket és laboratóriumi kísérleteket ismertettünk, amelyek a modális tartományban érvényes metodikákkal eredményesen kezelhetők voltak. A modális módszerek azonban nem minden esetben alkalmazhatók az akusztikai tervezés napi gyakorlatában.

A jelen fejezetben bemutatott gyakorlati feladatok és megoldások közül a fűtőművek zajcsökkentése esetében a domináns források azonosítása érdekében modális megközelítésre sem szükség, sem mód nem adódott; ehelyett elegendő volt a forrásokat egyszerű pont-, vonal- vagy felületforrással helyettesíteni.

A Déli vasúti híd és a Lágymányosi híd olyan méretekkel bír, hogy a teljes rendszert nem, csak annak egy-egy elemét lehet modellezni, és ezen modellek modális viselkedését a gyakorlat igényei által megkívánt pontossággal validálni megoldhatatlan nehézségekbe ütközik. További probléma, hogy az acélszerkezetű hidak koherens zajforrásokat képeznek, amelyeket független pontforrásokkal nem lehet helyettesíteni. Ilyen feladatok esetében hasznos megközelítést nyújt a statisztikus peremelem módszer, melynél a kiválasztott elemeken egyszerű rezgésformákat tételezünk fel és ezek hatásának összegezésével állítjuk elő a vizsgálni kívánt hangteret.

Épületekkel kapcsolatos feladatok esetében szintén a méreteken és a probléma frekvenciatartományán múlik, hogy eredményesen alkalmazható-e a modális megközelítés. A vizsgálat tárgyát képező Művészetek Palotája esetében az épület belsejében kialakuló zajok minimalizálása érdekében vált szükségessé a környezetből származó rezgések csillapítása – és így az érintett frekvenciatartomány viszonylag magas frekvenciákig terjedt – , míg az irodaépület esetében az alacsony frekvenciás, emberre ható rezgések jelentették a problémát. Előbbi esetben a szerkezet relatíve alacsony sajátfrekvenciái nem tették lehetővé a modális megközelítés alkalmazását, utóbbi épületnél azonban hasznos információkat lehetett nyerni a módszer alkalmazásával. A Zeneakadémia nagytermi pódiumának vizsgálata – a szerkezet műszaki állapota és a körülmények nehézsége ellenére – kifejezetten igényelte és lehetővé is tette a modális módszer használatát.

Amint azt bevezetőnkben is említettük, munkánk célja az üzemi hullámhosszakkal összemérhető méretű rezgésakusztikai rendszerek viselkedésének leírása és elemzése, mindvégig szem előtt tartva a felmerülő gyakorlati feladatok igényeit. Amint az ismertetett példák is mutatják, a diszkrét modellek és a modális megközelítés alkalmazási területe korlátozott. Sok feladat esetében azonban nem kerülhető meg, ill. hasznos információkkal szolgálhat a rendszer modális viselkedésének feltárása és figyelembe vétele. Értekezésünk ezen feladatok megoldásához kívánt támpontokat és segítséget nyújtani.

F1. Függelék

F1. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Értekezésem az elmúlt bő két évtized kutatómunkájának eredményeit foglalja magában, melyből az első hat évet a Leuveni Katolikus Egyetem Gépészeti Intézetében, az utána eltelt időt pedig a BME Híradástechnikai Tanszékén tölthettem. Elsősorban Paul Sas professzornak tartozom igen nagy hálával, akinek meghívása és támogatása megnyitotta előttem az utat a műszaki akusztika legkorszerűbb eszközeinek és módszereinek megismeréséhez, és ezzel új fejezetet nyitott számomra a zaj- és rezgéscsökkentéssel kapcsolatos kutató-fejlesztő munkában. Az akkori Móduselemzési Laboratórium tagjaként, az LMS International szoftverfejlesztő vállalattal szoros együttműködésben kitűnő kutatókkal dolgozhattam együtt, akiktől rengeteget tanulhattam: Paul Sas, Katrien Wyckaert, Herman Van der Auweraer, Ward Heylen és Dirk Otte tapasztalataival és támogatásával segített a korszerű ismeretek gyors elsajátításában.

Nem kevésbé volt fontos és értékes a tudományos együttműködésnek az a sűrű hálója, melynek révén részt vehettem a Leuveni Egyetemen akkor és ott folyó élvonalbeli kutatási projektekben. Ebben az időszakban kezdődött a számítógéppel segített virtuális prototípus fejlesztés addig különálló szoftvereszközeinek egységbe foglalása, melynek egyik első lépéseként a mechanikai és akusztikai elemzési metodikák integrálására került sor. Nagy szerencsémnek tartom, hogy ennek a munkának aktív résztvevője lehettem közvetlen munkatársaimmal, Joost Van de Peer-rel, Wim Desmet-tel, Filip Penné-vel, Chao Ying Bao-val, Per-Olof Larsson-nal, Luc Cremers-szel és sok más kollégával együtt, akikkel nagyon gyümölcsöző együttműködést folytathattam, ezért hálával tartozom.

Hazatérésemet Pap László tanszékvezető egyetemi tanárnak és Jereb László tanszékvezető helyettesnek köszönhetem, akik kezdettől fogva minden lehetséges eszközzel támogattak abban, hogy új életet leheljünk a rendszerváltás után nagy veszteségeket elszenvedett akusztikai ipar és szolgáltatás hátországába, az Egyetem kutatás-fejlesztési és oktatási tevékenységébe. E munkámban maximálisan egyetértő és támogató kollégákat tudhattam magam körül a néhai Barát Zoltán és Takács Ferenc, valamint Horváthné Gembiczky Erzsébet, Granát János, Pfliegel Péter és Koller István személyében, akiket hamarosan követtek a műszaki akusztika új generációjának tehetséges kutatói és oktatói: Márki Ferenc, Gulyás Krisztián, Nagy Attila Balázs, Fiala Péter, Gajdátsy Péter, Huszty Csaba, Kimpián Tibor, Mócsai Tamás és Rucz Péter. Ők alkotják azt a kört, akik már megszerzett vagy hamarosan megszerzendő tudományos fokozataik és nemzetközi kitekintésük birto-

kában, korszerű ismeretekkel felvértezve sikerrel vihetik tovább a szakterület zászlaját. Mások, jelesül Fürjes Andor és Bite Pál Zoltán sikeres akusztikai mérnökirodák vezetőiként kamatoztatják doktoranduszi tanulmányaik során szerzett ismereteiket.

A Híradástechnikai Tanszéken folyó munkám, a rezgésakusztikai témakör meghonosításának és az oktatás folyamatos korszerűsítésének fő célja a világban létező modern módszerek hazai alkalmazása és elterjesztése. Ehhez mindvégig élveztem munkahelyi vezetőim: Pap László, majd később Imre Sándor tanszékvezetők támogatását, amiért ezúton is köszönettel tartozom. Az anyagi feltételek megteremtésében az ő segítségükön kívül a munkatársaimmal együtt folytatott számos nemzetközi európai együttműködési projekt partnereinek és a hazai ipari partnerek együttműködésére és támogatására is szükség volt, akiknek ezúton fejezem ki köszönetemet, közöttük név szerint is megemlítve Forián Szabó Pétert és Dombi Istvánt. A kutatások és szakértői feladatok megoldása során mindig számíthattam hallgatóim érdeklődésére és aktív közreműködésére, a velük folytatott tartalmas beszélgetések sok megoldandó problémára mutattak rá. Nagy hálával tartozom Peter Göransson professzornak, aki 2006 nyarán két hónapos kutató szabadság lehetőségét biztosította számomra a stockholmi Királyi Műszaki Egyetem Jármű- és Aerodinamikai Intézetében. Kollár István professzor a publikációs követelmények teljesítéséhez és azok igazolásához nyújtott számos alkalommal értékes és önzetlen segítséget.

És végül, de elsősorban: soha nem lett volna lehetőségem eredményes kutatómunkát folytatni, ha feleségem, Morvai Zsuzsanna és gyermekeim, Ádám, Eszter és Dávid türelme és megértése nem teremtette volna meg ennek feltételeit. Ezúton is nagyon köszönöm nekik, és e munkámat nekik ajánlom!

F2. Függelék

F2. IRODALOMJEGYZÉK

A felhasznált irodalmi forrásokat témakörök szerint csoportosítva közlöm.

Széles témaköröket felölelő akusztikai alapművek

[1] *Directive 2002/49/EC* of the European Parliament and of the Council of 25 June 2002 *relating to the assessment and management of environmental noise.* Official Journal L 189, 18/07/2002, 12 – 26.p.

[2] Lord Rayleigh [J. W. Strutt]: *The theory of sound.* Első kiadása: 1877, második, bővített kiadás: 1894, újra nyomtatva 1926, 1929.

[3] Ph.M. Morse and K.U. Ingard, *Theoretical acoustics.* Princeton University Press, 1987.

[4] M.J. Lighthill, „On sound generated aerodynamically." *Proc. Royal Soc.,* Part I. General theory. Vol. 211. pp. 564-587 (1952), Part II. Turbulence as a source of sound. Vol. 222, pp.1-32. (1954)

[5] Allan D. Pierce: *Acoustics: An introduction to its physical principles and applications*. Published by the Acoustical Society of America, Melville, 1989.

[6] Tarnóczy T.: *Akusztikai tervezés.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966.

[7] Tarnóczy T.: *Teremakusztika I. ,II.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

[8] M. C. Junger and D. Feit, *Sound, structures and their interaction*. Acoustical Society of America, 1993. (első kiadás: MIT, 1972.)

[9] L.E. Kinsler, A. R. Frey et al., *Fundamentals of acoustics*. 3rd edition, John Wiley & Sons, 1982.

[10] E. Skudrzyk, *The Foundations of acoustics. Basic mathematics and basic acoustics*. Springer-Verlag, Wien-New York, 1971. (Korábbi kiadása német nyelven: …)

[11] F. Fahy, *Sound and structural vibration. Radiation transmission and response*. Academic Press, 1985.

[12] David S. Burnett: *Finite element analysis from concept to application*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, 1987.

[13] M. Ochmann, M. Heckl, „Numerische Methoden in der Technischen Akustik”. In: *Taschenbuch der Technischen Akustik*, herausg. von M. Heckl und H. A. Müller, 2. Auflage, Springer, Berlin 1994, 48-66.

[14] R. H. Lyon*, Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems*. M.I.T. Press, 1975.

[15] O. von Estorff, *Boundary Elements in Acoustics*, WIT Press, Southampton (2000)

[16] L.L. Beranek*, Acoustics*. McGraw-Hill, New York, 1954.

[17] Barát Z: *Műszaki akusztika*. Oktatási segédlet. Kézirat, 1970.

[18] Angster J. – Arató É.: *Akusztikai példatár.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

[19] Granát János – Horváthné Dr. Gembiczky Erzsébet, *Műszaki akusztika*. Műegyetemi Kiadó, 2007.

[20] J. Leuridan: Software for acoustics ... crossing the chasm. Distinguished lecture, *Proceedings of Euro-Noise '95*, Lyon, 21-23 March 1995. Vol. 1, pp.17-32.

[21] F. Fahy, K.R. Holland and L. Presencer: An acoustic transducer of surface vibrational volume velocity. *Proc. Inter-Noise 92*, 565-568.p.

[22] Johnson, M.E. and Elliott, S.J., „Volume velocity sensors for active control”. *Proc. Inst. Acoust*. Vol. 15. No.3.pp. 411-420. (1993)

Szerkezetdinamika

[23] L,. Meirovitch: *Computational methods in structural dynamics*. Sijthoff & Noordhoff, Rockville, 1980.

[24] S.P. Timoshenko, J. N. Goodier: *Theory of elasticity*. McGraw Hill, New York…, 1970 (Első kiadás: 1934, United Engineering Trustees)

[25] R.R. Craig: *Structural dyanamics. An introduction to computer methods*. John Wiley, 1981.

[26] R.E.D. Bishop, G.M.L. Gladwell and S. Michaelson, *The matrix analysis of vibration.* Cambridge University Press, 1979.

[27] Vértes Gy., *Építmények dinamikája*, Műszaki Kiadó Budapest, 1976.

[28] Vértes, Gy., *Structural Dynamics*, Developments in Civil Engineering, No.11. Elsevier, Amsterdam, 1984.

[29] Vértes Gy., *Structural Dynamics,* Akadémia Kiadó Budapest, 1985.

[30] György J.: *Szerkezetek dinamikája*. Műegyetemi Kiadó, 2006.

Rokon szakterületek és analógiák

[31] Simonyi Károly: *Elméleti villamosságtan.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.

[32] Zombory László: *Elektromágneses terek*. Műszaki Könyvkiadó Kft., Budapest, 2006.

[33] Zombory L. – Koltai M.: *Elektromágnes terek gépi analízise*. Műszaki Könyvkiadó: Budapest (1979)

[34] Everstine, G.C., „Structural analogies for scalar field problems”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 17. No. 3. pp. 471-476. (1981)

[35] J. Merkhaut: *Theory of electroacoustics*. (Translated by R. Gerber), McGraw Hill, New-York, 1981.

[36] Furdujev, V., *Tyeoremü vzaimnoszty*. Gosztyeh-Izdat, Moszkva, 1948.

A végeselem módszer alapjai

[37] R. Courant, „Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations". *Bull. Amer. Math. Soc*., Vol. 49, 1-23.pp. (1943)

[38] G. Pólya, Sur une interpretation de la methode des differences finies qui peut fournir des bornes superieures ou inferieues. *C. R. Acad. Sci.* Paris, Vol. 235, 995-997, 1952.

[39] J.H. Argyris: Energy theorems and structural analysis. *Aircaft Engineering*, Vol. 26. & 27, 1955. (Utánnyomásban megjelent: J. H. Argyris and S. Kelsey, Energy theorems and structural analysis, Butterworth, London, 1960.)

[40] M.J.Turner, R.W. Clough, H.C. Martin and L.J. Topp, „Stiffness and Deflection Analysis of complex structures." *J. Aeron. Sci,* Vol. 23. No. 9. 805-823, 854. pp. (1956)

[41] O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element method*. 3rd, expanded and revised ed., McGraw Hill, London, 1982. (első kiadása:1967)

[42] H.C. Martin, G. F. Carey, *Bevezetés a végeselem-analízisbe*. Műszaki Könyvkiadó, 1976.

[43] K.-J. Bathe, *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.

[44] Kurutzné Kovács Márta – Scharle Péter, *A végeselem-módszer egyszerű elemei és elemcsaládjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.

[45] Páczelt I., *Végeselem-módszer a mérnöki gyakorlatban*. Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1999.

[46] Gyimóthy Szabolcs: *Adaptív automatikus hálógenerálás a végeselem módszerhez*. PhD értekezés, Budapest, 2004.

Akusztikai végeselem és véges differencia módszer

[47] Gladwell, G.M.L., *„A finite element method for acoustics."* Proc. 5th Int. Congr. Acoust., Liège, Paper L.33 (1965)

[48] Gladwell, G.M.L., „A variational formulation of damped acousto-structural problems. *J. Sound Vibration*, Vol. 4. p.172. (1966)

[49] G.M.L. Gladwell and G. Zimmermann, On energy and complementary energy formulations of acoustic and structural vibration problems. *J. Sound Vib.,* Vol. 3. No.3., pp. 233-241 (1966)

[50] A. Craggs, The use of simple three-dimensional acoustic finite elements for determining the natural modes and frequencies of complex xhaped enclosures. *J. Sound Vib.,* Vol. 23. No.3. pp.331-339 (1972)

[51] Ch-I.J. Young and M.J. Crocker, „Prediction of transmission loss in mufflers by the finite-element method. *Journ. Acoust. Soc. Amer.,* Vol. 57. No.1. pp. 144-148. (1975)

[52] Craggs, A. and Stead, G., „Sound transmission between enclosures. A study using plates and acoustic finite elements. *Acustica,* Vol. 35. p. 89. (1976)

[53] A. Craggs, A finite element method for damped acoustic systems: an application to evaluate the performance of reactive mufflers. *J. Sound Vib.,* Vol. 48. pp. 377-392 (1976)

[54] A. Craggs, „A finite element method for modelling dissipative mufflers with a locally reacting lining. *J. Sound Vib.,* Vol. 54. No.2. pp.285-296 (1977)

[55] Petyt, M. and Lim, S.P., „Finite element analysis of the noise inside a mechanically excited cylinder". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, p.109. (1978)

[56] D. Vandepitte, Acoustic finite elements. Elhangzott *az Advanced Techniques in Applied and Numerical Acoustics* c. kurzus keretében, Leuven, 1993.

[57] P. Göransson: „*An introduction to acoustic finite elements*”. Course notes for 4B1170 Numerical Acoustics, KTH Aeronautical and Vehicle Engineering, Stockholm, 2006. Szintén megjelent: “*Acoustic finite elements*”, in Advanced Techniques in Applied and Numerical Acoustics, edited by P. Sas (Leuven, 1993), Part VI.

[58] Nefske, D.J., Wolf, J.A. Jr. and Howell, L.J.: „Structural-acoustic finite element analysis of the automobile passenger compartment: a review of current practice.” *Journal of Sound Vib.*, Vol. 80. No. 2., p. 247-266. (1982)

[59] Augusztinovicz F.: *Az akusztikai tervezés számítógépi módszer*ei. Kézirat, Budapest, 2001.

[60] S. Wang and R.J. Bernhard, „Theory and applications of a simplified energy finite element method and its similarity to SEA”. *Noise Control Engineering Journal*, Vol. 50. No. 2. pp. 63-72 (2002)

[61] Ld. a Leuveni Katolikus Egyetem Gépészeti Intézete által kétévente megrendezett *International Seminar on Applied Acoustics* c. kurzusok előadásait.

Csillapítás mechanikai és akusztikai rendszerekben

[62] K. Varanasi: „*On the design of a precision machine for closed-loop performance*”. MSc Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2002. Chapter 3: Models of damped systems.

[63] S.H. Crandall, „The hysteretic damping model in vibration theory”. *Journal of Mechanical Engineering Science,* Vol. 25. pp. 23-28. (1991)

[64] R.E.D. Bishop and D. C. Johnson, *The mechanics of vibration*. Cambridge University Press, Cambridge, 1960.

[65] C. F. Beards: *Structural vibration: Analysis and damping*. Elsevier, 1996. Chapter 5: Damping in structures.

[66] H.K. Milne, „The impulse response function of a single degree of freedom system with hysteretic damping”. J*. Sound Vibration*, Vol. 100. No. 4. pp. 590-593 (1985)

[67] Pritz T.: *Rezgéscsökkentő anyagok rugalmas tulajdonságai*. Akadémia Kiadó, Budapest, 1996.

[68] C. Zwikker and C.W. Kosten, *Sound-absorbing materials*. Elsevier, Amsterdam, 1949.

[69] M.E. Delany and E.N. Bazley, „Acoustical properties of fibruous absorbent materials. *Applied Acoustics*, Vol. 3. pp. 105-116. (1970)

[70] M.A. Biot, „Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. Part I. Low-frequency range.” *J. Acoust. Soc. Amer.,* Vol. 28. pp. 168-178. (1956)

[71] J.-F. Allard, *Propagation of sound in porous media: Modelling sound absorbing materials.* Elsevier, Amsterdam, 1993.

[72] P. Göransson, *„Numerical modelling of dynamics of light porous materials*.” PhD thesis, Lund University, Lund, 1998.

[73] Nils-Erik Hörlin, „*Hierarchical finite element modelling of Biot's equations for vibro-acoustic modelling of layered poroelastic media”.* PhD thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, 2004.

[74] G.E. Forsythe, W.G. Wasow, *Finite-difference methods for partial differential equations.* John Wiley&Sons, New York, 1960.

[75] D. Botteldooren, „Acoustical finite-difference time-domain simulation in a quasi-Cartesian grid”. *Journ. Acoust. Soc. Amer.,* Vol. 95. No.5. Pt.1. pp.2313-2319 (1994)

Rezgésakusztikai kölcsönhatások

[76] A.J. Pretlove, “Free vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity”, *J. Sound Vib*. 197-209 (1965).

[77] E.H. Dowell and H.M. Voss, “The effect of a cavity on panel vibration”, *AIAA Journ*. 1, 476-477 (1963).

[78] R.H. Lyon, “Noise reduction of rectangular enclosures with one flexible wall”, *J. Acoustic. Soc. Am.* 35, 1791-1797 (1973).

[79] R.W. Guy and M.C. Bhattacharya, “The transmission of sound through a cavity-backed finite plate*”, J. Sound Vib.* 27, 207-223 (1973).

[80] E.H. Dowell, G.F. Gorman III and D.A. Smith, “Acoustoelasticity: General theory, acoustical natural modes and forced response to sinusoidal excitation, including comparisons with experiment”, *J. Sound Vib.* 52, 519-542 (1977).

[81] J. Pan and D.A. Bies, “The effect of fluid-structural coupling on sound waves in an enclosure - Theoretical part”, *J. Acoust. Soc. Am*. 87, 691-707 (1990).

[82] J. Pan and D.A. Bies, “The effect of fluid structural coupling on sound waves in an enclosure - Experimental part”, *J. Acoust. Soc. Am.* 87, 708-717 (1990).

[83] Wolf, J.A. Jr., „Modal synthesis for combined structural-acoustic systems.” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 80. No. 2. January 1982, p. 247.

[84] D.J. Nefske and S.H. Sung, “Structural-acoustical system analysis using the modal synthesis technique”, *Proc. 3rd Int. Modal Analysis Conf*., Orlando, pp. 864-868. (1985)

[85] V.B. Bokil and U.S. Shirahatti, “A technique for the modal analysis of sound-structure interaction problems”, *J. Sound Vib*. 173, 23-41 (1994).

[86] Q. Zhang, “Application de l’analyse modale à la résolution des problèmes acoustiques automobiles en basses fréquence”, *J. SIA* 380, 44-50 (1993).

[87] Z.-D. Ma and I. Hagiwara, “Sensitivity analysis methods for coupled acoustical-structural systems - Part I: Modal sensitivities”, *AIAA J.* 29, 1787-1795 (1991).

[88] R. Singh and M. Schary, “Acoustic impedance measurement using sine sweep excitation and known volume velocity technique”, *J. Acoust. Soc. Am.* 64, 995-1003 (1978).

[89] V. Easwaran, V. H. Gupta and M.L. Munjal, “Relationship between the impedance matrix and the transfer matrix with specific reference to symmetrical, reciprocal and conservative systems”, *J. Sound Vib.* 161, 515-525 (1993).

[90] J.W. Verheij, “A comment on the relationship between reciprocal and symmetrical systems”, *J. Sound Vib.* 170, 567-570 (1994).

[91] H.V.Gupta, “On independence of reciprocity, symmetry and conservativeness of one-dimensional linear systems”, *J. Sound Vib*. 179, 547-552 (1995)

[92] P. Göransson: Analysis of the transmission of sound into the passenger compartment of a propeller aircraft using the finite element method. *Proc. 3rd International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics.* Kiad: ISVR - University of Southampton & Flight Dynamics Laboratory - Wright-Petterson AFB, Vol. II, pp. 869-879. (1988)

[93] H. Calrsson and G. Sandberg: „Finite element analysis of structure-acoustic interaction.” *Proc. 3rd International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics.* Kiad: ISVR - University of Southampton & Flight Dynamics Laboratory - Wright-Petterson AFB, Vol. II, pp. 857-868. (1988)

[94] P. Sim, T.W. Lim, M.S. Ewing, J.D. Swearingen, „Structural-acoustic interaction modeling with passive damping materials for interior noise abatement.” Paper # AIAA-98-2341, *Proc. 4th AIAA/CEAS Aeroacoustics (19th AIAA Aeroacoustics) Conference*, Toulouse, 1998. Part 2, pp. 794-804 (1998)

[95] M.S. Howe, „*Acoustics of fluid-structure interactions”.* Cambridge University Press, 2000.

[96] G.C. Everstine, “A symmetrical potential formulation for fluid-structure interaction”, *J. Sound Vib.* Vol. 79, 157-160 (1981).

[97] A. Kanarachos and I. Antoniadis, “Symmetric variational principles and modal methods in fluid-structure interaction problems”, *J. Sound Vib*. 121, 77-104 (1988).

[98] G. Sandberg and P. Göransson, “A symmetrical finite element formulation for acoustical fluid-structure interaction analysis”, *J. Sound Vib.* 123, 507-515 (1988).

[99] R. Ohayon, N. Meidinger and H. Berger, „Symmetric variational formulations for the vibration of damped structural-acoustic systems. Aerospace applications.” In: *Problémes non linéaires appliqués – Interactions fluides-structures.* Support de cours, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Rocquencourt, pp. 107-114. (1996)

Reciprocitás és szimmetria rezgésakusztikai rendszerekben

[100] J. C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*. Clarendon Press, Oxford, 1863. Vol. 1. Art. 88, p. 91.

[101] L.M. Lyamshev, “A question in connection with the principle of reciprocity in acoustics”, *Soviet Phys. Doklady* 4, 406-409 (1959).

[102] T. ten Wolde, J.W. Verheij and H.F. Steenhoek, “Reciprocity method for the measurement of mechano-acoustical transfer functions*”, J. Sound Vib*. 42, 49-55 (1975).

[103] F.J. Fahy, “The reciprocity principle and applications in vibro-acoustics”, *Proc. Inst. Acoust.* 12 (part 1) 1-20 (1990).

[104] F. J. Fahy, „Some applications of the reciprocity principle in experimental vibroacoustics”, *Acoustical Physics*, Vol. 49. No. 2. pp. 217-229. (2003). (Az Акустический Журнал c. folyóirat 2003. évi 2. sz. 262-277. oldalon oroszul megjelent cikk eredeti, angol szövege.)

[105] A.N. Norris and D.A. Rebinsky, “Acoustic reciprocity for fluid-structure problems” *J. Acoust. Soc. Am.* 94, 1714-1715 (1993).

[106] I. L. Vér, “Use of reciprocity and superposition as a diagnostic and design tool in noise control”, *Proc. Forum Acusticum 1996*, Acustica/Acta Acustica, Vol. 82. Supplement 1, S62-S69.p.

Móduselemzés

[107] D.J. Ewins, „*Modal testing: Theory and Practice*”. Research Studies Press, Taunton – John Wiley, New York, 1984 (Reprinted 1991)

[108] D. Formenti, R. Allemang, R. Rost et al, „Analytical and experimental modal analysis”. In: *Proc. 15th International Seminar on Modal Analysis*, *Course on Experimental Modal Analysis,* Part I. Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, 1990.

[109] N. Lieven and D. Ewins, ``A proposal for standard notation and terminology in modal analysis,'' *Int. J. Anal. and Exp. Modal Analysis*, vol. 7, no. 2, pp. 151--156, 1992.

[110] H. V. Panossian, „An assessment of model order reduction techniques. *Proc. 3rd International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*. Kiad: ISVR - University of Southampton & Flight Dynamics Laboratory - Wright-Petterson AFB, Vol. II, pp. 891-900. (1988)

[111] W. Heylen, S. Lammens and P. Sas, *Modal analysis theory and testing*. Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, 1997.

Komponens módus szintézis

[112] W.C. Hurty, „Dynamic analysis of structural systems using component modes”, *AIAA Journal,* Vol. 3. No. 4. pp. 678-685. ((1965)

[113] R.R. Craig, M.C.C. Bampton, „Coupling of substructures for dynamic analyses.” *AIAA* [American Institute of Aeronautics and Astronautics] *Journal*, Vol. 6. No.7. pp-1313-1319 (1968)

[114] Craig, T.T., „A review of time-domain and frequency-domain component mode synthesis method.” In: *Combined Experimental/Analytical Modeling of Dynamic Structural Systems, Ed.* by D.R. Martinez and A.K. Miller, AMD, Vol. 67. 1985, p.1.

[115] L. Gazdag and G.T. Endrőczy, Multilevel substructuring and mode superposition for complex structures.
Proc. 3rd International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics. Kiad: ISVR - University of Southampton & Flight Dynamics Laboratory - Wright-Petterson AFB, Vol. I, pp. 349-361. (1988)

[116] M.A. Tournour, N. Atalla, O. Chiello and F. Sgard, „Validation, performance, convergence and application of free interface component mode synthesis.” *Computer & Structures*, Vol. 79. pp. 1861-1876 (2001)

[117] Sung, S.H. and Nefske, D.J., „Component mode synthesis of a vehicle structural.acoustic system model”. *AIAA Journal*, Vol. 24. No. 6. June 1986, p. 1021

[118] P. Göransson and J. Brandt, „Generalized damping in fluid structure interaction analyses using modal synthesis”. *Proc. Internat. Conf. Spacecraft structures and mechanical testing, Noordwijk (ESA SP-321)*, pp. 807-812 (1991)

[119] P. Göransson, „On the representation of general damping properties in modal synthesis solutions of fluid structure interaction problems”. *Proc. of the DGLR/AIAA 14th Aeroacoustics Conference,* Aachen, 1992, Vol. II. pp. 679-686. (1992)

Akusztikai móduselemzés

[120] D.L. Smith, “Experimental techniques for acoustical modal analysis of cavities”, *Proc. Inter-Noise 76,* Washington, 5-7 April 1976, pp. 129-132.

[121] R. Singh and M. Schary, “Acoustic impedance measurement using sine sweep excitation and known volume velocity technique”. *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 64, 995-1003 (1978).

[122] D.L. Brown and R.J. Allemang, “Modal analysis techniques applicable to acoustical problem solution” *Proc. Inter-Noise 78,* San Francisco, 8-10 May 1978, pp. 909-914.

[123] J.J. Nieter and R. Singh, “Acoustic modal analysis experiment”
J. Acoust. Soc. Am. Vol. 72, 319-326 (1982).

[124] Ch.-H. Kung and R. Singh, “Experimental modal analysis technique for three-dimensional acoustic cavities”, *J. Acoust. Soc. Am*. Vol. 77, (2) 731-738.p. (1985)

[125] „Vibro-acoustic Modal Analysis module” Az LMS. International CADA-X szoftvercsomagjának új modulja a Release 3.4. verziótól kezdve. LMS International, Leuven (1996)

[126] Product information sheets of Low and Mid Frequency Volume Velocity Sources Type E-LFVVS and E-MFVVS. LMS International, Leuven, 1996.

[127] SYSNOISE User’s and Theoretical Manual, Release 5.2.
Numerical Integration Technologies, Leuven, 1995.

Akusztikai források sugárzása

[128] ISO 8297, Acoustics – Determination of sound power levels of multisource industrial plants for evaluation of sound power pressure levels in the environment, 12/1994

[129] VDI 2571, Sound radiation from industrial buildings, 08/1976

130] Hangterjedés a szabadban. *Magyar szabvány*, MSZ 15036:2002

[131] „IMAGINE – State of the art.” Deliverable 2 of the IMAGINE project (6th FP EU project, Area 1.2.1, Priority 1.5), Document No: IMA10TR-040423-AEATNL32. AEAT Technology Rail, Utrecht (2004)

[132] M. Ochmann und M. Heckl, Numerische Methoden in der Technischen Akustik. In: Heckl und H.A. Müller (Eds), *Taschenbuch der Technischen Akustik*. 2. Auflage, Kap. 3. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[133] Z.Maekawa: “Noise reduction by distance from sources of various shapes”. *Applied Acoustics*, Vol. 3, pp. 225-238. (1970)

[134] P.Janeček: “A Rectangular Plane Sound Source*”. Applied Acoustics*, Vol. 27, pp. 263-274 (1989)

[135] D. Hohenwarter: “Noise Radiation of (Rectangular) Plane Sources”. *Applied Acoustics*, Vol. 33, pp. 45-62. (1981)

[136] M. Heckl, *J. Acoust. Soc. Amer*. Vol. 34. (10?) pp. 803-808, 1553-1557, (1962)

[137] C. E. Wallace, *J. Acoust. Soc. Amer*., Vol. 51. No 3. Pt 2. pp. 946-952.

[138] M. Heckl: „Transmission of structure borne sound from vibrating structures into elastic media”. *Proc. Nordic Acoustical Meeting*, Aalborg, 1986, pp. 15-26 (1986).

[139] Gaál Dezső: *Hangsugárzás sík és körhenger felületekről*. Kandidátusi értekezés, Budapest, 1977.

[140] H. F. Olson, *Elements of Acoustical Engineering.* D. Van Nostrand Company, New York, 1940.

[141] Granát János: *Forgásszimmetrikus hangsugárzók terének meghatározása*. Kandidátusi értekezés, Budapest, 1991.

[142] A. Sommerfeld, *Partial differential equations in physics*. Academic Press, New York, 1949. (A *„Vorlesungen über theoretische Physik, Band 6: Partielle Differentialgleichungen der Physik”* c. kiadvány angol fordítása.)

[143] L. Cremer, „Die Synthese des Schallfeldes eines beliebigen festen Körpers in Luft mit beliebiger Schnelleverteilung aud Kugelschallfeldern. *Acustica*, Vol. 55. pp. 44- (1984)

[144] L. Cremer und M. Wang, „Die Synthese eines von einem beliebigen Körper in Luft erzeugten Feldes aus Kugelschallfeldern und deren Realisierung in Durchrechnung und Experiment.” *Acustica,* Vol. 65. No.2. pp- 53-74 (1988)

[145] M. Ochmann, „Die Multipolstrahlersynthese - ein effektives Verfahren zur Berechnung der Schallabstrahlung von schwingenden Strukturen beliebiger Oberflächengestalt”. *Acustica,* Vol. 72, pp. 233-246 (1990)

[146] M. Ochmann, The source simulation technique for acoustic radiation problems, *Acustica,* Vol. 81, pp. 512-527 (1995)

[147] M. Ochmann und F. P. Mechel: „Analytical and Numerical Methods in Acoustics. The Boundary Element Method (BEM)”. Chap. O.5
In: F. P. Mechel (Ed.), *Formulas of Acoustics*, Springer-Verlag, pp. 972-989. (2002)

[148] R. Jones and Ch. Wykes (Series Eds: P.L. Knight and A. Miller), *„Holographic and Speckle Interferometry (Cambridge Studies in Modern Optics.)* Cambridge University Press, 1989.

[149] L. Bouchet, Th. Loyau, N. Hamzaoui and C. Boisson, „Calculation of acoustic radiation using equivalent-sphere methods.” *Journ. Acoust. Soc. Amer*., Vol. 107, No.5. pp. 2387-2397 (2000)

[150] Verheij, J. Hoeberichts, A.N.J. and Thompson, D.J., “Acoustic source strength characterization for heavy road vehicle engines in connection with pass-by noise”. *Proc. 3rd*

Int. Congress on Air- and Structure-Borne Sound and Vibration, (Ed. M.J. Crocker), Montreal, Vol. I, pp. 647-654 (1994).

[151] Márki F.: Statistical – Inverse Boundary Element Method. In: Sas P, Hal B (Eds): *Proc. 2002 International Conference on Noise and Vibration Engineering*, ISMA2002. Leuven, Belgium, pp. 1791-1798. (2002)

[152] S. J. Elliott and M.E. Johnson, „Radiation modes and the active control of sound power. *Journ. Acoust. Soc. Amer*., Vol. 94. No. 4. pp. 2194-2204. (1993)

[153] Th. Chanpheng, H. Yamada, T. Miyata and H. Katsuchi, „Application of radiation modes to the problem of low-frequency noise from a highway bridge." *Applied Acoustics*, Vol. 65. pp. 109-123 (2004)

[154] G.V. Borgiotti, „ The power radiated by a vibrating body in an acoustic fluid and its determination from boundary measurements. *Journ. Acoust. Soc. Amer*., Vol. 88. No.4. pp. 1884-1893 (1990)

Hanggátlás

[155] Cremer, L.O.: Theorie der Schalldämmung dünner Wände bei schrägem Einfall. *Akustische Zeitschrift*, Bd. 7. (1942)

[156] Vér, I. L., „Recent developments in prediction of sound-transmission loss of single partition. *Proc. Purdue Noise Control Conf*. (Ed.: M.J. Crocker), Lafayette, pp. 412-418. (1971)

[157] A.C.C. Warnock and W. Fasold: Sound insulation: airborne and impact. In: *Encyclopedia of Acoustics.* (Ed. M. C. Crocker), John Wiley & Sons, New York, 1997. Vol. 3, Chapter 93, pp. 1129-1160.

[158] P. Nagy József: *A hangszigetelés elmélete és gyakorlata*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2004.

[159] Reis Frigyes: *Az épületakusztika alapjai*. Épületek akusztikai tervezésének alapjai. Terc Kiadó, Budapest, 2003.

[160] A. Tadeu, J. António, D. Mateus, „Sound insulation provided by single and double panel walls – a comparison of analytical solutions versus experimental results. *Applied Acoustics*, Vol. 65., pp. 15-29. (2004)

[161] P. de Fonseca, P. Sas, H. Van Brussel, „Active control of sound transmission through an aircraft fuselage test section." Paper # AIAA-98-2233, *Proc. 4th AIAA/CEAS Aeroacoustics (19th AIAA Aeroacoustics) Conference,* Toulouse, 1998. Part 1, pp. 184-194. (1998)

[162] A. Jakob and M. Möser, Active control of double-glazed windows. Part I: Feedforward control. *Applied Acoustics*, Vol. 64. pp. 163-182. (2003)

[163] Advanced study for active noise control in aircraft (ASANCA). 3th Framework Program EU Project, Contract No. AERO 0028-C (1989-1992)

Zajcsökkentő tokozások

[164] H.-J. Kang, J.-S. Kim, H.-S. Kim and S.-R. Kim, „Influence of sound leaks on in situ sound insulation performance". *Noise Control Eng. J.,* Vol. 49. No.3. pp. 113-119 (2001)

[165] Tweed,L.W. and Tree, D.R.: Three methods for predicting the insertion loss of close-fitting acoustical enclosures. *Noise Control Engineering,* 1978, Vol. 10. No.2. 74-79.p.

[166] Beranek, L.L. and Vér, I.L. (Eds.): *Noise and vibration control engineering. Principles and applications.* John Wiley, New York, 1992, Chapter 13.

[167] Ouellet, D. and Guyader, J.-L.: Theoretical and experimental study of partial enclosures. *Proc. Inter-Noise 88*, 413-416.p.

[168] Seybert, A.F., Wu, T.W. and Li, W.L.: Analysis of noise radiated by a source within a partial enclosure using the Boundary Element Method. *Proc. Inter-Noise 89,* 1225-1228.p.

[169] *AVL EXCITE* - Multi-Body Simulation (MBS) for Durability, NVH of Power Units and Drivelines. Az AVL GmbH (Ausztria) moduláris programcsomagja

Aktív zajcsökkentés

[170] P. Lueg, *Process of silencing sound oscillations*. US Patent 2 043 416, 1936.

Épített szerkezetek rezgései

[171] W.F. Tsang and C. Williams, „Application of experimental modal analysis to full-scale civil engineering structures.”
Proc. 3rd International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics. Kiad: ISVR - University of Southampton & Flight Dynamics Laboratory - Wright-Petterson AFB, Vol. II, pp. 1009-1019. (1988)

[172] J. R. Maguire and W.S. Atkins, „A frequency/damping database for tall chimneys.” *Proc. 3rd International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics.* Kiad: ISVR - University of Southampton & Flight Dynamics Laboratory - Wright-Petterson AFB, Vol. II, pp. 1003-1008. (1988)

[173] L. Frýba: „Dynamics of bridges.” *Proc. 3rd International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics.* Kiad: ISVR - University of Southampton & Flight Dynamics Laboratory - Wright-Petterson AFB, Vol. II, pp. 945-961. (1988)

[174] Ch. Meyer and H. Okamura (Eds), *Finite element analysis of Reinforced Concrete Structures.* Amer. Society of Civil Engineers, 1986.

[175] ASCE Committee on Concrete and Masonry Structures, „A state-of-the-art report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete”. Task Committee on FEA of Reinforced Concrete Structures. ASCE Spec. Publ., New York, 1981

[176] L. Frýba: *Dynamics of railway bridges*. Thomas Telford, London, 1996.

[177] A. Major, *Dynamics in civil engineering. Volume IV: Vibrations in buildings and industrial structures. Dynamics in hydraulic structures and bridges.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.

[178] Product data sheets of elastomer materials. CDM A.S., Overijse, Belgium

[179] J. P. Wolf , *Dynamic Soil-Structure Interaction*. Prentice Hall International Series in Civil Engineering and Engineering Mechanics, Prentice Hall Englewood Cliffs, N.J., 1985

A szerző által vezetett laboratórium munkatársainak értekezései

[180] Márki Ferenc: Zajforrások azonosítása peremelem módszer alapokon. PhD értekezés, BME Híradástechnikai Tanszék, Budapest, 2006.

[181] Fiala Péter: Development of a numerical model for the prediction of ground-borne noise and vibration in buildings. PhD értekezés, BME Híradástechnikai Tanszék, Budapest, 2008

[182] Gajdátsy Péter: Advanced transfer path analysis methods. PhD értekezés, KULeuven, Leuven, 2011.

[183] Huszty Csaba: Time-domain swept signal based measurement and processing of impulse responses for room acoustic evaluation. PhD értekezés, The University of Tokyo, Tokyo, 2012.

[184] Mócsai Tamás: Application and analysis of an adaptive Wave Based Technique for the acoustic simulation of complex vibroacoustic systems. PhD értekezés, BME Híradástechnikai Tanszék, Budapest. (Várható befejezés: 2012)

Az értekezés témaköréhez kapcsolódó, önállóan vagy szerzőtársakkal készített saját publikációk

[185] P. Sas, J. Van de Peer, F. Augusztinovicz, „Development of an analysis procedure for the assessment of insertion loss characteristics of double wall structures". In: *Proc. 9th FASE Symposium on New Acoustical Measurement Methods*. Balatonfüred, 1991. pp. 196-199. (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/FASE9Symp_ILpdf.pdf)

[186] Augusztinovicz, P Sas, D Otte, P-O Larsson, „Analytical and experimental study of complex modes in acoustical systems". In: *Proc. 10th Int. Modal Analysis Conference1992*. pp. 110-116.

[187] P Sas, F Augusztinovicz, J Van de Peer, „Investigation of the detailed vibro-acoustic behaviour of light-weight double-wall structures in the low frequency range." In: *Proc. Inter-Noise 92*, pp. 633-636 (1992)

[188] P Sas, J Van de Peer, F Augusztinovicz, „Mdelling the vibro-acoustic behaviour of a double wall structure". In: *Proc. of the DGLR/AIAA 14th Aeroacoustics Conference*, Aachen: 1992. pp. 561-570

[189] F Augusztinovicz, „Acoustic modal analysis". In: *Proc. 4th Int. Seminar on Applied Acoustics. Advanced techniques in applied and numerical acoustics* (Ed.: P. Sas), Leuven: 1993. p. 1-34. (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/ISMA-AcouModal.pdf)

[190] A [189] előadás az International Course on Applied Acoustics szemináriumsorozat keretében a Leuveni Katolikus Egyetemen 1993 óta minden évben elhangzik, a szóbeli változat lehetőség szerint évente frissül és új alkalmazási példákat mutat be.

[191] P Sas, F. Augusztinovicz, W Desmet, J Van de Peer, „Modelling the vibro-acoustic behaviour of a double-wall structure. In*: Proc. 4th Int. Seminar on Applied Acoustics. Advanced techniques in applied and numerical acoustics* (Ed.: P. Sas), Reference Paper IX. Leuven, 1993. *pp. 1-32.*

[192] P. Sas, Ch. Bao, F. Augusztinovicz, „Active control of sound transmission through a double-panel partition." In: P Chapelle, G Vermeir (Eds), *Proc. 1993 Int. Congress on Noise Control Engineering: Inter-Noise '93.* Leuven, Belgium, pp. 101-106.

[193] F Augusztinovicz, P Sas, „Evaluation and validation of numerical calculation methods for prediction of insertion loss of close-fitting engine enclosures" In: P Chapelle, G Vermeir (szerk.) *Proc. 1993 Int. Congress on Noise Control Engineering: Inter-Noise'93* (1993) pp. 721-726

[194] H Van der Auweraer, D Otte, F Augusztinovicz, „Vibro-acoustic analysis of trimmed aircraft through modal and principal field modelling". Paper No. AIAA 93-4380 In: *16th AIAA Aeroacoustics Conference,* Reston: 1993. pp. 1-9 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/AIAA_VibAAnal.pdf)

[195] P Sas, C Bao, F Augusztinovicz, et al., „On increase of the insertion loss of a double-panel partition by active noise control." In: *Proc. 2nd Conf. on Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration* (Ed.: Burdisso, R.A.) Blacksburg, 1993. pp. 98-114

[196] Sas P, Augusztinovicz F, van de Peer J, „Vibro-acoustic Modal Analysis of a Double Wall Structure". In: Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference (1993) Kissimmee, 1993. pp. 1366-1374 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/IMACXI_VAMADoubleW.pdf)

[197] Augusztinovicz F, Sas P, Penne F, „Sound Radiation From Structures in The Presence of Close-fitting Sound Shields". In: Cuschieri J. M., Glegg S. A. L., Yeager D. M., Proceedings of the 1994 National Conference on Noise Control Engineering. Institute of Noise Control Engineering, 1994. pp. 219-224 (Noise-Con 94.) (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/NoiseCon1994_Shields.pdf)

[198] H Van der Auweraer, D Otte, F Augusztinovicz, „Application of principal field decomposition to aircraft interior noise analysis." In*: Proc. 5th Int. Conf. on Recent Advances in Structural*

Dynamics, Southampton, pp. 1013-1022. (1994) (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/RASD5_FieldDecomp.pdf)

[199] F Augusztinovicz, P Sas, F Penne, „Simulation of shielding of diesel engine noise - Development and comparison of physical and numerical models”. In: *Proc. 19th ISMA* (Ed.: P. Sas), 1994. pp. 825-840 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/ISMA19_EngNoise.TIF)

[200] H Van der Auweraer, D Otte, F Augusztinovicz, „Experimental modal and principal field analysis of aircraft interior acoustics”. In: *Proc. 12th Int. Modal Analysis Conference,* 1994. pp. 318-324 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/IMACXII_Aircraft.pdf)

[201] K Wyckaert, F Augusztinovicz, „Vibro-acoustical modal analysis: reciprocity, modal symmetry and modal validity”. In: *Proc. 19th ISMA* (Ed. P. Sas), Leuven, 1994. pp. 739-760 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/ISMA19_Recip.TIF)

[202] F Augusztinovicz, P Sas, F Penne, „Comparison and verification of experimental and numerical models for the prediction of the efficiency of engine noise shields”. In: *Proc. 1995 SAE Noise and Vibration Conference* (P-291), Vol. 2. 1995. pp. 859-866 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/SAE%2395NV70.pdf)

[203] F. Augusztinovicz, F. Penne and P. Sas, „Calculation of sound radiation from sources, characterized by the equivalent power volume velocity method”. In: *Proc. 2nd Sysnoise Users Meeting*, Leuven,Paper II.5, pp. 1-9 (1995) (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/2ndSYSUsrMtg-EPVV.pdf)

[204] F Penne, F Augusztinovicz, L Cremers, P Sas, „Prediction of engine shield performance by means of a hybrid experimental-numerical approach”. In: *Proc. 2nd Sysnoise Users Meeting,* Leuven, Paper IV.5, pp. 1-6 (1995)

[205] K Wyckaert, F Augusztinovicz, P Sas, „Experimental vibro-acoustical modal analysis: reflections on reciprocity and excitation strategy” In: *Proc. 13th International Modal Analysis conference,* 1995. pp. 97-103 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/IMACXIII_Recip.pdf)

[206] F Augusztinovicz, P Sas, F. Penne, „Physical and numerical simulation of the performance of close-fitting partial engine shields.” In: *Fortschritte der Akustik - DAGA 96: Tagungsband der 21. Deutschen Jahrestagung für Akustik.* Saarbrücken, pp. 475-478. (1996) http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/DAGA96_EngShield.pdf

[207] F Penne, P Sas, F Augusztinovicz, „Prediction of the insertion loss of engine shield configurations using a variational B.E. method.” In: *Proc. Euro-Noise '95* (Ed.: P. Millot). Lyon, pp. 567-572. (1995)

[208] Sas P, Bao C Y, Augusztinovicz F, „Active Control of Sound Transmission Through a Double-panel Partition”. *J. Sound Vib*. Vol. 180. (4) *609-625* (1995) (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/JSV_DoubleWall.pdf)

[209] F Augusztinovicz, P Sas, L Cremers, R Liebregts, M Mantovani, C Bertolini. „Prediction of insertion loss of engine enclosures by indirect BEM calculations combined with a substitution monopole source description technique”. In: Paul Sas(szerk.) *Proc. 21st Int. Seminar on Modal Analysis* (Ed.: P. Sas), Leuven. Katholieke Universiteit Leuven, 1996. pp. 55-68 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/ISMA21_Enclosure.TIF)

[210] Van Der Auweraer H, Martens T, Otte D, Waterman E, Olbrechts T, Augusztinovicz F, „Optimization Study For Structural Acoustical Control Configuration on The Fokker 100 Using Reciprocal Testing”. In: Chalupnik J D, Marshall S E, Klein R C (Eds.), *Proceedings of The 1996 National Conference on Noise Control Engineering.* Part 2 (of 2) (1) Institute of Noise Control Engineering, 1996. pp. 177-180 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/NoiseCon-1996.pdf)

[211] Wyckaert K, Augusztinovicz F, Sas P, „Vibro-acoustical Modal Analysis: Reciprocity, Model Symmetry, And Model Validity” *J. Acoust. Soc. Amer.,* Vol. **100**: (5) *3172-3181* (1996) (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/JASA_Recip.pdf)

[212] Augusztinovicz, F. and Sas, P., Acoustic modal analysis at low frequencies: similarities and differences in formulations”. *Proc. 21st Int. Seminar on Modal Analysis* (Ed.: P. Sas), Vol. III. 1685-1699. p. (1996) (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/ISMA21_AcouModal.TIF)

[213] F Augusztinovicz, „Calculation of noise control by numerical methods - what we can do and what we cannot do – yet”. In: Augusztinovicz F.(szerk.), *Proc. Inter-Noise 1997: Help Quiet the World for a Higher Quality Life*, Budapest. Institute of Noise Control Engineering, 1997. pp. 27-44. (Distinguished lecture) (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/InterNoise97_Distinguished.pdf)

[214] H Van der Auweraer, T Martens, E Waterman, T Olbrechts, F Augusztinovicz, „Comparison of structural and acoustical active noise control performance of the Fokker 100 based on experimental simulation models”. In: Steven J Elliott, Horváth Gábor(szerk.), *Proc. Active 97*, Budapest: OPAKFI, 1997. pp. 491-498 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/Active97_Fokker.pdf)

[215] F Augusztinovicz, „State of the art of practical applications of numerical methods in vibro-acoustics”. In: *Proc. 1 Congresso Iberoamericano de Acústica* (Ed. S. Gerges), Florianópolis: 1998. pp. 154-168. (Invited plenary lecture) (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/Iberoamericano_Statoftheart.pdf)

[216] P Sas, F Augusztinovicz, „Acoustic modal analysis”. In: *Modal Analysis & Testing. Main Lectures and Contributed Papers* (Eds: É J.M.Montalvao e Silva and N. M. Mendes Maia), NATO Advanced Study Institute, Sesimbra: 1998. pp. 605-624 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/NATO_AcouModal.pdf)

[217] Augusztinovicz Fulop, János Granát, Ferenc Márki, Wim Hendricx, Herman Van der Auweraer, „Application and extension of acoustic holography techniques for tire noise investigations”. *J. Acoust. Soc. Amer.,* Vol. 105. (2) *1373-1374* (1999)

[218] F Augusztinovicz, F Márki, J Granát, W Hendricx, H Van der Auweraer, „Development of an inverse boundary element technique for the identification of partial noise sources of tires”. In: *Proc. Inter-Noise 99*, 1999. pp. 1413-1417 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/InterNoise99_IBEM.pdf)

[219] F Augusztinovicz, F Márki, J Granát, W Hendricx, H Van der Auweraer, „Extension of acoustic holography for tyre noise investigations”. In: *Forum Acusticum 99*: 1st Joint Mtg. German Acoust. Soc. / Acoust. Soc. Amer., 1999. pp. 1-4. (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/FA99_Holography.pdf)

[220] Fülöp Augusztinovicz, Paul Sas, „Acoustic Modal Analysis”. In: Montalvão e Silva, Julio M., Maia, Nuno M.M.(szerk.), *Modal Analysis and Testing: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute*, Sesimbra, Portugal, 3-15 May, 1998. Kiad: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. pp. 487-506. (NATO Science Series E; Vol. 363.)

[221] P Guisset, F Augusztinovicz, „Tino noise emission: Analysis and prediction models”. In: Federico Mancosu(szerk.), *Proc. 1st International Colloquium on vehicle tyre road interaction: The Noise Emission.* Rome: 1999. pp. 1-9. (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/TyreRoad1999_TINO.pdf)

[222] F Augusztinovicz, M Tournour, „Reconstruction of source strength distribution by inversing the Boundary Element Method: Chapter 8” In: Otto von Estorff (szerk.), *Boundary Elements in Acoustics. (Advances in Boundary Elements; Vol. 9.)* Southampton: WIT Press, 2000. pp. 243-284.

[223] F Márki, F Augusztinovicz, „Inverse methods for source strength reconstruction of complex structures”. In*: Inter-Noise 2000*: The 29th International Congress and Exhibition on Noise Control Engineering, Paper #448, 2000. pp. 1-7. (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/Inter-Noise2000_Inverse.pdf)

[224] L Meulewaeter, F Augusztinovicz, „Application of the BE method for industrial problems". In: Otto von Estorff (szerk.), *Boundary Elements in Acoustics,* Ed. Otto von Estorff, WIT Press. Southampton: 2000. pp. 443-476.

[225] M Tournour, L Cremers, P Guisset, F Augusztinovicz, F Márki, „Inverse numerical acoustics based on acoustic transfer vectors". In: *Proc. 7th Int. Congress ond Sound and Vibration*, 2000. pp. 2069-2076 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/ICSV7_Inverse.pdf)

[226] Márki F, Augusztinovicz F, „Effects, Interpretation and Practical Application of Truncated SVD in the Numerical Solution of Inverse Radiation Problems". In: *Proc. 25th International Conference on Noise and Vibration Engineering: ISMA25 Conference*, 2000. pp. 1405-1413 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/ISMA25_TruncSVD.pdf)

[227] Augusztinovicz F, Márki F, Bite M, Dombi I, P Carels, J Willems, Horváth Z., „A budapesti Déli összekötő vasúti híd zaj- és rezgésvizsgálatai". In*: A környezeti zajvédelem stratégiája c. Opakfi szeminárium*, 2002. okt. 16-18, Budapest: OPAKFI, 2002.

[228] Márki F, Augusztinovicz F, „Statistical – Inverse Boundary Element Method". In: Sas P, Hal B (Eds.), *Proc. 2002 International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA 2002,* 2002. pp. 1791-1798 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/ISMA2002_StatBEM.pdf)

[229] Augusztinovicz F, Márki F, Carels P, Bite M, Dombi I, „Noise And Vibration Control of The South Railway Bridge of Budapest". In: Nilson A, Boden H, *Proceedings of The 10th International Congress on Sound And Vibration*, 2003. pp. 1713-1720 (ICSV 10.) (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/ICSV10-RailBridge.pdf)

[230] P Carels, J Willems, Augusztinovicz F, Márki F, Bite M, Dombi I, „Noise and vibration control of the South Railway Bridge of Budapest". In: *7th World Congress on Railway Research,* 2003. pp. 1-8

[231] A B Nagy, P Fiala, F Márki, F Augusztinovicz, G Degrande, D Brassenx, „Prediction of interior noise in buildings, generated by underground rail traffic*". In: Proc. 8th International Workshop on Railway Noise* (2) 2004. pp. 613-620 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/IWRN8_UnderRail.pdf)

[232] A B Nagy, P Fiala, F Augusztinovicz, A Kotschy, „Prediction of radiated noise in enclosures using a Rayleigh integral based technique". In: *CD Proc. of InterNoise 2004*, Prague 2004. pp. 1-7. (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/Inter-Noise2004_Rayleigh.pdf)

[233] Augusztinovicz F, Gajdátsy P, Márki F, Fiala P, Nagy A B, „Source Models For Noise Radiation Calculations From Large Structures And Industrial Plants". In: Sas P, Munck M (Eds.), *Proc. International Conference on Noise And Vibration Engineering, ISMA 2004*, pp. 3687-3698 (2004) (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/ISMA2004_IndPlants.pdf)

[234] F Augusztinovicz, F Márki, K Gulyás, A B Nagy, P Fiala, P Gajdátsy, „Vibro-acoustic design method of a tram track on a steel road bridge". In: *Proc. 8th International Workshop on Railway Noise* (Ed. D. Thompson and Ch. Jones) (2) 2004. pp. 467-476 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/IWRN8-TramTrack.doc)

[235] F Augusztinovicz, A B Nagy, P Forián Szabó, „Vibro-acoustic modelling of the Festival Theatre of Palace of Arts". In: Augusztinovicz Fülöp, Nagy Attila Balázs, Hunyadi Zoltán (szerk.), *Proceedings of Forum Acusticum 2005*, Budapest: OPAKFI, 2005. pp. L251

[236] Fiala Péter, Granát János, Augusztinovicz Fülöp, „Modelling of Ground Vibrations in the Vicinity of a Tangent Railway Track". In: Augusztinovicz Fülöp, Nagy Attila Balázs, Hunyadi Zoltán (szerk.), *Proceedings of Forum Acusticum 2005*, Budapest: OPAKFI, 2005. pp. 6

[237] P Forián Szabó, P Carels, F Augusztinovicz, „Planning of the vibration isolation system in the Festival Theatre of Palace of Arts (Budapest)". In: Augusztinovicz Fülöp, Nagy Attila

Balázs, Hunyadi Zoltán (szerk.), *Proceedings of Forum Acusticum 2005*, Budapest: OPAKFI, 2005. pp. L253

[238] T Mócsai, K Gulyás, F Augusztinovicz, „Vibro-acoustic analysis of a steel railway bridge with special regard to the potentials of active vibration damping." Paper 808-0, In: Augusztinovicz F, Nagy Attila Balázs, Hunyadi Zoltán (szerk.), *Proceedings of Forum Acusticum 2005.* Budapest, pp. 915-920. (2005) (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/FA2005_Bridge.pdf)

[239] Augusztinovicz F, Márki F, Gulyás K, Nagy A B, Fiala P, Gajdátsy P, „Derivation of Train Track Isolation Requirement for a Steel Road Bridge Based on Vibro-acoustic Analyses*".* *J Sound Vib.*, Vol. **293**: (3-5) *953-964* (2006)

[240] Fiala Péter, Geert Degrande, Granát János, Augusztinovicz Fülöp, „Structural and Acoustic Response of buildings in the higher frequency range due to surface rail traffic". In: *13th International Congress on Sound and Vibration* 2006. pp. 8

[241] Nagy A B, Fiala P, Márki F, Augusztinovicz F, Degrande G, Jacobs S, Brassenx D, „Prediction of Interior Noise in Buildings Generated by Underground Rail Traffic". *J Sound Vib*., Vol. 293: (3-5) *680-690* (2006)

[242] Fiala P, Degrande G, Augusztinovicz F, „Numerical Modelling of Ground-borne Noise And Vibration in Buildings Due to Surface Rail Traffic". *J Sound Vib.*, Vol. **301**: (3-5) *718-738* (2007)

[243] P Fiala, S Gupta, G Degrande, F Augusztinovicz, „A parametric study on the isolation of ground-borne noise and vibrations in a building using a coupled numerical model". In: *Acoustics'08 Paris International Conference*, 2008. pp. 643-648

[244] Augusztinovicz Fülöp, Kimpián Tibor, „Vibro-acoustic design of the stage floor reconstruction of a concert hall". In: P. Sas, B. Bergen (szerk*.), Proc. ISMA 2010: International Conference on Noise and Vibration Engineering including USD2010*, Leuven: 2010. pp. 4485-4490 (http://vibac.hit.bme.hu/download/fulop/Publikaciok/ISMA2010_StageFloor.pdf)

[245] Augusztinovicz F: Vibro-acoustic analysis of the stage floor of a concert hall-a case study. *Applied Acoustics*, Vol. 73. No. 6-7, pp. 648-658. (2012). DOI: 10.1016/j.apacoust.2011.12.011 http://mycite.omikk.bme.hu/doc/122086.pdf)

[246] Kimpián, T. and Augusztinovicz, F., „Torsional modal analysis of single shaft systems containing permanent magnet synchronous motors using novel broadband torque excitation." *Proc. ISMA 2012: International Conference on Noise and Vibration Engineering,* Paper ID: 827. Leuven, September 17-19 (2012)

Az értekezés témakörével érintett nagyobb kutatási-fejlesztési projektek

[247] Advanced study for active noise control in aircraft (ASANCA). 3th Framework Program EU Project, Contract No. AERO 0028-C (1989-1992)

[248] BRITE-EURAM Project No. 5414: New pass-by noise optimization methods for quiet and economic heavy road vehicles (PIANO)

[249] A Rákospalotai és a Füredi úti fűtőmű zajforrásainak elemzése a zajcsökkentési átalakítások megalapozása érdekében

[250] Az új Nemzeti Színház stúdiószínházának és színpadgépészetének rezgésakusztikai vizsgálata.

[251] A Művészetek Palotája rezgésszigetelési tervezését megalapozó elemzés

[252] A Déli vasúti híd zajkeltésének és zajcsökkentési lehetőségeinek elemzése

[253] Az 1-es villamos Lágymányosi hídon való átvezetését megalapozó rezgésakusztikai vizsgálat

[254] A Zeneakadémia felújításával kapcsolatos rezgésakusztikai vizsgálatok

F3. Függelék

F3. AZ AKUSZTIKAI VÉGESELEM MÓDSZER SZÁRMAZTATÁSA

Az akusztikai végeselem módszer – eredeti formájában – belsőtéri akusztikai problémák megoldására szolgál. Célja az, hogy segítségével meghatározhassuk a hangteret egy térrészben, miközben a teret határoló, összefüggő felület egy része vagy egésze adott sebességgel rezeg. A vizsgálat tárgyát képező tér alakja közömbös, de összefüggőnek kell lennie és a teret határoló felületen valamilyen adott peremfeltételnek vagy alapértelmezésnek teljesülnie kell.

A módszer alapgondolata az, hogy a teret sok kicsi részre – elemre – bontjuk, és a hangtérjellemzőket csak az elemek kitüntetett pontjaiban, az ún. rácspontokban határozzuk meg pontosan. A rácspontok között valamilyen egyszerű összefüggést tételezünk fel, amelynek segítségével a hangteret a tér minden pontjában elfogadható pontossággal becsülhetjük. Az elemek szükséges száma a vizsgálandó rendszer hullámhosszhoz viszonyított méreteitől függ. Nyilván minél kisebbek az elemek, annál pontosabb eredményeket kapunk, de ezzel négyzetes arányban nő a probléma mérete, tehát a megoldáshoz szükséges számítástechnikai erőforrások is.

Tekintsünk egy zárt, összefüggő teret, amelyben ismert tulajdonságokkal bíró, veszteségmentes, izotróp, nyugalomban levő légnemű közeg helyezkedik el. Ebben a térben a hangteret leíró egyenlet alakja forrásmentes esetben, feltéve, hogy csak x-irányú változást tekintünk:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{F.1a}$$

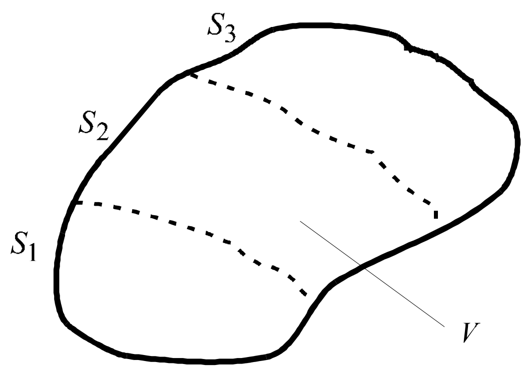
amelyet homogén hullámegyenletnek nevezünk. Ha forrás is van a térben, akkor az inhomogén hullámegyenlettel kell dolgoznunk:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial (q/V)}{\partial t} \tag{F.1b}$$

ahol a jobb oldalon gerjesztésként a térben elosztott forrás térfogategységre eső térfogatsebességének időbeli deriváltja szerepel. Ha csak szinuszos változást vizsgálunk, az inhomogén Helmholtz-egyenlethez jutunk. Ennek többirányú terjedésre és tetszőleges koordinátarendszerre vonatkozó, általános alakja

$$\nabla^2 p + k^2 p = -\rho_0 j\omega(q/V) \tag{F.1c}$$

A hullámegyenlet megoldásához a meghatározó egyenleten kívül a peremfeltételek ismerete is szükséges. Tegyük fel, hogy a teret határoló felület három (nem szükségszerűen összefüggő) részfelületre osztható, amelyek mentén a hangnyomást, a részecskesebességet, vagy a kettő viszonyát (azaz az akusztikai impedanciát) írjuk elő az alábbiak szerint.



F.1 ábra: A vizsgált térfogat és az azt határoló zárt felületek

a) Legyen az S_1 felületén mentén előírva a hangnyomás:

$$p \overset{!}{=} \bar{p}\,; \tag{F.2a}$$

b) Legyen az S_2 felület mentén előírva a felületre merőleges irányú részecskesebesség: $v = v_n$. A momentum egyenlet értelmében

$$-\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x}\,,$$

ebből következően a felületi normális irányában vett sebesség a felületre merőleges irányban vett nyomásgradienssel arányos:

$$-j\omega\rho\, v_n = \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \tag{F.2b}$$

Az előírt részecskesebesség speciális esete a nulla normális irányú sebesség, ami akkor áll elő, ha a felület ideálisan merev. Ilyenkor

$$v_n = 0\,.$$

Végül

c) az S_3 felület mentén legyen adva a két hangtérjellemző viszonya, célszerűen a (vektoriálisan is könnyebben kezelhető) akusztikai admittancia:

$$\frac{v_n}{p} = A_n\,,$$

amiből következik, hogy

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = -\, j\omega\rho A_n\, p \qquad \text{(F.2c)}$$

Tekintsük most azt a feladatot, hogy megoldandó az (F.1a) egyenlet, miközben a rendszer gerjesztését az (F.2a) és/vagy az (F2.b) peremfeltétel szerint működő források biztosítják és eközben a peremeken az (F.2c) feltételnek is teljesülnie kell.

A már megfogalmazott alapelv értelmében csak egy közelítő $\tilde{p}$ megoldást keresünk, amelyre egyelőre csak annyit írunk elő, hogy legalábbis az S_1 felületen legyen egyenlő a p pontos megoldással. Ennek a közelítésnek a jóságát úgy tudjuk könnyen megítélni, hogy olyan változókat – un. reziduumokat – képzünk, amelyeknek teljesen pontos megoldás esetén 0 értéket vesznek fel.

A V térfogatban nincs forrás, ezért teljesülnie kell az (F.1a) egyenletnek, ami éppen 0-t eredményez:

$$R_V = \nabla^2 \tilde{p} + k^2 \tilde{p} \qquad \text{(F.3a)}$$

A másik két felületre az (F.2b) és (F.2c) egyenletek alapján írhatók a további reziduumok:

$$R_{S_2} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} - j\omega\rho \bar{v}_n \qquad \text{(F.3b)}$$

$$R_{S_3} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} - j\omega\rho \bar{A}_n \tilde{p} \qquad \text{(F.3c)}$$

A ***súlyozott reziduum módszer*** matematikai elmélete szerint akkor a legjobb a közelítés, ha a reziduumokat egy teljesen tetszőleges w függvénnyel megszorozva és integrálva a w függvénytől függetlenül mindig 0-t kapunk:

$$\iiint\limits_V w R_V\, dV + \iint\limits_{S_2} w R_{S_2}\, \overrightarrow{dA} + \iint\limits_{S_3} w R_{S_3}\, \overrightarrow{dA} \overset{!}{=} 0 \qquad \text{(F.4)}$$

Vegyük az első integrált és helyettesítsük be (F.3a)-t

$$\iiint\limits_V w R_V\, dV = \iiint\limits_V w\left(\nabla^2 \tilde{p} + k^2 \tilde{p}\right) dV = \iiint\limits_V w \nabla^2 \tilde{p}\, dV + \iiint\limits_V w k^2 \tilde{p}\, dV = \qquad \text{(F.5)}$$

Vegyük figyelembe a ∇ (nabla) vektorral jelölt térbeli gradiensképzés

$$\nabla\left(w \nabla \tilde{p}\right) = \nabla w \nabla \tilde{p} + w \nabla^2 \tilde{p}$$

szabályát, ami átrendezve

$$w \nabla^2 \tilde{p} = \nabla\left(w \nabla \tilde{p}\right) - \nabla w \nabla \tilde{p}$$

alakot ölt. (F.5) ezzel tovább folytatható:

$$= \iiint\limits_V \nabla\left(w \nabla \tilde{p}\right) dV - \iiint\limits_V \nabla w \nabla \tilde{p}\, dV + \iiint\limits_V w k^2 \tilde{p}\, dV = \qquad \text{(F.5-2)}$$

Most idézzük fel a vektorgeometria Green-tételét:

$$\iiint_V \nabla\Psi dV = \oiint_S \Psi \overrightarrow{dA}$$

Ha az általános Ψ vektorfüggvény esetünkben a $\Psi \equiv w\nabla\tilde{p}$ változót képviseli, a tételt az első integrálra alkalmazva nyerjük:

$$= \oiint_{S=S_1+S_2+S_3} w\frac{\partial\tilde{p}}{\partial n}\overrightarrow{dA} - \iiint_V \nabla w\nabla\tilde{p}dV + \iiint_V wk^2\tilde{p}dV \qquad \text{(F.5-3)}$$

Ezt a végső alakot, valamint az (F.3b) és (F.3c) egyenleteket (F.4)-be helyettesítve és az S-re vonatkozó integrált három részre bontva a kieső tagok törlése után kapjuk:

$$\iiint_V \left(-\nabla w\nabla\tilde{p} + wk^2\tilde{p}\right)dV + \iint_{S_1} w\frac{\partial\tilde{p}}{\partial n}d\vec{A} = j\omega\rho\iint_{S_2} w\bar{v}_n\overrightarrow{dA} + j\omega\rho\iint_{S_3} w\bar{A}_n\tilde{p}\overrightarrow{dA} \qquad \text{(F.6)}$$

Mindeddig w-re semmiféle feltételt nem tettünk. Követeljük most is csak annyit, hogy azon az S_1 felületen, ahol a megoldást úgyis pontosan ismerjük, a súlyozó függvény tűnjön el, azaz

$$w\big|_{S_1} = 0\,;$$

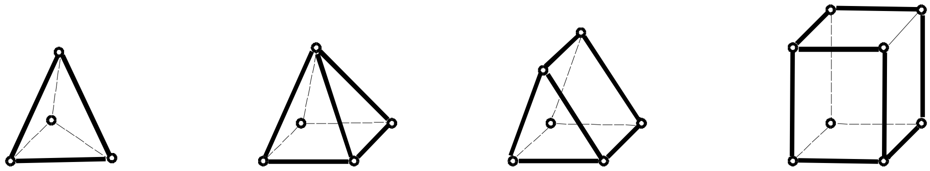
ezzel

$$\iiint_V \left(-\nabla w\nabla\tilde{p} + wk^2\tilde{p}\right)dV = j\omega\rho\iint_{S_2} w\bar{v}_n\overrightarrow{dA} + j\omega\rho\iint_{S_3} w\bar{A}_n\tilde{p}\overrightarrow{dA} \qquad \text{(F.7)}$$

Mindeddig <u>semmilyen közelítést nem tettünk</u>. Amit kaptunk, annak információtartalma a kiinduló Helmholtz-egyenletével azonos, ezért is nevezik (F.7)-et a Helmholtz-egyenlet gyenge megfogalmazásának.

A közelítés, azaz diszkretizálás csak innen kezdődik. A vizsgálandó térfogatunkat „berácsozzuk”, a rács metszéspontjain rácspontokat képzelünk el, és a szomszédos rácspontokat valamilyen térbeli alakzat mentén összefogva kisméretű elemeket, „végeselemeket” alakítunk ki. (Szokásos a háló és a csomópont kifejezés is, ami az angol „mesh” és „node” szavak tükörfordítása.) A végeselem módszert mechanikai rendszerekre alkalmazva igen sokféle elem alkotható, akusztikában azonban ritka kivételektől eltekintve csak négy, hat vagy nyolc csomópontos térbeli elemeket szokás alkalmazni. Az F.2 ábra ilyen elemeket mutat, szokásos angol megnevezésükkel együtt.

Nagyon fontos, hogy az elem méretének megfelelően kicsinek kell lennie. A gyakorlati tapasztalat azt mutatja, hogy a vizsgálni kívánt hullámhossz hatodánál kisebb elemméret általában megfelelő pontosságú eredményeket szolgáltat, de ott, ahol ahangnyomás térbeli változása gyors, ennél finomabb rácsra van szükség.



TETRA PENTA WEDGE BRICK v. HEXA

F.2. ábra

Minden, amit eddig felírtunk, a teljes vizsgálandó V térfogatra vonatkozott, de semmi sem akadályozza meg, hogy az összefüggéseket a most bevezetett végeselemek valamelyikére (pl. a leggyakrabban alkalmazott téglatest alakú elemre) alkalmazzuk. A továbbiakban úgy járunk el, hogy a hangnyomást pontosan igyekszünk meghatározni a rácspontokban, a rácspontok között (azaz az elem belsejében) azonban megelégszünk valamely egyszerű interpolációval is. Az ***interpolációs*** függvényt vagy ***alakfüggvényt*** N-nel, a j-edik rácspontban pontosan meghatározott hangnyomást p_j-vel jelölve írhatjuk, hogy az elem tetszőleges (x, y, z) belső pontjában

$$\tilde{p}(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{8} N_j(x,y,z)\, p_j(t) = \{N_1 \;\; N_2 \;\; \ldots \;\; N_8\} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_8 \end{Bmatrix} \qquad \text{(F.8)}$$

Figyeljük meg, hogy a térbeli függést az alakfüggvény, az időbelit a rácspontok hangnyomása tartalmazza csak.

Ezzel az összefüggéssel, egyszerűsítve felírva a hangnyomás, annak térbeli és időbeli deriváltjai a következőképpen alakulnak:

$$\tilde{p} = \{N\}^T \{p\} \qquad \text{(F.9a)}$$

$$\tilde{\ddot{p}} = \{N^T\}\{\ddot{p}\}, \quad \textit{és} \qquad \text{(F.9b)}$$

$$\nabla\tilde{p} = \begin{Bmatrix} \vec{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x} \\ \vec{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \vec{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \tilde{p} = \underset{3\times1}{\{\partial\}} \; \underset{1\times8}{\{N\}^T} \; \underset{8\times1}{\{p\}} = \underset{3\times8}{[N']} \; \underset{8\times1}{\{p\}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x}\vec{i} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x}\vec{i} & \ldots & \dfrac{\partial N_8}{\partial x}\vec{i} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y}\vec{j} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y}\vec{j} & & \dfrac{\partial N_8}{\partial y}\vec{j} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial z}\vec{k} & \dfrac{\partial N_2}{\partial z}\vec{k} & \ldots & \dfrac{\partial N_8}{\partial z}\vec{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \ldots \\ p_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial N_1}{\partial x} p_1 + \ldots + \dfrac{\partial N_8}{\partial x} p_8\right)\vec{i} \\ \left(\dfrac{\partial N_1}{\partial y} p_1 + \ldots + \dfrac{\partial N_8}{\partial y} p_8\right)\vec{j} \\ \left(\dfrac{\partial N_1}{\partial y} p_1 + \ldots + \dfrac{\partial N_8}{\partial y} p_8\right)\vec{k} \end{bmatrix} \qquad \text{(F.9c)}$$

ahol a mátrixok és vektorok alatt a változók méreteit is feltüntettük (sor×oszlop).

A diszkretizációt az alakfüggvényen is el kell végezni. Az alakfüggvényről eddig csak annyit mondtunk, hogy tetszőleges lehet (kivéve az S_1 határoló felületen, ahol 0 értéket írtunk elő számára), így pl. az is megengedhető, hogy az alakfüggvénnyel azonos legyen. Akkor viszont (az alakfüggvény diszkretizált változatát W-vel jelölve) igaz, hogy

$$W(x,y,z) = \{N\}^T \{w\} \tag{F.10}$$

Azt az eljárást, ami az alakfüggvény és a súlyozófüggvény azonosságán alapul, Galerkin- (helyesebben: Galjorkin-) módszernek nevezzük.

Fejtsük ki a súlyozófüggvény térbeli deriváltját is:

$$\nabla W = \begin{Bmatrix} \vec{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x} \\ \vec{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \vec{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} W = \{\partial\}\{N\}^T\{w\} = [N']\{w\} = \begin{Bmatrix} \left(\dfrac{\partial N_1}{\partial x} w_1 + \dfrac{\partial N_2}{\partial x} w_2 + \ldots + \dfrac{\partial N_8}{\partial x} w_8\right)\vec{i} \\ \left(\dfrac{\partial N_1}{\partial y} w_1 + \dfrac{\partial N_2}{\partial y} w_2 + \ldots + \dfrac{\partial N_8}{\partial y} w_8\right)\vec{j} \\ \left(\dfrac{\partial N_1}{\partial z} w_1 + \dfrac{\partial N_2}{\partial z} w_2 + \ldots + \dfrac{\partial N_8}{\partial z} w_8\right)\vec{k} \end{Bmatrix} \tag{F.11}$$

Előfordul még a gyenge Helmholtz-egyenletben a hangnyomás és a súlyozó-függvény szorzata, ill. deriváltjaik szorzata is:

$$\begin{aligned}
W\tilde{p} &= \left(\sum_j N_j w_j\right)\left(\sum_i N_i p_i\right) = \\
&= (N_1 w_1 + N_2 w_2 + \ldots + N_8 w_8) \times (N_1 p_1 + N_2 p_2 + \ldots + N_8 p_8) = \\
&= \{w_1 \quad w_2 \quad \ldots \quad w_8\} \underline{\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \ldots \\ N_8 \end{Bmatrix} \{N_1 \quad N_2 \quad \ldots \quad N_8\} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_8 \end{Bmatrix}} = \\
&= \{w_1 \quad w_2 \quad \ldots \quad w_8\} \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & \ldots & N_1 N_8 \\ N_2 N_1 & N_2^2 & \ldots & N_2 N_8 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N_8 N_1 & \ldots & \ldots & N_8^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_8 \end{Bmatrix} = \{w\}^T \left([N]\,[N]^T\right)\{p\}
\end{aligned} \tag{F.12}$$

Hasonlóan kapható meg a deriváltak szorzata:

$$\nabla W \, \nabla\tilde{p} = \{w\}^T [N']^T [N] \{p\}$$

Behelyettesítve a gyenge Helmholtz-egyenletbe, az első integrál a következőképpen számítható:

$$\iiint\limits_V \nabla W \, \nabla \tilde{p} \, dV = \iiint\limits_V \{w\}^T [N']^T [N] \{p\} dV = \{w\}^T \left(\iiint\limits_V [N']^T [N] \; dV \right) \{p\} \qquad \text{(F.13)}$$

A kerek zárójelben levő integrál a helyfüggő, csak geometriai információkat tartalmazó alakfüggvények térfogati integrálja és az integrál kiértékelése után konstansokból álló 8×8-as mátrixot eredményez, amit $[k]$-val jelölünk és az elem ***mobilitási mátrix***ának nevezünk:

$$\left(\iiint\limits_V [N']^T [N] \; dV \right) \equiv [k]$$

(F.7) második integráljának értéke

$$\begin{aligned} \iiint\limits_V W k^2 \tilde{p} dV &= k^2 \{w\}^T \iiint\limits_V [N][N]^T \, dV \{p\} = \\ &= \omega^2 \{w\}^T \left(\frac{1}{c_0^2} \iiint\limits_V [N][N]^T \, dV \right) \{p\} = \omega^2 \{w\}^T [m] \{p\} \end{aligned} \qquad \text{(F.14)}$$

ahol az $[m]$ mátrix a fentihez hasonló tulajdonságú, 8×8-as kompresszibilitási mátrix.

Az egyenlet teljes felírásához hiányzik még a gerjesztést és a hangelnyelő felületeket képviselő admittanciát képviselő tag. Ez utóbbit most elhanyagolva, számítsuk ki a gerjesztésnek megfelelő tagot:

$$j\omega\rho \iint\limits_{S_2} W \vec{v}_n d\bar{A} = j\omega\rho \{w\}^T \iint \{N\} \{\vec{n}\}^T [N_v] \{v\} d\bar{A} = j\omega\rho \, \{w\}^T \{g\} \qquad \text{(F.15)}$$

Ezzel a

$$\{w\}^T [k] \{p\} - \omega^2 \{w\}^T [m] \{p\} = -\, j\omega \{w\}^T \{g\} \qquad \text{(F.16)}$$

egyenletet kapjuk, ami egy elemre vonatkozik és minden tagjában szerepel a súlyozófüggvény vektora. Feltételeink értelmében az egyenletnek bármely súlyozófüggvényre igaznak kell lennie, tehát az egyenlet a súlyozófüggvényekkel való szorzást elhagyva is biztosan teljesül:

$$\left[[k] - \omega^2 \, [m] \right] \; \{p\} \; = \; - \; j\omega\rho \; \{g\} \qquad \text{(F.17)}$$

Ez a mátrix még csak egy elemre vonatkozik. A számítást minden egyes elemre elvégezve és a teljes rendszerre felírva a

$$\left[[K_a] - \omega^2 [M_a] \right] \; \{p\} = -\, j\omega\rho \{G\} \qquad \text{(F.18)}$$

egyenletet nyerjük, ami formailag azonos a mechanikai rendszerek leírására szolgáló (2.2b) másodrendű egyenlettel.

F4. Függelék

F4. JELÖLÉSEK

Az üzemi változókat jelölő kisbetűk (p, v, q, u, i, ξ, f, x, a) általában komplex amplitúdót jelölnek. Időfüggvény esetén ¤(t)… jelölést, Fourier-transzformált változóknál ¤(ω), Laplace-transzformáltaknál ¤(s) jelölést alkalmazunk.

c	mechanikai engedékenység	m/N
c_a	akusztikai kapacitás	m^4s^2/kg
c_0	hang terjedési sebessége levegőben	m/s
f	erő	N
i	áramerősség	A
j	$\sqrt{-1}$	
k	mechanikai kontextusban: merevség, $k=1/c$	N/m
k	akusztikai kontextusban: hullámszám	1/m
l, L	hosszúság	m
m	mechanikai tömeg	kg
m'	felületegységre eső (fal)tömeg	kg/m^2
m_a	akusztikai tömeg	kg/m^4
$\vec{n}$	felületi normális	
p	hangnyomás	$Pa=N/m^2$
q	térfogatsebesség	m^3/s
$\vec{r}$	helyvektor	m
s	komplex frekvencia	1/s
t	idő	s
u	kitérés modális koordinátával kifejezve	m
x	kitérés	m
$v, \vec{v}$	részecskesebesség	m/s
w	mechanikai módus modális amplitúdója	m
z	specifikus impedancia	Ns/m^3
A	keresztmetszet	m^2
A_a	akusztikai admittancia	m^5/Ns
B	mágneses indukció	N/Am
G	általánosított gerjesztés	m^3/s

Q	általánosított térfogatsebesség	m^3/s
R	távolság	m
R	hanggátlás (ld a (6.1) egyenletben)	dB
R	reziduum (ld. a (3.40) egyenletben)	
S	felület	m^2
V	térfogat	m^3
W	hangteljesítmény	W
Z_a	akusztikai impedancia	Ns/m^5
Z_m	mechanikai impedancia	Ns/m
η	veszteségi tényező	-
κ	fajhőviszony, c_V / c_p	-
λ	hullámhossz	m
ρ	levegő nyugalmi sűrűsége	kg/m^3
ξ	térfogatkitérés	m^3
ω	körfrekvencia	1/s
Φ	sebességpotenciál	
¤	általános (skaláris) változó	
$\underline{¤}$	komplex változó (amennyiben a komplexitás külön hangsúlyozandó)	
$¤^*$	változó komplex konjugáltja	
$\dot{¤}$, $\ddot{¤}$	a változó idő szerinti első, második deriváltja	
$\nabla ¤, \nabla^2 ¤$	a változó hely szerinti első, második deriváltja	
$\vec{¤}$	vektorváltozó	
$\vec{¤} \cdot \vec{¤}$	skaláris vagy diádikus szorzat	
$\vec{¤} \times \vec{¤}$	vektorszorzat	
$\{¤\}$	oszlopvektor	
$\{¤\}^T$	sorvektor	
$\lVert\{¤\}\rVert_2$	vektor euklidészi (négyzetes) normája	
$[¤]$	mátrix	
$\lceil ¤ \rfloor$	diagonálmátrix	
$\lceil I \rfloor$	egységmátrix	
$\lvert[¤]\rvert$	mátrix determinánsa	
$[¤]^A$	adjungált mátrix	
$[¤]^T$	transzponált mátrix	
$[¤]^H$	konjugált-transzponált (Hermite-féle) mátrix	
$[B]$	rendszermátrix	
$[C]$, $[C_a]$	mechanikai, akusztikai csillapítás mátrix	
$[H(s)]$	transzfer függvény mátrix	
$[H(\omega)]$	átviteli függvény mátrix	
$[K]$, $[K_a]$	mechanikai, akusztikai merevség mátrix	
$[M]$, $[M_a]$	mechanikai, akusztikai tömegmátrix	
$[T]$	akusztikai transzfer impedancia mátrix	
$[Z]$	modális akusztikai transzfer impedancia mátrix	

$\{\varphi\}$	mechanikai sajátrezgés módusalakja
$[\Phi]$	mechanikai módusmátrix (egységnyi modális tömegre normalizálva)
$\{\psi\}$	akusztikai sajátrezgés módusalakja
$\{\mathrm{\psi}\}$	akusztikai sajátrezgés módusalakja, egységnyi modális tömegre normalizálva
$[\Psi]$	akusztikai módusmátrix (egységnyi modális tömegre normalizálva)

Amennyiben lehetséges volt, a modális fogalomkörbe tartozó fogalmak megnevezése és jelölése [109] alapján, az ott szereplő kifejezések értelem szerinti fordításával történt. A nem közhasznú, új, vagy különösen fontos kifejezéseket és fogalmakat *dőlt betűvel* jelöltük, és amennyiben hasznosnak véltük, lábjegyzetben a leggyakrabban használt idegen nyelvű megfelelőit is megadtuk.