Bírálói vélemény

Simon L. Péter: Bifurkációk komplex rendszerek differenciálegyenleteiben

című akadémiai doktori értekezéséről

A értekezés 6 fejezetből és hivatkozási listából áll.

Az 1. fejezetben a szerző ismerteti a kutatási téma irodalmát és vázlatosan bemutatja saját kutatási eredményeit, amelyek elsősorban a reakció-diffúzió egyenletekkel és hálózaton zajló járványterjedési modellekkel kapcsolatosak.

A 2. fejezetben a vizsgálatok tárgya az egy-dimenziós $\Delta u + f(u) = 0$ reakció-diffúzió egyenlet a B_R gömbtartományon az $u = 0$ a ∂B_R-en Dirichlet-féle peremfeltétel mellett, ahol B_R az origó középpontú R sugarú gömb $\mathbb{R}^n$-ben. A cél a pozitív megoldások pontos számának meghatározása. Mivel gömbtartományon a pozitív megoldások radiálisan szimmetrikusak, ezért a probléma az

$$\begin{gathered} ru''(r) + (n-1)u'(r) + rf(u(r)) = 0 \\ u'(0) = 0, \qquad u(R) = 0 \end{gathered}$$

peremérték-feladatra redukálódik, azaz elég meghatározni ezen peremérték-feladat pozitív megoldásainak számát. Az ismert eredmények összefoglalása után a szerző bemutatja a vizsgálat legfontosabb eszközét az ú.n. célbalövéses avagy "time-map" módszert. Ennek lényege, hogy a peremfeltételt az

$$u(0) = c, \qquad u'(0) = 0$$

kezdeti feltétellel helyettesítjük, majd a c paraméter értékét változtatjuk úgy, hogy olyan megoldást kapjunk, amelynek első gyöke R. A "time-map" leképezés három fontos tulajdonságának - az értelmezési tartomány meghatározása, monotonitás és a határértékek létezése az értelmezési tartomány határpontjaiban - tárgyalása után következnek a fejezet fő eredményei a megoldások pontos számáról konvex f esetén. A konvex nemlinearitásra vonatkozó eredményeket sikerült általánosítani kvázilineáris egyenletekre. Ezt a pozitív megoldások számával kapcsolatos további eredmények követik szinguláris nemlinearitások esetén, amikor az $f(u)$ függvény $u^{-\alpha}$ és u^p alakú függvények összege, illetve különbsége, ahol $\alpha \in (0,1)$ és $p > 0$. A fejezet utolsó szakaszának fő eredménye egy szemilineáris parabolikus, konvex vagy konkáv nemlinearitást tartalmazó peremérték-feladat nemnegatív stacionárius megoldásainak stabilitására vonatkozó kritérium.

A 3. fejezet tárgya a

$$\partial_t u = D\partial_{xx}u + f(u)$$

reakció-diffúzió egyenlet utazó hullámainak vizsgálata, ahol $u\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ az ismeretlen függvény, D egy pozitív elemű diagonális mátrix és $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ folytonosan differenciálható. Az utazó hullámok az egyenlet

$$u(t,x) = U(x - ct)$$

alakú megoldásai, ahol $U\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ és a c paraméter a hullám sebessége. Az U függvény eleget tesz a

$$DU'' + cU' + f(U) = 0$$

másodrendű egyenletnek. A fejezet célja az utazó hullám stabilitásának vizsgálata. A probléma végül a linearizálással kapott, a $BUC(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \cap C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ téren értelmezett

$$(LV)(y) = DV''(y) + cV'(y) + f'(U(y))V(y)$$

másodrendű differenciáloperátor lényeges spektrumának meghatározására redukálódik. A lényeges spektrumot a szerző az Evans-függvény módszerével határozta meg. Az $m = 1$ esetben explicit elegendő feltételt kapunk az utazó hullám stabilitására, illetve instabilitására.

A 4. fejezet a hálózati folyamatok matematikai modellezésébe ad bevezetést. Az irodalom ismertetése után a szerző részletesen leírja azt a matematikai modellt, amelyet a további fejezetekben tanulmányozni fog.

Az 5. fejezet témája az ú.n. SIS dinamika vizsgálata általános gráfon. Legyen $G \in \{0,1\}^{N^2}$ egy N csúcsú, irányítatlan, hurokélmentes gráf szomszédsági mátrixa, azaz $g_{ij} = 1$ ha az i és j csúcsok össze vannak kötve, egyébként pedig $g_{ij} = 0$. A hálózaton SIS típusú járványterjedést vizsgálunk, azaz a gráf csúcsai kétféle állapotban - fertőző (I), illetve egészséges (S) - lehetnek. A gráf csúcsainak állapota kétféleképpen változhat: egy I típusú csúcs adott valószínűséggel meggyógyul, azaz S típusú lesz belőle, illetve egy S típusú csúcsot az I típusú szomszédai valamilyen valószínűséggel megfertőznek, azaz I típusúvá válik. Az állapottér a gráf lehetséges állapotainak 2^N elemű halmaza, amelyen az átmenetek egy Markovláncot határoznak meg. A fejezetben a szerző meghatározza a Markov-lánc alapegyenleteit. Az alapegyenlet egy lineáris differenciálegyenlet-rendszer, amely blokktridiagonális alakba írható. Nagy számú csúcs esetén a dimenzió olyan nagy, hogy az egyenlet szinte kezelhetetlenné válik, ezért az alapegyenletet valamilyen egyszerűsített struktúrájú közelítő egyenlettel helyettesítik. Az egyes alfejezetek az alapegyenletek redukciójával kapcsolatos eredményeket tartalmaznak. Az egyszerűsítés egyik módja az ú.n. összevonás, a másik pedig "mean-field" típusú, azaz átlagolt egyenletek bevezetése. A fontosabb eredmények a következők: az alapegyenletek összevonása a gráf automorfizmusainak felhasználásával, illetve a különböző típusú csúcsok és élek várható értékeire vonatkozó differenciálegyenlet levezetése.

A 6. fejezet célja megbecsülni a várható értékekre vonatkozó közelítő differenciálegyenlet közelítési pontosságát. A becslésre több lehetséges eljárást is bemutat a szerző. Megítélésem szerint a fejezet legértékesebb eredményei a momentumokra vonatkozó végtelen sok differenciálegyenletből álló rendszer, illetve az operátor-félcsoport elméleti módszer segítségével bizonyított tételek.

Az irodalomjegyzék 195 hivatkozásból áll. Ezek közül 40 hivatkozás a szerző saját, illetve társszerzőkkel közös publikációja, amelyek többsége rangos nemzetközi folyóiratban jelent meg.

Az értekezéssel kapcsolatban két kérdést szeretnék feltenni.

1. A (2.3)–(2.4) peremérték-feladat eredetileg a (2.1)–(2.2) peremérték-feladatból származik. Kérdésem: van-e hasonló motivációja a (2.27)–(2.28) peremérték-feladatnak?

2. Járványterjedések differenciálegyenletekkel való modellezése során azt is figyelembe szokták venni, hogy bizonyos betegségeknek van lappangási idejük. Kérdésem: be lehet-e építeni a hálózaton való járványterjedési modellekbe ezt az időbeli késleltetést?

Összegezve: Simon L. Péter differenciálegyenletekkel leírható rendszerek két típusával, a reakció-diffúzió egyenletekkel és a hálózati folyamatokkal kapcsolatban ért el jelentős új eredményeket. Az értekezés gondosan megírt, nagyon igényes munka. A bizonyítások korrektek, eredeti ötleteket és új módszereket is tartalmaznak. Ezek közül kiemelem a következőket:

a célbalövéses módszer alkalmazását a reakció-diffúzió egyenletek pozitív stacionárius megoldásai pontos számának meghatározására,

az Evans-módszer alkalmazását reakció-diffúzió egyenletek utazó hullám megoldásainak stabilitás vizsgálatára,

SIS dinamika általános gráfon való vizsgálata során az alapegyenletek leírását, a rendszer összevonhatóságát a gráf automorfizmusainak felhasználásával, a várható értékekre vonatkozó differenciálegyenlet levezetését és a közelítő differenciálegyenlet közelítési pontosságának becslésére kidolgozott új módszereket.

A fentiek alapján javaslom a nyilvános vita kitűzését, a doktori mű elfogadását és az MTA doktora cím odaítélését Simon L. Péter részére.

Veszprém, 2013. augusztus 19.

Pituk Mihály

Pituk Mihály