МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ФИАЛОВСКИ Ализ

УДК.519.46

О КОГОМОЛОГИЯХ И ДЕФОРМАЦИЯХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР ЛИ

(01.01.01 - математический анализ)

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
А.А.КИРИЛЛОВ

Москва - 1983

Фиаловски Ализ

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в различных областях математики и физики заметно возрос интерес к бесконечномерным алгебрам Ли. Особенно интенсивно изучаются два класса бесконечномерных алгебр Ли - алгебры Ли геометрического происхождения, в том числе алгебры Ли векторных полей на гладком многообразии ([4] , [31]) и так называемые алгебры Каца-Муди, теория которых во многом близка теории полупростых конечномерных алгебр Ли ([51]). Однако, задача полной классификации даже простых градуированных бесконечномерных алгебр Ли представляется чрезвычайно трудной, если не неразрешимой: многообразие этих алгебр гораздо богаче многообразия конечномерных алгебр Ли. Это подчеркивает важность изучения различных инвариантов бесконечномерных алгебр Ли, в том числе их когомологий и деформаций.

Подчеркнем, что когомологии указанных выше классов бесконечномерных алгебр Ли с тривиальными коэффициентами оказались вполне обозримыми объектами, имеющими топологическую интерпретацию. То же справедливо и для уже вычисленных когомологий нильпотентных подалгебр этих алгебр. После этого естественно поставить вопрос о вычислении другого важного когомологического инварианта - когомологий с коэффициентами в присоединенных представлениях. Эта задача (более сложна по сравнению с вычислениями когомологий с тривиальными коэффициентами) необходима и для изучения деформаций алгебр Ли. В частности, инфинитезимальные деформации параметризуются соответствующей группой когомологий.

Изучение деформаций различного рода алгебраических объектов важно по двум причинам. С одной стороны, деформации связаны с умножениями и другими высшими операциями в когомологиях (см.,например, [14]), с другой, - деформируя уже изученные бесконечномерные алгебры Ли и их подалгебры, можно получить новые бесконечномерные алгебры Ли и изучить их свойства. Одновременно такие деформации проясняют строение и самих деформируемых алгебр. Подобные методы часто используются в математике и физике ([41] и др.).

Особенности такого подхода применительно к градуированным бесконечномерным алгебрам Ли заключаются в том, что продеформированная алгебра Ли обычно теряет градуировку. Другие трудности в теории деформации даже конечномерных алгебр Ли, по общему мнению, заключаются в том, что такие деформации либо слишком тривиальны, либо необозримы (например, для нильпотентных алгебр Ли). Случаев, в которых алгебра Ли обладает интересными и поддающимися изучению деформациями, не так уж много. Отметим в этой связи работы А.И.Кострикина и его учеников по деформациям некоторых модулярных алгебр Ли ([7]).

Оказалось, однако, что рассматриваемые в диссертации деформации максимальных нильпотентных подалгебр аффинных алгебр Ли и алгебр Ли геометрического происхождения образуют описываемые и обладающие интересными свойствами (в том числе препятствиями к продолжению) семейства. Как уже отмечалось, изучению деформаций алгебр Ли предшествует изучение их когомологий с коэффициентами в присоединенном представлении.

Естественно также пытаться классифицировать бесконечномерные алгебры Ли с заданным числом образующих, начиная с двух, как это сделано в диссертации. Семейство таких алгебр Ли можно рассматривать как глобальные деформации наиболее простых известных бесконечномерных алгебр Ли.

Цель данной работы заключается в следующем. Вычислить когомологии с коэффициентами в присоединенном представлении и исследовать локальные деформации максимальных нильпотентных подалгебр аффинных алгебр Ли над полем нулевой характеристики и алгебры Ли гладких векторных полей на прямой. Расклассифицировать бесконечномерные градуированные алгебры Ли с двумя образующими.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Их можно разделить на три группы.

I. Изучено версальное семейство деформаций подалгебры Ли L_1 алгебры векторных полей на прямой с полиномиальными коэффициентами, состоящей из полей, обращающихся в нуль вместе с первой производной в начале координат.

II. Вычислены одномерные и двумерные когомологии максимальных нильпотентных подалгебр аффинных алгебр Ли. На основе этого исследованы все внешние дифференцирования и инфинитезимальные деформации этих алгебр, включая явное описание деформаций. Выясняется также, какие из этих инфинитезимальных деформаций продолжаются в деформации.

III. Перечислены все градуированные бесконечномерные алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с двумя образующими такие, что $\mathfrak{g} = \oplus \mathfrak{g}_i$ $(0 < i < \infty)$, $\dim \mathfrak{g}_i = 1$.

Результаты диссертации докладывались на семинарах по теории представлений в Московском государственном университете, а также на научно-исследовательском семинаре Будапештского университета им. Этвеша Лоранда в 1982-83 годах.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [24], [25] и [34].

Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теориях деформаций и когомологий групп и алгебр Ли в теории слоений и в теоретической физике, включая задачи квантования.

Теперь опишем подробнее содержание диссертации.

В первой главе мы излагаем в нужной нам форме теорию когомологий и деформаций алгебр Ли. Пусть (S, s_0) – версальная деформация алгебры Ли $\mathcal{L}$, $A = \Bbbk[S]$, где $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль, и $\bar{A}$ – градуированная алгебра $\Bbbk \oplus A/m \oplus m/m^2 \oplus \ldots$, где m максимальный идеал, отвечающий точке s_0. На когомологиях $H^*(\mathcal{L};\mathcal{L})$ определена структура супералгебры Ли. В частности, определена квадратичная операция $x \mapsto \langle x, x\rangle$, $H^2(\mathcal{L};\mathcal{L}) \longrightarrow H^3(\mathcal{L};\mathcal{L})$. Если $\langle x, x\rangle = 0$, то определена лиевская операция Масси $\langle x, x, x\rangle \in H^3(\mathcal{L};\mathcal{L})/[H^2(\mathcal{L};\mathcal{L}), H^2(\mathcal{L};\mathcal{L})]$. Если $\langle x, x, x\rangle \ni 0$, то определена $\langle x, x, x, x\rangle$ и т.д. Проективное алгебраическое многообразие элементов x, таких, что все скобки $\langle x, x, \ldots, x\rangle \ni 0$ – это проективный спектр $\bar{A}$. Следуя [I4], мы показываем, что операции Масси управляют препятствиями к продолжению деформации и, используя эти операции, строим версальное семейство деформаций алгебры Ли $\mathcal{L}$ с конечномерным пространством $H^2(\mathcal{L};\mathcal{L})$.

О деформациях конкретных алгебр Ли известно немного. Если $\mathfrak{g}$ – простая комплексная конечномерная алгебра Ли, то нетривиальных деформаций у $\mathfrak{g}$ не существует (см. [I7]). Иначе говоря $\mathfrak{g}$ – изолированная точка в многообразии модулей. То же самое верно, если $\mathfrak{g}$ – бесконечномерная классическая алгебра Ли одной из картановских серий. В работах [6], [I2] показано, что в случае ненулевой характеристики у этих алгебр существуют нетривиальные деформации.

Известно, с другой стороны, что разрешимые и нильпотентные алгебры Ли имеют очень много нетривиальных деформаций. В работе [48] вычисляются инфинитизимальные (т.е. с базой $\operatorname{spec} \Bbbk[t]/t^2$) деформации максимальной нильпотентной подалгебры в простой конечномерной алгебре Ли. В работе [32], в частности, исследуются деформации конечномерных алгебр Ли с базисом $\{e_i\}$, $1 \leq i < k$, и скобкой $[e_i, e_j] = c_{ij}\, e_{i+j}$, где c_{ij} – комплексные числа.

Во второй главе диссертации исследуются деформации алгебры Ли L_1. Пусть L_0 – подалгебра алгебры Ли полиномиальных векторных полей на прямой, обращающихся в нуль в начале координат. В L_0 можно ввести базис, состоящий из векторных полей $\{x^i \partial/\partial x\}$, $i > 1$. Положим $e_k = x^{k+1}\partial/\partial x$. Тогда скобка в L_0 выглядит так: $[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}$. Пусть L_1 – подалгебра алгебры L_0 составленная из векторных полей, производная которых обращается в нуль в начале координат.

Размерность касательного пространства к базе версальной деформации алгебры L_1 равняется $\dim H^2(L_1; L_1) = 3$. Этот результат вытекает из результатов работы [23]. Более точно, в [23] доказывается, что $H^i(L_1; L_1) \cong H^{i-1}(L_2)$, где L_2 – подалгебра в L_1 с базисом $\{e_2, e_3, e_4, \dots\}$. Алгебра L_1 градуирована, $\deg e_i = i$ и, стало быть, градуированы пространства когомологий. Веса трех однородных элементов α, β, γ из $H^2(L_1, L_1)$ равняются –2, –3, –4 соответственно. Пространство $H^3(L_1; L_1)$ пятимерно и веса элементов равняются –7, –8, –9, –10, –11. Для вычисления версального семейства нужно знать лиевские операции Масси элементов α, β, γ. Оказывается, что

$$\langle \alpha, \alpha, \dots, \alpha \rangle \ni 0\,, \quad \langle \beta, \beta, \beta \rangle \not\ni 0\,, \quad \langle \beta, \gamma \rangle \neq 0\,, \quad \langle \gamma, \gamma \rangle \neq 0\,.$$

Из этих формул вытекает, что версальное семейство для алгебры L_1 есть объединение следующих трех семейств (теорема 2.3).

1. $[e_i, e_j]^1_t = (j-i)(e_{i+j} + t e_{i+j-1})$; $\qquad L^1_1(t)$

2. $[e_i, e_j]^2_t = \begin{cases} (j-i)e_{i+j}, & \text{если } i, j > 1, \\ (j-1)e_{j+1} + t j e_j, & \text{если } i = 1, j > 1; \end{cases}$ $\qquad L^2_1(t)$

3. $[e_i, e_j]^3_t = \begin{cases} (j-i)e_{i+j}, & \text{если } i,j \neq 2, \\ (j-2)e_{j+2} + tje_j, & \text{если } i=2, j\neq 2. \end{cases}$ $\quad L^3_1(t)$

Заметим, что $L^i_1(t) \cong L^i_1(s)$, если $t\neq 0, s\neq 0, 1\leq i\leq 3$. Все эти три семейства алгебр Ли мы рассматриваем как деформации с базой $\operatorname{spec} \mathbb{k}[[t]]$. Первая из этих деформаций заключается в том, что алгебра Ли векторных полей вида $x^2 f(x)\partial/\partial x$ (т.е. полей, имеющих двойной нуль в начале координат) превращается в алгебру $L_1(t)$ вида $(x^2-tx)f(x)\partial/\partial x$ (т.е. полей, имеющих два нуля в точках 0 и t). Эта деформация интересна тем, что $\dim H^i(L_1) \cong \dim H^i(L_1(t))$, но мультипликативная структура алгебр когомологий $H^*(L_1)$ и $H^*(L_1(t))$ различны (см. [16]). Два других семейства меняют когомологии.

Приведем еще следствие из этого результата. Пусть $\mathcal{L}$ - фильтрованная алгебра Ли $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{L}$, такая, что присоединенная граудированная алгебра Ли изоморфна L_1. Тогда $\mathcal{L}$ изоморфна или L_1, или одной из алгебр $L^1_1(1)$, $L^2_1(1)$, $L^3_1(1)$.

В третьей главе рассматриваются максимальные нильпотентные подалгебры аффинных алгебр Ли $\mathfrak{g}^A$, определенных симметризуемой матрицей Картана A. Алгебры $\mathfrak{g}^A$ являются центральными расширениями алгебр токов $\mathfrak{g}\otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ (где $\mathfrak{g}$ - простая конечномерная алгебра Ли), либо их подалгебр, отвечающих автоморфизму порядка ℓ в $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{g}^A = n_+(A)\oplus \mathfrak{h} \oplus n_-(A)$ - разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}^A$, порожденные соответственно элементами $e_1,\ldots,e_n, h_1,\ldots,h_n, f_1,\ldots,f_n$, где n - ранг алгебры $\mathfrak{g}^A$.

В этой главе докажем, что базис в пространстве внешних дифференцирований алгебры $n_+(A)$, изоморфном $H^1(n_+(A); n_+(A))$, составляют следующие дифференцирования:

$$\bar{h}_i : g \longmapsto [h_i, g] \ , \ i=1,\dots,n-1 \ ;$$
$$\tau_i : t^{il+1}\frac{d}{dt} \ , \ i=0,1,2,\dots \ .$$

Построим далее несколько деформаций алгебры $n_+(A)$. Все они реализуются как семейства подалгебр в $\mathfrak{g}^A$.

I. Напомним следующую общую конструкцию деформаций. Пусть $\mathfrak{a}$ - алгебра Ли, $H^1(\mathfrak{a};\mathfrak{a})$ - пространство внешних дифференцирований $\mathfrak{a}$. Рассмотрим универсальное правое расширение алгебры $\mathfrak{a}$, т.е. алгебру $\hat{\mathfrak{a}}$, такую, что существует точная последовательность $0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \hat{\mathfrak{a}} \longrightarrow H^1(\mathfrak{a};\mathfrak{a}) \longrightarrow 0$. Предположим, что алгебра $\mathfrak{a}$ нильпотентна (т.е. в ней сходится верхний центральный ряд). Зафиксируем какое-нибудь разложение $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}/[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] \oplus [\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$. Пусть теперь P - оператор $\mathfrak{a}/[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] = H_1(\mathfrak{a}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{a};\mathfrak{a})$ и $\hat{P}$ - график P, т.е. подпространство в $H_1(\mathfrak{a}) \oplus H^1(\mathfrak{a};\mathfrak{a})$. Символом $\mathfrak{a}(P)$ обозначим следующую подалгебру в $\hat{\mathfrak{a}}$: $\mathfrak{a}(P) = [\mathfrak{a},\mathfrak{a}] \oplus \hat{P} \subset [\mathfrak{a},\mathfrak{a}] \oplus H_1(\mathfrak{a}) \oplus H^1(\mathfrak{a};\mathfrak{a}) \cong \hat{\mathfrak{a}}$. Мы получили деформацию алгебры $\mathfrak{a}$, параметризованную элементами пространства $\mathrm{Hom}(H_1(\mathfrak{a}), H^1(\mathfrak{a};\mathfrak{a}))$.

Применив теперь эту конструкцию к алгебре $n_+(A)$ и используя теорему 3.I, получаем явное описание бесконечно-параметрической деформации алгебры $n_+(A)$.

2. Пусть $1 \leqslant i \leqslant n$. Числу $t \in \mathbb{C}$ поставим в соответствие подалгебру в $\mathfrak{g}^A$ с образующими $e_1, e_2, \dots, e_i + tf_i, \dots$. Эта подалгебра естественно является деформацией алгебры Ли $n_+(A)$. Число деформаций этого типа равно рангу алгебры $\mathfrak{g}^A$.

3. Пусть $1 \leqslant i, j \leqslant n$, и элемент матрицы Картана $a_{ij} = -1$. Рассмотрим деформацию алгебры $n_+(A)$, при которой для $t \in \mathbb{C}$ элемент e_i деофрмируется в $e_i + tf_j$, элемент $[e_i, e_j]$ деформируется в $[e_i, e_j] - th_j$, а остальные образующие алгебры

$\mathfrak{n}_+(A)$ остаются на месте. Деформациями такого типа обладаются все аффинные алгебры Ли, за исключением одной простейшей. Число деформаций этого типа равно числу ненулевых пар (a_{ij}, a_{ji}) с $i \neq j$.

Теорема 3.2 заключается в том, что если исключить упомянутую алгебру рассматриваемого класса, то любая однородная инфинитезимальная деформация алгебры $\mathfrak{n}_+(A)$ продолжается до одной из построенных выше деформаций. Из этого вытекает, разумеется, описание всех инфинитезимальных деформаций. Исключительный случай исследуется отдельно в теореме 3.3.; в нем возникают непродолжаемые инфинитезимальные деформации.

В третьей главе предлагается два способа вычисления когомологий $H^2(\mathfrak{n}_+(A); \mathfrak{n}_+(A))$. Первый способ (§2) состоит в вычислении дифференциалов в спектральной последовательности, сходящейся к $H_2(\mathfrak{n}_+(A); \mathfrak{n}_+(A)')$ со вторым членом $H_2(\mathfrak{n}_+(A)) \otimes \mathfrak{n}_+(A))$. Второй способ (§ 3), пригоден только для алгебр токов и обобщает метод статьи [48] . Мы вычисляем $H^2(\mathfrak{n}_+(A); \mathfrak{n}_+(A))$, используя информацию о когомологиях $H^*(\mathfrak{n}_+(A), \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}])$. А именно, $H^i(\mathfrak{n}_+(A), \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]) \cong \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} H^{i-1}(\mathfrak{n}_+(A))$. Когомологии алгебры $\mathfrak{n}_+(A)$ с тривиальными коэффициентами известны (см. [49]), размерность пространства $H^i(\mathfrak{n}_+(A))$ равняется числу элементов длины i в аффинной группе Вейля, отвечающей алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Нам представляется, что результат о пространстве $H^*(\mathfrak{n}_+(A), \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}])$ имеет самостоятельный интерес, поскольку обобщает теорему Костанта из работы [46] . Интересно было бы обощить этот метод с алгебр токов на произвольные алгебры Каца-Муди, а также вычислить операции Масси из $H^2(\mathfrak{n}_+(A); \mathfrak{n}_+(A))$ в $H^3(\mathfrak{n}_+(A); \mathfrak{n}_+(A))$. Последнее нужно для нахождения версального семейства.

В <u>четвертной главе</u> классифицируются бесконечномерные градуированные алгебры Ли $\mathfrak{g} = \oplus \mathfrak{g}_i$, $0 < i < \infty$, такие, что $\dim \mathfrak{g}_i = 1$ при любом i и имеющие минимально возможное число образующих. Это число, как нетрудно видеть, равно двум. Иначе говоря, мы классифицируем все алгебры Ли с базисом $e_1, e_2, \ldots$ и со скобкой $[e_i, e_j] = c_{ij} e_{i+j}$, образующими которых служат элементы e_1, e_2 .

Интерес к этой задаче вызван следующими обстоятельствами. Из результатов [5] вытекает, что алгебра Ли L_1 порождается двумя образующими - e_1 и e_2 , которые удовлетворяют двум соотношениям весов 5 и 7.(В нем вычислены, в частности, двумерные когомологии $H^2(L_1)$. Но, как легко показать, в данном случае вычисление двумерных когомологий эквивалентно нахождению соотношений). В надлежащей градуировке максимальные нильпотентные подалгебры в аффинных алгебрах $\tilde{A}_1$ и $\mathfrak{B}A_2$ также порождаются элементами e_1 и e_2 и соотношения имеют вес 5 и 7. Возникает вопрос, бывают ли еще алгебры Ли такого типа. Более точно: пусть Σ - свободная алгебра Ли с двумя образующими e_1 и e_2 . Положим $\deg e_1 = 1$, $\deg e_2 = 2$, тогда алгебра Σ превращается в свободную градуированную алгебру Ли. Пусть s_1 и s_2 - два однородных элемента весов 5 и 7 и $L(s_1, s_2)$ - факторалгебра Σ по идеалу, порожденному s_1 и s_2; $\{L(s_1, s_2)\}$ - множество алгебр Ли, занумерованное точками соответствующего линейного пространства V . Оказывается, что если пара (s_1, s_2) принадлежит некоторому открытому по Зарисскому подмножеству U в V , то $L(s_1, s_2)$ - конечномерная алгебра. Дополнение к U разбивается на две части - алгебры Ли, принадлежащие одной части, имеют конечный рост, более того, в этом случае $\dim L_i(s_1, s_2) = 1$ при $i > 0$. Если же алгебра Ли прибнадлежит другой части, то она имеет бесконечный рост, т.е. $\dim L_i(s_1, s_2)$ растет с ростом i быстрее, чем любой полином. Это вытекает из общей классификационной теоремы 4.1.

В заключение выражаю благодарность научному руководителю профессору А.А.Кириллову за внимание к работе и поддержку.

ГЛАВА I

КОГОМОЛОГИИ И ДЕФОРМАЦИИ АЛГЕБР ЛИ

В этой главе рассматриваются общие вопросы деформаций алгебр Ли над полем характеристики нуль и связанные с ними задачи вычисления когомологий с коэффициентами в присоединенных представлениях. Специально рассматривается построение версального семейства и конструкция препятствий к продолжению деформаций. Конструкция препятствий будет использована нами в главе II.

Понятие локальных и инфинитезимальных деформаций для комплексно-аналитических многообразий впервые появились в работе Кодаира и Спенсера [45] . В частности, они показали, что инфинитезимальные деформации параметризуются соответствующей группой когомологий. Деформации произвольных колец и ассоциативных алгебр и связанные с ними когомологические задачи впервые рассматривались М.Герстенхабером в серии работ [37] . Наиболее активно изучались когомологии и деформации коммутативных локальных колец применительно к задачам аналитической и алгебраической геометрии ([38] , [13] , [42] , [47] ,...).

Деформации алгебр Ли изучены сравнительно хуже. Некоторые общие вопросы теории деформации алгебр Ли рассмотрены в статье [54]. Отметим работу А.Н.Рудакова [17] , доказавшего тривиальность деформации простых классических алгебр Ли над полем характеристики нуль, и работу А.С.Джумадильдаева [6] по деформациям модулярных алгебр Ли картановского типа. Несмотря на необозримость деформаций некоторых подалгебр Ли простых классических алгебр ([55]), интересные результаты приносит изучение их градуированных деформаций ([12]). К этому кругу вопросов примыкает и работа М.Верны

[57] о множестве структур нильпотентных алгебр Ли на конечномерном векторном пространстве.

Мы ставим своей целью перенести общие конструкции современной теории деформаций и связанные с ними свойства когомологий (локальных) коммутативных алгебр на алгебры Ли над полем характеристики нуль параллельно работам ([13] , [42] , [47]). Для этого изложим в начале ряд известных сведений из гомологической алгебры в нужной нам интерпретации.

1. Пусть $\mathcal{L}$ – алгебра Ли над полем $\Bbbk$ характеристики 0 и M – $\mathcal{L}$- модель. Гомологии $\mathcal{L}$ с коэффициентами в M – это гомологии стандартного цепного комплекса $C_*(\mathcal{L}; M)$, в котором $C_i = C_i(\mathcal{L}; M) = M \otimes \Lambda^i \mathcal{L}$, и дифференциал $d: C_k \longrightarrow C_{k-1}$ действует по следующей формуле:

$$d(m \otimes l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_k) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} m \otimes [l_i, l_j] \wedge l_1 \wedge \ldots \wedge \hat{l}_i \wedge \ldots \wedge \hat{l}_j \wedge \ldots \wedge l_k + \sum_i (-1)^{i+1} [l_i, m] \otimes l_1 \wedge \ldots \wedge \hat{l}_i \wedge \ldots \wedge l_k .$$

Здесь $l_i \in \mathcal{L}$, $m \in M$, галочка над l_i означает, что в произведении соответствующий член опускается. Гомологии мы, как обычно будем обозначать символом $H_*(\mathcal{L}; M)$.

Когомологии алгебры Ли $\mathcal{L}$ с коэффициентами в M определяются двойственным образом: стандартный коцепной комплекс $C^*(\mathcal{L}; M)$ состоит из пространств $C^q = C^q(\mathcal{L}; M) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Lambda^q \mathcal{L}, M)$, а дифференциал $d^k: C^k \longrightarrow C^{k+1}$ определяется формулой

$$d^k \gamma(l_1, \ldots, l_{k+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \gamma([l_i, l_j], l_1, \ldots, \hat{l}_i, \ldots, \hat{l}_j, \ldots, l_{k+1}) + \sum_j (-1)^{i+1} l_i \gamma(l_1, \ldots, \hat{l}_i, \ldots, l_{k+1}) .$$

Когомологии алгебры $\mathcal{L}$ с коэффициентами в M обозначаются $H^*(\mathcal{L}; M)$. Элементы пространства $C^*(\mathcal{L}; M)$ иногда называются формами. Дифференциал в комплексе форм мы будем обозначать символом δ .

Гомологии и когомологии с коэффициентами в одномерном тривиальном модуле мы будем обозначать $H_*(\mathcal{L})$ и $H^*(\mathcal{L})$.

Подробная теория (ко)гомологий алгебр Ли изложена, например, в [39] .

Напомним теперь некоторые важные для нас факты о когомологиях малых размерностей.

Расширением (см. [18]) алгебры Ли $\mathcal{L}$ посредством модуля M называется точная последовательность $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} \hat{\mathcal{L}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{L} \longrightarrow 0$, где $i(M)$ – абелев идеал в алгебре Ли $\hat{\mathcal{L}}$ такой, что $[\hat{l}, i(m)] = i(\pi(\hat{l})m)$, для $m \in M, \hat{l} \in \hat{\mathcal{L}}$. В [18] показано, что такие расширения с точностью до изоморфизма классифицируются элементами пространства $H^2(\mathcal{L}; M)$.

Одномерные когомологии $\mathcal{L}$ с коэффициентами в присоединенном модуле – это внешние дифференцирования алгебры Ли $\mathcal{L}$, см. [26] .

2. В этой главе нам понадобятся некоторые сведения о когомологиях Харрисона коммутативных колец (см. [56] , [29]). Когомологии Харрисона – это когомологии в категории коммутативных колец. Нам понадобятся только одномерные и двумерные когомологии и мы ограничимся их явным определением. (В отличие от традиционной нумерации мы рассматриваем когомологии Харрисона с номерами, увеличенными на 1).

Пусть A – коммутативная $\Bbbk$ – алгебра и N – A – модуль. Напишем комплекс коцепей $M \xrightarrow{d_0} K^1 \xrightarrow{d_1} K^2$, где $K^1 = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, N)$, а K^2 есть подпространство в $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(S^2A, N)$, состоящее из таких отображений φ , что

$$a\varphi(b,c) - \varphi(ab,c) - c\varphi(a,b) = 0$$

для любых трех элементов $a, b, c \in A$. Дифференциалы d_0, d_1 устроены так:

$$d_0(n)(a) = an, \quad a \in A, \ n \in N,$$

$$d_1\theta(a,b) = a\theta(b) - \theta(ab) + b\theta(a), \quad a, b \in A.$$

Пространства одномерных и двумерных когомологий $H^1_{Har}(A;N), H^2_{Har}(A;N)$ суть по определению $\mathrm{Ker}\, d_1/\mathrm{Im}\, d_0$ и $K^2/\mathrm{Im}\, d_1$ соответственно.

Из определения видно, что 1-коциклы суть дифференцирования. Пусть A – алгебра, m – максимальный идеал, $A/m \cong \Bbbk$. Тогда $H^1_{Har}(A;\Bbbk) \cong (m/m^2)^*$. Другими словами, $H^1_{Har}(A;\Bbbk)$ изоморфно пространству гомоморфизмов $A \longrightarrow \Bbbk[t]/(t^2)$, таких, что ядро композиции $A \longrightarrow \Bbbk[t]/t^2 \longrightarrow \Bbbk$ есть m.

Двумерные когомологии интерпретируются как расширения (см. [40]). Расширением алгебры A посредством модуля N называется точная последовательность $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$, где B есть коммутативная алгебра и $i(N)$ – идеал в B с тривиальным умножением, такой что $b\,i(n) = \pi(b)n$ для $b \in B$, $n \in N$. Поставим в соответствие расширению коцепь $\varphi \in K^2$ следующим образом. Пусть $\eta: A \longrightarrow B$ – такое $\Bbbk$-линейное отображение, что $\pi\eta = id$. Положим $i\varphi(a,b) = \eta(a)\eta(b) - \eta(ab)$. Легко проверить, что $\varphi \in K^2$ и что при другом выборе отображения η коцепь φ меняется на кограницу. Таким образом по расширению мы построили элемент пространства $H^2_{Har}(A;N)$. Из конструкции видно, что <u>каждому элементу</u> $H^2_{Har}(A;N)$ <u>отвечает расширение, и расширение тривиально</u> (т.е. B есть полупрямое произведение) в <u>том и только в том случае, когда соответствующий ему класс когомологий равен нулю</u>.

Автоморфизмом расширения $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$ называется такой автоморфизм μ алгебры $\mathcal{B}$, что $\pi(\mu(b)-b)=0$ для всех $b\in\mathcal{B}$ и $\mu(n)-n=0$, если $n\in i(N)$. Отображение $\theta: A\longrightarrow N,\ a\longmapsto(\mu-1)\eta a$ зависит от выбора η, а именно $\theta: A\longrightarrow N$ есть коцикл, который при изменении η меняется на кограницу. Итак, <u>множество автоморфизмов расширения $0\to N\to\mathcal{B}\to A\to 0$ естественно отождествляется с пространством</u> $H^1_{Har}(A;N)$.

3. Перейдем теперь к теории деформаций алгебр Ли. Мы начнем с "наивного" определения деформации алгебры Ли. Пусть V – линейное пространство и $S(V)$ – множество всех линейных отображений $\Lambda^2V\longrightarrow V$, удовлетворяющих тождеству Якоби; $S(V)$, таким образом есть множество общих нулей некоторой системы многочленов второй степени на пространстве $\Lambda^2V'\otimes V$. Это позволяет наделить $S(V)$ структурой аффинного алгебраического многообразия. На $S(V)$ действует группа $GL(V)$. Фактор $L=S(V)/GL(V)$ – множество попарно неизоморфных структур алгебры Ли на пространстве V.

Хорошо известно (см. [27]), что в категории алгебраических многообразий фактор по действию группы существует не всегда. В частности, L – не алгебраическое многообразие. Однако, можно определить функтор, относящий каждому аффинному алгебраическому многообразию X как бы множество морфизмов $Mor(X,L)$. А именно, поставим X в соответствие $\mathcal{D}(X)$ – фактор множества $Mor(X,S(V))$ по действию группы регулярных отображений $X\longrightarrow GL(V)$. Если бы функтор $\mathcal{D}(X)$ был бы представим в категории алгебраических многообразий, то L допускало бы структуру алгебраического многообразия и $\mathcal{D}(X)\cong Mor(X,L)$.

Изучение фактора $\mathcal{D}$ – основная задача теории деформаций. Нас будет интересовать главным образом локальная теория деформаций - т.е. мы ограничимся подкатегорией Λ категории аффинных алгебраических многообразий, состоящей из многообразий вида $spec\,A$, где A - локальная алгебра. Напомним, что локальная алгебра - это алгебра с единственным максимальным идеалом m, $A/m \cong \mathbb{k}$. Мы дадим сейчас определение функтора, отвечающего за структуру L в окрестности данной точки.

Пусть $\mathcal{L}$ - алгебра Ли, $spec\,A$ - объект категории Λ. Тогда $Def(\mathcal{L}, spec\,A)$ по определению есть <u>прообраз элемента</u> $\mathcal{L}$ <u>при отображении</u> $\mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{k})$, <u>индуцированном морфизмом</u> $spec\,\mathbb{k} \longrightarrow spec\,A$. Мы полагаем при этом, что $V = \mathcal{L}$ и само $\mathcal{L}$ есть элемент множества L. Элементы множества $Def(\mathcal{L}, spec\,A)$ называются <u>деформациями алгебры Ли</u> $\mathcal{L}$ <u>с базой</u> $spec\,A$.

Особо выделяются так называемые формальные деформации алгебры Ли, т.е. деформации над кольцом формальных степенных рядов от одной переменной.

Дадим теперь более явное описание множества $Def(\mathcal{L}, spec\,A)$, где $spec\,A \in \Lambda$. Оно представляет собой множество классов изоморфизмов следующих пар: а) A - алгебра Ли $\bar{\mathcal{L}}(A)$ свободная как A-модуль; б) изоморфизм $\bar{\mathcal{L}}(A)/m\bar{\mathcal{L}}(A) \cong \mathcal{L}$, m - максимальный идеал в A. Совпадение этого определения с определением из предыдущего абзаца очевидно. Действительно, выберем в алгебре $\bar{\mathcal{L}}(A)$ базис (над A). Коммутатор в этом базисе дает нам отображение $spec\,A \longrightarrow S(V)$ $(V \cong \mathcal{L})$. Обратно, существует "тавтологическая" алгебра над алгеброй $\mathbb{k}[S(V)]$ (т.е. $\oplus_{s \in S(V)} V_s$, где V_s - алгебра Ли с коммутатором s) и посредством "замены базы" по каждому морфизму $spec\,A \longrightarrow S(V)$ мы получаем A-алгебру Ли.

<u>Пример</u>. Пусть $A = \mathbb{k}[t]/(t^2)$. Мы опишем $Def(\mathcal{L}, spec\,A)$.

<u>Предложение I.I</u>. $\mathcal{D}ef(\mathcal{L}, \operatorname{spec} A) \cong H^2(\mathcal{L};\mathcal{L})$.

Доказательство. Элемент множества $\mathcal{D}ef(\mathcal{L}, \operatorname{spec} A)$ – алгебра Ли $\bar{\mathcal{L}}$, снабженная эндоморфизмом t, $\bar{\mathcal{L}}/t\bar{\mathcal{L}} \cong \mathcal{L}$, $t\bar{\mathcal{L}}$ – абелев идеал. Таким образом, $0 \longrightarrow t\bar{\mathcal{L}} \longrightarrow \bar{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ есть расширение алгебры $\mathcal{L}$ посредством присоединенного представления. Нетрудно показать, что и обратно, каждое такое расширение определяет элемент из $\mathcal{D}ef(\mathcal{L}, \operatorname{spec} A)$. С другой стороны, расширения классифицируются элементами линейного пространства $H^2(\mathcal{L};\mathcal{L})$ Предложение доказано.

Таким образом $H^2(\mathcal{L};\mathcal{L})$ – это касательное пространство к L в точке $\mathcal{L}$. Его элементы естественно называть <u>инфинитезимальными деформациями</u> алгебры Ли $\mathcal{L}$. Всякой деформации алгебры Ли $\mathcal{L}$ однозначно соответствует ее инфинитезимальная деформация. Она назавается также характеристическим классом этой деформации.

Функтор $\mathcal{D}ef$, вообще говоря, не представим, т.е. не существует универсального элемента. Однако существует так называемый версальный элемент (более точно миниверсальный), определение которого мы сейчас дадим.

Пусть X – объект категории Λ и $\tau \in \mathcal{D}ef(\mathcal{L}, X)$. Пара (X,τ) определяет морфизм функторов $\Theta\colon \operatorname{Mor}(Y,X) \longrightarrow \mathcal{D}ef(\mathcal{L},Y)$ (оба функтора действуют из категории Λ в категорию множеств). Отображение Θ относит морфизму $\varphi\colon Y \longrightarrow X$ элемент $\varphi^*(\tau)$. Напомним, что пара (X,τ) называется <u>универсальной</u>, если Θ – изоморфизм для любого объекта Y. Пара (X,τ) называется <u>(мини-)версальной</u>, если а) отображение Θ – сюръекция для любого Y, б) Θ – изоморфизм, если $Y = \operatorname{spec} \Bbbk[t]/t^2$.

Условия а) и б) имеют простой геометрический смысл. А именно, если (X,τ) – версальная деформация, то соответствующее отображение $X \longrightarrow S(V)$ есть вложение, переводит единственную точку X

в некоторую точку p $GL(V)$ - орбиты, отвечающей $\mathcal{L}$, образ X трансверсально пересекает эту орбиту и касательное пространство в p есть сумма касательного пространства к орбите и касательного пространства к образу X.

В [2], [28] сформулированы общие теоремы, из которых вытекает существование версальной деформации. Мы приведем индуктивное построение такой деформации. Для этого нам будут необходимы некоторые сведения из теории препятствий.

4. Пусть $\mathcal{E} \in \mathcal{D}ef(\mathcal{L}, spec\, A)$, A - коммутативная алгебра, m - максимальный идеал в A, $A/m \cong \Bbbk$. Выберем элемент $f \in H^2_{Har}(A; \Bbbk)$ и пусть $0 \longrightarrow \Bbbk \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow A \longrightarrow 0$ соответствующее расширение. Обозначим через $\bar{m}$ максимальный идеал в $\mathcal{B}$. Попытаемся продолжить деформацию $\mathcal{E}$ по деформации с базой $spec\,\mathcal{B}$.

Деформация $\mathcal{E}$ - это структура A - алгебры Ли на пространстве $\mathcal{L} \otimes_{\Bbbk} A$. Нам нужно определить структуру $\mathcal{B}$-алгебры Ли на пространстве $\mathcal{L} \otimes_{\Bbbk} \mathcal{B} = \bar{\mathcal{L}}(\mathcal{B})$, такую, что отображение $X: \mathcal{L} \otimes B \longrightarrow \mathcal{L} \otimes A$, индуцированное гомоморфизмом $\mathcal{B} \longrightarrow A$ было гомоморфизм алгебры Ли. Ядро гомоморфизма X мы отождествим с алгеброй $\mathcal{L}$. Пусть $\varphi: \bar{\mathcal{L}}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{L}$ - отображение, индуцированное гомоморфизмом $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}/\bar{m} \cong \Bbbk$.

На $\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{B})$ можно определить $\mathcal{B}$-линейную кососимметрическую операцию $\{\ ,\ \}$ такую, что а) $X(\{\ell_1, \ell_2\}) = [X(\ell_1), X(\ell_2)]$, $\ell_i \in \bar{\mathcal{L}}$, б) $\{\ell, \ell_1\} = [\ell, \varphi(\ell_1)]$, $\ell \in \ker X$, $\ell_1 \in \bar{\mathcal{L}}(\mathcal{B})$. Операция $\{\ ,\ \}$ удовлетворяет тождеству Якоби "частично", т.е.

$$\{\ell_1, \{\ell_2, \ell_3\}\} - \{\{\ell_1, \ell_2\}, \ell_3\} - \{\ell_2, \{\ell_1, \ell_3\}\} = \Phi(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \ker X.$$

Заметим, что функция Φ полилинейна и кососимметрична.

Далее, если $\ell_1 \in \bar{m}\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{B})$, то $\Phi(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = 0$. Действительно, если $\ell_1 = n\ell$, $n \in \bar{m}$, то $\Phi(n\ell, \ell_2, \ell_3) = n\Phi(\ell, \ell_2, \ell_3) = 0$.

Это значит, что Φ определяет полилинейную кососимметрическую форму $\bar{\Phi}$ на $\mathcal{L}=\bar{\mathcal{L}}(B)/\bar{m}\bar{\mathcal{L}}(B)$ со значениями в $\ker\chi \cong \mathcal{L}$. Мы будем рассматривать $\bar{\Phi}$ как элемент пространства $C^3(\mathcal{L};\mathcal{L})$. Прямой выкладкой легко показать, что $\delta\bar{\Phi}=0$.

Если мы заменим операцию $\{\ ,\ \}$ другой, также удовлетворяющей условиям а) и б), то коцикл $\bar{\Phi}$ изменится на кограницу. Более того, изменяя $\{\ ,\ \}$ мы можем получить любой элемент из когомологического класса формы $\bar{\Phi}$. Итак, мы поставили в соответствие элементу $f\in H^2_{Har}(A;\mathbb{k})$ класс когомологий в $H^3(\mathcal{L};\mathcal{L})$. Из конструкции видно, что это соответствие линейно по f, т.е. мы получаем гомоморфизм $P_2: H^2_{Har}(A;\mathbb{k})\longrightarrow H^3(\mathcal{L};\mathcal{L})$.

Предложение I.2. Деформация $\mathcal{E}$ продолжается до деформации с базой $\operatorname{spec} B$ в том и только в том случае, если $P_2(f)=0$.

Действительно, деформация продолжается в том случае, если можно выбрать операцию $\{\ ,\ \}$ так, чтобы форма Φ была равна нулю. Из этого вытекает, что если $P_2(f)\neq 0$, то деформация не продолжается. Если же $P_2(f)=0$, то операцию $\{\ ,\ \}$ можно изменить так, чтобы выполнялось тождество Якоби.

Пример. Пусть $A=\mathbb{k}[t]/t^2$, $B=\mathbb{k}[t]/t^3$, f - класс расширения $0\longrightarrow\mathbb{k}\longrightarrow B\longrightarrow A\longrightarrow 0$. Деформация $\mathcal{E}$ с базой $\operatorname{spec} A$ есть не что иное как инфинитезимальная деформация, т.е. элемент пространства $H^2(\mathcal{L};\mathcal{L})$. Препятствие $P_2(f)$ к продолжению $\mathcal{E}$ до деформации с базой $\operatorname{spec} B$ легко непосредственно вычислить. Оно равно когомологическому классу коцикла

$$(l_1,l_2,l_3)\longmapsto e(e(l_1,l_2),l_3)+e(e(l_2,l_3),l_1)+e(e(l_3,l_1),l_2),$$

где e - коцикл, представляющий $\mathcal{E}$. Этот класс называется лиевым квадратом класса $\mathcal{E}$ и обозначается через $[\mathcal{E},\mathcal{E}]$. Таким образом, инфинитезимальная деформация $\mathcal{E}$ тогда и только тогда продолжается до деформации с базой $\operatorname{spec} \Bbbk[t]/t^3$, когда класс $[\mathcal{E},\mathcal{E}] \in H^3(\mathcal{L};\mathcal{L})$ равен 0.

Препятствия к дальнейшему продолжению деформации на $\operatorname{spec} \Bbbk[t]/t^q$, $q=4,5,\ldots$, также лежащие в $H^3(\mathcal{L};\mathcal{L})$, описываются при помощи лиевских операций Масси, (см.ниже п.6).

Отображение P_2 характеризует деформацию $\mathcal{E}$. Нам понадобится еще один гомоморфизм $P_1 : H^1_{Har}(A;\Bbbk) \longrightarrow H^2(\mathcal{L};\mathcal{L})$, также характеризующий деформацию. Этот гомоморфизм относит элементу из $H^1_{Har}(A;\Bbbk)$, т.е. гомоморфизму $q: A \longrightarrow \Bbbk[t]/t^2$ характеристический класс деформации $q^*\mathcal{E}$ над $\Bbbk[t]/t^2$.

Предположим, что $P_2(f)=0$. Тогда деформация $\mathcal{E}$ может быть продолжена до деформации с базой $\operatorname{spec}\mathcal{B}$, причем многими способами. Пусть $\{\ ,\ \}_{1,2}$ - две скобки на $\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{B})$, рассмотрим разность $\{\ ,\ \}_1 - \{\ ,\ \}_2$. Это - кососимметрическая билинейная функция ϱ, относящая двум элементам $l_1, l_2 \in \bar{\mathcal{L}}(\mathcal{B})$ элемент из $\ker X$, причем $\varrho(l_1,l_2)=0$, если $l_1 \in \bar{m}\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{B})$. Из этого вытекает, что ϱ определяет 2 - форму $\bar{\varrho} : \Lambda^2(\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{B})/\bar{m}\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{B})) \cong \Lambda^2\mathcal{L} \longrightarrow \ker X \cong \mathcal{L}$. Непосредственно проверяется, что $\bar{\varrho}$ - замкнутая форма. Когомологический класс формы $\bar{\varrho}$ - "различающая" двух скобок $\{\ ,\ \}_1, \{\ ,\ \}_2$. Эндоморфизмы расширения $0 \longrightarrow \Bbbk \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow A \longrightarrow 0$ действуют на множестве скобок на $\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{B})$. Мы исследуем сейчас это действие.

<u>Предложение I.3</u>. Пусть a - автоморфизм расширения $0 \longrightarrow \Bbbk \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow A \longrightarrow 0$ и $\bar{a}$ - отвечающий ему элемент пространства $H^1_{Har}(A;\Bbbk)$. Далее, пусть $\{\ ,\ \}$ - скобка на $\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{B})$. Тогда "различающая" скобок $a\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}$ равняется $P_1(\bar{a})$.

Доказательство этого предложения очевидно.

Следствие. Пусть $\mathcal{E} \in \mathrm{Def}(\mathcal{L}, A)$ – деформация, такая, что гомоморфизм P_1 – сюръекция, $0 \to \Bbbk \to B \to A \to 0$ расширение, такое, что $\mathcal{E}$ продолжается до деформации над $\mathrm{spec}\, B$. Тогда группа автоморфизмов расширения транзитивно действует на множестве всех продолжений $\mathcal{E}$.

5. Перейдем теперь к построению версальной деформации.

Пусть Σ – подкатегория категории локальных алгебр, состоящая из таких алгебр A, что $m^2=0$, m – максимальный идеал, $A/m \cong \Bbbk$. Тогда функтор $\mathrm{Def}(\mathcal{L}, \mathrm{spec}\, A)$ представим на категории Σ, т.е. допускает универсальную пару $(X, \mathcal{E})$, $\mathcal{E} \in \mathrm{Def}(\mathcal{L}, X)$ (см. [28]). Построим такую пару. Положим $X = \mathrm{spec}\, A$, где $A = \Bbbk \oplus H_2(\mathcal{L};\mathcal{L})$ (здесь $H_2(\mathcal{L};\mathcal{L})$ – идеал в A с нулевым умножением). Заметим теперь, что в пространстве $H^2(\mathcal{L}; H_2(\mathcal{L};\mathcal{L})\cdot\mathcal{L}) = H^2(\mathcal{L};\mathcal{L}) \otimes H_2(\mathcal{L};\mathcal{L})$, как и во всяком тензорном произведении сопряженных пространств, есть отмеченный элемент. Пусть v – коцепь, представляющая этот элемент. Определим теперь структуру A-алгебры Ли на пространстве $\mathcal{L}\otimes A = \mathcal{L}\otimes 1 \oplus \mathcal{L}\otimes H^2(\mathcal{L};\mathcal{L})$, положив $[l_1\otimes 1, l_2 \otimes 1] = [l_1, l_2]\otimes 1 + v(l_1, l_2)$, $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$. Эта A-алгебра Ли и отвечает деформации $\mathcal{E}$.

Если $C = \Bbbk \oplus m$, $m^2=0$ – объект категории Σ, то каждому элементу множества $\mathrm{Def}(\mathcal{L}, \mathrm{spec}\, C)$ естественно (так же как в предложении I) ставится в соответствие элемент пространства $H^2(\mathcal{L}; m\otimes\mathcal{L})$. И это соответствие взаимооднозначно. Заметим, что $H^2(\mathcal{L}; m\otimes\mathcal{L}) \cong \mathrm{Hom}(H_2(\mathcal{L};\mathcal{L}), m) \cong \mathrm{Hom}(A, C) \cong$ $\cong \mathrm{Def}(\mathcal{L}, \mathrm{spec}\, C)$. А это и означает, что пара $(X, \mathcal{E})$ универсальна.

Пусть A – локальная алгебра, m – максимальный идеал и $N = (H^2(A; A/m))^* \otimes_{\Bbbk} A/m$ – A-модуль. Мы будем отождествлять его с пространством $H^2_{Har}(A;\Bbbk)^*$. Пространство $H^2_{Har}(A;N)=H^2_{Har}(A;\Bbbk)\otimes(H^2_{Har}(A,\Bbbk))^*$ содержит канонический элемент u. Построим соответствующее расширение $0\longrightarrow N\longrightarrow F(A)\to$ $\to A\longrightarrow 0$. Пусть $A=\Bbbk[x_1,\dots,x_n]/m^2$, $m=(x_1,\dots,x_n)$. Тогда проективный предел следующей системы $A\longleftarrow F(A)\longleftarrow$ $\leftarrow F(F(A))\leftarrow\dots$ есть алгебра формальных рядов от n переменных.

Пусть (X,ε) – универсальная пара в категории Σ и $A=\Bbbk[x]$. Деформация ε дает нам гомоморфизм P_2 : $H^2_{Har}(A;\Bbbk)\longrightarrow H^3(\mathcal{L};\mathcal{L})$. Рассмотрим сопряженное отображение $P_2^*: H_3(\mathcal{L};\mathcal{L})\longrightarrow(H^2_{Har}(A,\Bbbk))^*$ и пусть $\bar{u}$ – образ класса $u\in H^2(A;(H^2_{Har}(A,\Bbbk))^*)$ при гомоморфизме $H^2(A;(H^2_{Har}(A;\Bbbk))^*)\longrightarrow$ $\longrightarrow H^2(A;(H^2_{Har}(A,\Bbbk))^*/\mathrm{Im}P_2^*))$. Построим соответствующее $\bar{u}$ расширение $0\longrightarrow H^2_{Har}(A;\Bbbk)^*/\mathrm{Im}P_2^*\longrightarrow\bar{F}(A)\longrightarrow A\longrightarrow 0$. Из конструкций пункта 4 вытекает, что семейство ε продолжается до семейства с базой $\operatorname{spec}\bar{F}(A)$. Из следствия, сформулированного после предложения I.3. вытекает, что группа автоморфизмов расширения транзитивно действует на множестве продолжений. Это означает, что с точностью до изоморфизма алгебра Ли $\bar{\mathcal{L}}(\bar{F}(A))$ определена однозначно. К алгебре $\bar{F}(A)$ применим еще раз ту же конструкцию, затем еще раз, и т.д. Мы получим проективную систему алгебр:

$$\dots\longrightarrow\bar{\bar{F}}(A)\longrightarrow\bar{F}(A)\longrightarrow A\,.$$

Символом $v(\mathcal{L})$ мы будем обозначать проективный предел этой системы алгебр. Из предыдущего следует, что алгебра $v(\mathcal{L})$ есть фактор алгебры формальных степенных рядов $\Bbbk[[H_2(\mathcal{L};\mathcal{L})]]$ по некоторому идеалу. И очевидным образом существует деформация $\bar{\mathcal{L}}(v(\mathcal{L}))$ с базой $\operatorname{spec}v(\mathcal{L})$.

<u>Предложение I.4</u>. Построенная деформация с базой $\operatorname{spec}v(\mathcal{L})$ версальна.

Это предложение доказывается стандартными средствами. Доказательство аналогичного факта для локальных коммутативных алгебр можно найти в статье Шлезингера [28] .

Алгебра $v(\mathcal{L})$ есть фактор $\Bbbk[[H_2(\mathcal{L};\mathcal{L})]]$ по идеалу J . Предположим, что $\dim H_2(\mathcal{L};\mathcal{L})<\infty$. Алгебра формальных степенных рядов от конечного числа переменных нетерова, следовательно идеал J имеет конечное число образующих. Пространство образующих идеала J отождествляется (см. [28]) с пространством $(H^2_{Har}(v(\mathcal{L}),\Bbbk))^*$. Из конструкции алгебры $v(\mathcal{L})$ вытекает, что отображение $H_3(\mathcal{L};\mathcal{L})\longrightarrow(H^2_{Har}(v(\mathcal{L});\Bbbk))^*$ – сюръекция. Итак, <u>координатное кольцо базы версальной деформации есть фактор</u> $\Bbbk[[H_2(\mathcal{L};\mathcal{L})]]$ <u>по идеалу, порожденному соотношениями, отвечающими элементам пространства</u> $H_3(\mathcal{L};\mathcal{L})$.

6. В этом пункте мы, следуя работе [I4] , введем некоторые когомологические операции, которые служат основным средством для вычисления версальной деформации. Для этого нам понадобится в этом пункте стандартный гомологический комплекс супералгебры Ли. Определение его, совершенно аналогичное определению из пункта I, мы приводить не будем, а отошлем к [I0] и [I5] .

Пусть $A=C^*(\mathcal{L})$ – стандартный коцепной комплекс коцепей алгебры $\mathcal{L}$; A – дифференциальная $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра. Символом $\mathrm{Der}\,A$ обозначим множество супердифференцирований алгебры A . Пространство $\mathrm{Der}\,A$ обычным образом наделяется структурой супералгебры Ли. Заметим, что $\mathrm{Der}\,A\cong C^*(\mathcal{L};\mathcal{L})\cong$ $\cong\Lambda^*(\mathcal{L}^*)\otimes\mathcal{L}$ (элементу $\omega_1\otimes l\in\Lambda^*(\mathcal{L}^*)\otimes\mathcal{L}$ ставится в соответствие дифференцирование $\omega_1\partial/\partial l$, $l\in\mathcal{L}$, $\omega_1\in\Lambda^*(\mathcal{L}^*)$). В пространстве $\mathrm{Der}\,A$ есть выделенный элемент δ , которому отвечает операция коммутирования $\Lambda^2\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}$. Дифференциал в комплексе $\mathrm{Der}\,A$ задается формулой $u\longrightarrow[u\delta]$; $\mathrm{Der}\,A$

превращается таким образом в дифференциальную градуированную супералгебру Ли. Пространство $H^*(\mathcal{L};\mathcal{L})$ наследует структуру супералгебры Ли.

Пусть K - стандартный комплекс супералгебры $\mathcal{D}er A$, т.е. $K=\{\mathcal{D}er A \longleftarrow \Lambda^2 \mathcal{D}er A \longleftarrow \ldots\}$; напомним, что внешняя степень здесь понимается в суперсмысле. Зададим на этом комплексе фильтрацию $K_i = \mathcal{D}er A \oplus \Lambda^2 \mathcal{D}er A \oplus \ldots \oplus \Lambda^i \mathcal{D}er A$. Первый член ассоциированной с этой фильтрацией спектральной последовательности называемой спектральной последовательностью Квиллена для супералгебр $\mathcal{D}er A$ (см. [I5]), изоморфен стандартному комплексу супералгебры $H^*(\mathcal{L};\mathcal{L})$. Согласно [I5] , если определена операция Масси на элементах $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in H^*(\mathcal{L};\mathcal{L})$, то определен и краевой дифференциал в рассматриваемой спектральной последовательности. Поэтому образы краевых дифференциалов в этой спектральной последовательности естественно назвать обобщенными <u>лиевскими операциями Масси</u>.

Выберем в пространстве $H^2(\mathcal{L};\mathcal{L})$ элемент α . Этот элемент четный и поэтому в стандартном комплексе $H^*(\mathcal{L};\mathcal{L})$ определены элементы α^n. Как показывают вычисления, первый дифференциал $d_1\alpha^2 = \langle\alpha,\alpha\rangle \in H^3(\mathcal{L};\mathcal{L})$. Если $\langle\alpha,\alpha\rangle=0$, то определен следующий дифференциал $d_2\alpha^3 \in H^3(\mathcal{L};\mathcal{L})/d_1(S^2H^2(\mathcal{L};\mathcal{L}))$ (мы полагаем, что $d_2\alpha^3 = \langle\alpha,\alpha,\alpha\rangle$) и т.д.

Уравнение $\langle\alpha,\alpha\rangle=0$ определяет в пространстве $H^2(\mathcal{L};\mathcal{L})$ квадратичный конус. Если $\langle\alpha,\alpha\rangle=0$, то условие $\langle\alpha,\alpha,\alpha\rangle \ni 0$ определяет подмножество этого квадратичного конуса. Итерируя эту процедуру мы получим некоторое однородное подмногообразие V в $H^2(\mathcal{L};\mathcal{L})$. Пусть $v(\mathcal{L})$ - алгебра, построенная в предыдущем пункте, m - максимальный идеал в $v(\mathcal{L})$ и $\bar{v}(\mathcal{L})$ - градуированная алгебра $\Bbbk \oplus m/m^2 \oplus m^2/m^3 \oplus \ldots$.

Предложение I.5. (см. [I4]). Спектр алгебры $\bar{v}(\mathcal{L})$ есть V .

Следствие. Если для каждого $\alpha \in H^2(\mathcal{L};\mathcal{L})$

$$\langle\alpha,\alpha\rangle = 0 \quad , \quad \langle\alpha,\alpha,\alpha\rangle \ni 0 \; , \; \dots \; ,$$

то $\operatorname{spec} \bar{v}(\mathcal{L}) = H^2(\mathcal{L};\mathcal{L})$, т.е. базой версальной деформации алгебры $\mathcal{L}$ служит $H^2(\mathcal{L};\mathcal{L})$.

ГЛАВА П

ДЕФОРМАЦИИ АЛГЕБРЫ ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПРЯМОЙ

В этой главе мы изучаем деформации алгебры Ли L_1 - это подалгебра алгебры Ли W_1 векторных полей на прямой с полиномиальными коэффициентами, состоящая из полей, обращающихся в нуль вместе с первой производной в начале координат. Эта алгебра является, в некотором смысле, следующей по сложности бесконечномерной нильпотентной алгеброй Ли за нильпотентными подалгебрами аффинных алгебр Ли.

Изучение деформаций нильпотентных подалгебр алгебр Ли векторных полей стимулировано, в частности, работой [I6] , где доказано, что когомологии с тривиальными коэффициентами алгебры L_1 и близких к ней нильпотентных (супер-)алгебр Ли геометрического происхождения не меняются при определенных деформациях. Кроме того, алгебра L_1 является, по-видимому, простейшей среди алгебр Ли, обладающей препятствиями высших порядков к продолжению деформаций, как это следует из свойств ее когомологий с присоединенными коэффициентами, изученных в настоящей главе.

Все это говорит о том, что изучение деформаций алгебры L_1 должно быть одним из первых шагов на пути к изучению деформаций бесконечномерных алгебр Ли.

I. В начале изложим необходимые нам факты о когомологиях алгебры L_1 с коэффициентами в присоединенном представлении.

В алгебре Ли W_1 выберем базис $e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \dots$, где $e_i = x^{i+1}\partial/\partial x$. Коммутатор в этом базисе задается формулой $[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}$. Алгебра Ли $L_1 \subset W_1$ имеет базис $e_1, e_2, \dots$. Нам понадобятся также подалгебры $L_i \subset W_1$: базис в L_i $(i\geq 0)$ составляют поля $e_i, e_{i+1}, \dots$. Алгебры W_1 , L_i естественно градуированы, градуировка базисного вектора e_i равняется i . Градуировку наследуют пространства когомологий алгебры L_1 с коэффициентами в градуированных модулях, в частности, $H^k(L_1;L_1)=\oplus_m H^k_{(m)}(L_1;L_1)$.

<u>Предложение 2.I.</u> Пространство $H^k(L_1;L_1)$, $k>0$ имеет размерность $2k-1$ и порождается элементами степеней $-\frac{3k^2-k}{2}+i$, $i=1,2,\dots,2k-1$. (Другими словами, $H^k_{(m)}(L_1;L_1)\cong$ $\cong H^{k-1}_{(m)}(L_2)$ см. [I5]).

В частности, $H^1(L_1;L_1)$ одномерно и имеет степень 0 ; $H^2(L_1;L_1)$ трехмерно и порождается элементами степеней -2, -3, -4; $H^3(L_1;L_1)$ пятимерно и порождается элементами степеней -7, -8, -9, -I0, -II.

Доказательство. Это предложение вытекает из результатов работы [23] . А именно, в [23] вычисляются гомологии алгебры L_1 с коэффициентами в модулях $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$, $F_{\lambda,\mu}$, $F'_{\lambda,\mu}$. Здесь $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ – модуль с базисом f_i , $i\in\mathbb{Z}$, $e_i f_j=$ $=(j+\mu-\lambda(i+1))f_{i+j}$; $F_{\lambda,\mu}$ – подмодуль модуля $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ с базисом $f_0, f_1, f_2, \dots$; $F'_{\lambda,\mu}$ – модуль, сопряженный к $F_{\lambda,\mu}$. Присоединенное представление в этих обозначениях есть $F_{1,1}$. Заметим, что пространство $H^i(L_1,F_{1,1})$ двойственно к $H_i(L_1,F'_{1,1})$. Воспользуемся теперь теоремой 4.3 из [23] . Получим, что $H_i(L_1,F'_{1,1})=H_{i-1}(L_1,F_{-2,-1})\oplus H_i(L_1,\mathcal{F}_{-2,-1})$. Из теоремы 4.I [23] следует, что $H_i(L_1,\mathcal{F}_{-2,-1})=0$ при любом целом i . Используя теорему 4.2 [23] и замечание после него получим, что $\dim H_i(L_1,F_{-2,-1})=\dim H_i(L_2)$. Предложение доказано.

Коцикл φ , представляющий элемент из $H^1(L_1;L_1)$ имеет вид: $\varphi(e_i)=ie_i$. Элементы из $H^1(L_1;L_1)$, как известно, есть внешние дифференцирования. Каждое такое дифференцирование определяет алгебру Ли, включающую L_1 как идеал коразмерности 1 . В данном случае мы получаем алгебру L_0 .

Три однородных элемента в $H^2(L_1;L_1)$ градуировки -2, -3, -4 мы будем обозначать α, β, γ соответственно. Приведем явные формулы для коцепей $\bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma$, отвечающих классам когомологий α, β, γ .

$$\begin{aligned}
&\bar\alpha(e_2,e_3)=4e_3,\\
&\bar\alpha(e_2,e_j)=je_j \ (j\geq 4),\ \bar\alpha(e_3,e_j)=-(j-1)e_{j+1}\ (j\geq 4)\\
&\bar\alpha(e_i,e_j)=0 \quad \text{для остальных } i,j;
\end{aligned} \qquad (2.\mathrm{I})$$

$$\begin{aligned}
&\bar\beta(e_2,e_3)=8e_2,\ \bar\beta(e_2,e_4)=4e_3,\ \bar\beta(e_3,e_4)=-10e_4,\\
&\bar\beta(e_2,e_j)=(j+1)e_{j-1},\ \bar\beta(e_3,e_j)=-2je_j,\ \bar\beta(e_4,e_j)=(j-1)e_{j+1} \quad \text{при } j\geq 5;\\
&\bar\beta(e_i,e_j)=0 \quad \text{для остальных } i,j;\\
&\bar\gamma(e_2,e_3)=14e_1,\ \bar\gamma(e_2,e_5)=8e_3,\ \bar\gamma(e_3,e_4)=-24e_3,\\
&\bar\gamma(e_3,e_5)=-16e_4,\ \bar\gamma(e_4,e_5)=18e_5;\\
&\left.\begin{aligned}&\bar\gamma(e_2,e_j)=(j+2)e_{j-2},\ \bar\gamma(e_3,e_j)=-3(j+1)e_{j-1},\\ &\bar\gamma(e_4,e_j)=3je_j,\ \bar\gamma(e_5,e_j)=-(j-1)e_{j+1}\end{aligned}\right\}\ \text{при } j\geq 6,\\
&\bar\gamma(e_i,e_j)=0 \quad \text{для остальных } i,j.
\end{aligned}$$

Эти формулы можно найти следующим образом. Легко показать, что всякий двумерный класс когомологий алгебры L_1 с коэффициентами в L_1 представляется единственным коциклом ω , аннулируемом подстановкой поля e_1 . После этого для $\omega(e_i,e_j)$ с $1<i<j$ можно записать систему уравнений, которая явно решается. Этим способом можно дать еще одно доказательство части предложения 2.I, относящееся к двумерным когомологиям.

Замечание. Более простую формулу для класса когомологий α можно получить следующим образом. Пусть $\varepsilon \in H^1(L_1)$ – элемент веса -2 и $\nu \in H^1(L_1; L_1)$ когомологический класс коцикла $e_i \longmapsto i e_i$. Тогда $\alpha = \varepsilon\nu$. Классы β и γ не имеют столь же простого описания.

2. Вычисление препятствий к деформация алгебры Ли L_1.

Это вычисление основано на общей теории главы I. Для удобства пользования этой теорией мы придадим ей более конкретную форму.

Пусть $\mathcal{L}$ – алгебра Ли, $[\ ,\ ]_t$ – деформация скобки. Разложим эту деформацию в ряд Тейлора:

$$[x,y]_t = [x,y]_0 + t\omega_1(x,y) + t^2\omega_2(x,y) + \ldots, \qquad x,y \in \mathcal{L}.$$

Тождество Якоби выглядит следующим образом:

$$[[x,y]_t, z]_t = [[x,y]_0 + t\omega_1(x,y) + t^2\omega_2(x,y) + \ldots, z]_t = [[x,y]_0, z]_0 +$$
$$+ t\omega_1([x,y]_0, z) + t^2\omega_2([x,y]_0, z) + t[\omega_1(x,y), z]_0 + t^2(\omega_1(\omega_1(x,y), z) +$$
$$+ t^2[\omega_2(x,y), z]_0 + \ldots = [[x,z]_t, y]_t + [x, [y,z]_t]_t.$$

Из этого равенства вытекает, что ω_1 есть 2-коцикл алгебры $\mathcal{L}$ с коэффициентами в присоединенном представлении, а также, что 3-коцепь

$$\omega_1(\omega_1(x,y), z) - \omega_1(\omega_1(x,z), y) + \omega_1(\omega_1(y,z), x)$$

есть кограница коцепи ω_2. Пусть $\alpha \in H^2(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ – класс когомологий, отвечающий коцепи ω_1. Мы фактически показали, что лиев квадрат $\langle\alpha, \alpha\rangle$ равняется нулю. Это представляет собой частный случай результатов главы I; для продолжимости инфинитизимальной деформации $[x,y] + t\omega_1[x,y]$ на $\operatorname{spec} \Bbbk[t]/t^3$ необходимо, чтобы $\langle\alpha, \alpha\rangle = 0$.

Если $\mathcal{L} \cong L_1$, то, как нетрудно видеть $\langle\alpha,\alpha\rangle = \langle\beta,\beta\rangle = 0$, поскольку веса элементов $\langle\alpha,\alpha\rangle$ и $\langle\beta,\beta\rangle$ есть -4 и -6, а таких трехмерных когомологий нет. Аналогично из соображений размерности вытекает, что $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\alpha,\gamma\rangle = 0$. Вычисление остальных соотношений не столь очевидно.

<u>Предложение 2.2</u>. Лиевы произведения $\langle\gamma,\gamma\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle$ и лиев куб Масси $\langle\beta,\beta,\beta\rangle$ нетривиальны, а $\langle\underbrace{\alpha,\alpha,\ldots,\alpha}_{i}\rangle \ni 0$ при любом i.

Для доказательства неравенства $\langle\gamma,\gamma\rangle \neq 0$ подставим коцепь $\bar{\gamma}$ в формулу (2.I). Полученный трехмерный коцикл не когомологичен нулю. Это вытекает из того, что не равняется нулю его значение на классе гомологий веса -8. Мы приведем формулу для цикла из этого класса гомологий.

$$
\begin{aligned}
& e_1\wedge e_4\wedge e_7\otimes e_4' - 3e_1\wedge e_5\wedge e_6\otimes e_4' - 3e_2\wedge e_3\wedge e_7\otimes e_4' + \\
& + 6e_2\wedge e_4\wedge e_6\otimes e_4' - 15e_3\wedge e_4\wedge e_5\otimes e_4' - \tfrac{8}{33}e_1\wedge e_2\wedge e_8\otimes e_3' - \\
& - \tfrac{8}{11}e_1\wedge e_4\wedge e_6\otimes e_3' - \tfrac{2}{33}e_2\wedge e_3\wedge e_6\otimes e_3' + \tfrac{62}{33}e_2\wedge e_4\wedge e_5\otimes e_3' + \\
& + \tfrac{2}{55}e_1\wedge e_2\wedge e_7\otimes e_2' - \tfrac{2}{11}e_1\wedge e_4\wedge e_5\otimes e_2' - \tfrac{2}{165}e_2\wedge e_3\wedge e_5\otimes e_2' - \\
& - \tfrac{42}{11}e_1\wedge e_2\wedge e_6\otimes e_1' + \tfrac{248}{33}e_1\wedge e_3\wedge e_5\otimes e_1' - \tfrac{144}{11}e_2\wedge e_3\wedge e_4\otimes e_1' .
\end{aligned}
$$

Здесь e_i' - базис в пространстве L_1', двойственный к базису e_i. Как показывает вычисление, значение коцикла $\langle\bar{\gamma},\bar{\gamma}\rangle$ на этом цикле равно $-172412/11 \neq 0$.

Тот факт, что $\langle\beta,\gamma\rangle \neq 0$, можно доказать аналогичным образом; мы, однако, приведем ниже другое его доказательство.

Включение $\langle\alpha,\alpha,\ldots,\alpha\rangle \ni 0$ вытекает, в силу результатов п.6 главы I, из устанавливаемого ниже факта, что существует деформация с инфинитезимальной деформацией α.

Наиболее трудоемко доказательство того, что $\langle\beta,\beta,\beta\rangle \not\ni 0$.

Это неравенство эквивалентно тому, что не существует алгебры Ли над $\Bbbk[t]/t^4$ с базисом e_i, в котором коммутатор задается формулой $[e_i,e_j]=(j-i)e_{i+j}+t\bar{\beta}(e_i,e_j)e_{i+j-3}+t^2\varkappa_1(e_i,e_j)e_{i+j-6}+$ $+t^3\varkappa_2(e_i,e_j)e_{i+j-9}$.

Числа $\varkappa_1(e_i,e_j)$, $\varkappa_2(e_i,e_j)$ определяются шаг за шагом ($i+j=1,2,\ldots$) из системы уравнений, вытекающей из тождества Якоби. При $i+j=12$ мы придем к противоречию. Выпишем все коммутаторы до II шага.

$[e_1,e_i]=(i-1)e_{i+1}$

(коцепи $\varkappa_1,\varkappa_2$ можно выбрать так, чтобы $\varkappa_1(e_1,e_j)=\varkappa_2(e_1,e_j)=0$);

$[e_2,e_3]=e_5+8e_2$; $[e_2,e_4]=2e_6+4e_3$;

$[e_2,e_5]=3e_7+6e_4+ce_1$, $[e_3,e_4]=e_7-10e_4-3ce_1$

(на этом шагу появляется константа c , которая будет вычислена далее);

$[e_2,e_6]=4e_8+7e_5$, $[e_3,e_5]=2e_8-10e_5$;

$[e_2,e_7]=5e_9+8e_6+\frac{24-c}{7}e_3$, $[e_3,e_6]=3e_9-12e_6-\frac{5}{7}(24-c)e_3$,

$[e_4,e_5]=e_9+4e_6+\frac{10}{7}(24-c)e_3$;

$[e_2,e_8]=6e_{10}+9e_7+\frac{24-c}{7}e_4+d_1e_1$,

$[e_3,e_7]=4e_{10}-14e_7-\frac{4}{7}(24-c)e_4+d_2e_1$,

$[e_4,e_6]=2e_{10}+5e_7+\frac{5}{7}(24-c)e_4+d_3e_1$

(на этом шагу появляются еще три константы, и из тождества Якоби следует, что $d_1=d_2=d_3=0$).

На следующем шагу определяется c и оказывается, что $c=4$.

$[e_2,e_9]=7e_{11}+10e_8+{}^{65}/_{21}\,e_5+{}^{400}/_{231}\,e_2$,

$[e_3,e_8]=5e_{11}-16e_8-{}^{275}/_{21}\,e_5-{}^{400}/_{33}\,e_2$,

$[e_4,e_7]=3e_{11}+6e_8+{}^{155}/_{7}\,e_5+{}^{400}/_{11}\,e_2$,

$$[e_5,e_6]=e_{11}-{}^{475}/_{21}\,e_5-{}^{2000}/_{33}\,e_2 .$$

Эти равенства определяют II-мерную алгебру Ли L. Пространство $H^2(L)$ не содержит элементов веса I2. Это имеет следующее объяснение.

Алгебра Ли $\hat{L}$ с базисом $e_1,\dots,e_{11}$ и скобкой $[e_i,e_j]=$ $=(j-i)e_{i+j}$ имеет как и L_1 класс 3-мерных когомологий веса I2 и класс 2-мерных когомологий веса I2. Алгебра L не имеет ни того, ни другого. Она фильтрована, и соответствующая присоединенная градуированная алгебра есть $\hat{L}$. Это значит, что существует спектральная последовательность с первым членом $H^*(\hat{L})$, сходящаяся к $H^*(L)$. В этой спектральной последовательности дифференциал от 2-мерного класса веса I2 есть 3-мерный класс веса I2.

Остается проверить, что $\langle\beta,\gamma\rangle\neq 0$. Равенство $\langle\beta,\gamma\rangle=0$ означало бы, что у алгебры L_1 существует деформация над $\operatorname{spec} \Bbbk[t_1,t_2]/(t_1^2,t_2^2)$ такая, что у продеформированной алгебры скобка имеет вид $[e_i,e_j]=$

$$=(j-i)e_{i+j}+\bar{\beta}(e_i,e_j)e_{i+j-3}+\bar{\gamma}(e_i,e_j)e_{i+j-4}+\varkappa(e_i,e_j)e_{i+j-7} .$$

Несуществование такой алгебры доказывается прямым вычислением. А именно, определяются числа $\varkappa_{i,j}=\varkappa(e_i,e_j)$:

$\varkappa_{1,j}=0$, $\varkappa_{2,6}=\varkappa_{3,5}=0$, $\varkappa_{2,7}={}^{64}/_{7}$, $\varkappa_{3,6}=-{}^{320}/_{7}$, $\varkappa_{4,5}={}^{640}/_{7}$; $\varkappa_{2,8}={}^{32}/_{7}$, $\varkappa_{3,7}=-{}^{128}/_{7}$, $\varkappa_{4,6}={}^{160}/_{7}$; $\varkappa_{2,9}={}^{37}/_{11}$, $\varkappa_{4,7}={}^{1919}/_{77}$, $\varkappa_{3,8}=-{}^{1139}/_{77}$, $\varkappa_{5,7}=-{}^{2025}/_{77}$.

А на I2-ом шагу мы получаем для определения $\varkappa_{i,j}$ систему, не имеющую решений. Таким образом, предложение 2.2 полностью доказано.

Определим теперь три деформации структуры алгебры Ли в пространстве L_1; $[\,,\,]^1_t$, $[\,,\,]^2_t$, $[\,,\,]^3_t$.

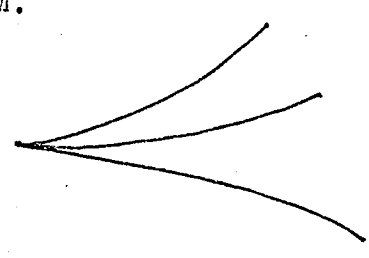
$$[e_i,e_j]^1_t = (j-i)(e_{i+j}+te_{i+j-1});$$

$$[e_i,e_j]^2_t = \begin{cases}(j-i)e_{i+j}, & \text{если } i,j>1,\\ (j-1)e_{j+1}+tje_j, & \text{если } i=1,\ j>1;\end{cases} \qquad (2.2)$$

$$[e_i,e_j]^3_t = \begin{cases}(j-i)e_{i+j}, & \text{если } i,j\neq 2,\\ (j-2)e_{j+2}+tje_j, & \text{если } i=2,\ j\neq 2.\end{cases}$$

Эти три семейства алгебр Ли реализуются как семейство подалгебр в алгебре Ли L_0. Первая деформация заключается в том, что элемент e_i деформируется в e_i+te_{i-1}, $i>0$. Иначе говоря, алгебра Ли L_1 деформируется в алгебру Ли векторных полей на прямой, обращающихся в нуль в начале координат и в точке t. Вторая деформация состоит в том, что элементы e_i, $i>1$ остаются на месте, а e_1 деформируется в e_1+te_0. Аналогично, при третьей деформации $e_2 \longmapsto e_2+te_0$, а остальные элементы остаются на месте. В этом пункте мы покажем, что других деформаций не бывает.

Из предложения 2.2 и результатов главы I (см.п.п.5,6) вытекает, что касательный конус к базе версальной деформации алгебры L_1 есть трехкратная прямая, порожденная вектором α. Версальная деформация, стало быть, состоит из трех кривых, касающихся вектора α. Эти три кривые отвечают трем построенным семействам алгебр Ли. База версальной деформации алгебры L_1 выглядит следующим образом:



Из этого вытекает:

<u>Теорема 2.3</u>. Всякая деформация структуры алгебры Ли в пространстве L_1 получается заменой переменной из одного из трех семейств $[\ ,\ ]^1_t$, $[\ ,\ ]^2_t$, $[\ ,\ ]^3_t$ (см. формулы (2.2)).

Доказательство. Достаточно проверить, что построенные три семейства нетривиальны и попарно не изоморфны. В действительности алгебры Ли с коммутаторами $[\ ,\ ]^i_{t'}$, $[\ ,\ ]^j_{t''}$, $i\neq j$, $t', t''\neq 0$ не изоморфны между собой и не изоморфны L_1. (Заметим, что алгебры со скобками $[\ ,\ ]^i_{t'}$, $[\ ,\ ]^i_{t''}$ изоморфны при $t', t''\neq 0$). Пусть $L_1(i)$ – алгебра из i-го семейства. Во-первых, $L_1(i)\neq L_1$, поскольку L_1 – нильпотентная алгебра, а $L_1(i)$ при любом i – разрешимая алгебра. Далее максимальная нильпотентная подалгебра в $L_1(1)$ имеет коразмерность два, а в $L_1(2)$ и $L_1(3)$ – единица. Наконец, алгебра $[L_1(3), L_1(3)]$ имеет две образующие, а $[L_1(2), L_1(2)]$ – три. Таким образом алгебры $L_1(1), L_1(2), L_1(3)$ не изоморфны между собой и не изоморфны L_1. Теорема доказана.

Замечания.

I. Из теоремы следует, что все нетривиальные деформации алгебры L_1 нарушают градуировку. В классе градуированных алгебр Ли алгебра L_1 нетривиальных деформаций не имеет.

2. Изучим изменение градуировки при деформациях L_1 подробнее. Пусть L – алгебра Ли, лежащая в одном из трех семейств. Выберем в L следующий специальный базис: $\{\bar e_1, \bar e_2, \dots\}$, $\bar e_1 = e_1$, $\bar e_2 = e_2+\alpha e_1$. Элементы $\bar e_3, \bar e_4, \dots$ определим так, чтобы выполнялось равенство $[\bar e_1, \bar e_i]=(i-1)\bar e_{i+1}$. В новом базисе скобка записывается так:

$$[\bar e_i, \bar e_j]=(j-i)\bar e_{i+j}+\omega_1(i,j)\bar e_{i+j-1}+\omega_2(i,j)\bar e_{i+j-2}+\dots .$$

Здесь ω_1 –2-коцикл алгебры L_1 с коэффициентами в L_1 веса -I, такая что $\omega_1(e_1, e_j)=0$. Такой коцикл представляется как дифференциал $\omega = d\nu$. Нетрудно видеть, что $\nu(e_i)=0$, $i\neq 2$ и $\nu(e_2)$ пропорционально e_1. Это означает, что параметр α можно подобрать так, чтобы $\omega_1=0$. Базис в алгебре L, для которого $\omega_1=0$ назовем каноническим.

Заметим теперь, что ω_2, ω_3 - коциклы алгебры L_1 и что $d\omega_4=[\omega_1, \omega_1]$. Коциклы ω_2, ω_3 пропорциональны коциклам, выписанным выше (2.I). Выберем в трех семействах три алгебры L^1, L^2, L^3 так, чтобы коциклы $\omega_2=\omega_2(L^i)$ в точности бы совпали с первым коциклом в формулах (2.I). Для первого и третьего семейств $\omega_3=0$, а для второго нет. Далее

$$d(\omega_4(L^2)-\omega_4(L^1))=0 \quad \text{и} \quad d(\omega_4(L^3)-\omega_4(L^1))=0 .$$

Коциклы $\bar{u}_1=\omega_4(L^2)-\omega_4(L^1)$ и $\bar{u}_2=\omega_4(L^3)-\omega_4(L^1)$ представляют нетривиальные классы когомологий веса -4 из пространства $H^2(L_1;L_1)$. Эти коциклы пропорциональны третьему коциклу из формул (2.I). Следовательно, отношение этих коциклов с коэффициентами μ_1 и μ_2 соответственно, $\mu=\mu_1/\mu_2$ - число, которое легко вычисляется.

Для того, чтобы вычислить μ, найдем $[\bar{e}_2, \bar{e}_3]$ для трех алгебр L^1, L^2, L^3. Получаются следующие три выражения:

I. $\bar{e}_5+\bar{e}_3$.

2. $\bar{e}_5+\bar{e}_3+{}^{54}/_{169}\,\bar{e}_1+\tau e_2$ (точное значение τ для вычисления μ не нужно).

3. $\bar{e}_5+\bar{e}_3+{}^{1}/_{4}\,\bar{e}_1$.

Это означает, что $\mu={}^{216}/_{169}$.

Число μ является одной из числовых характеристик версальной деформации алгебры L_1. Было бы интересно связать это число с другими характеристиками деформации.

ГЛАВА III

ДЕФОРМАЦИИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АФФИННЫХ АЛГЕБР ЛИ

§ I. Определения и формулировки.

I. На протяжении всей главы предполагается фиксированной квадратная целочисленная матрица $A=\|a_{ij}\|$ порядка n, в которой $a_{11}=\ldots=a_{nn}=2$ и $a_{ij}\leq 0$ при $i\neq j$. Мы предполагаем также, что матрица A симметризуема, т.е. что существуют такие положительные числа $\varrho_1,\ldots,\varrho_n$, что матрица $\|\varrho_i a_{ij}\|$ симметрична. В дальнейшем через $\varrho_1,\ldots,\varrho_n$ мы обозначим наименьшие целые положительные числа с этим свойством. Алгебра Каца-Муди $\mathfrak{g}^A$ с матрицей Картана A определяется как комплексная алгебра Ли с образующими $e_1,\ldots,e_n, f_1,\ldots,f_n, h_1,\ldots,h_n$ и соотношениями

$$[e_i,f_j]=\delta_{ij}h_i\,,\quad [h_i,e_j]=a_{ij}e_j\,,\quad \underbrace{[e_i,[e_i,\ldots,[e_i}_{-a_{ij}+1},e_j]\ldots]]=0 \quad (i\neq j)$$

$$[h_i,h_j]=0\,,\quad [h_i,f_j]=-a_{ij}f_j\,,\quad \underbrace{[f_i,[f_i,\ldots,[f_i}_{-a_{ij}+1},f_j]\ldots]]=0 \quad (i\neq j)$$

В алгебре $\mathfrak{g}^A$ определяется (мульти-)градуировка:

$$\deg h=(\underbrace{0,\ldots,0}_{n}),\ \deg e_i=(\underbrace{0,\ldots,0,\overset{(i)}{1},0,\ldots,0}_{n}),\ \deg f_i=(\underbrace{0,\ldots,0,\overset{(i)}{-1},0,\ldots,0}_{n}).$$

Число n называется рангом алгебры $\mathfrak{g}^A$.

Мы считаем, что матрица A неприводима, т.е. не приводится перестановкой строк и столбцов к блочно-диагональному виду с нетривиальными блоками (если матрица A приводима, то алгебра $\mathfrak{g}^A$ распадается в сумму двух алгебр Каца-Муди меньшего ранга).

Группа Вейля $W=W^A$ алгебры $\mathfrak{g}^A$ определяется как подгруппа группы $GL(n, \mathbb{Z})$, порожденная матрицами $\sigma_i = E - A_i$, где E – единичная матрица, а A_i – матрица, у которой i-я строка совпадает с i-й строкой матрицы A, а остальные строки тривиальны. (Удобно считать, что элементы группы W являются преобразованиями "решетки весов" $\mathbb{Z}^n$, которой градуирована алгебра $\mathfrak{g}^A$).

Об алгебрах $\mathfrak{g}^A$ известны следующие общие факты (см. [9], [52], [35], и т.д.).

(i) Если матрица A невырождена, то алгебра $\mathfrak{g}^A$ проста. Если $\operatorname{rk} A = n - r$ $(r > 0)$, то $\mathfrak{g}^A$ имеет r-мерный центр $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{g}^A_{(0,\dots,0)}$, и алгебра $\mathfrak{g}^A/\mathfrak{Z}$ не имеет градуированных идеалов (т.е. таких идеалов I, что $I = \oplus_{m_1,\dots,m_n} I \cap \mathfrak{g}^A_{(m_1,\dots,m_n)}$).

(ii) $\mathfrak{g}^A = \mathfrak{n}_+(A) \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-(A)$, где $\mathfrak{n}_+(A)$ и $\mathfrak{n}_-(A)$ подалгебры алгебры $\mathfrak{g}^A$, порожденные, соответственно $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$, а $\mathfrak{h}$ – (коммутативная) подалгебра, порожденная $h_1, \dots, h_n$. В частности $\mathfrak{g}^A_{(0,\dots,0)} = \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}^A_{(m_1,\dots,m_n)} = 0$, если среди чисел $m_1, \dots, m_n$ есть положительные и отрицательные.

(iii) $\dim \mathfrak{h} = n$.

Алгебра $\mathfrak{h}$ называется картановской подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}^A$.

(iv) Определяющую систему соотношений для образующих $e_1, \dots, e_n$ алгебры $\mathfrak{n}_+(A)$ составляют соотношения

$$[\underbrace{e_i, [e_i, \dots, [e_i}_{-a_{ij}+1}, e_j] \dots]] = 0$$

и подобное верно для алгебры $\mathfrak{n}_-(A)$.

Алгебры Каца-Муди естественно разделить на три группы: алгебры, у которых матрица $\varrho A = \| \varrho_i a_{ij} \|$ положительно определена;

алгебры у которых эта матрица неотрицательна, полуопределена и имеет ранг $n-1$, и остальные алгебры. Проще всего устроены алгебры первой группы.

(v) Класс алгебр $\mathfrak{g}^A$ с положительно определенными матрицами ϱA совпадает с классом простых конечномерных комплексных алгебр Ли.

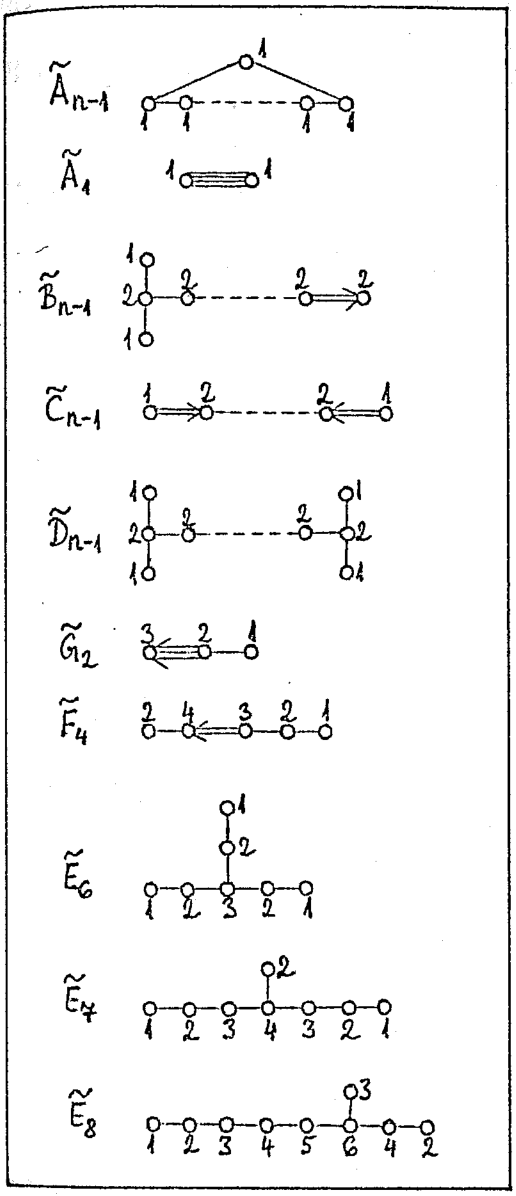
При этом разложение $\mathfrak{g}^A = \mathfrak{n}_+(A) \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-(A)$ совпадает с классическим разложением Картана и пространства $\mathfrak{g}^A_{(m_1,\dots,m_n)}$ — с корневыми подпространствами (см. [I8]). Таким образом, элементы "решетки весов" могут рассматриваться в этом случае как функциоли на картановской подалгебре $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}^A$; при этом отождествлении группа Вейля W^A превращается в классическую группу Вейля.

Матрицы Картана конечномерных простых алгебр Ли описаны в книге Бурбаки [3] . Эти матрицы получаются из матриц Грама систем простых корней (из диаграмм Дынкина) в результате умножения строк на такие числа, чтобы диагональные элементы сделались равными 2.

Об алгебрах третьей группы известно мало.

(vi) Если матрица A имеет отрицательные собственные значения, или имеет ранг $\leq n-2$, то размерность пространства $\oplus_{m_1+\dots+m_n=m} \mathfrak{g}^A_{(m_1,\dots,m_n)}$ имеет по m экспоненциальный рост.

В настоящей главе речь пойдет исключительно об алгебрах второй группы. Неприводимые матрицы A, отвечающие алгебрам $\mathfrak{g}^A$ этой группы перечисляются в следующих двух таблицах:



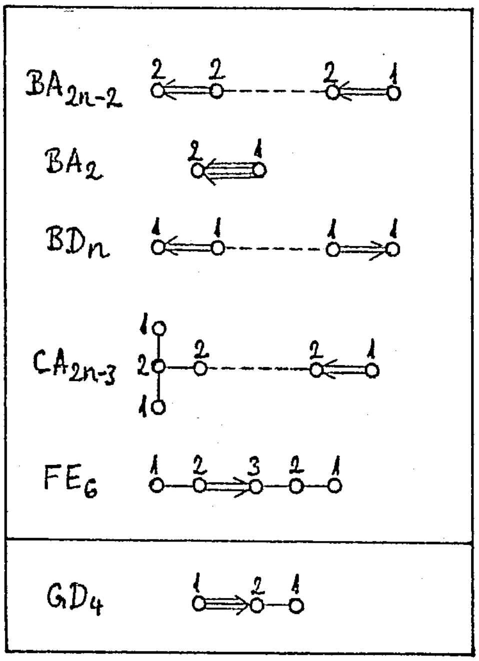


Таблица I

Таблица 2

Кружки изображенных в этих таблицах диаграмм отвечают строкам матрицы А. Кружки, отвечающие i-й и j-й строке соединены $a_{ij}a_{ji}$ линиями; стрелка, идущая из j-го кружка в i-й означает, что $|a_{ij}|>|a_{ji}|$, отсутствие стрелки – что $a_{ij}=a_{ji}$. Числовые отметки в таблицах I, 2 являются коэффициентами линейной зависимости между столбцами матрицы А. Зафиксируем для них обозначение $\omega_1, \dots, \omega_n$.

Диаграмма $\tilde{A}$ из таблицы I есть не что иное как расширенная диаграмма Дынкина А. Алгебры $\mathfrak{g}^{\tilde{A}}$ также оказываются тесно связанными с алгебрами $\mathfrak{g}^{A}$.

(vii) Пусть А – положительно определенная матрица Картана. Тогда $\mathfrak{g}^{\tilde{A}}$ есть центральное расширение алгебры токов $\mathfrak{g}^{A}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$.

При этом канонические образующие $e_1,\dots,e_n$ алгебры $\mathfrak{g}^{\tilde{A}}$ соответствуют произведениям $e_1\otimes 1,\dots,e_{n-1}\otimes 1, f\otimes t$, где $e_1,\dots,e_{n-1}$ – канонические образующие алгебры $\mathfrak{g}^{A}$, а f – корневой вектор алгебры $\mathfrak{g}^{A}$, отвечающий отрицательному корню наибольшей длины; кроме того, при $(m_1,\dots,m_n)\neq(0,\dots,0)$

$$\mathfrak{g}^{\tilde{A}}_{(m_1,\dots,m_n)}=\mathfrak{g}^{A}_{(m_1-m_n\alpha_1,\dots,m_{n-1}-m_n\alpha_{n-1})}\otimes t^{m_n},$$

где $(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$ – вес элемента f.

Заметим еще, что $n_+(\tilde{A})=(n_+(A)\otimes 1)\oplus(\oplus_{m>0}(\mathfrak{g}^{A}\otimes t^{m}))$, и подобное верно для $n_-(\tilde{A})$.

Алгебры, отвечающие матрицам из таблицы 2 определяются при помощи внешних автоморфизмов конечного порядка конечномерных простых алгебр. Именно, если $\varphi:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ – такой автоморфизм и ℓ – его порядок, то мы определяем алгебру $\mathfrak{g}_\varphi$ как подалгебру $\oplus_{\lambda=-\infty}^{\infty}\mathfrak{g}(\lambda)\otimes t^{\lambda}$ алгебры $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$, где $\mathfrak{g}(\lambda)$ – корневое подпространство автоморфизма φ, отвечающее собственному значению $e^{2\pi i\lambda/\ell}$.

(viii) Алгебры $\mathfrak{g}^{A}$, отвечающие матрицам из таблицы 2 являются центральными расширениями алгебры вида $\mathfrak{g}_\varphi$. Именно, случаи BA_{2n-2}, CA_{2n-3} отвечают автоморфизмам порядка 2 алгебр $\mathfrak{g}^{A_m}$ (минус транспонирование); случаи BD_n, FE_6 – автоморфизмам порядка 2 алгебр $\mathfrak{g}^{D_n}$, $\mathfrak{g}^{E_6}$; случай GD_4 – автоморфизму порядка 3 алгебры $\mathfrak{g}^{D_4}$.

Гомологии алгебр $n_+(A)$ с тривиальными коэффициентами известны (см. [36]). Напомним соответствующие формулировки.

Положим

$$Q_A(x_1,\dots,x_n) = -\frac{1}{2}\sum \rho_i a_{ij} x_i x_j + \sum \rho_i x_i .$$

(ix) Если $Q_A(m_1,\dots,m_n) \neq 0$, то

$$H_k^{(m_1,\dots,m_n)}(\mathfrak{n}_+(A)) = 0$$

при любом k . Если $Q_A(m_1,\dots,m_n) = 0$, то существует единственное $k(m_1,\dots,m_n)$, такое, что

$$H_k^{(m_1,\dots,m_n)}(\mathfrak{n}_+(A)) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{при } k = k(m_1,\dots,m_n), \\ 0 & \text{при } k \neq k(m_1,\dots,m_n). \end{cases}$$

Для практического вычисления чисел $k(m_1,\dots,m_n)$ удобно пользоваться преобразованиями $s_i : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$, определяемыми формулами

$$s_i(m) = \sigma_i(m) + (0,\dots,0,\overset{(i)}{\rho_i},0,\dots,0) .$$

(Преобразования s_i тоже определяют действие группы W в $\mathbb{Z}^n$). Легко показать, что $Q_A \circ s_i = Q_A$ и что любой набор $(m_1,\dots,m_n)$ с $Q_A(m_1,\dots,m_n) = 0$ можно получить из набора $(0,\dots,0)$ конечным числом преобразований s_i . Наименьшее такое число и есть $k(m_1,\dots,m_n)$.

В частности,

$$H_0(\mathfrak{n}_+(A)) = H_0^{(0,\dots,0)}(\mathfrak{n}_+(A)) = \mathbb{C} ,$$

$$H_1(\mathfrak{n}_+(A)) = H_1^{(1,0,\dots,0)}(\mathfrak{n}_+(A)) \oplus \dots \oplus H_1^{(0,\dots,0,1)}(\mathfrak{n}_+(A)) = \mathbb{C}^n .$$

2. Пусть А - матрица Картана из таблиц I,2. Основной результат этой главы состоит в вычислении одномерных и двумерных когомологий алгебры $\mathfrak{n}_+(A)$ с коэффициентами в присоединенном представлении. Напомним, что вычисления одномерных когомологий равносильно

классификации внешних дифференцирований, и результат об одномерных когомологиях мы формулируем здесь на этом языке. Вычисления двумерных когомологий позволит нам расклассифицировать деформации рассматриваемых алгебр.

В этом пункте мы ограничиваемся формулировками. Доказательства содержатся в §§ 2,3. В § 2 мы приводим доказательство, основанное на переборе алгебр из наших таблиц. Поскольку рассуждения, в основном, однотипны, мы приведем все детали в нескольких характерных случаях. В § 3 излагается другое, не опирающееся на классификацию, доказательство для алгебр токов (т.е.алгебр из таблицы I).

<u>Теорема 3.I</u>. Базис в пространстве внешних дифференцирований алгебры $n_+(A)$ составляют следующие дифференцирования:

$$\bar{h}_i : g \longmapsto [h_i, g], \quad i=1,\dots,n-1;$$

$$\tau_i : t^{il+1}\frac{d}{dt}, \quad i=0,1,2,\dots .$$

Здесь l и t имеют тот же смысл, что в утверждениях (vii), (viii) п.I.

Прежде чем формулировать дальнейшие результаты, опишем некоторые конкретные деформации алгебры $n_+(A)$.

I°. Пусть $\alpha \in H^1(n_+(A); n_+(A))$, $\beta \in H^1(n_+(A))$. Элементу α отвечает расширение

$$0 \longrightarrow n_+(A) \longrightarrow \tilde{n}_+(A) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0, \qquad (3.I)$$

элементу β - функционал $\varphi : n_+(A) \longrightarrow \mathbb{C}$. Для $t \in \mathbb{C}$ обозначим через η_t вложение $n_+(A) \longrightarrow \tilde{n}_+(A) \cong n_+(A) \oplus \mathbb{C}$, определяемое формулой $\eta_t(g) = (g, t\varphi(g))$. (Заметим, что элементы $H^1(n_+(A); n_+(A))$ интерпретируются не только как внешние дифференцирования, а также как расширения вида (3.I).) Как показывает прямая проверка, $\eta_t(n_+(A))$ есть подалгебра алгебры $\tilde{n}_+(A)$, и так как эта подалгебра как линейное пространство канонически изоморфна $\mathfrak{n}_+(A)$, а при $t=0$ этот изоморфизм согласован с операцией, мы получаем деформацию алгебры $\mathfrak{n}_+(A)$. Соответствующая инфинитезимальная деформация есть, очевидно, не что иное как произведение

$$\alpha\beta \in H^2(\mathfrak{n}_+(A); \mathfrak{n}_+(A)).$$

2^0. Пусть $1 \le i \le n$. Алгебра $\mathfrak{n}_+(A)$ деформируется в пределах алгебры $\mathfrak{g}^A$. Продеформированная алгебра порождается пространствами $\mathfrak{g}^A_{(m_1,\dots,m_n)}$ с $(m_1,\dots,m_n) \ne \ne (0,\dots,0,\overset{(i)}{1},0,\dots,0)$ и вектором $e_i + tf_i$, где t – параметр. (неформально говоря, e_i деформируется в e_i+tf_i, а остальные аддитивние образующие алгебры $\mathfrak{n}_+(A)$ остаются на месте).

Число деформаций этого типа равно рангу алгебры $\mathfrak{g}^A$.

3^0. Пусть $1 \le i, j \le n$, $a_{ij} = -1$ и если $a_{ij} = a_{ji}$, то $i<j$. Алгебра $\mathfrak{n}_+(A)$ снова деформируется в пределах алгебры $\mathfrak{g}^A$. Продеформированная алгебра порождается пространствами $\mathfrak{g}^A_{(m_1,\dots,m_n)}$ с $(m_1,\dots,m_n) \ne (0,\dots,0,\overset{(i)}{1},0,\dots,0)$, $(0,\dots,0,\overset{(i)}{1},0,\dots,0,\overset{(j)}{1},0,\dots,0)$ и векторами e_i+tf_j и $[e_i,e_j]-th_j$. (Неформально говоря, e_i и $[e_i,e_j]$ деформируются в e_i+tf_j и $[e_i,e_j]-th_j$, а остальные аддитивные образующие алгебры $\mathfrak{n}_+(A)$ остаются на месте).

Число деформаций этого типа равно числу ненулевых пар (a_{ij}, a_{ji}) с $i \ne j$; это число мы обозначаем ниже через p.

Заметим, что равенство $a_{ij}=-1$ необходимо для проверки замкнутости продеформированной алгебры относительно коммутатора, и что за исключением единственного случая $\tilde{A}_1$ из двух нетривиальных недиагональных элементов матрицы Картана a_{ij}, a_{ji} хотя бы один равен -1. Эта особенность матрицы $\tilde{A}_1$ вынуждает нас рассмотреть случай алгебры $\mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1)$ отдельно (см. ниже теорему 3.3).

<u>Теорема 3.2</u>. Предположим, что $A \neq \tilde{A}_1$. Тогда

(i) Все однородные инфинитезимальные деформации алгебры $\mathfrak{n}_+(A)$ продолжаются до ее деформаций.

(ii) Пространство $H^2(\mathfrak{n}_+(A); \mathfrak{n}_+(A))$ инфинитезимальных деформаций порождаются инфинитезимальными деформациями, отвечающими деформациям типов 1^0, 2^0, 3^0. Другими словами, отображение

$$\Psi : [H^1(\mathfrak{n}_+(A); \mathfrak{n}_+(A)) \otimes H^1(\mathfrak{n}_+(A))] \oplus \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^p \longrightarrow H^2(\mathfrak{n}_+(A); \mathfrak{n}_+(A)),$$

определяемое указанными инфинитезимальными деформациями, является эпиморфизмом.

(iii) Ядро отображения Ψ содержится в

$$H^1(\mathfrak{n}_+(A); \mathfrak{n}_+(A)) \otimes H^1(\mathfrak{n}_+(A))$$

и имеет размерность n. Оно порождается элементами $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$, определяемыми следующим образом. Пусть $1 \leq i \leq n$. Выберем числа $\beta_1, \ldots, \beta_n$, такие что $\sum \beta_j a_{jk} = 1$ при $k \neq i$ (их можно найти, потому что ранг матрицы Картана, из которой выброшен один столбец, равен $n-1$). Тогда

$$\varkappa_i = (\sum \beta_j \bar{h}_j - \tau_0) \otimes \bar{e}_i ,$$

где $\bar{e}_i$ - класс коцикла из $C^1(\mathfrak{n}_+(A))$, приводящего e_i в 1 и остальные e_k в 0, а $\bar{h}_j$ и τ_0 введены в формулировке теоремы 3.1.

Осталось рассмотреть случай $A = \tilde{A}_1$. Матрица Картана этой алгебры есть $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, и это исключает возможность применения к ней конструкции 3^0. К тому же для $\tilde{A}_1$ неверно, что все ее инфинитезимальные деформации продолжаются до деформаций.

Теорема 3.3. (i) Инфинитезимальные деформации, отвечающие деформациям типов 1^0, 2^0 порождают в $H^2(n_+(\tilde{A}_1); n_+(\tilde{A}_1))$ подпространство коразмерности 2. Дополнительное подпространство порождается элементами соответственно из $H^2_{(-1,-2)}$ и $H^2_{(-2,-1)}$. Эти элементы не продолжаются до деформаций алгебры .

(Коциклы, представляющие эти два класса выписаны ниже в п.2 § 2).

(ii) Для ядра отображения

$$[H^1(n_+(\tilde{A}_1); n_+(\tilde{A}_1)) \otimes H^1(n_+(\tilde{A}_1))] \oplus \mathbb{C}^2 \longrightarrow H^2(n_+(\tilde{A}_1); n_+(\tilde{A}_1))$$

сохраняется описание, данное в п.(iii) теоремы 3.2 для отображения Ψ.

§ 2. Вычисление когомологий аффинных алгебр Ли в присоединенном представлении

1. Пусть $\mathfrak{g} = \oplus_{i>0} \mathfrak{g}_i$ нильпотентная градуированная алгебра Ли и $\mathcal{B} = \oplus \mathcal{B}_j$ градуированный $\mathfrak{g}$-модуль. Пространство $C_k^{(m)}(\mathfrak{g}; \mathcal{B})$ порождается "мономами", т.е. цепями вида

$$g_1 \wedge \ldots \wedge g_k \otimes b \text{ , где } g_s \in \mathfrak{g}_{i_s} \text{ , } b \in \mathcal{B}_j \text{ , } i_1 + \ldots + i_k + j = m \text{ .}$$

Обозначим через $F_p C_k^{(m)}(\mathfrak{g}; \mathcal{B})$ подпространство пространства $C_k^{(m)}(\mathfrak{g}; \mathcal{B})$ порожденное мономами с $i_1 + \ldots + i_k \leq p$. Очевидно, $\{F_p\}$ – убывающая фильтрация в $C_*^{(m)}(\mathfrak{g}; \mathcal{B})$. Спектральную последовательность, отвечающую этой фильтрации, мы называем спектральной последовательностью Фейгина-Фукса и обозначаем через $\mathcal{E}(\mathfrak{g}, \mathcal{B}, m)$. В этой спектральной последовательности $E^0_{p,q} = C^{(p)}_{p+q}(\mathfrak{g}; \mathcal{B}_{m-p})$, где $\mathcal{B}_{m-p}$ рассматривается как тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль; $d^0_{p,q}$ есть дифференциал

$$d_{p+q} : C^{(p)}_{p+q}(\mathfrak{g}; \mathcal{B}_{m-p}) \longrightarrow C^{(p)}_{p+q-1}(\mathfrak{g}; \mathcal{B}_{m-p}) \text{ ;}$$

следовательно,

$$E^1_{p,q} = H^{(p)}_{p+q}(\mathfrak{g}; \mathcal{B}_{m-p}) = H^{(p)}_{p+q}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{B}_{m-p} .$$

Для случая $\mathfrak{g} = L_1$ (см.гл.II) эта спектральная последовательность рассматривалась в статье [23] . В интересующих нас случаях алгебра $\mathfrak{g}$ обладает мультиградуировкой $\mathfrak{g} = \oplus_{(i_1,\dots,i_k)>(0,\dots,0)} \mathfrak{g}(i_1,\dots,i_k)$. В этом случае спектральная последовательность $\mathcal{E}(\mathfrak{g}, \mathcal{B}, m)$ разбивается в сумму спектральных последовательностей $\mathcal{E}(\mathfrak{g}, \mathcal{B}, m_1, \dots, m_k)$, $m_1 + \dots + m_k = m$. Начальный член последней спектральной последовательности задается формулой

$$E^1_{p,q} = \bigoplus_{p_1+\dots+p_k=p} H^{(p_1,\dots,p_k)}_{p+q}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{B}_{m_1-p_1,\dots,m_k-p_k} .$$

Мы применим описанную выше спектральную последовательность к вычислению одномерных и двумерных гомологий алгебр $n_+(A)$ с коэффициентами в коприсоединенном представлении $n_+(A)'$. (В силу стандартной двойственности, это вычисление равносильно вычислению одномерных и двумерных когомологий алгебры $n_+(A)$ с коэффициентами в присоединенном представлении). Интересующие нас матрицы Картана A - это матрицы отвечающие схемам Дынкина из таблиц I,2. Для каждой из этих матриц члены и дифференциалы спектральной последовательности $\mathcal{E}(n_+(A), n_+(A)', m)$ могут быть явно выписаны, и это приводит к вычислению указанных гомологий. Все вычисления однотипны, и мы подробно разберем случаи матриц $\tilde{A}_{n-1}$ и $\mathcal{B}A_2$.

2. Начнем с $\tilde{A}_1$. Факторалгебра алгебры $\mathfrak{g}^{\tilde{A}_1}$ по ее (одномерному) центру имеет удобное явное описание. Именно, в ней есть аддитивный базис $\varepsilon_i \ (i \in \mathbb{Z})$, в котором коммутатор задается формулой

$$[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = \alpha_{ij}\varepsilon_{i+j}, \quad \text{где} \quad \alpha_{ij} \begin{cases} = -1, 0, 1, \\ \equiv (j-i) \bmod 3. \end{cases}$$

(элементы e_1, e_2, f_1, f_2 системы образующих, указанных в § I, соответствуют базисным элементам $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_{-2}$). Биградуировка задается в этом базисе формулами

$$\deg \varepsilon_{3m} = (m, m), \quad \deg \varepsilon_{3m-1} = (m, m+1), \quad \deg \varepsilon_{3m+1} = (m, m-1).$$

Подалгебра $n_+(\tilde{A}_1)$ алгебры $\mathfrak{g}^{\tilde{A}_1}$ порождается ε_i с $i>0$.

Согласно утверждению (ix) § I при $k>0$

$$H_k(n_+(\tilde{A}_1)) = H_k^{\left(\frac{k(k-1)}{2}, \frac{k(k+1)}{2}\right)} \oplus H_k^{\left(\frac{k(k+1)}{2}, \frac{k(k-1)}{2}\right)} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

(см. рис. I)

более того, нетривиальные элементы пространств $H_k^{\left(\frac{k(k-1)}{2}, \frac{k(k+1)}{2}\right)}$, $H_k^{\left(\frac{k(k+1)}{2}, \frac{k(k-1)}{2}\right)}$ представляются циклами

$$\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{3k-2}, \quad \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_5 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{3k-1}$$

(см. [26]). Поскольку

$$\dim (n_+(\tilde{A}_1))_{(m_1, m_2)} = \begin{cases} 1, & \text{если } |m_2 - m_1| \leq 1, \ m_2 + m_1 > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

(см. рис. 2), в спектральной последовательности $\mathcal{E}(m_1, m_2) = \mathcal{E}(n_+(\tilde{A}_1), n_+(\tilde{A}_1)', m_1, m_2)$

$$\dim E_k^1 = \begin{cases} 2 & \text{при } k=1, \ m_1 = m_2 \leq 0, \\ 1 & \text{при } k-1 \leq |m_2 - m_1| \leq k+1, \ m_1 + m_2 < k^2, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

(см. рис. 3).

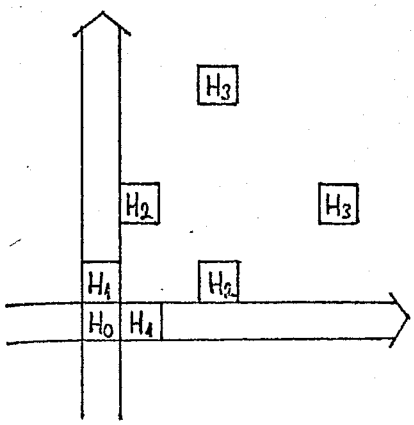
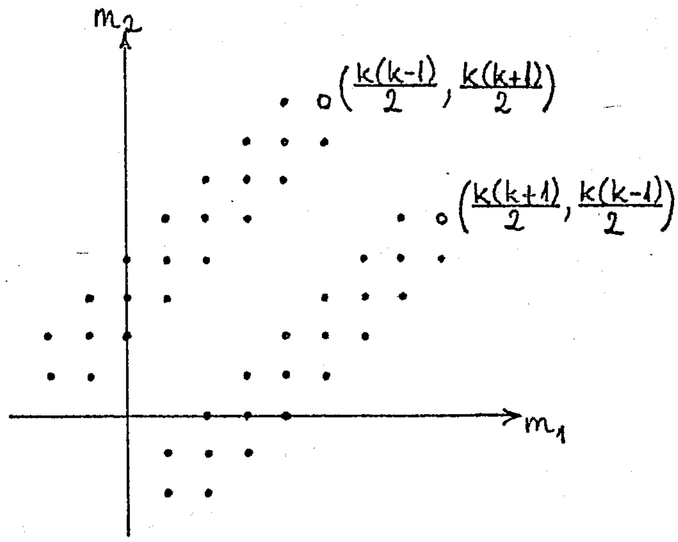


рис.I



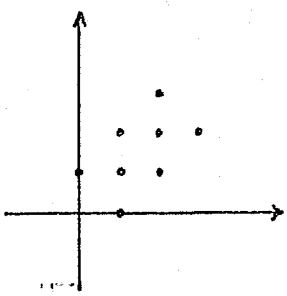


рис.2.

рис.3
Светлые точки показывают степени k -х гомологии с тривиальными коэффициентами, черные точки – степени нетривиальных пространств E^1_k .

Таким образом, член E^1 сектральной последовательности $\mathcal{E}(m_1, m_2)$ устроен так. Пусть $\ell = |m_2 - m_1|$ и $m = \min(m_1, m_2)$. Если $\ell > 0$, то размерности пространств E^1_k задаются таблицей

$k =$ ...	$\ell-2$	$\ell-1$	ℓ	$\ell+1$	$\ell+2$	...	
...	0	1	1	1	0	...	при $m \leq \frac{\ell^2-3\ell}{2}$,
...	0	0	1	1	0	...	при $\frac{\ell^2-3\ell}{2} < m < \frac{\ell^2-\ell}{2}$,
...	0	0	0	1	0	...	при $\frac{\ell^2-\ell}{2} \leq m \leq \frac{\ell^2+\ell}{2}$,
...	0	0	0	0	0	...	при $\frac{\ell^2+\ell}{2} < m$,

а если $\ell=0$, то таблицей

$k=$	0	1	2	...		
	1	2	0	...	при	$m<0$,
	0	2	0	...	при	$m=0$,
	0	0	0	...	при	$m>0$.

Лемма 3.4. Из дифференциалов d_k^1 нетривиальны только следующие:

$$d_\ell^1 : E_\ell^1 \longrightarrow E_{\ell-1}^1 \,, \quad \text{при} \quad \ell \neq 0, \ m \leqslant \frac{\ell^2-3\ell}{2} \,,$$

$$d_1^1 : E_1^1 \longrightarrow E_0^1 \,, \quad \text{при} \quad \ell=0, \ m<0 \,;$$

дифференциалы d_r^1 с $r>1$ все тривиальны.

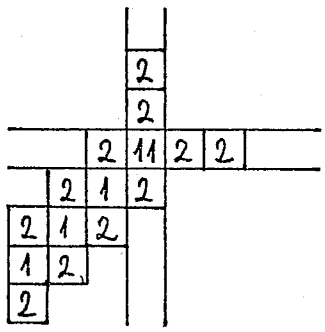


Рис.4

Из этой леммы вытекает:

Предложение 3.5.

$$H_0(\mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1); \mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1)')=0 \,,$$

$$\dim H_1^{(m_1,m_2)}(\mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1); \mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1)') = \begin{cases} 2 \text{ при } & m_1=m_2=0 \,, \\ \text{I при } & m_1=m_2<0 \,, \\ 0 \text{ в остальных случаях;} & \end{cases}$$

если $k>1$, то

$$\dim H_k^{(m_1,m_2)}(\mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1); \mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1)') = \begin{cases} \text{I при } & |m_1-m_2|=k-1 \,, \ m_1+m_2<k^2-1, \text{ и при} \\ & |m_1-m_2|=k \,, \ (k-1)^2<m_1+m_2<k^2-2 \,, \\ 0 \text{ в остальных случаях} & \end{cases}$$

(см.рис.4, на котором показаны веса одномерных и двумерных гомологий).

Лемма 3.4. доказывается прямым, хотя и не особенно коротким вычислением. Поскольку наш предмет - одномерные и двумерные гомологии, мы ограничимся доказательством части этой леммы, необходимой для доказательства предложения 3.5 при $k\leqslant 2$. Таким образом, мы должны установить нетривиальность дифференциалов:

(i) d_1^1 при $m_1 = m_2 < 0$,

(ii) d_1^1 при $|m_2 - m_1| = 1$, $\min(m_1, m_2) \leq -1$,

(iii) d_2^1 при $|m_2 - m_1| = 2$, $\min(m_1, m_2) \leq -1$,

(iv) d_3^1 при $|m_2 - m_1| = 3$, $\min(m_1, m_2) \leq 0$

и тривиальность дифференциала

(v) d_3^1 при $m_1 = 2$, $m_2 = 0$ и $m_1 = 0$, $m_2 = 2$.

Поскольку m_1 и m_2 равноправны, мы можем ограничиться случаем $m_1 \leq m_2$.

Для доказательства нетривиальности дифференциала d_k^1 в спектральной последовательности $\mathcal{E}(m_1, m_2)$ достаточно указать цепь $c \in C_k^{(m_1, m_2)}(\mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1); \mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1)')$, такую, что $c = \varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{3k-2} \otimes \varepsilon_i' + \ldots$,

$$\partial c = \mu \varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{3k-5} \otimes \varepsilon_j' + \ldots$$

где $\mu \neq 0$ и многоточие в общем случае обозначает слагаемые меньшей фильтрации. Сделаем это для случаев (i) - (iv), положив $m = -m_2$.

(i) $c = \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_{3m+1}'$; $\partial c = \varepsilon_{3m}'$,

(ii) $c = \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_{3m}'$; $\partial c = -\varepsilon_{3m-1}'$,

(iii) $c = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4 \otimes \varepsilon_{3m}' - \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3 \otimes \varepsilon_{3m-1}'$; $\partial c = 2\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_{3m-4}'$,

(iv) $c = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4 \wedge \varepsilon_7 \otimes \varepsilon_{3m}' - \frac{1}{2}\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_7 \otimes \varepsilon_{3m-1}' -$
$-\frac{1}{2}\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4 \wedge \varepsilon_6 \otimes \varepsilon_{3m-1}' + \frac{3}{2}\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4 \otimes \varepsilon_{3m-4}'$;

$$\partial c = -3\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4 \otimes \varepsilon_{3m-7}' .$$

Для доказательства тривиальности дифференциала d_k^1 достаточно указать в $C_k^{(m_1, m_2)}(\mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1); \mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1)')$ цепь с прежнего вида с $\partial c = 0$. Сделаем это для случая (v) :

(v) $$c=\varepsilon_1\wedge\varepsilon_4\wedge\varepsilon_7\otimes\varepsilon'_{10}+\tfrac{1}{2}\varepsilon_1\wedge\varepsilon_3\wedge\varepsilon_7\otimes\varepsilon'_9+$$
$$+\tfrac{1}{2}\varepsilon_1\wedge\varepsilon_4\wedge\varepsilon_6\otimes\varepsilon'_9-\tfrac{1}{2}\varepsilon_1\wedge\varepsilon_3\wedge\varepsilon_6\otimes\varepsilon'_8-$$
$$-\varepsilon_1\wedge\varepsilon_3\wedge\varepsilon_4\otimes\varepsilon'_6-\varepsilon_1\wedge\varepsilon_2\wedge\varepsilon_4\otimes\varepsilon'_5\ .$$

Теперь опишем циклы, представляющие базисы в $H_k(n_+(\tilde{A}_1); n_+(\tilde{A}_1)')$, $k=1,2$:

В $C_1^{(0,0)}$: $\varepsilon_1\otimes\varepsilon'_1$, $\varepsilon_2\otimes\varepsilon'_2$

В $C_1^{(m,m)}$, $m<0$: $\varepsilon_1\otimes\varepsilon'_{-3m+1}-\varepsilon_2\otimes\varepsilon'_{-3m+2}$

В $C_2^{(0,2)}$: $\varepsilon_1\wedge\varepsilon_4\otimes\varepsilon'_3-\varepsilon_1\wedge\varepsilon_3\otimes\varepsilon'_2$

В $C_2^{(1,2)}$: $\varepsilon_1\wedge\varepsilon_4\otimes\varepsilon'_1$

В $C_2^{(m,m+1)}$, $m\le 0$: $\varepsilon_1\wedge\varepsilon_4\otimes\varepsilon'_{-3m+4}+\varepsilon_1\wedge\varepsilon_3\otimes\varepsilon'_{-3m+3}+\varepsilon_1\wedge\varepsilon_2\otimes\varepsilon'_{-3m+2}$

Циклы в $C_2^{(2,0)}$, $C_2^{(m+1,m)}$ пишутся так же, только нужно произвести замены $\varepsilon_1\longleftrightarrow\varepsilon_2$, $\varepsilon_4\longleftrightarrow\varepsilon_5$, ...

Поскольку $\dim H^k_{(m_1,m_2)}=\dim H_k^{(-m_1,-m_2)}$, одномерные и двумерные когомологии алгебры $n_+(\tilde{A}_1)$ с коэффициентами в $n_+(\tilde{A}_1)$ полностью вычислены. Легко видеть, что полученный результат согласуется с соответствующими утверждениями теорем 3.I и 3.3.

Коциклы, представляющие базисные элементы пространств когомологий, указаны в таблице

вес	коцикл
(0,-2)	$(\varepsilon_1,\varepsilon_{3j})\longmapsto\varepsilon_{3j-1}$, $(\varepsilon_1,\varepsilon_{3j+1})\longmapsto-\varepsilon_{3j}$ при $j>0$ остальное $\longmapsto 0$
(-2,0)	$(\varepsilon_2,\varepsilon_{3j})\longmapsto\varepsilon_{3j-2}$, $(\varepsilon_2,\varepsilon_{3j+2})\longmapsto-\varepsilon_{3j}$ при $j>0$ остальное $\longmapsto 0$

вес	коцикл
$(-1,-2)$	$(\varepsilon_1,\varepsilon_4)\longmapsto 9\varepsilon_1$, $(\varepsilon_1,\varepsilon_j)\longmapsto j\varepsilon_{j-3}$ при $j\geq 5$ $(\varepsilon_3,\varepsilon_{3j})\longmapsto 2\varepsilon_{3j-1}$, $(\varepsilon_3,\varepsilon_{3j-2})\longmapsto -2\varepsilon_{3j-3}$ при $j\geq 2$ $(\varepsilon_4,\varepsilon_{3j-1})\longmapsto 5\varepsilon_{3j-1}$, $(\varepsilon_4,\varepsilon_{3j+4})\longmapsto -5\varepsilon_{3j+4}$ при $j\geq 1$ остальное $\longmapsto 0$
$(-2,-1)$	$(\varepsilon_2,\varepsilon_5)\longmapsto 9\varepsilon_2$, $(\varepsilon_2,\varepsilon_j)\longmapsto j\varepsilon_{j-3}$ при $j=4,6,7,\ldots$ $(\varepsilon_3,\varepsilon_{3j})\longmapsto \varepsilon_{3j-2}$, $(\varepsilon_3,\varepsilon_{3j+2})\longmapsto -\varepsilon_{3j}$ при $j\geq 1$ $(\varepsilon_5,\varepsilon_{3j-2})\longmapsto 4\varepsilon_{3j-2}$, $(\varepsilon_5,\varepsilon_{3j+5})\longmapsto -4\varepsilon_{3j+5}$ при $j\geq 1$ остальное $\longmapsto 0$
$(m,m-1)$ $m\geq 0$	$(\varepsilon_1,\varepsilon_j)\longmapsto j\varepsilon_{j+3m}$ при $j\neq 1$ остальное $\longmapsto 0$
$(m-1,m)$ $m\geq 0$	$(\varepsilon_2,\varepsilon_j)\longmapsto j\varepsilon_{j+3m}$ при $j\neq 1$ остальное $\longmapsto 0$

Автоматическая проверка показывает, что указанные коцепи действительно являются коциклами и что они принимают ненулевые значения на приведенных выше циклах.

Остается проверить, что инфинитизимальные деформации, определяемые двумерными коциклами весов $(0,-2)$, $(-2,0)$ и $(k+1,k)$ $(k,k+1)$ с $k\geq -1$ продолжаются до настоящих деформаций, а инфинитизимальные деформации весов $(-1,-2)$, $(-2,-1)$ не продолжаются. Но первое нам уже известно (конструкции соотвествующих деформаций приведено в п. 2 § I), а для доказательства второго достаточно заметить, что нетривиальны квадраты коциклов весов $(-1,-2)$ $(-2,-1)$; например, первый из них принимает ненулевое значение (равное 135) на цикле

$$\varepsilon_1\wedge\varepsilon_4\wedge\varepsilon_7\otimes\varepsilon_4' + \frac{1}{2}(\varepsilon_1\wedge\varepsilon_3\wedge\varepsilon_7 + \varepsilon_1\wedge\varepsilon_4\wedge\varepsilon_6)\otimes\varepsilon_3' -$$
$$-\frac{1}{2}\varepsilon_1\wedge\varepsilon_3\wedge\varepsilon_6\otimes\varepsilon_2' .$$

Доказательство предложения 3.5 закончено.

3. Теперь рассмотрим случай BA_2 . Соответствующая матрица Картана имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Факторалгебра алгебры $\mathfrak{g}^{BA_2}$ по центру также имеет явное описание (см. [50]). Именно она обладает аддитивным базисом ε_i $(i\in\mathbb{Z})$ с коммутатором $[\varepsilon_i,\varepsilon_j]=\alpha_{ij}\,\varepsilon_{i+j}$, где α_{ij} зависит только от вычетов $i,j \mod 8$, $\alpha_{ij}+\alpha_{i'j'}=0$, если $i+i'$ и $j+j'$ делятся на 8, и при $0\leqslant i,j\leqslant 7$ задается таблицей

$i \bmod 8$ \ $j \bmod 8$	I	2	3	4	5	6	7
0	I	-2	-I	0	I	2	-I
I		I	-I	3	-2	0	I
2			0	0	I	-I	
3				-3	-I		

Градуировка задается в базисе ε_i формулами

$$\deg\varepsilon_{8m}=(2m,4m), \qquad \deg\varepsilon_{8m+4}=(2m+1,4m+2),$$
$$\deg\varepsilon_{8m+1}=(2m,4m+1), \qquad \deg\varepsilon_{8m+5}=(2m+1,4m+3),$$
$$\deg\varepsilon_{8m+2}=(2m+1,4m), \qquad \deg\varepsilon_{8m+6}=(2m+1,4m+4),$$
$$\deg\varepsilon_{8m+3}=(2m+1,4m+1), \qquad \deg\varepsilon_{8m+7}=(2m+2,4m+3).$$

Подалгебра $\mathfrak{n}_+(BA_2)$ порождается ε_i с $i>0$.

Согласно утверждению (ix) из § I, при $k>0$

$$H_{2k-1}(\mathfrak{n}_+(BA_2)) = H_{2k-1}^{(\frac{3k^2-k}{2},\,3k^2-4k+1)} \oplus H_{2k-1}^{(\frac{3k^2-5k+2}{2},\,3k^2-2k)} = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\ ,$$

$$H_{2k}(\mathfrak{n}_+(BA_2)) = H_{2k}^{(\frac{3k^2+k}{2},\,3k^2-2k)} \oplus H_{2k}^{(\frac{3k^2-k}{2},\,3k^2+2k)} = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$$

(см.рис.5) и нетривиальные элементы указанных гомологий представляются циклами

$(\varepsilon_2\wedge\varepsilon_{10}\wedge\ldots\wedge\varepsilon_{8k-6})\wedge(\varepsilon_3\wedge\varepsilon_7\wedge\ldots\wedge\varepsilon_{4k-5})$,

$(\varepsilon_6\wedge\varepsilon_{14}\wedge\ldots\wedge\varepsilon_{8k-10})\wedge(\varepsilon_1\wedge\varepsilon_5\wedge\ldots\wedge\varepsilon_{4k-3})$;

$(\varepsilon_2\wedge\varepsilon_{10}\wedge\ldots\wedge\varepsilon_{8k-6})\wedge(\varepsilon_3\wedge\varepsilon_7\wedge\ldots\wedge\varepsilon_{4k-1})$,

$(\varepsilon_6\wedge\varepsilon_{14}\wedge\ldots\wedge\varepsilon_{8k-2})\wedge(\varepsilon_1\wedge\varepsilon_5\wedge\ldots\wedge\varepsilon_{4k-3})$.

Размерности пространств $\mathfrak{n}_+(BA_2)_{(m_1,m_2)}$ равны 0 и 1 ; точки (m_1,m_2) для которых эти размерности равны 1 , показаны на рис.6.

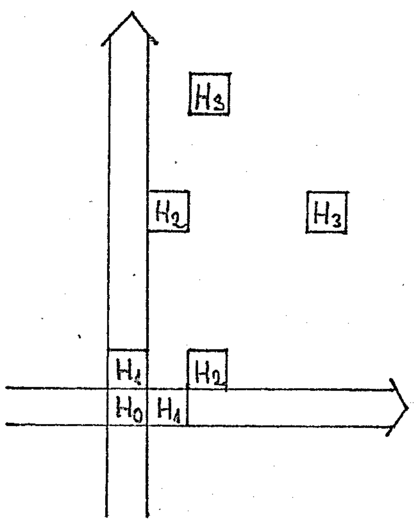


рис.5

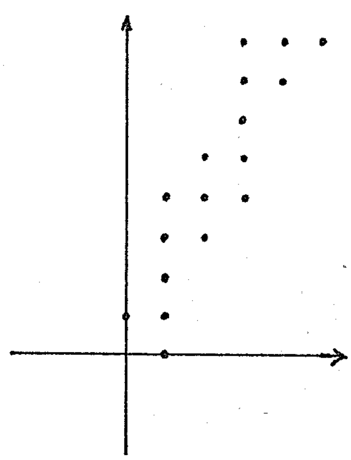


рис.6

Сказанное позволяет найти размерности пространств, составляющих начальные члены спектральных последовательностей $\mathcal{E}(m_1,m_2) = \mathcal{E}(\mathfrak{n}_+(BA_2),\ \mathfrak{n}_+(BA_2)',\ m_1,\ m_2)$. Мы ограничимся теми (m_1,m_2), при которых нетривиальны пространства $\bigoplus_{k=0}^{2} E_k^1$. Эти (m_1,m_2) показаны (оставлены светлыми) на рис.7. На этом рисунке

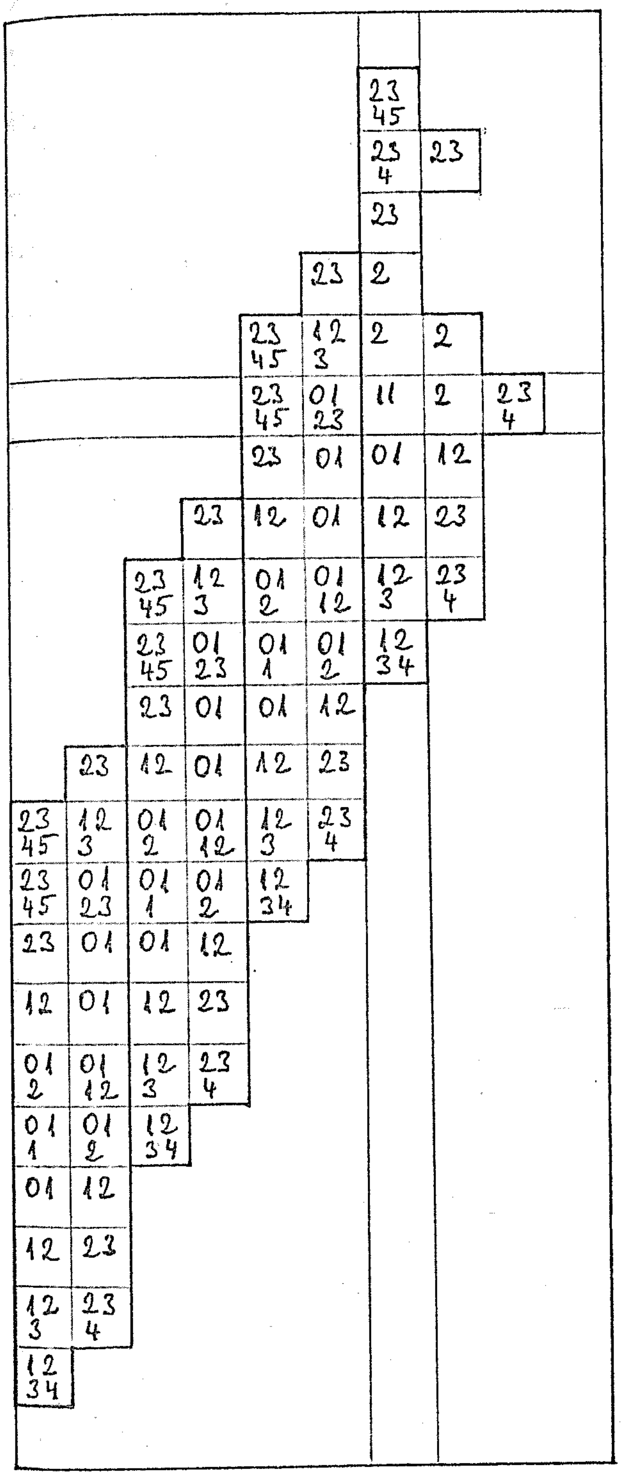

23 45
23 4
23
23
23
2
23 45
12 3
2
2
23 45
01 23
11
2
23 4
23
01
01
12
23
12
01
12
23
23 45
12 3
01 2
01 12
12 3
23 4
23 45
01 23
01 1
01 2
12 34
23
01
01
12
23
12
01
12
23
23 45
12 3
01 2
01 12
12 3
23 4
23 45
01 23
01 1
01 2
12 34
23
01
01
12
12
01
12
23
01 2
01 12
12 3
23 4
01 1
01 2
12 34
01
12
12
23
12 3
23 4
12 34

рис.7

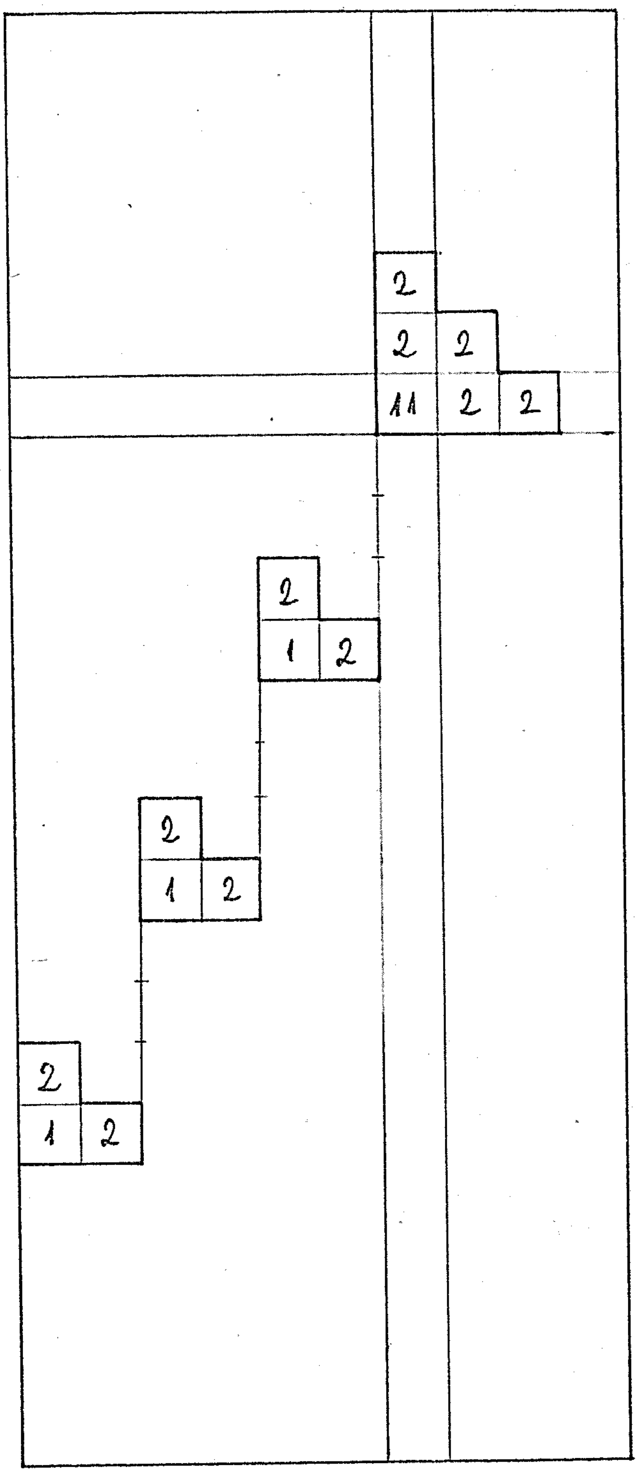

2
2
2
11
2
2
2
1
2
2
1
2
2
1
2

рис.8

в клетку, соответствующую (m_1, m_2), число k вписано столько раз, какова размерность E_k^1 (например, в спектральной последовательности $\mathcal{E}(-1, -3)$ размерности пространств E_k^1 равны 1,2,1, 0,0,...). Заметим, что часть рис.7, расположенная слева от оси ординат периодична с периодом 2 по оси абсцисс и периодом 4 по оси ординат. Действие дифференциалов в этих спектральных последовательностях вычисляется точно так же, как в аналогичных спектральных последовательностях п.2. Результат вычисления показан на рис.8: число единиц, соответственно двоек, в клетке (m_1, m_2) равно размерности пространства $H_1^{(m_1,m_2)}$, соответственно $H_2^{(m_1,m_2)}$.

Опишем циклы представляющие базисы в $H_k(\mathfrak{n}_+(\mathbb{B}A_2); \mathfrak{n}_+(\mathbb{B}A_2)'), k=1,2.$

В $C_1^{(0,0)}$: $\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1'$, $\varepsilon_2 \otimes \varepsilon_2'$

В $C_1^{(2m,4m)}$, $m<0$: $2\varepsilon_1 \otimes \varepsilon'_{-8m+1} + \varepsilon_2 \otimes \varepsilon'_{-8m+2}$

В $C_2^{(0,2)}$: $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_6 \otimes \varepsilon_5' + \frac{2}{3}\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_5 \otimes \varepsilon_4' + \frac{2}{9}\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4 \otimes \varepsilon_3' -$

$-\frac{2}{9}\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3 \otimes \varepsilon_2'$

В $C_2^{(1,1)}$: $\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 \otimes \varepsilon_2'$

В $C_2^{(2,0)}$: $\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 \otimes \varepsilon_1'$

В $C_2^{(2m,4m+1)}$, $m \le 0$: $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_6 \otimes \varepsilon'_{-8m+6} - \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_5 \otimes \varepsilon'_{-8m+5} +$

$+\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_4 \otimes \varepsilon'_{-8m+4} - \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_3 \otimes \varepsilon'_{-8m+3} + \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \otimes \varepsilon'_{-8m+2}$

В $C_2^{(2m+1,4m)}$, $m \le 0$: $\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 \otimes \varepsilon'_{-8m+3} - \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_1 \otimes \varepsilon'_{-8m+1}$.

Таким образом, нами найдены одномерные и двумерные когомологии. Легко видеть, что результат согласуется с теоремой 3.2. Коциклы, представляющие базисные элементы пространств когомологий, указаны в таблице.

вес	коциклы
$(0,-2)$	$(\varepsilon_1,\varepsilon_{8j})\longmapsto-\varepsilon_{8j-1}$, $(\varepsilon_1,\varepsilon_{8j+1})\longmapsto\varepsilon_{8j}$ $(j\geq 1)$ $(\varepsilon_1,\varepsilon_{8j+3})\longmapsto-2\varepsilon_{8j+2}$, $(\varepsilon_1,\varepsilon_{8j+4})\longmapsto 3\varepsilon_{8j+3}$ $(\varepsilon_1,\varepsilon_{8j+5})\longmapsto-\varepsilon_{8j+4}$, $(\varepsilon_1,\varepsilon_{8j+6})\longmapsto\varepsilon_{8j+5}$ $\Big\}$ $j\geq 0$ остальное $\longmapsto 0$
$(-1,-1)$	$(\varepsilon_1,\varepsilon_{8j-1})\longmapsto\varepsilon_{8j-3}$, $(\varepsilon_1,\varepsilon_{8j})\longmapsto-2\varepsilon_{8j-2}$ $(\varepsilon_1,\varepsilon_{8j+2})\longmapsto\varepsilon_{8j}$, $(\varepsilon_1,\varepsilon_{8j+3})\longmapsto-\varepsilon_{8j+1}$ $(\varepsilon_3,\varepsilon_{8j+1})\longmapsto\varepsilon_{8j+1}$ $\Big\}$ $j\geq 1$ $(\varepsilon_3,\varepsilon_{8j+2})\longmapsto-2\varepsilon_{8j+2}$, $(\varepsilon_3,\varepsilon_{8j+5})\longmapsto\varepsilon_{8j+5}$ $(\varepsilon_3,\varepsilon_{8j+6})\longmapsto 2\varepsilon_{8j+6}$, $(\varepsilon_3,\varepsilon_{8j+7})\longmapsto-\varepsilon_{8j+7}$ $\Big\}$ $j\geq 0$ $(\varepsilon_1,\varepsilon_3)\longmapsto-2\varepsilon_1$ остальное $\longmapsto 0$
$(-2,0)$	$(\varepsilon_2,\varepsilon_{8j})\longmapsto 2\varepsilon_{8j-2}$, $(\varepsilon_2,\varepsilon_{8j+2})\longmapsto-\varepsilon_{8j}$ $(j\geq 1)$ $(\varepsilon_2,\varepsilon_{8j+3})\longmapsto\varepsilon_{8j+1}$, $(\varepsilon_2,\varepsilon_{8j+7})\longmapsto-\varepsilon_{8j+5}$ $(j\geq 0)$ остальное $\longmapsto 0$
$(2m,4m-1)$ $m\geq 0$	$(\varepsilon_1,\varepsilon_j)\longmapsto j\varepsilon_{j+8m}$ при $j\neq 1$ остальное $\longmapsto 0$
$(2m-1,4m)$ $m\geq 0$	$(\varepsilon_2,\varepsilon_j)\longmapsto j\varepsilon_{j+8m}$ при $j\neq 2$ остальное $\longmapsto 0$

4. Рассмотрим теперь случай $\widetilde{A}_{n-1}$ при $n\geq 3$. Сразу оговоримся, что случай $n=3$ несколько отличается от общего случая (существенное для нас различие проявляется в устройстве трехмерных гомологий с тривиальными коэффициентами). Но окончательный ответ при $n=3$ задается той же формулой, что и в общем случае, а различия в доказательствах минимальны. Ввиду этого мы игно-

рируем в дальнейшем специфику случая $n=3$, неявно предполагая, что $n\geqslant 4$.

Матрица Картана алгебр $\mathfrak{g}^{\tilde{A}_{n-1}}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 2 & -I & 0 & \dots & 0 & -I \\ -I & 2 & -I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -I & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -I \\ -I & 0 & 0 & \dots & -I & 2 \end{pmatrix}$$

Согласно утверждению (ix) из § I

$$\dim H_*^{(m_1,\dots,m_n)}(n_+(\tilde{A}_{n-1})) = \begin{cases} I, & \text{если } P(m_1,\dots,m_n)=0 \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где

$$P(m_1,\dots,m_n)=m_1^2+\dots+m_n^2-(m_1m_2+\dots+m_{n-1}m_n+m_nm_1)-(m_1+\dots+m_n).$$

Подробнее, при $k=1,2,3$ пространство $H_k^{(m_1,\dots,m_n)}(n_+(\tilde{A}_{n-1}))$ имеет размерность I для следующих наборов $(m_1,\dots,m_n)$:

$k=0$ $\quad(0,\dots,0)$,

$k=1$ $\quad(I,0,\dots,0)$,

$k=2$ $\quad(2,I,0,\dots,0)$,

$\quad(I,\underbrace{0,\dots,0}_{>0},I,\underbrace{0,\dots,0}_{>0})$,

$k=3$ $\quad(2,2,0,\dots,0)$,

$\quad(2,I,2,0,\dots,0)$,

$\quad(3,2,I,0,\dots,0)$, $(I,3,I,0,\dots,0)$,

$\quad(2,I,\underbrace{0,\dots,0}_{>0},I,\underbrace{0,\dots,0}_{>0})$, $(I,\underbrace{0,\dots,0}_{>0},I,\underbrace{0,\dots,0}_{>0},I,\underbrace{0,\dots,0}_{>0})$, а также для наборов, получающихся из перечисленных циклическими перестановками и зеркальными отражениями; для остальных $(m_1, \ldots, m_n)$ указанные гомологии равны 0.

Приведем циклы, представляющие образующие указанных гомологий (ε_{ij} здесь и ниже обозначает матрицу, у которой на пересечении i-й строки и j-ого столбца стоит I, а в остальных местах – нули).

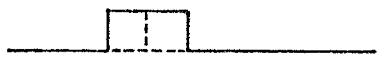
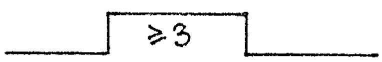
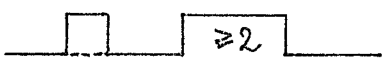
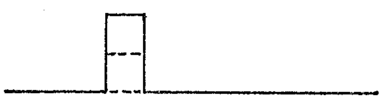
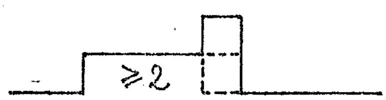
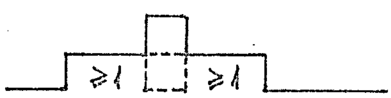
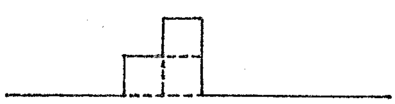
$$1,$$
$$\varepsilon_{12},$$
$$\varepsilon_{12} \wedge \varepsilon_{i,i+1},$$
$$\varepsilon_{12} \wedge \varepsilon_{13},$$
$$\varepsilon_{12} \wedge \varepsilon_{13} \wedge \varepsilon_{23},$$
$$\varepsilon_{12} \wedge \varepsilon_{14} \wedge \varepsilon_{34},$$
$$\varepsilon_{12} \wedge \varepsilon_{13} \wedge \varepsilon_{14}, \quad \varepsilon_{13} \wedge \varepsilon_{23} \wedge \varepsilon_{24},$$
$$\varepsilon_{12} \wedge \varepsilon_{13} \wedge \varepsilon_{i,i+1},$$
$$\varepsilon_{12} \wedge \varepsilon_{i,i+1} \wedge \varepsilon_{j,j+1}.$$

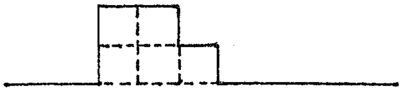
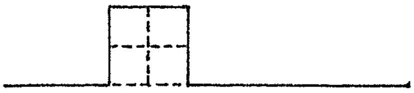
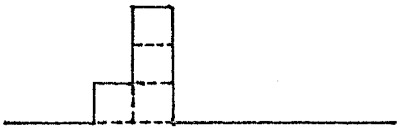
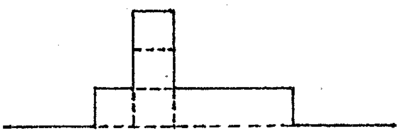
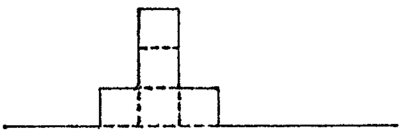
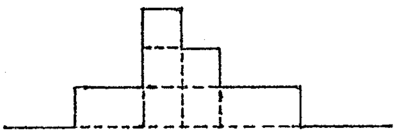
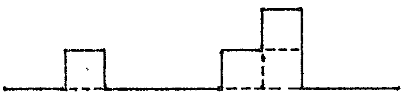
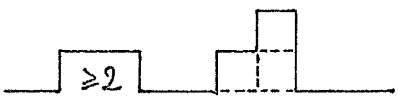
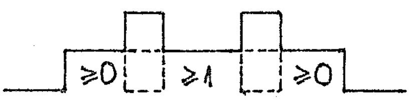
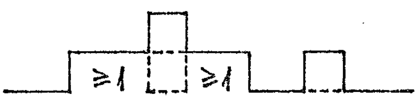
Если в этих формулах $i=n$ или $j=n$, то мы вместо $\varepsilon_{i,i+1}$ соответственно $\varepsilon_{j,j+1}$ должны написать $\varepsilon_{n,1}t$. Аналогичным образом, если при циклической перестановке индексов у какого-нибудь ε первый индекс станет больше второго, мы должны и этому ε приписать множитель t.

Сказанное позволяет найти размерности пространств, составляющих начальные члены спектральных последовательностей

$$\mathcal{E}(m_1, \ldots, m_n) = \mathcal{E}(\varkappa_+(\tilde{A}_{n-1}), \varkappa_+(\tilde{A}_{n-1})', m_1, \ldots, m_n).$$

Мы ограничимся теми $m_1, \ldots, m_n$, при которых нетривиальны пространства $\bigoplus_{k=0}^{2} E_k^1$. Размерности пространств E_k^1 при этих $(m_1, \ldots, m_n)$ показаны в таблице:

$(m_1, \dots, m_n)$	$\dim E_0^1$	$\dim E_1^1$	$\dim E_2^1$	$\dim E_3^1$	
	$n-1$	n	0	0	*
	0	n	0	0	$(m=0)$ *
	1	$n-1$	$n-1$	0	*
	0	0	$n-1$	0	$(m=0)$ *
	1	2	2	1	
	0	0	2	1	$(m=0)$ *
	1	2	1	0	
	0	2	$n-1$	$n-2$	
	0	1	2	1	
	0	1	2	1	
	0	0	2	1	$(m=0)$
	0	1	2	1	
	0	1	2	1	
	0	1	$n-1$	$n-1$	

	0	0	I	≥I
	0	0	2	≥2
	0	0	I	≥I
	0	0	I	≥I
	0	0	2	2
	0	0	I	I
	0	0	2	≥2
	0	0	I	≥I
	0	0	I	≥I
	0.	0	I	≥I

	0	0	I	$\geqslant$ I
	0	0	3	$\geqslant 3$

В этой таблице набор $(m_1, \dots, m_n)$ показан графически: сплошная ломаная линия представляет собой график ступенчатой функции со ступеньками одинаковой длины и с последовательными значениями $m_1, \dots, m_n$. Левый конец ломаной отвечает уровню $-m$ (т.е. $m_1 = -m$). В тех строках таблицы, где про m ничего не сказано, предполгается, что $m>0$. Разумеется, все наборы $(m_1, \dots, m_n)$ входящие в таблицу, можно подвергать зеркальным отражениям и циклическим перестановкам, что никак не сказывается ни на размерностях пространств E_k^1, ни на дальнейших вычислениях.

Дифференциалы спектральных последовательностей легко вычисляются, и оказывается, что гомологии размерностей I, 2 появляются только в случаях, отмеченных в таблице звездочкой. Мы ограничимся подробным описанием дифференциалов только в этих случаях.

I^0. $(m_1, \dots, m_n) = (-m, \dots, -m)$.

В этом случае E_0^1 тривиально при $m=0$, а при $m>0$ порождается классами цепей

$$\alpha_i = ((\varepsilon_{i,i} - \varepsilon_{i+1,i+1})t^m)',$$

а E_1^1 всегда порождается классами цепей

$$\beta_i = \varepsilon_{i,i+1} \otimes (\varepsilon_{i,i+1} t^m)', \quad i=1, \dots, n-1,$$

$$\beta_n = \varepsilon_{n,1} t \otimes (\varepsilon_{n,1} t^{m+1})'.$$

Очевидно, $d\beta_i = \alpha_i$ при $i=1, \dots, n-1$ и $d\beta_n = -\alpha_1 - \dots - \alpha_n$.

Таким образом,

$$\dim H_1^{(-m,\dots,-m)} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m>0, \\ n & \text{при} \quad m=0, \end{cases}$$

$$H_2^{(-m,\dots,-m)} = 0 .$$

Одномерные когомологии при $m>0$ порождаются классом цикла $\beta_1+\dots+\beta_n$, при $m=0$ – классами циклов $\beta_1,\dots,\beta_n$.

2^0. $(m_1,\dots,m_n)=(\underbrace{-m,\dots,-m}_{i-1},-m+1,-m,\dots,-m)$, $1\le i\le n$.

В этом случае E_0^1 тривиально при $m=0$, а при $m>0$ порождается классом цепи

$$\alpha=(\varepsilon_{i+1,i}\,t^m)' ;$$

E_1^1 тривиально при $m=0$, а при $m>0$ порождается классами цепей

$$\beta_j=\varepsilon_{i,i+1}\otimes((\varepsilon_{j,j}-\varepsilon_{j+1,j+1})\,t^m)' , \quad j=1,\dots,n-1 ;$$

E_2^1 всегда порождается классами цепей

$$\gamma_j=\varepsilon_{i,i+1}\wedge\varepsilon_{j,j+1}\otimes(\varepsilon_{j,j+1}t^m)' , \quad j=1,\dots,i-2,i+2,\dots,n-1$$

$$\gamma_n=\varepsilon_{i,i+1}\wedge\varepsilon_{n,1}t\otimes(\varepsilon_{n,1}t^{m+1})' ,$$

$$\gamma_{i-1}=\varepsilon_{i-1,i+1}\wedge\varepsilon_{i,i+1}\otimes(\varepsilon_{i-1,i+1}t^m)' ,$$

$$\gamma_{i+1}=\varepsilon_{i,i+1}\wedge\varepsilon_{i,i+2}\otimes(\varepsilon_{i,i+2}t^m)'$$

(γ_i – отсутствует). Дифференциал $d=d^1$ действует по формулам:

$$d\beta_j=\begin{cases} -2\alpha & \text{при} \quad j=i, \\ \alpha & \text{при} \quad j=i\pm1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} ; \end{cases}$$

$$d\gamma_j = \begin{cases} \beta_j & \text{при} \quad j \neq i, i\pm 1, \\ -\beta_1 - \ldots - \beta_n & \text{при} \quad j = n, \\ -2\beta_{i-1} - \beta_i & \text{при} \quad j = i-1, \\ \beta_i + 2\beta_{i+1} & \text{при} \quad j = i+1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$H_1^{(-m,\ldots,-m+1,\ldots,-m)} = 0,$$

$$\dim H_2^{(-m,\ldots,-m+1,\ldots,-m)} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m>0, \\ n-1 & \text{при} \quad m=0. \end{cases}$$

Двумерные гомологии при $m>0$ порождаются классом цикла

$$\gamma_1 + \ldots + \gamma_{i-2} + \tfrac{1}{2}\gamma_{i-1} + \tfrac{1}{2}\gamma_{i+1} + \gamma_{i+2} + \ldots + \gamma_n,$$

при $m=0$ – классами циклов $\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n$.

3^0. $(m_1,\ldots,m_n) = (\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1},1,1,0,\ldots,0)$, $1 \leq i \leq n-1$.

В этом случае $E_0^1 = E_1^1 = 0$, E_2^1 порождается классами цепей

$$\gamma_1 = \varepsilon_{i,i+1} \wedge \varepsilon_{i,i+2} \otimes (\varepsilon_{i,i+1})',$$

$$\gamma_2 = \varepsilon_{i,i+2} \wedge \varepsilon_{i+1,i+2} \otimes (\varepsilon_{i+1,i+2})',$$

E_3^1 порождается классом цепи

$$\delta = \varepsilon_{i,i+1} \wedge \varepsilon_{i,i+2} \wedge \varepsilon_{i+1,i+2} \otimes (\varepsilon_{i,i+2})';$$

дифференциал действует по формуле $d\delta = \gamma_1 - \gamma_2$. Таким образом,

$$H_1^{(0,\ldots,0,1,1,0,\ldots,0)} = 0,$$

$$\dim H_2^{(0,\ldots,0,1,1,0,\ldots,0)} = 1.$$

Двумерные гомологии порождаются классом цикла γ_1 (или γ_2).

Аналогичен случай $(m_1,\ldots,m_n) = (1,0,\ldots,0,1)$.

4^0. $(m_1,\ldots,m_n) = (\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1},2,0,\ldots,0)$, $1 \leq i \leq n$.

В этом случае $E_0^1 = E_1^1 = 0$, E_2^1 порождается классами цепей

$$\gamma_1 = \varepsilon_{i,i+1} \wedge \varepsilon_{i,i+2} \otimes (\varepsilon_{i+1,i+2})',$$

$$\gamma_2 = \varepsilon_{i-1,i+1} \wedge \varepsilon_{i,i+1} \otimes (\varepsilon_{i-1,i})',$$

E_3^1 порождается классом цепи

$$\delta = \varepsilon_{i-1,i+1} \wedge \varepsilon_{i,i+1} \wedge \varepsilon_{i,i+2} \otimes (\varepsilon_{i-1,i+2})' \quad ;$$

дифференциал действует по формуле $d\delta = \gamma_1 - \gamma_2$. Таким образом,

$$H_1^{(0,\dots,0,2,0,\dots,0)} = 0,$$

$$\dim H_2^{(0,\dots,0,2,0,\dots,0)} = 1.$$

Двумерные гомологии порождаются классом цикла γ_1 (или γ_2).

Как обычно, когомологии связаны с гомологиями изоморфизмом $H_k^{(m_1,\dots,m_n)} \cong H^k_{(-m_1,\dots,-m_n)}$. Как видно из списка деформации, приведенного перед формулировкой теоремы 3.2, все классы двумерных когомологий представляются деформациями алгебры $n_+(\tilde{A}_{n-1})$.

5°. Общий случай алгебры $\mathfrak{g}^A$ с матрицей Картана $A = \| a_{ij} \|$, полученной из таблиц I, 2 отличной от $\tilde{A}_1$ совершенно аналогичен предыдущему. Мы ограничиваемся формулировкой окончательного результата.

Предложение 3.6.

$$\dim H_1^{(m_1,\dots,m_n)}(n_+(A); n_+(A)') =$$

$$= \begin{cases} n & \text{при } (m_1,\dots,m_n) = (0,\dots,0) \\ 1 & \text{при } (m_1,\dots,m_n) = (-ml\omega_1,\dots,-ml\omega_n),\ m>0 \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\omega_1,\dots,\omega_n$ – коэффициенты линейной зависимости между столбцами матрицы Картана (см.таблицы I, 2), а l равно I для матриц A из таблицы I и указано в утверждение (viii) § I для матриц A

из таблицы 2;

$$\dim H_2^{(m_1,\dots,m_n)}(\mathfrak{n}_+(A);\mathfrak{n}_+(A)') =$$

$$= \begin{cases} n-1 & \text{при} \quad (m_1,\dots,m_n) = (\underbrace{0,\dots,0}_{i-1},1,0,\dots,0), \quad 1\le i\le n, \\ 1 & \text{при} \quad (m_1,\dots,m_n) = (-ml\omega_1,\dots,-ml\omega_{i-1},-ml\omega_i+1,-ml\omega_{i+1},\dots,-ml\omega_n), \\ & \qquad 1\le i\le n, \quad m>0, \\ 1 & \text{при} \quad (m_1,\dots,m_n) = (\underbrace{0,\dots,0}_{i-1},2,0,\dots,0), \quad 1\le i\le n, \\ 1 & \text{при} \quad (m_1,\dots,m_n) = (\underbrace{\underbrace{0,\dots,0}_{i-1},1,0,\dots,0}_{j-1},1,0,\dots,0) \\ & \qquad 1\le i<j\le n, \quad a_{ij}\ne 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Как и в предыдущем случае, $H_k^{(m_1,\dots,m_n)} = H^k_{(-m_1,\dots,-m_n)}$, и все двумерные когомологии представляются деформациями.

§ 3. Другой способ вычисления когомологий для алгебр токов.

В этом параграфе излагается другой способ вычисления когомологий $H^2(\mathfrak{n}_+(A);\mathfrak{n}_+(A))$ для случая, когда $\mathfrak{n}_+(A)$ максимальная нильпотентная подалгебра алгебры токов (см. утверждение (vii) § I). Поскольку это вычисление дублирует вычисление, проделанное в § 2, мы позволим себе пропустить здесь некоторые детали.

Ниже приняты следующие обозначения. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная простая комплексная алгебра Ли, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ – ее картановское разложение, $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ – соответствующая алгебра токов, то есть алгебра Ли функций $S^1 \longrightarrow \mathfrak{g}$, разлагающихся в конечные ряды Фурье, с поточечным коммутированием. Полиградуировку алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$, рассматривавшуюся в §§ I,2, мы сократим до градуировки $\hat{\mathfrak{g}} = \oplus \hat{\mathfrak{g}}_m$, где $\hat{\mathfrak{g}}_m = \mathfrak{g} \otimes t^m$. Мы полагаем далее $\hat{\mathfrak{n}}_+ = (\mathfrak{n}_+ \otimes 1) \oplus (\mathfrak{g} \otimes t) \oplus \dots$ (таким образом, $\hat{\mathfrak{n}}_+$ – сокращение принятого в §§ I,2 обозначения $\mathfrak{n}_+(A)$), $\mathfrak{g}[t]=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t]$. Алгебры $\hat{\mathfrak{n}}_+$ и $\mathfrak{g}[t]$ наследуют от $\hat{\mathfrak{g}}$ градуировку. Алгебру $\mathfrak{g}$ мы будем отождествлять с $\mathfrak{g}\otimes 1\subset\mathfrak{g}[t]\subset\hat{\mathfrak{g}}$.

В работе [48] Лежер и Лукс вычислили пространство $H^2(\mathfrak{n}_+;\mathfrak{n}_+)$. (Более общие вычисления приведены в [20]). Метод Лежера-Лукса заключается в следующем. Когомологии $H^*(\mathfrak{n}_+;V)$, где V – неприводимое конечномерное представление алгебры $\mathfrak{g}$, хорошо известны. А именно, теорема Ботта-Константа (см. [46] , [30]) утверждает, что $\dim H^i(\mathfrak{n}_+;V)$ равняется числу элементов длины i в группе Вейля алгебры $\mathfrak{g}$. В частности мы знаем $H^*(\mathfrak{n}_+;\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ – присоединенное представление. Напишем теперь точные последовательности $\mathfrak{n}_+$-модулей:

$$0\longrightarrow\mathfrak{n}_+\longrightarrow\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_+\longrightarrow 0,\qquad 0\longrightarrow\mathfrak{h}\longrightarrow\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_+\longrightarrow\mathfrak{n}_+^*\longrightarrow 0 .$$

Здесь $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_+)/\mathfrak{h}$ отождествляется с $\mathfrak{n}_+^*$ посредством формы Киллинга. Эти две последовательности позволяют свести вычисление $H^2(\mathfrak{n}_+;\mathfrak{n}_+)$ к вычислению $H^1(\mathfrak{n}_+;\mathfrak{n}_+^*)$. Это последнее пространство находится непосредственно.

В этом параграфе мы применим этот метод к алгебрам токов. В первом пункте мы доказываем аналог теоремы Ботта-Константа, а второй пункт посвящен вычислению $H^2(\hat{\mathfrak{n}}_+;\hat{\mathfrak{n}}_+)$.

I. <u>Вычисление</u> $H^*(\hat{\mathfrak{n}}_+;\hat{\mathfrak{g}})$. Теорема Ботта-Константа обобщается на аффинные алгебры Ли (т.е. на алгебры Каца-Муди из утверждения (vii), (viii) § I) по крайней мере двумя способами. Наиболее прямое обобщение состоит в том, что если V – неприводимое представление алгебры токов с доминантным старшим весом, то $\dim H^i(\hat{\mathfrak{n}}_+;V)$ равняется числу элементов длины i в группе Вейля W . Доказательство мало отличается от доказательства в конечномерном случае. Присоединенное представление, однако, не есть модуль со старшим весом.

В этом пункте мы приведем другое обобщение теоремы Ботта-Костанта, а именно мы вычислим когомологии алгебры $\hat{n}_+$ с коэффициентами в модулях, похожих на присоединенное представление - в функциях на окружности S^1 со значениями в представлении $\mathfrak{g}$.

Введем несколько обозначений. Пусть V - представление алгебры $\mathfrak{g}$, A - некоторая $\mathbb{C}$-алгебра и φ - гомоморфизм $\mathbb{C}[t,t^{-1}] \longrightarrow A$. Зададим представление алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ в пространстве $V\otimes A$ формулой:

$$(x\otimes f)(v\otimes a) = x(v)\otimes \varphi(f)a, \quad x\in\mathfrak{g},\ v\in V,\ f\in\mathbb{C}[t,t^{-1}],\ a\in A.$$

Нам будут нужны два частных случая: $A=\mathbb{C}[t,t^{-1}]$, φ - тождественное отображение, и $A=\mathbb{C}$, $\varphi(f)=f(1)$. В первом случае модуль $V\otimes A$ мы будем обозначать символом $\hat{V}$, а во втором V_1. Элементы модуля V - рациональные функции $\mathbb{C}\longrightarrow V$, регулярные вне начала координат. Отображение, ставящее в соответствие функции $\mathbb{C}\longrightarrow V$ ее значение в I дает нам гомоморфзим $\hat{V}\longrightarrow V_1$. Пространство $\hat{V}$ очевидным образом наделяется структурой модуля над алгеброй $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$. Нетрудно видеть, что умножение на элемент из $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ есть эндоморфизм $\hat{\mathfrak{g}}$-модуля $\hat{V}$. Заметим наконец, что V - градуированный $\hat{\mathfrak{g}}$-модуль, $\hat{V}_i = V\otimes t^i$.

Комплекс $C^*(\hat{n}_+;\hat{V})$ градуирован по весам: $C^*(\hat{n}_+;\hat{V}) = \prod_{m\in\mathbb{Z}} C^*_{(m)}(\hat{n}_+;\hat{V})$. Следующее утверждение очевидно.

<u>Лемма 3.7</u>. Комплекс $C_{(m)}(\hat{n}_+;\hat{V})$ при любом m изоморфен комплексу $C(\hat{n}_+;V_1)$. Искомый изоморфизм есть композиция вложения $C_{(m)}(\hat{n}_+;\hat{V})\longrightarrow C(\hat{n}_+;\hat{V})$ и отображения $C(\hat{n}_+;\hat{V})\longrightarrow C(\hat{n}_+;V_1)$, индуцированного гомоморфизмом $\hat{V}\longrightarrow V_1$.

Лемма 3.7 сводит задачу об определении $H^*(\hat{n}_+;\hat{V})$ к задаче о вычислении $H^*(\hat{n}_+;V_1)$.

Далее мы будем предполагать, что V - конечномерный неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль. Если V - присоединенное представление $\mathfrak{g}$, то $\hat{V}$ - присоединенное представление $\hat{\mathfrak{g}}$.

Займемся теперь вычислением $H^*(\hat{n}_+; V_1)$. Алгебра Ли $\hat{n}_+$ вложена в алгебру $\mathfrak{g}[t]$, V_1 естественно наделяется структурой $\mathfrak{g}[t]$-модуля, стало быть, определен сквозной гомоморфизм

$$\nu : H^*(\mathfrak{g}[t], \mathfrak{g}; V_1) \longrightarrow H^*(\mathfrak{g}[t]; V_1) \longrightarrow H^*(\hat{n}_+; V_1).$$

Пусть τ - гомоморфизм $H^*(\hat{n}_+) \otimes H^*(\mathfrak{g}[t], \mathfrak{g}; V_1) \longrightarrow H^*(\hat{n}_+; V_1)$, относящий элементу $u \otimes v$ класс когомологий $u\nu(v)$.

<u>Предложение 3.8</u>. Отображение τ есть изоморфизм.

Доказательство этого предложения, разбитое на несколько этапов, будет изложено ниже, а пока отметим, что из этого предложения и леммы 3.7 сразу следует основной результат этого пункта.

<u>Предложение 3.9</u>. $H^i(\hat{n}_+; \hat{V}) \cong \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} H^*(\hat{n}_+) \otimes H^*(\mathfrak{g}[t], \mathfrak{g}; V_1)$.

Действительно, $H^i(\hat{n}_+; \hat{V})$ есть $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$- модуль, из леммы 3.7 вытекает, что $H^i(\hat{n}_+; \hat{V})$ - свободный $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$-модуль и его ранг определеяется предложением 3.8.

<u>Следствие</u>. $H^i(\hat{n}_+; \hat{\mathfrak{g}}) \cong \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} H^{i-1}(\hat{n}_+)$ для любого неотрицательного целого i.

Это вытекает из того, что $H^i(\mathfrak{g}[t], \mathfrak{g}; \mathfrak{g}_1) = 0$ при $i \neq 1$ и одномерен при $i = 1$ (см. [49]).

Когомологии алгебры $\hat{n}_+$ нам известны (см.утверждение (ix) § I). Используя этот результат, нетрудно найти когомологии H^* (с тривиальными коэффициентами) алгебры $\mathfrak{g}t \oplus \mathfrak{g}t^2 \oplus \ldots$. Оказывается, что H^* есть $\mathfrak{g}$-модуль, каждая неприводимая компонента в разложении H^* встречается однократно и $H^1 \cong \mathfrak{g}$. Заметим теперь, что $H^i(\mathfrak{g}[t], \mathfrak{g}; V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, H^*)$.

Приступим к доказательству предложения 3.8. Введем две подалгебры в $\hat{\mathfrak{g}}$: $\bar{\mathfrak{g}} = (t-1)\mathfrak{g} \oplus (t-1)^2\mathfrak{g} \oplus \ldots$ и $\bar{n} = \hat{n}_+ \cap \bar{\mathfrak{g}}$. Пусть G - группа Ли, отвечающая алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Лемма 3.10. $H^*(\bar{n}) \cong H^*(\hat{n}_+) \otimes H^*(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes H^*(\Omega G)$.

Здесь ΩG - пространство петель группы G.

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{g}[t] = \hat{n}_+ + \bar{\mathfrak{g}}$ и $\bar{n} = \hat{n}_+ \cap \bar{\mathfrak{g}}$. Это значит, что $C^*(\bar{n}) = C^*(\hat{n}_+) \otimes_{C^*(\mathfrak{g}[t])} C^*(\bar{\mathfrak{g}})$.

Здесь тензорное произведение берется в категории дифференциальных алгебр. В такой ситуации существует спектральная последовательность (Эйленберга-Мура [53]) связывающая когомологии этих четырех дифференциальных алгебр. Эта спектральная последовательность обобщает формулу Кюннета [II] . Предельный член этой последовательности равен $H^*(\bar{n})$, а второй член равен $\mathrm{Tor}_A(H^*(\hat{n}_+), H^*(\bar{\mathfrak{g}}))$, где $A = H^*(\mathfrak{g}[t])$. Заметим, что $H^*(\mathfrak{g}[t]) \cong H^*(\mathfrak{g})$ (см. например [22]) и что $H^*(\mathfrak{g})$ на $H^*(\hat{n}_+)$ и $H^*(\bar{\mathfrak{g}})$ действует тривиально (для $H^*(\bar{\mathfrak{g}})$ это очевидно, а для $H^*(\hat{n}_+)$ вытекает из того, что композиция $H^*(\mathfrak{g}) \longrightarrow H^*(n_+) \longrightarrow H^*(\hat{n}_+)$ тривиально). Отсюда следует, что второй член спектральной последовательности изоморфен $H^*(\hat{n}_+) \otimes H^*(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes \mathrm{Tor}_A(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Отметим, что $\mathrm{Tor}_A(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong H^*(\Omega G)$. Действительно, алгебра когомологий $\mathfrak{g}$ с тривиальными коэффициентами совпадают с алгеброй когомологиям G и по теореме Хопфа является коммутативной свободной [I9] . Используя вычисление $\mathrm{Tor}_A(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ для свободной коммутативной алгебры A (предложение 7.3 из [53] ; см.также [I]) и связь между когомологиями G и ΩG , приходим к изоморфизму $\mathrm{Tor}_A(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong H^*(\Omega G)$.

Далее, можно показать, что второй член спектральной последовательности совпадает с предельным членом (например, явно указав циклы комплекса $C^*(\bar{n})$, представляющее образующие E_2, мы это сделаем в конце пункта). Доказательство леммы окончено.

Алгебра Ли $\bar{n}$ есть идеал в $\hat{n}_+$ и $\hat{n}_+/\bar{n} \cong \mathfrak{g}$. Из этого вытекает, что алгебра $\mathfrak{g}$ действует на пространстве $H^*(\bar{n})$. На $H^*(\hat{n}_+)$ и на $H^*(\Omega G)$ алгебра $\mathfrak{g}$ действует тривиально, а на $H^*(\bar{\mathfrak{g}})$ – стандартным образом ($\bar{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}t \oplus \mathfrak{g}t^2 \oplus \dots$, $\mathfrak{g}$ очевидным образом действует на $\bar{\mathfrak{g}}$, действие $\mathfrak{g}$ на $H^*(\bar{\mathfrak{g}})$ полупросто).

Теперь для завершения доказательства предложения 3.8 напишем спектральную последовательность Серра–Хохшильда, ассоциированную с алгеброй $\hat{n}_+$, ее идеалом $\bar{n}$ и модулем V_1 и сходящуюся к $H^*(\hat{n}_+; V_1)$. Идеал $\bar{n}$ на модуле V_1 действует тривиально. Второй член этой спектральной последовательности есть

$$H^*(\mathfrak{g}; H^*(\bar{n}, V_1)) \cong H^*(\mathfrak{g}; H^*(\bar{n}) \otimes V_1) \cong$$
$$\cong H^*(\mathfrak{g}; H^*(\hat{n}_+) \otimes H^*(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes H^*(\Omega G \otimes V_1) \cong$$
$$\cong H^*(\hat{n}_+) \otimes H^*(\Omega G) \otimes H^*(\mathfrak{g}; H^*(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes V_1).$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, а модуль $H^*(\mathfrak{g}) \otimes V_1$ есть прямая сумма конечномерных представлений. Это значит, что

$$H^*(\mathfrak{g}; H^*(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes V_1) \cong H^*(\mathfrak{g}) \otimes I,$$

где I – пространство инвариантов в $H^*(\bar{\mathfrak{g}}) \otimes V_1$ (см. [26]). Заметим, что $I \cong H^*(\mathfrak{g}[t], \mathfrak{g}; V_1)$. Дифференциалы в рассматриваемой последовательности устроены следующим образом. Они переводят образующие алгебры $H^*(\Omega G)$ в образующие алгебры $H^*(\mathfrak{g})$ и тривиальны на $H^*(\hat{n}_+) \otimes H^*(\mathfrak{g}[t], \mathfrak{g}; V_1)$. Из этого вытекает, что спектральная последовательность сходится к $H^*(\hat{n}_+) \otimes$ $\otimes H^*(\mathfrak{g}[t], \mathfrak{g}; V_1)$. Иначе говоря, наша спектральная последовательность есть произведение $H^*(\hat{n}_+) \otimes H^*(\mathfrak{g}[t], \mathfrak{g}; V_1)$ на спектральную последовательность серровского расслоения путей $EG \longrightarrow G$;

отсюда вытекает, что τ - изоморфизм. Предложение 3.8 доказано.

Поясним теперь выражение спектральной последовательности из доказательства леммы 3.IO. Для того, чтобы явно указать циклы комплекса $C^*(\bar{\mathfrak{n}})$, представляющие образующие члена E_2, воспользуемся теорией непрерывных когомологий. Пусть $\mathfrak{n}(0,1)$ - алгебра Ли бесконечно-дифференцируемых функций $f:[0,1]\longrightarrow\mathfrak{g}$, таких, что $f(0)\in\mathfrak{n}$, $f(1)=0$. Обозначим символом $C^*_c(0,1)$ - комплекс непрерывных в C^∞-топологии коцепей алгебры $\mathfrak{n}(0,1)$. Пусть α - образующая алгебры $H^*(\mathfrak{g})$ и $\bar{\alpha}$ - коцепь, представляющая класс α. Если $p\in[0,1]$, то обозначим символом φ_p гомоморфизм $\bar{\mathfrak{n}}\longrightarrow\mathfrak{g}$ "значение в точке p". Пусть $\alpha_p=\varphi_p^*\bar{\alpha}$, $\alpha_p\in C^*_c(0,1)$; коцепь $\bar{\alpha}$ можно выбрать таким образом, чтобы $\alpha_0=\alpha_1=0$. Пусть $p\neq 0,1$. Тогда можно определить коцепь $\frac{\partial\alpha}{\partial x}(p)$, x - координата на отрезке $[0,1]$. В работе [22] показано, что коцепь $\frac{\partial\alpha}{\partial x}(p)$ является дифференциалом $\frac{\partial\alpha}{\partial x}(p)=\delta\omega(p)$, δ - дифференциал в комплексе $C^*_c(0,1)$. Действительно, пусть K_p $(p\neq 0,1)$ - комплекс коцепей алгебры $\bar{\mathfrak{n}}$, сосредоточенных в точке p. В той же работе доказано, что когомологии комплекса K_p изоморфны $H^*(\mathfrak{g})$. На комплексе K_p действует алгебра Ли W_1 формальных векторных полей в окрестности точки p. Пространство $H^*(\mathfrak{g})$ конечномерно, а алгебра W_1 не имеет конечномерных нетривиальных представлений. Из этого вытекает, что если $\omega\in K_p$ и $\delta\nu=0$, то $\partial/\partial x\,\nu$ - есть дифференциал какого-то другого коцикла $\bar{\nu}\in K_p$.

Из этого вытекает, что

$$\alpha(p)-\alpha(q)=\delta\int_p^q\omega(x)\,dx\,.$$

В частности, $\delta\int_0^1\omega(x)\,dx=0$. Положим, что $\alpha'=\int_0^1\omega(x)\,dx$.

Коцепь α' представляет нетривиальный класс когомологий алгебры $\bar{n}$.

Алгебры Ли $\hat{n}_+$ и $\bar{g} = g(t-1) \oplus g(t-1)^2 \oplus \ldots$ градуированы. Градуированы и соответствующие коцепные комплексы. Заметим, что комплекс K_0 коцепей алгебры $n(0,1)$, сосредоточенных в 0, изоморфен комплексу $\oplus C_i^*(\hat{n}_+)$ и комплекс K_1 коцепей, сосредоточенных в I, изоморфен $\oplus C_i^*(\bar{g})$. Из этого вытекает, что когомологии комплексов K_0 и K_1 изоморфны $H^*(\hat{n}_+)$ и $H^*(\bar{g})$ соответственно.

Напомним, что по теореме Хопфа алгебра $H^*(g)$ изоморфна свободной градуированной коммутативной алгебре от образующих $\xi_1, \xi_2, \ldots, \deg \xi_k = 2k+1$. Сопоставим, пользуясь изложенной конструкцией, каждому ξ_i коцикл ξ_i'.

<u>Предложение 3.II</u>. Пространство $H^*(\bar{n})$ порождается когомологическими классами коцепей вида $u \wedge v \wedge P(\xi_1', \xi_2', \ldots)$, где $u \in K_0$, $v \in K_1$ – коциклы, отвечающие элементам $H^*(\hat{n}_+)$ и $H^*(\bar{g})$ соответственно, а P – произвольный полином от образующих $\xi_1', \xi_2', \ldots$.

Доказательство этого предложения вытекает из изложенной конструкции для непрерывных когомологий (близкое рассуждение в более трудной ситуации использовано в [I6]). В частности, мы получили явную конструкцию коцепей, представляющих образующие E_2 в доказательстве леммы 3.I0, доживающие до E_∞.

2. <u>Когомологии</u> $H^i(\hat{n}_+; \hat{n}_+)$ <u>при</u> $i=1,2$. Рассмотрим следующие две точные последовательности:

$$0 \longrightarrow \hat{n}_+ \longrightarrow \hat{g} \longrightarrow \hat{g}/\hat{n}_+ \longrightarrow 0\,; \qquad 0 \longrightarrow h \longrightarrow \hat{g}/\hat{n}_+ \longrightarrow \hat{n}_+^* \longrightarrow 0$$

($(\hat{g}/\hat{n}_+)/h$ отождествляется с $\hat{n}_+^*$ посредством формы Киллинга). Напишем соответствующие точные когомологические последовательности:

$$H^0(\hat{n}_+;\hat{g}/\hat{n}_+)\longrightarrow H^1(\hat{n}_+;\hat{n}_+)\longrightarrow H^1(\hat{n}_+;\hat{g})\longrightarrow H^1(\hat{n}_+;\hat{g}/\hat{n}_+)\to H^2(\hat{n}_+;\hat{n}_+)\to H^2(\hat{n}_+;\hat{g})$$

$$H^0(\hat{n}_+;\hat{n}_+^*)\longrightarrow H^1(\hat{n}_+;\mathfrak{h})\longrightarrow H^1(\hat{n}_+;\hat{g}/\hat{n}_+)\longrightarrow H^1(\hat{n}_+;\hat{n}_+^*)\longrightarrow H^2(\hat{n}_+;\mathfrak{h}).$$

Первая последовательность практически сразу позволяет вычислить пространство $H^1(\hat{n}_+;\hat{n}_+)$. Сформулируем результат. Мы опишем все дифференцирования алгебры Ли $\hat{n}_+$.

Каждый элемент $u\in\mathfrak{h}$ определяет когомологический класс из $H^1(\hat{n}_+;\hat{n}_+)$ содержащий следующий коцикл: $f\longrightarrow uf$, $(uf)(t)=$ $=[u,f(t)]$, где $f:\mathbb{C}\longrightarrow g$, $f(0)\in n_+$. Далее, каждому векторному полю вида $tP\partial/\partial t$, где P - многочлен от t, поставим в соответствие следующий коцикл $\hat{n}_+\longrightarrow\hat{n}_+: f(t)\longmapsto tP\partial f(t)/\partial t$, $f:\mathbb{C}\longrightarrow g$, $f(0)\in n_+$.

Из первой такой последовательности непосредственно вытекает

<u>Предложение 3.I2</u> (ср.с теоремой 3.I). Отображение, относящее элементам пространств $\mathfrak{h}$ и $t\mathbb{C}[t]\partial/\partial t$ когомологические классы построенных коциклов, дает изоморфизм $\mathfrak{h}\oplus t\mathbb{C}[t]\partial/\partial t\cong H^1(\hat{n}_+;\hat{n}_+)$. Другими словами, произвольное дифференцирование алгебры $\hat{n}$ однозначно представляется в виде $u+tP\partial/\partial t+q$, где $u\in\mathfrak{h}$, $P\in\mathbb{C}[t]$ и q - внутренне дифференцирование.

Для того, чтобы таким же образом вычислить $H^2(\hat{n}_+;\hat{n}_+)$ нам нужно знать $H^1(\hat{n}_+;\hat{g}/\hat{n}_+)$. Это пространство входит во вторую точную последовательность, для его нахождения нам нужно знать $H^1(\hat{n}_+;\hat{n}_+^*)\cong(H_1(\hat{n}_+;\hat{n}_+))^*$. Для этого мы воспользуемся следующей общей конструкцией (ср. с теоремой 4.I в [48]).

Пусть $\mathcal{L}$ - алгебра Ли, T - ее дифференцирование, которое действует на $\mathcal{L}$ полупросто и все собственные значения которого положительны. (Эти требования на T можно сильно ослабить.) Ясно, что такое дифференцирование непременно внешнее. Алгебра Ли $\hat{n}_+$, как нетрудно видеть, обладает таким дифференцированием. Например, можно взять дифференцирование $u + t\partial/\partial t$, где $u \in \mathfrak{h}$, $\langle \gamma, u \rangle \in \mathbb{R}$, $0 < \langle \gamma, u \rangle < \varepsilon$, γ - любой положительный корень, ε - достаточно маленькое положительное число (можно взять $\varepsilon < 1/2$).

Пусть $W(\mathcal{L})$ - алгебра Вейля, ассоциированная с $\mathcal{L}$. Напомним, что $W(\mathcal{L})$ - стандартный комплекс следующей дифференциальной супералгебры Ли $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_0 \cong \mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$ как $\mathcal{L}_0$- модуль есть присоединенное представление и $[x, x] = 0$, если $x \in \mathcal{L}_1$. Дифференциал d устроен так: $d(\mathcal{L}_0) = 0$, $d(\mathcal{L}_1) \longrightarrow \mathcal{L}_0$ - изоморфизм $\mathcal{L}$-модулей. Другими словами $W(\mathcal{L})$ - дифференциальная градуированная алгебра, порожденная $\mathcal{L}_1^*$ и $\mathcal{L}_2^*$, $\mathcal{L}_1^* \cong \mathcal{L}_2^* \cong \mathcal{L}^*$, где $\mathcal{L}_1^*$ имеет градуировку I, а $\mathcal{L}_2^*$ - два, $\varphi : \mathcal{L}_1^* \longrightarrow \mathcal{L}_2^*$ - изоморфизм. Дифференциал определяется формулой $\delta\beta = \omega_1 + \varphi(\beta)$, где ω_1 при каноническом изоморфизме $\Lambda^2 \mathcal{L}_1^* \cong \Lambda^2 \mathcal{L}^*$ переходит в дифференциал от β в стандартном когомологическом комплексе алгебры $\mathcal{L}$. Нетрудно показать, что комплекс $W(\mathcal{L})$ ацикличен в положительных размерностях (см. [33]).

В $W(\mathcal{L})$ зададим фильтрацию: $W_i = \oplus_{j \geq i} \Lambda^*(\mathcal{L}_1^*) \otimes S^j(\mathcal{L}_2)^*$ и рассмотрим отвечающую ей спектральную последовательность E.

Лемма 3.13. Спектральная последовательность E сходится к нулю, более того, нулю равен уже ее третий член.

Действительно, пусть $T : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ - имеющееся на $\mathcal{L}$ дифференцирование и $T^* : \mathcal{L}^* \longrightarrow \mathcal{L}^*$ сопряженное отображение. Определим на $W(\mathcal{L})$ дифференцирование D формулой $D(\mathcal{L}_1^*) = 0$, $D : \mathcal{L}_2^* \longrightarrow \mathcal{L}_1^*$, совпадает с T^*. Коммутатор $[D, \delta]$ есть действие дифференцирования T на алгебре Вейля. Ясно, что $[D, \delta]$ не имеет нулевых собственных значений. Отсюда вытекает, что D можно использовать как стягивающую гомотопию на втором члене спектральной последовательности. (Подобный прием использовался многими авторами, например, [46]).

Из этой леммы вытекает, в частности, что точна следующая последовательность:

$$0 \longrightarrow H^2(\mathcal{L}) \longrightarrow H^1(\mathcal{L}; \mathcal{L}^*) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}, S^2\mathcal{L}^*) \longrightarrow 0 \qquad (3.2)$$

Стрелки здесь - дифференциалы во втором члене спектральной последовательности E . Заметим, что $H^0(\mathcal{L}, S^2\mathcal{L}^*)$ в точности есть пространство инвариантных билинейных симметрических форм на алгебре $\mathcal{L}$.

Предложение 3.I4. Каждая инвариантная билинейная симметричная форма на $\hat{n}_+$ есть линейная комбинация форм из следующих двух непересекающихся пространств.

а) Первое пространство состоит из форм, ядро которых содержит $[\hat{n}_+, \hat{n}_+]$. Это пространство изоморфно пространству квадратичных форм на $\hat{n}_+/[\hat{n}_+, \hat{n}_+]$, т.е. имеет размерность $(\ell+1)(\ell+2)/2$, где ℓ - ранг алгебры $\mathfrak{g}$;

б) Пусть $P(t^{-1})\partial/\partial t$ - векторное поле, где P - многочлен без свободного члена. Второе пространство состоит из форм вида:

$$(x, y) \longmapsto \langle P(t^{-1})\partial x/\partial t\ , y\rangle + \langle P(t^{-1})\partial y/\partial t\ , x\rangle\ ,$$

где $x, y \in \hat{n}_+$, $\langle\ ,\ \rangle$ - форма Киллинга на $\hat{\mathfrak{g}}$.

Доказательство. Пусть ω - инвариантная билинейная симметричная форма на $\hat{n}_+$. Ассоциированной с ω квадратичной форме поставим в соответствие отображение $\Theta: \hat{n}_+ \longrightarrow \hat{n}_+^*$, $\hat{n}_+ = n_+ \oplus \mathfrak{g}t \oplus \mathfrak{g}t^2 \oplus \ldots$, $\hat{n}_+^* = n_+^* \oplus (\mathfrak{g}t)^* \oplus (\mathfrak{g}t^2)^* \oplus \ldots$. Предположим, что форма ω однородна относительно граудировки степенями t ; $\hat{n}_+$ -модуль

$\hat{n}_+^*$ профильтрован подмодулями, $\hat{n}_0^* = n_+^*$, $\hat{n}_1^* = n_+^* \oplus (\mathfrak{g}t)^*$ и т.д. Пусть i – наименьшее число, такое, что $\Theta(\hat{n}_+) \subset \hat{n}_+^*$. Если $i=0$, то ω лежит в первом пространстве. Утверждение о том, что ядро формы в этом случае содержит $[\hat{n}_+, \hat{n}_+]$ вытекает из теоремы 5.I в [48]. Если $i=1$, то образ отображения $n_+ \longrightarrow (\mathfrak{g}t)^*$ или одномерен или совпадает с алгеброй n_+ ($n_+ \subset \mathfrak{g} \cong (\mathfrak{g}t)^*$, $\mathfrak{g}$ отождествляется с $(\mathfrak{g}t)^*$ посредством формы Киллинга). В первом случае ω лежит в первом пространстве, а во втором – во втором пространстве. Эти факты вытекают из следующей легко проверяемой леммы.

<u>Лемма 3.I5</u>. $\dim \mathrm{Hom}_{n_+}(n_+, \mathfrak{g}) \cong 1 + l$, $l > 1$.

(Эту лемму можно проверить, например, просто перебрав все простые алгебры Ли).

Далее, используя лемму, получаем, что если $i \geq 2$, то форма лежит во втором пространстве. Это доказывает предложение.

Теперь, используя точную последовательность (3.2), мы определяем пространство $H^1(\hat{n}_+; \hat{n}_+^*)$, после чего без труда находим $H^2(\hat{n}_+; \hat{n}_+)$.

<u>Предложение 3.I6</u> (ср.с теоремой 3.2).

а) Ядро естественного отображения

$$\varphi: H^1(\hat{n}_+) \times H^1(\hat{n}_+; \hat{n}_+) \longrightarrow H^2(\hat{n}_+; \hat{n}_+)$$

состоит из $l+1$ элемента, где l – ранг алгебры $\mathfrak{g}$.

б) Если ранг алгебры $\mathfrak{g}$ больше I, то $\dim \mathrm{coker}\,\varphi = l + l + p$, где p – число положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$, представимых в виде суммы двух простых корней.

Случай $\mathfrak{g} = sl(2,\mathbb{C})$ не покрывается этой теоремой. Как нам уже известно, этот случай является исключительным и разобран ранее (см. §§ I,2).

Г Л А В А IУ

О КЛАССИФИКАЦИИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГРАДУИРОВАННЫХ АЛГЕБР ЛИ С ДВУМЯ ОБРАЗУЮЩИМИ

В этой главе мы классифицируем градуированные алгебры Ли $\mathfrak{g}=\oplus_{i=1}^{\infty}\mathfrak{g}_i$ с $\dim\mathfrak{g}_i=1$ над полем $\mathbb{k}$ характеристики нуль, имеющие минимально возможное число образующих. Очевидно, что это минимальное число образующих равно двум. Другими словами, нас интересуют алгебры Ли, похожие на L_1 - т.е. алгебры Ли с двумя образующими e_1, e_2 и базисом $\{e_i\}$, $i=1,2,\ldots$, такие, что коммутатор $[e_i,e_j]$ пропорционален e_{i+j} (см.гл.II).

Помимо L_1 известно еще две алгебры Ли такого типа - $n_+(\tilde{A}_1)$ и $n_+(BA_2)$ (напомним, что $n_+(\tilde{A}_1)$ - максимальная нильпотентная подалгебра в алгебре Каца-Муди $\mathfrak{g}^{\tilde{A}_1}$, а $n_+(BA_2)$ - в алгебре Каца-Муди $\mathfrak{g}^{BA_2}$ - см. главу III). Алгебры L_1, $n_+(\tilde{A}_1)$, $n_+(BA_2)$ весьма близки друг к другу, они не только порождаются двумя образующими, но и во всех трех перечисленных алгебрах эти образующие связаны двумя определяющими соотношениями весов 5 и 7. В связи с этим возникает вопрос о том, какие алгебры Ли получатся, если мы эти соотношения будем деформировать. Мы увидим в этой главе, что после малой деформации соотношений в каждой из этих трех алгебр получается конечномерная алгебра Ли. Это, разумеется, согласуется с тем, что алгебры Ли L_1, $n_+(\tilde{A}_1)$, $n_+(BA_2)$ не имеют инфинитезимальных деформаций веса нуль (см.главы II и III).

Задача о классификации алгебр типа L_1, $n_+(\tilde{A}_1)$, $n_+(BA_2)$ естественно примыкает к проблемам, сформулированным В.Кацем в [43]. Поставленная им задача заключается в перечислении простых градуированных алгебр Ли $\mathcal{L}=\oplus_{i=-\infty}^{\infty}\mathcal{L}_i$, таких что $\dim\mathcal{L}_i=1$. Гипотеза Каца состоит в том, что такие алгебры исчерпываются факторами по центрам алгебр $\tilde{A}_1$ и $\mathcal{B}A_2$ и алгебры Ли векторных полей на окружности, разлагающихся в конечные ряды Фурье. Результаты этой главы говорят в пользу гипотезы Каца.

Итак, в алгебре $\mathfrak{g} = \oplus \mathfrak{g}_i$, $i>0$ выбран базис $\{e_i\}$ и e_1, e_2 порождают $\mathfrak{g}$. Заметим, что $[e_1,e_2]\neq 0$ и $[e_1,[e_1,e_2]]\neq 0$. Далее, $[e_1,[e_1,[e_1,e_2]]]$ и $[e_2,[e_2,e_1]]$ связаны соотношением (причем ровно одним) – это соотношение веса 5. Элементы $[e_1,[e_2,[e_2,e_1]]]$ и $[e_1,[e_1,[e_1,[e_1,e_2]]]]$ также связаны соотношением, но оно следует из соотношения веса 5. В весе 7 имеется, по крайней мере, одно новое соотношение. Мы будем классифицировать алгебры $\mathfrak{g}$ по тому, какие соотношения весов 5 и 7 в них выполняются. Выпишем общий вид таких соотношений:

для веса 5

$$\lambda[e_1,[e_1,[e_1,e_2]]] + \mu[e_2,[e_2,e_1]] = 0,$$

для веса 7 (4.I)

$$\alpha[e_1,[e_1,[e_1,[e_1,[e_2,e_1]]]]] + \beta[e_2,[e_2,[e_2,e_1]]] + \gamma[e_1,[e_1,[e_2,[e_2,e_1]]]] = 0.$$

Здесь $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma$ – комплексные числа. Эти числа не являются независимыми. Например, если $\alpha=\lambda$, $\beta=0$, то из соотношения веса 5 вытекает, что $\gamma=\mu$.

Заметим, что если $\mu=0$, $\gamma=0$, то мы получаем соотношения в алгебре $\mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1)$, а если $\lambda=0$, $\gamma=0$, то в $\mathfrak{n}_+(\mathcal{B}A_2)$. Если $6\lambda=\mu$ и $120\alpha = 3\beta+20\gamma$, то соотношения (4.I) определяют алгебру L_1. Алгебры Ли L_1, $\mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1)$, $\mathfrak{n}_+(\mathcal{B}A_2)$ имеют конечномерные когомологии (с тривиальными коэффициентами), в [5] и [36] показано, что $\dim H^i(L_1) = \dim H^i(\mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1)) = \dim H^i(\mathfrak{n}_+(\mathcal{B}A_2)) = 2$ при $i>0$.

Введем еще две алгебры с двумя образующими (и минимум двумя соотношениями весов 5 и 7). Мы будем обозначать эти алгебры символами $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$. В алгебре $\mathfrak{g}_1$ коммутатор устроен следующим образом: $[e_1, e_i] = e_{i+1}$ при $i > 1$ и $[e_i, e_j] = 0$ при $i, j \neq 1$. В алгебре $\mathfrak{g}_2$: $[e_i, e_j] = 0$, если $i, j > 2$, $[e_1, e_j] = e_{j+1}$ при $j > 1$, $[e_2, e_j] = e_{j+1}$ при $j > 2$. Легко показать, что алгебра $\mathfrak{g}$ изоморфна $\mathfrak{g}_1$, если $\lambda = 0$, $\alpha = 0$ и изоморфна $\mathfrak{g}_2$, если $\lambda = \mu$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Легко видеть, что число соотношений в алгебре $\mathfrak{g}_2$ тоже равно двум. Можно показать, что $\dim H^i(\mathfrak{g}_2) = \infty$ при $i \geq 3$. Действительно, алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ содержит абелев идеал J коразмерности 2. Из спектральной последовательности Серра-Хохшильда, ассоциированной с этим идеалом вытекает, что в $H^3(\mathfrak{g}_2)$ содержится бесконечномерная компонента, возникающая из $H^0(\mathfrak{g}_2/J, \Lambda^3 J)$.

<u>Теорема 4.I.</u> Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathfrak{g}_i$, где $\dim \mathfrak{g}_i = 1$ – алгебра Ли с базисом $e_1, e_2, \ldots$, порожденная e_1 и e_2. Тогда

А) если $[e_1, e_4] \neq 0$ и $[e_2, e_3] \neq 0$, то

I. $\mathfrak{g} \cong L_1$ при $[e_3, e_4] \neq 0$,

2. $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_2$ при $[e_3, e_4] = 0$;

Б) если $[e_2, e_3] = 0$, то $[e_1, e_4] \neq 0$ и

I. $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{n}_+(\mathbb{B}A_2)$ при $[e_3, e_4] \neq 0$,

2. $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_1$ при $[e_3, e_4] = 0$;

В) если $[e_1, e_4] = 0$, то $[e_2, e_3] \neq 0$ и

I. $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1)$ при $[e_3, e_4] \neq 0$,

2. соотношению $[e_3, e_4] = 0$ удовлетворяют все алгебры Ли из определяемого ниже счетнопараметрического семейства $\mathfrak{g}(\lambda_8, \lambda_{12}, \ldots)$, где λ_{4k} принадлежат проективному пространству $\mathbb{k}P^1$.

Опишем семейство алгебр Ли $\mathfrak{g}(\lambda_8, \lambda_{12}, \ldots)$. В этой алгебре коммутатор устроен следующим образом: $[e_i, e_j] = 0$, если i, j – четные числа, отличные от 2, а также если i и j разной чет-

ности и отличны от 2. В последнем случае единственные нетривиальные коммутаторы есть $[e_2, e_{2k-1}] = e_{2k+1}$, $k = 1, 2, \dots$.
Далее,

$$[e_1, e_{4k-1}] = \alpha_{4k} e_{4k} \qquad k = 2, 3, 4, \dots ,$$
$$[e_2, e_{4k-2}] = \beta_{4k} e_{4k}$$

где $(\alpha_{4k} : \beta_{4k})$ – однородные координаты точки $\lambda_{4k} \in \mathbb{k}P^1$.
Остальные коммутаторы однозначно восстанавливаются из выписанных формул. Действительно, пусть $[e_i, e_j] = c_{ij} e_{i+j}$. Для определения c_{ij} мы получаем следующие системы уравнений, которые можно понимать как рекуррентные формулы для определения чисел c_{ij}.
Если $i+j<8$, то c_{ij} определяются однозначно (с точностью до перенормировки базисных векторов e_i).

$$[e_1, e_2] = e_3 ; \qquad [e_1, e_3] = e_4 ;$$
$$[e_2, e_3] = e_5 , \quad [e_1, e_4] = 0 ;$$
$$[e_1, e_5] = [e_2, e_4] = e_6 ,$$
$$[e_2, e_5] = e_7 , \quad [e_1, e_6] = [e_3, e_4] = 0 .$$

При $i+j=8$ появляются первые параметры. Вообще, при $i+j=4n$ система уравнений выглядит так:

$$c_{1,4n-1} = \alpha_{4n} \qquad n \geq 2$$
$$c_{2,4n-2} = \beta_{4n}$$
$$c_{3,4n-3} = \alpha_{4n} - c_{1,4n-3} \beta_{4n}$$

$c_{k+2,4n-k-2} = -c_{k,4n-k} + c_{k,4n-k-2} \beta_{4n}$, где $3 \leq k \leq 2n-3$ нечетно, а при $i+j = 4n+2$:

$$c_{2,4n} = 1$$
$$c_{2n-1,2n+3} = c_{2n-1,2n+1}$$

$c_{2n-k,2n+k+2} = c_{2n-k,2n+k} - c_{2n-k+2,2n+k}$, где $3 \leq k \leq 2n-3$ нечетно

$$c_{1,4n+1} = \alpha_{4n} + c_{3,4n-1}$$

<u>Пример</u>. Приведем явный вид скобки в алгебре Ли $\mathfrak{g}(1,1,\dots)$.

$$\left.\begin{aligned}[e_1,e_{2k+1}]=[e_2,e_{2k}]=e_{2k+2}\\ [e_2,e_{2k-1}]=e_{2k+1}\end{aligned}\right\} k\geq 2,\quad [e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=e_4,$$

остальные коммутаторы – нули.

<u>Замечание</u>. В алгебрах $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}(\lambda_8,\lambda_{12},\dots)$ бесконечно много соотношений. В алгебре $\mathfrak{g}_1$ есть соотношения весов 5, 7, 9 и т.д. (других соотношений нет). В алгебрах $\mathfrak{g}(\lambda_8,\lambda_{12},\dots)$ есть соотношения весов $2k+1$, $k\geq 2$; $4k$, $k\geq 2$ (других нет).

Приведем теперь два следствия из нашей теоремы.

<u>Следствие I</u>. Если в алгебре $\mathfrak{g}$ $[e_i,e_j]\neq 0$ для любых $i\neq j$, то $\mathfrak{g}\cong L_1$.

<u>Замечание</u>. Для алгебр $\mathcal{L}$ с базисом e_i, где $i\in\mathbb{Z}$ имеет место результат, аналогичный следствию I. Этот факт известен (см. например [44]), но приведем здесь наше доказательство.

С помощью умножения базисных векторов e_j на подходящие константы можно добиться, чтобы выполнялись следующие соотношения:

(I) $[e_0,e_1]=e_1$;

(2) $[e_1,e_j]=(j-1)e_{j+1}$, $[e_{-1},e_{-j}]=(1-j)e_{-j-1}$, $j\in\mathbb{Z}_+$;

(3) $[e_{-1},e_1]=2e_0$;

(4) $[e_{-1},e_2]=3e_1$;

(5) $[e_{-2},e_1]=3e_{-1}$.

I) Во-первых, докажем, что $[e_0,e_j]=je_j$, $[e_0,e_{-j}]=-je_j$, $j\in\mathbb{Z}_+$. Используя тождество Якоби на коммутаторы $[e_0,[e_i,e_j]]$, при нашем условии получаем уравнение на константы $c_{0,i}+c_{0,j}=c_{0,i+j}$. Оно имеет с точностью до множителя единственное решение $c_{0,i}=Ki$ $(K\in\mathbb{C})$; в силу (I) $K=1$, следовательно, приведенные соотношения верны.

2) Теперь докажем, что

$$[e_{-1},e_j]=(j+1)e_{j-1}\ ,\quad [e_1,e_{-j}]=(-j-1)e_{-j+1}\ ,\quad j\in\mathbb{Z}_+ .$$

Эти соотношения легко получаются индукцией по j. Действительно, в силу (2) e_j можно представить в виде $\frac{1}{j-2}[e_1,e_{j-1}]$ (и e_{-j}, в виде $\frac{1}{-j+2}[e_{-1},e_{-j+1}]$). Из тождества Якоби следует, что

$$[e_{-1},e_j]=\frac{1}{j-2}[[e_{j-1},e_{-1}],e_1]+\frac{1}{j-2}[[e_{-1},e_1],e_{j-1}]$$

и

$$[e_1,e_{-j}]=\frac{1}{-j+2}[[e_{j+1},e_1],e_{-1}]+\frac{1}{-j+2}[[e_1,e_{-1}],e_{-j+1}] .$$

Ввиду (3), это дает нам индукционный шаг, и получаем, что $c_{-1,j}=j+1$ и $c_{1,-j}=-j-1$ для всех $j\in\mathbb{Z}_+\setminus\{2\}$. При $j=2$ утверждение 2) следует из (4) и (5).

3) Рассмотрим теперь коммутаторы $[e_i,e_j]$ и $[e_{-i},e_{-j}]$, когда $i,j\in\mathbb{Z}_+$. Мы утверждаем, что $c_{ij}=j-i$ и $c_{-i,-j}=-j+i$, $i,j\in\mathbb{Z}_+$. Доказательство идет индукцией по i и j. Индукционный шаг следует из 2) с использованием тождества Якоби для $[e_{-1},[e_i,e_j]]$ и для $[e_1,[e_i,e_j]]$.

4) Остается доказать, что $[e_{-i},e_j]=(j+i)e_{j-i}$, $i,j\in\mathbb{Z}_+$. (См. (4),(5)) Докажем это опять индукцией по i и j. Пусть $c_{-2,2}=\mu e_0$. Тогда, если $j>2$, из тождества Якоби на коммутатор $[e_{-i},[e_1,e_{j-1}]]$ с помощью утверждения 2) получаем индукционный шаг. Если $i>2$, коммутор $[e_{-i},e_j]$ вычисляется и по другому. А именно, тождество Якоби для коммутатора $[[e_{-i+1},e_{-1}],e_j]$ тоже дает нам индуктивный способ для вычисления $[e_{-i},e_j]$. Если мы вычисляем $[e_{-4},e_4]$ двумя способами, то получаем, что $\mu=4$, т.е. $[e_{-2},e_2]=4e_0$. Итак, утверждение доказано для всех $i,j\in\mathbb{Z}_+$.

Следствие 2. Если число соотношений между образующими алгебры Ли конечно, то число соотношений равно двум и $\mathfrak{g}$ изоморфно одной из алгебр Ли L_1, $n_+(\tilde{A}_1)$, $n_+(BA_2)$ и $\mathfrak{g}_2$. Если же все пространства $H^i(\mathfrak{g})$ конечномерны, то $\mathfrak{g}$ изоморфно $n_+(\tilde{A}_1)$, $n_+(BA_2)$ или L_1.

Доказательство теоремы. Тождество Якоби дает нам систему линейных уравнений на структурные константы c_{ij} ($[e_i, e_j] = c_{ij} e_{i+j}$) алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Числа c_{12} и c_{13} можно взять любыми не равными нулю. Мы для определенности будем всегда полагать, что $c_{12} = 1$. Далее мы получаем одно линейное уравнение на два неизвестных c_{14} и c_{23}. Заметим, что хотя бы одно из этих чисел отлично от нуля, поскольку $\dim \mathfrak{g}_5 = 1 \neq 0$. Зафиксируем какое-нибудь решение этого уравнения. Тогда c_{15} и c_{24} находятся однозначно (с точностью до пропорциональности). Далее на числа c_{16}, c_{25}, c_{34} получается два уравнения. Зафиксируем их решение и т.д. Количество уравнений растет быстрее числа неизвестных. Условие совместности этих систем позволяет определить зафиксированные на предыдущих шагах константы. Мы приведем сейчас результаты вычислений.

А) I. Пусть $c_{13} = 2$, $c_{23} = 1$, $c_{14} = \mu$, $c_{24} = 2$ и $c_{25} = \nu$, $c_{34} = 1$. Фиксация $c_{13} = c_{24} = 2$, $c_{23} = c_{34} = 1$ не ограничивает общности: если $c_{13} \neq 0$, $c_{23} \neq 0$, $c_{24} \neq 0$ и $c_{34} \neq 0$, то перенормировав вектора e_4, e_5, e_6 и e_7, можно добиться $c_{13} = 2$, $c_{23} = c_{34} = 1$. Если $\mu \neq 0$, то решая систему до $i+j < 12$, мы получаем следующие коммутаторы:

$$[e_1, e_5] = 4e_6;$$

$$[e_1, e_6] = \frac{\mu\nu + 1}{2} e_7;$$

$$[e_3, e_5] = 2e_8, \quad [e_2, e_6] = \frac{\mu\nu - 1}{2} e_8, \quad [e_1, e_7] = 2\mu e_8;$$

$$[e_2, e_7] = \frac{2\mu\nu - 3}{3} e_9, \quad [e_3, e_6] = \frac{\mu\nu}{3} e_9, \quad [e_4, e_5] = e_9, \quad [e_1, e_8] = \frac{2\mu\nu + 3}{3} e_9;$$

$$[e_4,e_6]=2e_{10}, \quad [e_3,e_7]=\frac{4(4\mu\nu-6)}{3(\mu\nu+1)}e_{10},$$

$$[e_2,e_8]=\frac{4(2\mu\nu-3)\nu}{3(\mu\nu+1)}e_{10}, \quad [e_1,e_9]=8e_{10};$$

$$[e_5,e_6]=e_{11}, \quad [e_1,e_{10}]=\frac{\mu^2\nu(\mu\nu+2)}{4\mu\nu-3}e_{11},$$

$$[e_4,e_7]=\frac{2\mu(2\mu^2\nu^2+3)}{(4\mu\nu-3)(\mu\nu+1)}e_{11}, \quad [e_2,e_9]=2\frac{2\mu^3\nu^3-4\mu^2\nu^2+2\mu\nu+3}{(\mu\nu+1)(4\mu\nu-3)}e_{11}, \qquad (4.2)$$

$$[e_3,e_8]=2\frac{4\mu^3\nu^3-4\mu^2\nu^2-12\mu\nu-9}{3(\mu\nu+1)(4\mu\nu-3)}e_{11};$$

$$[e_5,e_7]=2e_{12}, \quad [e_1,e_{11}]=(\mu\nu+1)e_{12},$$

$$[e_4,e_8]=2\frac{\mu^2\nu^2-2\mu\nu+3}{4\mu\nu-3}e_{12}, \quad [e_3,e_9]=2\frac{4\mu^3\nu^3-10\mu^2\nu^2-27}{(4\mu\nu-3)(2\mu\nu+3)}e_{12},$$

$$[e_2,e_{10}]=\frac{(2\mu^4\nu^4-3\mu^3\nu^3+\mu^2\nu^2+6\mu\nu+18)}{2(4\mu\nu-3)(2\mu\nu+3)}e_{12}.$$

При $i+j=12$ получается дополнительное условие совместности системы: $\mu\nu=9$. Нетрудно показать, что в этом случае алгебра Ли изоморфна L_1. (Действительно, перенормировав e_1, e_2, можно добиться равенства $\mu=\nu=3$. Тогда $[e_i,e_j]=(j-i)e_{i+j}$, $j+i\le 12$. Затем, прямым вычислением доказываем, что $[e_i,e_j]=(j-i)e_{i+j}$ при любых i,j).

В) I. В случае, когда $\mu=0$, до II-го шага все вычисления проводятся точно так же. Система же, получающаяся на I2-м шагу, имеет при $\mu=0$ другое решение. Соответствующие коммутаторы до I2-го шага находятся по формулам:

$$
\begin{aligned}
&[e_1,e_2]=e_3;\quad [e_1,e_3]=-e_4;\\
&[e_1,e_4]=0,\quad [e_2,e_3]=e_5;\\
&[e_1,e_5]=e_6,\quad [e_2,e_4]=-e_6;\\
&[e_1,e_6]=-e_7,\quad [e_2,e_5]=\nu e_7,\quad [e_3,e_4]=e_7;\\
&[e_1,e_7]=0,\quad [e_2,e_6]=e_8,\quad [e_3,e_5]=-e_8;\\
&[e_1,e_8]=[e_4,e_5]=e_9,\quad [e_2,e_7]=-e_9,\quad [e_3,e_6]=0;\\
&[e_1,e_9]=[e_4,e_6]=-e_{10},\quad [e_2,e_8]=-\nu e_{10},\quad [e_3,e_7]=e_{10};\\
&[e_1,e_{10}]=[e_4,e_7]=0,\quad [e_2,e_9]=[e_5,e_6]=e_{11},\quad [e_3,e_8]=-e_{11};\\
&[e_1,e_{11}]=[e_4,e_8]=e_{12},\quad [e_2,e_{10}]=[e_5,e_7]=-e_{12},\quad [e_3,e_9]=0.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

(Формулы (4.2) при $\mu\longrightarrow 0$ переходят в (4.3) при $i+j<12$, если каждое e_i умножить на подходящую степень двойки.) Заметим, вторые формулы коммутаторов при $\nu=0$ есть система структурных констант для максимальной нильпотентной подалгебры алгебры $\mathfrak{g}^{\tilde{A}_1}$. Решая систему при $i+j=13,14$, находим, что на I3-м и I4-м шагу все определяется однозначно. На I5-м шагу система совместна только при $\nu=0$. Алгебра Ли, отвечающая этому случаю, есть $\mathfrak{n}_+(\tilde{A}_1)$.

Замечание. Объясним причину, по которой несовместные системы в предыдущем доказательстве появляются на I2-м и I5-м шагах. Формулы (4.2) при $i+j<12$ определяют II-мерную алгебру Ли $S(\mu,\nu)$ с базисом $\{e_1,e_2,\ldots,e_{11}\}$, зависящую от двух параметров μ и ν. При $\mu\nu=9$ эта алгебра Ли изоморфна фактору алгебры L_1 по идеалу $\{e_{12},e_{13},\ldots\}$. Числа c_{ij}, $i+j=12$ определяют расширение алгебры Ли $S(\mu,\nu)$: $0\longrightarrow \mathbb{C}\longrightarrow \hat{S}(\mu,\nu)\longrightarrow$ $\longrightarrow S(\mu,\nu)\longrightarrow 0$. Такое расширение определяется элементом веса

12 пространства $H^2(S(\mu,\nu))$. При $\mu=\nu=3$ $\dim H^2_{(12)}(S(\mu,\nu))=1$. Изменим немного параметры μ,ν. Несовместность системы означает, что $\dim H^2_{(12)}(S(\mu,\nu))=0$. Таким образом, при деформации алгебры Ли $S(3,3)$ размерность пространства $H^2_{(12)}(S(\mu,\nu))$ падает. Как обычно, при деформации должна сохраняться эйлерова характеристика. Более точно, падение на единицу размерности пространства $H^2_{(12)}(S(\mu,\nu))$ приводит к падению на 1 $\dim H^2_{(12)}(S(\mu,\nu))$. Заметим, что $H^3_{(12)}(S(3,3)) \cong H^3_{(12)}(L_1)$. В работе [21] доказано, что $\dim H^3_{(k)}(L_1)=1$, если $k=12,15$ и равно нулю при остальных значениях k. Это означает, что если пара (μ,ν) лежит в некоторой окрестности (в топологии Зарисского) точки $(3,3)$, то несовместность интересующей нас системы может возникнуть только на 12-м или на 15-м шагу.

А2. Пусть теперь ни один коммутатор веса 5 не равен нулю. Домножая e_2 на константу, можно добиться равенства: $[e_2,e_3]=[e_1,e_4]$ (по-прежнему $e_3=[e_1,e_2]$). Отсюда $[e_1,e_5]=[e_1,[e_2,e_3]]=[e_2,e_4]$ и следовательно, $[e_1,e_5]\neq 0$, т.е. можно положить, что $[e_1,e_5]=[e_2,e_4]=e_6$. Таким образом, первое соотношение может появиться только в весе 7. Рассмотрим прежде всего случай $[e_3,e_4]=0$. Докажем, что в этом случае выполняются следующие соотношения:

$$[e_1,e_k]=e_{k+1}, \quad [e_2,e_k]=e_{k+2}, \qquad [e_i,e_j]=0 \quad \text{при } i,j\geq 3.$$

Докажем эти соотношения индукцией по весу коммутатора. При $n\leq 7$ они проверяются непосредственно. Пусть они доказаны при $n\leq 2k-1$; докажем их для $n=2k$, $n=2k+1$. Действительно имеем:

$$[e_{k-1},e_{k+1}]=[e_1,[e_{k-1},e_k]]=0,$$

$$[e_{k-2},e_{k+2}]=[e_1,[e_{k-2},e_{k+1}]]-[e_{k-1},e_{k+1}]=0$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$[e_3, e_{2k-3}] = [e_1, [e_3, e_{2k-4}]] - [e_4, e_{2k-4}] = 0$$

$$[e_1, e_{2k-1}] = [e_1, [e_2, e_{2k-2}]] = [e_3, e_{2k-2}] + [e_2, e_{2k-1}] = [e_2, e_{2k-1}],$$

что доказывает утверждение при $n = 2k$. Для $n = 2k+1$ получаем:

$$0 = [e_2, [e_{k-1}, e_k]] = [e_{k-1}, e_{k+2}] - [e_k, e_{k+1}],$$

$$0 = [e_1, [e_{k-1}, e_{k+1}]] = [e_{k-1}, e_{k+2}] + [e_k, e_{k+1}],$$

откуда $[e_{k-1}, e_{k+2}] = 0$, $[e_k, e_{k+1}] = 0$.

Далее,

$$[e_{k-2}, e_{k+3}] = [e_1, [e_{k-2}, e_{k+2}]] - [e_{k-1}, e_{k+2}] = 0,$$

$$\ldots$$

$$[e_3, e_{2k-2}] = [e_1, [e_3, e_{2k-3}]] - [e_4, e_{2k-3}] = 0,$$

и, наконец,

$$[e_1, e_{2k}] = [e_1, [e_2, e_{2k-2}]] = [e_2, e_{2k-1}] + [e_3, e_{2k-2}] = [e_2, e_{2k-1}],$$

что доказывает утверждение при $n = 2k+1$.

Заметим, что эта алгебра имеет также другую реализацию:

$$[e_1, e_k] = e_{k+1}, \quad [e_2, e_k] = \lambda e_{k+2};$$

причем при $\lambda = 0$ эта алгебра переходит в алгебру предыдущего случая.

Пусть теперь $[e_1, e_6] = 0$ или $[e_2, e_5] = 0$; тогда e_1, e_2, как показывают проведенные вычисления, порождают лишь конечномерную (соответственно 10-мерную или 11-мерную) алгебру.

Б) Рассмотрим теперь случай, когда $[e_2, e_3] = 0$. Тогда возможны следующие варианты:

I. Пусть $[e_1, e_6] = 0$. Заметим, что точно такие же соотношения имеет $n_+(BA_2)$ – максимальная нильпотентная подалгебра в алгебре $\mathfrak{g}^{BA_2}$, причем известно (см. [35]), что эти соотношения порождают все соотношения этой подалгебры. При этом все ее корни имеют кратность I. Доказательство пункта Б I) закончено.

Замечание. Это же рассуждение годится и для случая (см.выше доказательство пункта В)I.стр.87).

Б)2. Пусть теперь $[e_1, e_6] \neq 0$. Если $[e_2, e_5] \neq 0$, то все коммутаторы веса I2, как легко проверить, равны нулю и $\dim \mathfrak{g} = 11$. Таким образом, $[e_2, e_5] = 0$. Докажем по индукции, что $[e_1, e_n] \neq 0$ (т.е. в частности, можно считать, что $e_{n+1} = [e_1, e_n]$) и, кроме того, любой другой коммутатор равен нулю. Для коммутаторов веса ≤ 8 это утверждение проверяется непосредственно. Пусть оно доказано для $n \leq 2k$; докажем его для $2k+1$ и $2k+2$.

Пусть $[e_2, e_{2k-1}] = \mu e_{2k+1}$. Тогда, используя тождество Якоби, получим:

$$[e_2, e_{2k-1}] = [e_4, e_{2k-3}] = \ldots = \mu e_{2k-1} ,$$

$$[e_3, e_{2k-2}] = [e_5, e_{2k-4}] = \ldots = -\mu e_{2k+1} .$$

Для веса $2k+2$ получим:

$$[e_k, e_{k+2}] = [e_1, [e_k, e_{k+1}]] = (-1)^k \mu [e_1, e_{2k+1}] ,$$

$$[e_{k-1}, e_{k+3}] = [e_1, [e_{k-1}, e_{k+2}]] - [e_k, e_{k+2}] = 2(-1)^{k+1} \mu [e_1, e_{2k+1}] ,$$

$$\ldots$$

$$[e_2, e_{2k}] = (k-1)(-1)^{2k-2} \mu [e_1, e_{2k+1}] ,$$

откуда, в частности, следует, что $[e_1, e_{2k+1}] \neq 0$, т.е. можно считать, что $e_{2k+2} = [e_1, e_{2k+1}]$. Если мы теперь докажем, что $\mu = 0$, то все коммутаторы веса $2k+1$, кроме, быть может, $[e_1, e_{2k}]$ будут равны нулю (и, следовательно, $[e_1, e_{2k}] \neq 0$) и все коммутаторы веса $2k+2$, кроме $[e_1, e_{2k+1}]$ равны нулю, что и требуется. Пусть $\mu \neq 0$.

Для веса $2k+3$ получаем:

$$[e_2, [e_3, e_{2k-2}]] = -[e_3, [e_{2k-2}, e_2]] = 0 ,$$

а, с другой стороны,

$$[e_2,[e_3,e_{2k-2}]]=-\mu[e_2,e_{2k+1}], \qquad \text{т.е.} \quad [e_2,e_{2k+1}]=0 .$$

Далее,

$$[e_3,e_{2k}]=[e_1,[e_2,e_{2k}]]-[e_2,e_{2k+1}]=(-1)^{2k-2}(k-1)\mu[e_1,e_{2k+2}],$$

$$[e_4,e_{2k-1}]=[e_1,[e_3,e_{2k-1}]]-[e_3,e_{2k}]=(-1)^{2k-3}(2k-3)\mu[e_1,e_{2k+2}],$$

$$\vdots$$

$$[e_{k+1},e_{k+2}]=(-1)^k k\frac{k-1}{2}\mu[e_1,e_{2k+2}],$$

откуда видно, что $[e_1,e_{2k+2}]\neq 0$, т.е. можно считать, что $e_{2k+3}=[e_1,e_{2k+2}]$.

Для веса $2k+4$ получим:

$$[e_{k+1},e_{k+3}]=[e_1,[e_{k+1},e_{k+2}]]=(-1)^k k\frac{k-1}{2}\mu[e_1,e_{2k+3}]$$

$$[e_k,e_{k+4}]=[e_1,[e_k,e_{k+3}]]-[e_{k+1},e_{k+3}]=$$
$$=(-1)^k\left\{-\left(k\frac{k-1}{2}-1\right)-\frac{k(k-1)}{2}\right\}\mu[e_1,e_{2k+3}]$$

$$\vdots$$

$$[e_3,e_{2k+1}]=[e_1,[e_3,e_{2k}]]-[e_4,e_{2k}]=$$
$$=(-1)^{2k-2}\left(\sum_{s=1}^{k-1}s^2\right)\mu[e_1,e_{2k+3}],$$

$$[e_2,e_{2k+2}]=[e_1,[e_2,e_{2k+1}]]-[e_3,e_{2k+1}]=-[e_3,e_{2k+1}],$$

откуда, в частности, $[e_1,e_{2k+3}]\neq 0$. Наконец,

$$[e_2,[e_3,e_{2k-1}]]=[e_3,[e_2,e_{2k-1}]]=\mu[e_3,e_{2k+1}],$$

а, с другой стороны, $[e_2,[e_3,e_{2k-1}]]=(-1)^{2k-3}(k-2)\mu[e_2,e_{2k+2}]$,

откуда, учитывая, что $[e_3,e_{2k+1}]\neq 0$, $[e_2,e_{2k+2}]=-[e_3,e_{2k+1}]$ (поскольку $[e_2,e_{2k+1}]=0$) получаем: $\mu=(k-2)\mu(-1)^{2k-3}$, что возможно только при $k=1$. Итак, $\mu=0$, что и требовалось доказать.

Как видно из доказательства, полученная алгебра имеет бесконечное число определяющих соотношений, именно

$$[e_2,[\underbrace{e_1,[e_1,\dots,[e_1}_{2k-1},e_2]]\dots]=0 \qquad \text{для любого } k\geq 1.$$

Рассмотрим теперь случай В)2., когда $[e_1,e_4]=[e_3,e_4]=0$. Как мы уже показали, в этом случае существует семейство алгебр $\mathfrak{g}(\lambda_8,\lambda_{12},\dots)$. Для этих алгебр $(ad\, e_2)^k(e_1)\neq 0$ для всех k. Мы покажем, что, наоборот, всякая алгебра, удовлетворяющая этому условию и соотношениям $[e_1,e_4]=[e_3,e_4]=0$, принадлежит этому семейству -(X). Впрочем, я уверена, что этот класс полностью исчерпывает случай $[e_1,e_4]=[e_3,e_4]=0$. Точнее, верна, по-видимому, следующая

Гипотеза. Если $\mathfrak{g}=\oplus\mathfrak{g}_i$, $\dim\mathfrak{g}_i=1$ – алгебра Ли с базисом $e_1, e_2, \dots$, порожденная первыми двумя элементами, и $ad(e_1)^{k_1}(e_2)=0$, $ad(e_2)^{k_2}(e_1)=0$ для некоторых k_1, k_2, то алгебра $\mathfrak{g}$ изоморфна одной из алгебр $n_+(\tilde{A}_1)$ или $n_+(BA_2)$.

Замечание. Гипотеза становится очевидной, если дополнительно предположить, что $\mathfrak{g}$ является максимальной нильпотентной подалгеброй алгебры Ли, удовлетворяющей условию гипотезы Каца.

Отсюда в нашем случае уже следует условие $ad(e_2)^k(e_1)\neq 0$, поскольку $[e_1,[e_1,[e_1,e_2]]]=[e_1,e_4]=0$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству утверждения (X) - см. выше.

Докажем, что если $ad(e_2)^k(e_1)\neq 0$ для всех k, то $[e_{2k},e_i]=0$ для всех $i\neq 2$, $k\neq 1$.

Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}$ - свободная алгебра Ли, порожденная e_1 и e_2, и $\mathfrak{J}$ – максимальный идеал, не содержащий элементов $ad(e_2)^k(e_1)$, $k=1,2,\dots$. Фактор $\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{J}$ изоморфен алгебре A , состоящей из элементов e_2 и e_{2k+1} , $k=0,1,\dots$ с соотношениями $[e_{2k+1},e_{2\ell+1}]=0$, $[e_2,e_{2k+1}]=e_{2k+3}$ для любых k,ℓ . Пусть $\mathfrak{J}'$ – идеал в $\tilde{\mathfrak{g}}$, соответствующий алгебре $\mathfrak{g}$. Поскольку $ad(e_2)^k(e_1)\neq 0$ для всех k , то $\mathfrak{J}'\subset\mathfrak{J}$ и фактор $\mathfrak{g}$ по $\tilde{\mathfrak{J}}$–образу $\mathfrak{J}$ в $\mathfrak{g}$ – также изоморфен A . Следовательно, $\tilde{\mathfrak{J}}=\{e_4,e_6,\dots\}$, откуда следует, что $[e_{2k},e_{2\ell+1}]\in\tilde{\mathfrak{J}}$ при $k\geq 2$, т.е. равно 0. Отсюда по индукции доказывается, что $[e_{2k},e_{2\ell}]=0$ для любых $k,\ell\geq 2$. Действительно, $e_{2\ell}$ всегда можно представить как $[e_2,[e_2,\dots,[e_2,[e_1,e_{2\ell_1+1}]\dots]$ для некоторого ℓ_1 . Поскольку $[e_1,e_{2\ell_1+1}]=0$, то и $[e_{2k},e_{2\ell}]=0$.

Положим теперь $[e_2,e_{2k+1}]=e_{2k+3}$, $k=0,1,\dots$. Для определения алгебры Ли теперь достаточно задать параметры α_{4k} , β_{4k} , входящие в коммутаторы $[e_1,e_{4k-1}]=\alpha_{4k}e_{4k}$, $[e_2,e_{4k-2}]=\beta_{4k}e_{4k}$, $k\geq 2$. Действительно, оставшиеся нетривиальные коммутаторы $[e_{2k+1},e_{2\ell+1}]$ однозначно определяются отсюда с помощью равенств:

а) $2k+2\ell+2=4r$.

$$[e_{2r-1},e_{2r+1}]=-[e_{2r-3},e_{2r+3}]+[e_2,[e_{2r-3},e_{2r+1}]]$$

$$[e_{2r-3},e_{2r+3}]=-[e_{2r-5},e_{2r+5}]+[e_2,[e_{2r-5},e_{2r+3}]]$$

$$\dots$$

$$[e_3,e_{4r-3}]=-[e_1,e_{4r-1}]+[e_2,[e_1,e_{4r-3}]]$$

б) $2k+2\ell+2=4r+2$.

$$0=[e_{2r+1},e_{2r+1}]=-[e_{2r-1},e_{2r+3}]+[e_2,[e_{2r-1},e_{2r+1}]],$$

откуда находим $[e_{2r-1},e_{2r+3}]$; далее,

$$[e_{2r-3},e_{2r+5}]=-[e_{2r-1},e_{2r+3}]+[e_2,[e_{2r-3},e_{2r+3}]]$$

$$\dots$$

$$[e_1,e_{4r+1}]=-[e_3,e_{4r-1}]+[e_2,[e_1,e_{4r-1}]].$$

Непосредственно проверяется, что тождество Якоби выполнено для произвольных α_{4k} и β_{4k}.

Необходимо еще учесть условие, что алгебра $\mathfrak{g}$ порождается e_1 и e_2. Как видно из б), в весе $2+4n$ все коммутаторы выражаются через $[e_2, e_{4n}]$. Следовательно $[e_2, e_{4n}]\neq 0$ и можно считать, что $[e_2, e_{4n}]=e_{4n+2}$. Наконец, осталось потребовать, чтобы в весе $4k$ один из коэффициентов α_{4k} или β_{4k} был отличен от 0.

Итак, алгебра полностью описывается коэффициентами α_{4k} и β_{4k} определяемыми из коммутаторов $[e_1, e_{4k-1}]=\alpha_{4k}e_{4k}$, $k\geqslant 2$, $[e_2, e_{4k-2}]=\beta_{4k}e_{4k}$, $k\geqslant 2$.

Замечание. Семейство алгебр, описанных в п.В) 2. теоремы 4.I является отдельной алгебраической компонентой во всем семестве рассматриваемых алгебр. Более точно, любая деформация алгебры общего положения из этого семейства также является алгеброй этого семейства.

В частности, рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}(1,1,\dots)$; в дальнейшем для краткости будем обозначать ее L. Покажем, что всякая нетривиальная деформации этой алгебры обладает соотношениями веса $4n$ для $n\geqslant 2$. Для этого вычислим $H^2_{(0)}(L;L)$ (мы вычисляем когомологии только степени 0, поскольку нас интересует лишь деформации, сохраняющие градуировку).

Предложение 4.2. Базис в $H^2_{(0)}(L;L)$ составляют классы коциклов λ_s, $s=5,8,12,16,\dots$, где

$$\lambda_s(e_i,e_j)=\begin{cases} 0 & \text{при } i+j<s, \\ \tilde{\lambda}(e_i,e_j)=e_{i+j} & \text{при } i+j=s, \text{ где } \tilde{\lambda} - \\ & \text{стандартный коцикл из } C^2_{(i+j)}(L). \end{cases}$$

Нам понадобятся вспомогательные вычисления когомологий с тривиальными коэффициентами.

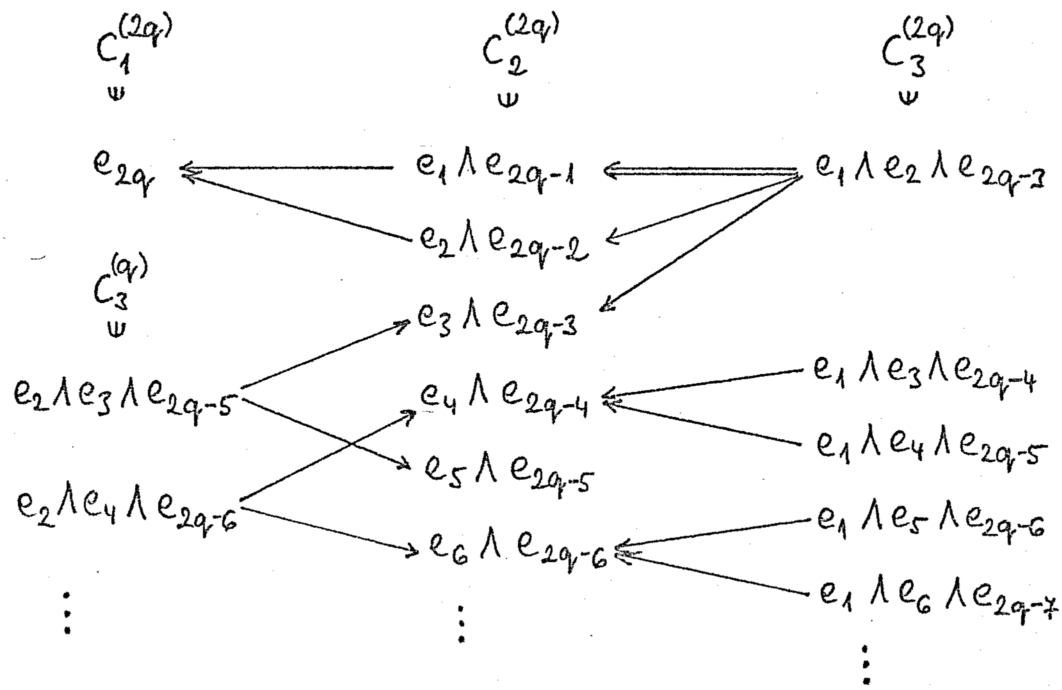
Лемма.

$$\dim H^2_{(r)}(L) = \begin{cases} 1 & \text{если } r=5 \text{ или } 4k-1 \text{ или } 4k \ (k\geq 2), \\ 0 & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Доказательство. Проведем раздельное вычисление для $r \equiv 0, 1, 2, 3 \mod 4$. Случай $r<6$ прост, мы считаем, что $r \geq 6$. Мы вычисляем гомологии вместо когомологий (это возможно, поскольку пространства $C^*_{(r)}(L)$ конечномерны).

а) Для $r=2q$ поведение дифференциала в стандартном комплексе определяется следующей диаграммой (4.4).

Объясним обозначения на диаграмме. В правом нижнем углу сплошные стрелки относятся к случаю четного q, пунктирные к случаю нечетного q. Вообще стрелка $\alpha \longrightarrow \beta$ означает, что β входит в $\partial\alpha$ с коэффициентом ± 1; коэффициент -1 обозначен двойной стрелкой, он на диаграмме встречается только один раз.



$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
 & \vdots & \vdots \\
\vdots & & e_1\wedge e_{q-4}\wedge e_{q+3} \arrow[dl] \arrow[dddl, dashed] \\
 & e_{q-4}\wedge e_{q+4} & \\
e_2\wedge e_{q-4}\wedge e_{q+2} \arrow[ur] \arrow[dddr] & & e_1\wedge e_{q-3}\wedge e_{q+2} \arrow[ul] \arrow[dl, dashed] \\
 & e_{q-3}\wedge e_{q+3} & \\
e_2\wedge e_{q-3}\wedge e_{q+1} \arrow[ur] \arrow[dddr] & & e_1\wedge e_{q-2}\wedge e_{q+1} \arrow[dl] \arrow[dddl, dashed] \\
 & e_{q-2}\wedge e_{q+2} & \\
e_2\wedge e_{q-2}\wedge e_q \arrow[ur] & & e_1\wedge e_{q-1}\wedge e_q \arrow[ul] \arrow[dl, dashed] \\
 & e_{q-1}\wedge e_{q+1} &
\end{tikzcd}
\tag{4.4}
$$

Граница остальных цепей из $C_3^{(2q)}$ равна нулю.

При любом q цепи

$$e_4\wedge e_{q-5}\ ,\ \ldots,\ e_{2k}\wedge e_{q-(2k+1)}\ ,\ \ldots$$

– границы (на диаграмме (4.4) справа). Если q нечетно, то цепи

$$e_{q-2}\wedge e_{q+2}\ ,\ e_{q-4}\wedge e_{q+5}\ ,\ \ldots,\ e_3\wedge e_{2q-3}$$

также являются границами (на диаграмме слева). Таким образом, всякий цикл гомологичен цепи вида $\lambda(e_1\wedge e_{q-1})+\mu(e_2\wedge e_{q-2})$; но такая цепь – цикл лишь при $\lambda=-\mu$, а данная цепь (с точностью до слагаемого, кратного $e_3\wedge e_{2q-3}$) – граница от $e_1\wedge e_2\wedge e_{2q-3}$.

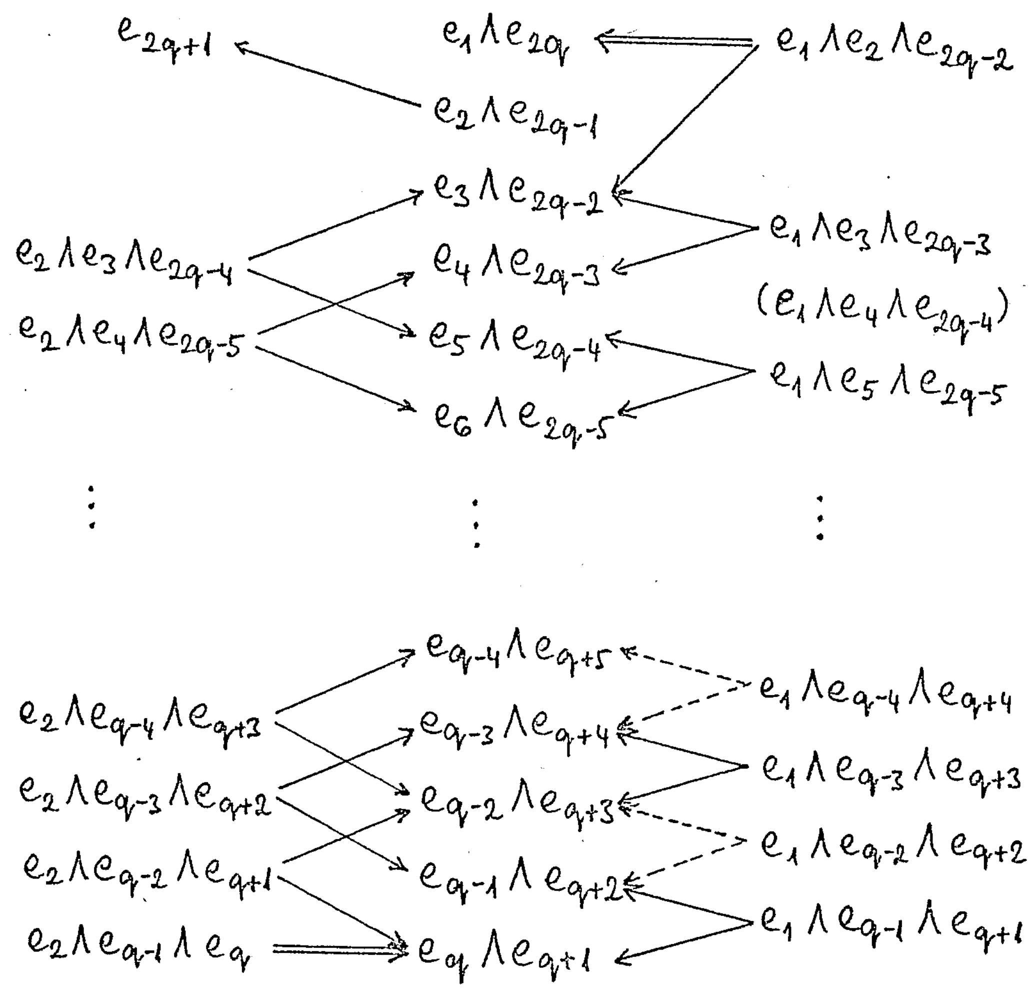
Если q четно, то мы имеем только

$$e_3\wedge e_{2q-3}\sim e_5\wedge e_{2q-5}\sim\ \ldots\ \sim e_{q-1}\wedge e_{q+1}$$

($\sim$ означает "гомологично с точностью до знака") и все это гомологично $e_1\wedge e_{2q-1}-e_2\wedge e_{2q-2}$. Эти циклы нулю уже не гомологичны. Итак,

$$H_2^{(4p+2)} = 0\,, \qquad \dim H_2^{(4p)} = 1\,.$$

б) Аналогичная диаграмма 4.5 для случая $\tau = 2q+1$ выглядит следующим образом:



(4.5)

Когомологии с тривиальными коэффициентами устроены так же. Укажем коциклы. В $H^2_{(4p)}$

$$\xi : (e_i \wedge e_{4p-i}) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{если } i \text{ четно,} \\ \pm 1 & \text{если } i \text{ нечетно} \end{cases}$$

(знаки чередуются так: +I, +I, −I, +I, −I, +I, и т.д.).

В $H^2_{(4p-1)}$

$$\eta \ : \ (e_i \wedge e_{4p-i}) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{если} \quad i=2, \\ \pm 1 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

(знаки: = I, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...
+ + − − + + − − + + ...).

Отсюда следует, что

$$H_2^{(4p+1)} = 0, \qquad \dim H_2^{(4p+3)} = 1 .$$

Доказательство леммы закончено.

Перейдем к доказательству предложения 4.2, т.е. к вычислению $H^2_{(0)}(L;L)$.

Пусть $\varphi(e_i, e_j) = a_{ij}\, e_{i+j}$ – коцикл. Рассмотрим коцепь

$$\varphi_r \in C^2_{(r)}(L), \qquad \varphi_r(e_i, e_j) = \begin{cases} a_{ij} & \text{при} \quad i+j=r, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\varphi_1 = \dots = \varphi_{s-1} = 0$, $\varphi_s \neq 0$. Тогда φ_s – коцикл (с тривиальными коэффициентами) и если φ_s есть кограница (с тривиальными коэффициентами), то его можно убить прибавлением кограницы к φ (это – очевидно).

Таким образом, для вычисления когомологий $H^2_{(0)}(L;L)$ нужно:

(I) рассмотреть коциклы ξ, η, представляющие $H^2_{(4p)}(L)$, $H^2_{(4p-1)}(L)$;

(2) каждый из этих коциклов попытаться продолжить цепочкой $\varphi_{(r+1)}, \varphi_{(r+2)}, \dots$, где $\varphi_{(i)} \in C^2_{(i)}(L)$, до коцикла $\varphi \in C^2_{(0)}(L;L)$. Коциклы, которые удается продолжить, порождают $H^2_{(0)}(L;L)$.

(А) Коциклы из $C^2_{(4p-1)}$ не продолжаются.

Действительно, предположим, что существует коцикл

$$\varphi(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i+j < 4p-1, \\ \eta(e_i \wedge e_j)\, e_{4p-1} & \text{при} \quad i+j = 4p-1. \end{cases}$$

Тогда при нечетном i

$$0 = \varphi(e_1, e_i, e_{4p-1-i}) = \varphi(e_{i+1}, e_{4p-1-i}) - [e_1, \varphi(e_i, e_{4p-1-i})]$$

(остальные слагаемые нули),

откуда

$$\varphi(e_{i+1}, e_{4p-1-i}) = \eta(e_i \wedge e_{4p-1-i})\, e_{4p} .$$

Но это невозможно: должно быть

$$\varphi(e_{i+1}, e_{4p-(i+1)}) = -\varphi(e_{4p-(i+1)}, e_{i+1}) ,$$

т.е. при нечетном i

$$\eta(e_i \wedge e_{4p-i-1}) = -\eta(e_{4p-i} \wedge e_{i+1}) = \eta(e_{i+1} \wedge e_{4p-i}) ,$$

чего в действительности нет.

(В) Коциклы из $C^2_{(4p)}$ продолжаются.

Действительно, ищем продолжение в виде

$$\varphi(e_i, e_j) = \varphi_{(r)}(e_i, e_j)\, e_{i+j} , \qquad \text{где} \quad \varphi_{(r)}(e_i, e_j) \in \mathbb{C} \quad \text{и}$$

$\varphi_{(r)}(e_i, e_j) = 0$, если хотя бы одно из чисел i, j нечетно. Тогда $\delta\varphi(e_i, e_j, e_k)$ может быть не равным нулю только при i, j или k равным двум. Тогда

$$\delta\varphi(e_2, e_i, e_j) = [\varphi_{(i+j+2)}(e_{i+2}, e_j) + \varphi_{(i+j+2)}(e_i, e_{j+2}) - \\ - \varphi_{(i+j)}(e_i, e_j)]\, e_{i+j+2} .$$

Чтобы φ было коциклом, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\varphi_{(i+j)}(e_i, e_j) = \varphi_{(i+j+2)}(e_{i+2}, e_j) + \varphi_{(i+j+2)}(e_i, e_{j+2}) . \tag{4.6}$$

Нам дано $\varphi_{(4p)}$ и мы определяем по индукции $\varphi_{(4p+2)}, \varphi_{(4p+4)}, \dots$ при помощи равенства (4.6). Нужно только, чтобы отображение

$$\left\{\begin{matrix} \psi \in C^2_{(2k+2)}(L) \\ \psi(e_{\text{четн.}}, e_{\text{четн.}})=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\omega} \left\{\begin{matrix} \chi \in C^2_{(2k)}(L) \\ \chi(e_{\text{четн.}}, e_{\text{четн.}})=0 \end{matrix}\right\},$$

где $\omega\psi(e_i, e_j) = \psi(e_{i+2}, e_j) + \psi(e_i, e_{j+2})$ было эпиморфизмом. Но оно, очевидно, есть эпиморфизм.

(Замечание. При четном k ω есть изоморфизм, а при нечетном k имеет одномерное ядро. Это показывает, что при продолжении коцикла ξ на каждом четном шаге возникает произвол. Иначе и быть не может: класс когомологий, начинающийся с уровня $4p$ определен с точностью до прибавления классов на уровнях $4p+4$, $4p+8$ и т.д.)

(С) Пространство $H^2_{(5)}(L) \neq 0$. Коцикл

$$\varphi_{(5)}(e_2, e_3)=0, \quad \varphi_{(5)}(e_1, e_4) = e_5$$

продолжается, но определяемая им деформация нас не интересует, т.к. при ней делается отличным от нуля $[e_1, e_4]$.

Доказательство предложения закончено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов Л.Л. Об алгебре Хопфа локального кольца. Изв.АН СССР, сер.мат., 1974, т.38, № 2, 253-277.
2. Артин Н. Алгебраизация формальных модулей. Математика, 1970, т.14, №4, 3-47.
3. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. "Группы, порожденные отражениями". Системы корней. Москва, Мир, 1972.
4. Гельфанд И.М., Фукс Д.Б. Когомологии алгебры Ли касательных векторных полей гладкого многообразия I-II. Функц. анализ, 1969, т.3, вып.3, 32-52; 1970, т.4, вып.4, 23-31.
5. Гончарова Л.В. Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей на прямой. Функц. анализ, 1973, т.7, вып.2, 5-14.
6. Джумадильдаев А.С. Относительные когомологии и деформации алгебр Ли картановских типов. Доклады АН СССР, 1981, т.257, №5, 1044--1048.
7. Джумадильдаев А.С.,Кострикин А.И. Деформации алгебры Ли $W_1(m)$. Труды МИ АН СССР, 1978, т.148, 141-155.
8. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. Москва, ИЛ. 1960.
9. Кац В.Г. Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста. Изв.АН СССР, 1968, т.32, 1323-1367.
10. Лейтес Д.А. Когомологии супералгебр Ли. Функц. анализ, 1975, т.9, вып.4, 75-76.
11. Маклейн С. Гомология. Москва, Мир, 1966.
12. Пагон Д. О деформациях нильпотентных градуированных алгебр Ли. Вестник МГУ, мех.-мат., 1981, №4, 50-54.
13. Паламодов В.П. Деформации комплексных пространств. 1976, Успехи мат.наук, т.31, вып.3, 129-194.
14. Ретах В.С. Операции Масси в супералгебрах Ли и деформации комп-

лексно-аналитических алгебр. Функц. анализ, I977, т.II, вып.4, 88-89.

I5. Ретах В.С. Операции Масси в супералгебрах Ли и дифференциалы спектральной последовательности Квиллена. Функц. анализ, I978, т.I2, вып.4, 9I-92.

I6. Ретах В.С., Фейгин Б.Л. О когомологиях некоторых алгебр и супералгебр Ли векторных полей. Успехи мат.наук, I982, т.37, вып.2, 233-234.

I7. Рудаков А.Н. Деформации простых алгебр Ли. Изв.АН СССР, сер.мат. I97I, т.35, №5, III3-III9.

I8. Семинар Софус Ли. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Москва, I96I.

I9. Серр Ж.-П. Сингулярные гомологии расслоенных пр-в, в сб. Расслоенные пр-ва, ИЛ, М., I958, I24-I62.

20. Толпыго А.К. Когомологии нильпотентных алгебр Ли и их производящие функции. Успехи мат.наук, I979, т.34, вып.I, 245-246.

2I. Фейгин Б.Л. О гомологиях алгебры Ли полиномиальных векторных полей на прямой. Вопросы теории групп и гомологической алгебры, вып.2. Ярославль, I979, 2I6-22I.

22. Фейгин Б.Л. О когомологиях групп и алгебр токов. Успехи мат. наук, I980, т.33, вып.II, 225-226.

23. Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б. Гомологии алгебры Ли векторных полей на прямой. Функц. анализ, I980, т.I4, вып.3, 45-60.

24. Фиаловски А. Деформации алгебры Ли векторных нолец на прямой. Успехи мат.наук, I983, т.38, вып.I, 20I-202.

25. Фиаловски А. О классификации бесконечномерных алгебр Ли с двумя образующими. Вестник МГУ, мат.-мех., I983, №2, 62-64.

26. Фукс Д.Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли и характеристические классы слоений. Итоги науки, Современные проблемы, т.I0, I978, I79-285.

27. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. Москва, Мир, I98I.

28. Шлезингер М. Функторы на категории артиновых колец. Математика, I97I, т.I5, №4, II5-I29.

29. Barr M. Harrison homology, Hochschild homology and triples. J. Algebra, 1963, v.8, 314-323.

30. Bernstein I.N., Gelfand I.M., Gelfand S.I. Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$-modules. Lie groups and their representations. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.

31. Bott R., Segal G. The cohomology of the vector fields on a manifold. Topology, 1977, v.16, 283-298.

32. Bratzlavsky F. Sur les algebres admettant un tore d automorphismes donné. J. Algebra, 1974, v.30, n1-3, 305-316.

33. Cartan H. La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal. Coll. de Top. alg., Bruxelles, 1950, 57-71.

34. Fialowski A. Deformations of nilpotent Kac-Moody algebras. Studia Sci. Mat. Hung., v.16 /to appear/.

35. Gabber O., Kac V.G. On defining relations of certain infinite dimensional Lie algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 1981, v.5, n.2, 185-189.

36. Garland H., Lepowsky J. Lie algebra homology and the Macdonald-Kac formulaes. Invent. Math. 1976, v.34, 37-76.

37. Gerstenhaber M. On the deformation of rings and algebras. Ann. of Math., Ser.2., 1964, v.79, N1, 59-103, II. 1966, v.84, N1, 1-19, III. 1968, v.88, N1, 1-34, IV. 1974, v.99, N2, 257-276.

38. Grauert H., Kerner H. Deformationen von Singularitaten komplexer Raume. Math. Annalen, 1964, v.153, 236-260.

39. Guichardet A. Cohomologie des groupes topologiques et des algebres de Lie. Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1980.

40. Harrison D.K. Commutative algebras and cohomology. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 104, N2, 191-204.

41. Hermann R. Analytic Continuation of Group Representations. Comm. in Math. Phys. Part I, 1966, 2, 251-270, Part II, 1966, 3, 53-74, Part III 1966, 3, 75-97, Part IV 1967, 5, 131-156, Part V 1967, 5, 157-190, Part VI 1967, 6, 205-225.

42. Illusie L. Complexe cotangent et déformations I. Lect. Notes in Math. 239, Berlin, Springer-Verlag, 1971.

43. Kac V.G. Some problems on infinite dimensional Lie algebras and their representations. Preprint, 1981.

44. Kaplansky I. The Virasoro Algebra. Comm. Math. Phys., 1982, v.86, N1, 49-54.

45. Kodaira K., Spencer D.C. On deformations of complex analytic structures I-II, Ann. of Math. 1958, v.67, N2-3, 326-466.

46. Kostant B. Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil Theorem. Ann. of Math. 1961, v.74, N2, 329-387.

47. Laudal O.A. Formal Moduli of Algebraic Structurs. Lect. Notes 754, Springer-Verlag, 1979.

48. Leger F.G., Luks E.M. Cohomology of nilradicals of Borel subalgebras. Trans. Amer. Math. Soc. 1974, v.195, 305-315.

49. Lepowsky J. Generalized Verma modules, loop space cohomology and Macdonald-type identities. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 1979, 4 ser., t.12, 169-235.

50. Lepowsky J., Milne S. Lie Algebraic Approaches to Classical Partition Identities. Adv. Math. 1978, 29, 15-59.

51. Macdonald I.G. Affine Lie algebras and modular forms. Sém. Bourbaki no.577, Juin 1981.

52. Moody R.V. A new class of Lie algebras. J. Algebra, 1968, v.10, 211-230.

53. Moore J.C. Algebre homologique et homologie éspace classificants, Sem. H. Cartan 1959/60, Exp. N7.

4. Nijenhuis A., Richardson R.W. Cohomology and deformations in graded Lie algebras. Bull. Amer. Math. Soc., 1966, v.72, N1, 1-29.

5. Piper W.S. Algebras of matrices under deformation. J. of Diff. Geom. 1971, v.5, N3-4, 437-449.

6. Quillen D. On the /co-/homology of commutative rings. Proc. Symp. Pure Math. 1970, 17, 65-87.

7. Vergne M. Reductibilité du la varieté des algebres de Lie nilpotentes. C. r. Acad. sci., 1966, 263, N1, 4-6.