

dc_476_12

VÁLTOZÓ TÖMEGŰ TEST DINAMIKÁJA

Cvetityanin Lívía, PhD

MTA doktori értekezés tézisei
2012

I. A kitűzött kutatási feladat rövid összefoglalása

Sok gépnek és mechanizmusnak működése alatt egyes részeknek megváltozik a tömege és a tehetetlenségi nyomatéka. Ez komoly problémát okozhat, mivel kihat a mechanizmus és a gép mozgására és a működés pontosságára. A kitűzött kutatási feladatom ilyen kérdések megoldásával foglalkozik.

1. Az *első témakörben* kiellemeztem egyes változó tömegű gépek és mechanizmusok működését. Foglalkoztam különböző szűrőkkel, szállítási szallagokkal és gépekkel, mérő eszközökkel, keverő gépekkel és változó tömegű rotorokkal, a papír, a textil, és a kábel iparban, valamint a szőnyeg készítő gépeknél is. A tömeg és a tehetetlenségi nyomaték ezeknél a gépeknél folyamatosan (kontinuálisan) vagy megszakításokkal (diszkontinuálisan) változik.

2. A *második témakörben* a test szétválasztás vagy összevonás esetében történő mozgásmennyiséget és perdületet vizsgáltam. Meghatároztam:

- a szabadon mozgó test mozgásmennyiségét és perdületét
- a lekapcsolt vagy a testhez hozzá adott szabadon mozgó test mozgásmennyiségét és perdületét valamint
- az újonnan keletkezett test mozgásmennyiségét és perdületét elemeztem.

3. Értekezésem *harmadik témaköre* a megszakításokkal változó tömegű test dinamikájára vonatkozik. A klaszikus dinamikai törvények kiterjesztése után, a kutatási feladatok a következők:

- egy test leszakadása vagy hozzáadása után, az újonnan keletkezett test sebessége
- egy test leszakadása vagy hozzáadása után, az újonnan keletkezett test szögsebessége
- a változó tömegű test síkbeli mozgása
- egy test leszakadása után, a rotor síkbeli mozgása

4. A *negyedik témakörben* alkalmazom és kibővítem az analitikus módszert és alkalmazom a test diszkontinuálisan változó tömegű test dinamikai elemeinek meghatározására:

- kinetikus energia változása a test tömege és tehetetlenségi nyomaték változásakor.
- Egy inga szétválasztásától kellekített dinamikai problémát is vizsgáltam.

5. Az *ötödik témakörben* a folyamatosan változó tömeg és test dinamikáját tanulmányoztam. Az időben változó test tömege és tehetetlenségi nyomatéka változásakor bevezettem a reaktív erő mellett egy új reaktív nyomatékokat is. Vizsgáltam mind a két reaktív erőnek kihatását a szabadon mozgó test dinamikájára.

- Kidolgoztam a mozgás differenciális egyenleteit
- Az újonnan levezetett elméletet felhasználtam egy meglévő műszaki probléma megoldására amikor a szallag rátekereslődik a dobóra. Elemeztem milyen a hatás pld. ha a rotor tengelye rugalmas vagy ha merev.

6. A *hatodik témakörben* levezettem a Lagrange egyenleteket a folyamatosan változó tehetetlenségi nyomaték és tömegű test mozgására. Az egyenleteket kibővítettem és a test tömegét valamint a geometriai változását is számításba vettem.

7. A *hetedik témakörben* az értekezés fő célkitűzései a következő területekre irányultak:

- Egy szabadságfokú test rezgése
- A rezgés differenciális egyenletének új megoldási módszere

- Van der Pol rezgés-keltő rendszer
- Két szabadságfokú egy test rezgése (Rotorok rezgése)
- Két szabadságfokú két test rezgése.

II. Az elvégzett vizsgálatok rövid leírása és a feldolgozás módszerei

Változó tömegű testnél kifejlesztettem egy új módszert a rezgés vizsgálatára. A nemlineáris erők is számításba vannak véve. A rezgés matematikai modelje nemlineáris időben változó paraméteres másodrendű differenciális egyenlet. A nemlineáris tag lehet egész, de nem egész fokú is. A módszer a konstans paraméterű rendszer pontos vagy approximatív megoldásán alapszik. A megoldás Ateb, trigonometrikus vagy Jakobi elliptikus függvény alakú. A megoldás a pontos rezgés periódust, legnagyobb rezgésamplitúdót és rezgés sebességét közelíti meg. Az eddigi tanulmányokban, a sebesség nem volt számításba véve az approximatív megoldásnál és sokszor eltért a pontos nagyságtól. Az itt bemutatott megoldás egy perturbált változata az állandó változatlan paraméterű egyenlet megoldásának, ahol a rezgésamplitúdó, rezgésfrekvenció és a fázis időben változó függvények. A módszer különböző típusú rezgő test mozgásának meghatározására van felhasználva. Az analitikus módszerrel meghatározott eredmények a numerikaival vannak hasonlítva. A jól ismert Runge-Kutta módszert használtam a numerikus eredmények meghatározására. Az értekezésben kifejlesztett módszerrel meghatározott eredmények nem térnek el a numerikus módszerrel számított adatoktól.

A diszkontinuálisan változó tömegű test mozgásának vizsgálatára az általános klasszikus dinamikai törvényeket használtam. Annak alapján kiterjesztettem a merev test szétválasztásával vagy összevonásával keletkezett mozgás elemzésének módszerét.

Alkalmazva az analitikus dinamikában szerepelő elveket, egy új analitikus eljárásmodot fejlesztettem ki, amellyel meghatároztam a maradványt vagyis az újonnan szerkesztett test sebességét és szögsebességét, amely a diszkontinuális test szétválasztásakor vagyis összeadásakor keletkezik.

III. A tudományos eredmények rövid összefoglalása

1. Tézis:

Bevezető. Változó tömegű gépek és mechanizmusok

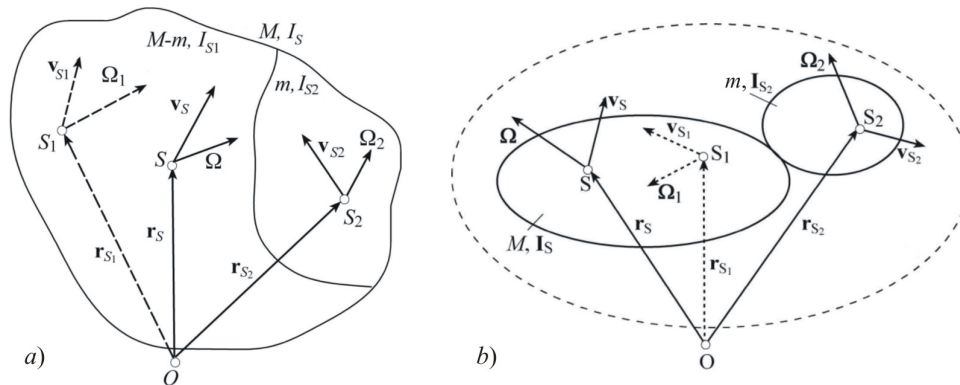
Feldolgoztam a változó tömegű test mozgásának problematikáját: a múltban és most. Külön figyelmet fordítottam arra hogyan hat a tömeg változása a testek mozgására a celesztrális mechanikában. A rakéta dinamikájával az értekezésemben nem foglalkodtam, mert a mozgását nagzmértékben és leginkább a változó tömegű pont dinamikában elemezik. Az első, bevezető részben rámutattam azokra a változó tömegű gépekre és mechanizmusokra, amelyek az iparban és a gyáripárban működnek. Magyarázatot adtam a működésükről és kihangsúlyoztam a tömeg és a tehetetlenségi nyomaték változásának előnyét és fontosságát.

A tézishoz szorosan kapcsolódnak a következő publikációk: [S1], [S3], [S4], [S8], [S10], [6], [8]-[10], [16], [38], [40], [43], [48].

2. Tézis:

Mozgásmennyiség és perdület a testek összevonásakor vagyis szétválasztásakor

Meghatároztam a mozgásmennyiséget és a perdületet a testek összevonásakor vagyis szétválasztásakor. A 1. ábrán az alap test, leválasztott vagyis hozzáadott test és az újonnan keletkezett test látható. A tanulmányaimba a következőket feltételeztem: 1) a tömeg változása nagyon rövid ideig tart, 2) az alap test és a levált test, illetve az alap test és a hozzáadott test, a változások előtt és után egy rendszert képeznek. Az alap test és a levált test között, vagyis az alap és a hozzáadott test között erő-impulzusok keletkeznek. Felhasználva a 2) feltételt, az impulzusok belső hatásúak, és nem jönnek számításba a rendszer mozgásának elemzésénél.



1. ábra. a) Test szétválasztásának modelje, b) Testek összevonásának modelje.

A tézishoz kapcsolódnak a következő publikációk: [S1], [6], [44], [45], [54].

3. Tézis:

Diszkontinuálisan változó tömegű testek dinamikája.

Az általános klasszikus dinamikai törvények alapján kifejlesztettem a merev test szétválasztásának vagyis összevonásának elméletét. Meghatároztam a test ugrás kinézetű sebességének és szögsebességének változását, amely a leválasztott vagyis hozzáadott test mozgásától keletkezett. Külön esetként megoldottam a szétválasztott testeknek síkbeli mozgását is. Az így kifejlesztett módszert alkalmazva, meghatároztam egy Jeffcott rotorról leválasztott tömeg dinamikai paramétereit is.

A kapcsolódó publikációk: [S17], [22], [24], [44], [45], [57].

4. Tézis:

Diszkontinuálisan változó tömegű testek analitikai dinamikája.

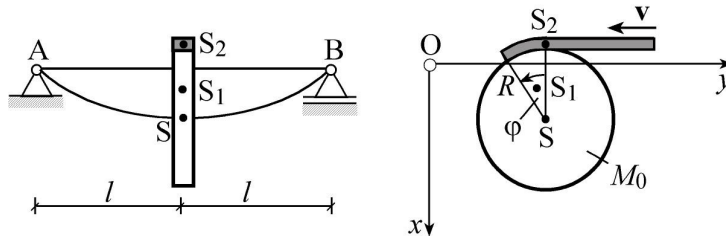
Kifejlesztettem egy új analitikai módszert, amellyel a test sebessége és a szögsebessége, egy test leválása vagyis hozzáadása után, meghatározható. A módszer az ütközés analitikus elméletén alapszik. Meghatároztam az egész test, az elválasztott és maradvány test kinetikus energiáját, vagyis a hozzáadott és az újonnan keletkezett test kinetikus energiáját is. Bemutattam hogyan változik a kinetikus energia az elválasztott és maradvány testnél, ha a szétválasztás rugalmatlan. A tömeg szétválasztását egy ingánál mutattam be.

A tézishez kapcsolódnak a következő publikációk: [S19], [S20], [54]

5. Tézis:

Folyamatosan változó tömegű testek dinamikája.

Kidolgoztam a folytonos változó tömegű merev test szabad mozgásának differenciális egyenleteit. Bevezettem a reaktív erő mellett a reaktív nyomatékot is, amely a test szétválásánál vagy összevonásánál jelentkezik, ha a relatív sebesség és relatív szögsebesség nem nulla. Megoldottam egy valóságos műszaki problémát is amikor a szallag tekeredik a dobra (2. ábra).



2. ábra. Változó tömegű Jeffcott rotor modelje.

A tézishez kapcsolódnak a következő publikációk: [S1], [S18], [4]-[6], [18]-[21], [26], [14], [33]-[35], [39], [41], [42], [55], [56].

6. Tézis:

Lagrange differenciális egyenletek

Új módon levezettem a Lagrange differenciális egyenleteket, amelyek meghatározzák a folytonosan változó tömegű test mozgását. Kiszámítottam a kinetikus energiát, potenciális energiát és a generalizált erőt, amely számításba vette a reaktív erőt valamint a reaktív nyomatékot.

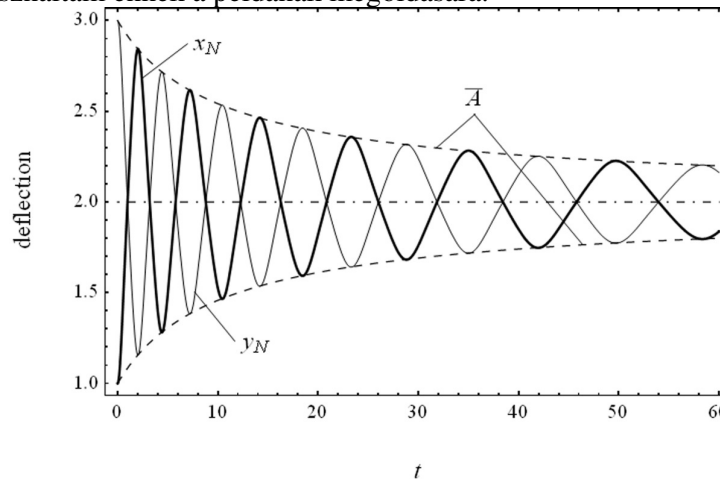
Kapcsolódó publikációk: [S1], [S15], [6], [12], [37], [39].

7. Tézis:

Változó tömegű testek rezgése

Az előbbi tézis alapján meghatároztam a változó tömegű test rezgését. Megfelelő matematikai egyenleteket állítottam fel. A nemlineáris időben változó paraméteres differenciális egyenlet megoldására új módszert dolgoztam ki (lásd a II. Fejezetet). Új eredményeket találtam az egy-szabadságfokú rezgő testnél, ahol a reaktív erő befojásolja a rezgés amplitudót és a lengésidőt. Tanulmányoztam a Van der Pol rendszer rezgését az időben változó paraméter hatása alatt. Meghatároztam azt a határértéket, amely alatt zártkörű mozgás történik, és a rezgés változatlan, noha egy határértékű amplitudóval rezeg. Ha a tömeg változása átlépi a határértéket, a rezgés idővel megszűnik. Kutatást végeztem a rotor rezgéséről mivel a rezgés energia veszteséget okoz a működő rotornál és ezt ki kellene küszöbölni. A változó tömegű rotor két, vagy egy frekvencios rezgését tanulmányoztam. A tengely merevsége is kihatással van az ilyen rotor rezgésére. Végül, a 2két test rezgését elemeztem. A testek nemlineáris ruganyos

rugóval voltak összekötve. Mindkét testnek a tömege változó volt. Értekezésemben saját módszeremet használtam ennek a példának megoldására.



3. ábra. Két test rezgése: analitikus megoldás $A-t$, és numerikus megoldás x_N-t , y_N-t .

Amint látható a 3. ábrán, nincs eltérés a numerikus és az analitikus megoldások között.

A tézishoz szorosan kapcsolódnak a következő publikációim: [S2], [S5]-[S7], [S9], [S11]-[S14], [S16], [S21]-[S23].

Kapcsolódó publikációk: [1]-[3], [7], [11], [13], [15], [17], [19], [23], [25], [27]-[32], [36], [46], [47], [50]-[53], [58]-[60].

Irodalomjegyzék

Az értekezés témaköréből megjelent publikációim jegyzéke

Tudományos könyv

[S1] L. Cveticanin. Dynamics of machines with variable mass. Gordon and Breach Science Publishers, London, 1998.

Folyóirat cikkek

[S2] L. Cveticanin. Vibrations of a textile machine rotor. Journal of Sound and Vibration, 97 (2):181-187, 1984.

[S3] L. Cveticanin. The stability of a textile machine rotor with increasing mass. Mechanism and Machine Theory, 23 (4):275-278, 1988.

[S4] L. Cveticanin. Stability of a clamped-free rotor with variable mass for the case of radial rubbing. Journal of Sound and Vibrations, 129 (3):489-499, 1989.

[S5] L. Cveticanin. The oscillations of a textile machine rotor on which the textile is wound up. Mechanism and Machine Theory, 26 (3):253-260, 1991.

[S6] L. Cveticanin. The influence of the reactive force on a nonlinear oscillator with variable parameter. Journal of Vibrations and Acoustics, Trans. ASME, 114 (4):578-580, 1992.

[S7] L. Cveticanin. An approximative solution of a coupled differential equation with variable parameter. Trans. ASME, J. of Applied Mechanics, 60(1):214-217, 1993.

- [S8] L. Cveticanin. Conservation laws in systems with variable mass. *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, 60 (4):954-958, 1993.
- [S9] L. Cveticanin. The influence of the reactive force on the motion of the rotor on which the band is winding up. *Journal of Sound and Vibration*, 167 (2):382-384, 1993.
- [S10] L. Cveticanin. Some conservation laws for orbits involving variable mass and linear damping. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 17 (1):209-211, 1994.
- [S11] L. Cveticanin. Approximate solution of a time-dependent differential equation. *Meccanica*, 30:665-671, 1995.
- [S12] L. Cveticanin. On the stability of rheo-linear rotor systems based on some new first integrals. *Mechanics, Research Communications, Basic and Applied*, 23 (5):519-530, 1996.
- [S13] L. Cveticanin. The influence of the reactive force on the stability of motion for one-degree-freedom mechanisms with variable mass. *Machine Vibration*, 5:224-228, 1996.
- [S14] L. Cveticanin. Self-excited vibrations of the variable mass rotor/fluid system. *Journal of Sound and Vibration*, 212 (4):685-702, 1998□.
- [S15] L. Cveticanin. Dynamic buckling of a single-degree-of-freedom system with variable mass. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 20 (4):661-672, 2001.
- [S16] L. Cveticanin. A qualitative analysis of the quasi-linear one-degree-of-freedom system. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 23:667-675, 2004.
- [S17] L. Cveticanin. Particle separation form a four particle system. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 26:270-285, 2007.
- [S18] L. Cveticanin, I. Kovacic. On the dynamics of bodies with continual mass variation. *Trans ASME, Journal of Applied Mechanics*, 74:810-815, 2007.
- [S19] L. Cveticanin, Dj. Djukic. Motion of body with discontinual mass variation. *Nonlinear Dynamics*, 52 (3):249-261, 2008.
- [S20] L. Cveticanin. Dynamics of body separation -- Analytical procedure. *Nonlinear Dynamics*, 55 (3):269-278, 2009.
- [S21] L. Cveticanin. Oscillator with fraction order restoring force. *Journal of Sound and Vibration*, 320, (4-5):1064-1077, 2009.
- [S22] L. Cveticanin, T. Pogany. Oscillator with a sum of non-integer order non-linearities. *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2012, art. no. 649050, 20 pages, 2012.
- [S23] L. Cveticanin. Oscillator with non-integer order nonlinearity and time variable parameters. *Acta Mechanica*, 223 (7):1417-1429, 2012.

A szakirodalom legfontosabb közleményei

- [1] M.S. Abdalla. Canonical treatment of harmonic oscillator with variable mass. *Physical Review A*, 33 (5):2870-2876, 1986.
- [2] M.S. Abdalla. Time-dependent harmonic oscillator with variable mass under the action of a driving force. *Physical Review A*, 34 (6):4598-4605, 1986.
- [3] M. Abramowitz, I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Nauka, Moscow, 1979. (in Russian)
- [4] N.G. Apykhtin, V.F. Jakovlev. On the motion of dynamically controlled systems with variable masses. *Prikladnaja Matematika i Mehanika*, 44 (3):427-433, 1980.
- [5] A.G. Azizov. On the motion of a controlled system of variable mass. *Prikladnaja Matematika i Mehanika*, 50 (4):567-572, 1986.
- [6] A.P. Bessonov. *Osnovji dinamiki mehanizmov s peremennoj massoj zvenjev*. Nauka, Moscow, 1967.
- [7] P.F. Byrd, M.D. Friedman. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*. Springer-Verlag, Berlin, 1954.
- [8] A. Cayley. On a class of dynamical problems. *Proceeding of the Royal Society of London*, III: 506-511, 1857.

- [9] A. Cayley. On a class of dynamical problems. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, XV:306-310, 1858.
- [10] A. Cayley. The collected mathematical papers, IV(225):7-11, 1859.
- [11] S.H. Chen, Y.K. Cheung. An elliptic perturbation method for certain strongly non-linear oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, 192:453-464, 1996.
- [12] J.W. Cornelisse, H.F.R. Schoyer, K.F. Wakker. *Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics*. Pitman, London, 1979.
- [13] G. Crespo, A.N. Proto, A. Plastino, D. Otero. Information-theory approach to the variable-mass harmonic oscillator. *Physical Review A*, 42 (6):3608-3617, 1990.
- [14] S. Djerassi. An algorithm for simulation of motions of 'variable mass' systems. *Advances in the Astronautical Sciences*, 99 (1):461-474, 1998.
- [15] H.T. Drogomirecka. Integrating a special Ateb--function. *Visnik Lvivskogo Universitetu. Serija mehaniko--matematiczna*, 46:108--110, 1997. (in Ukrainian).
- [16] Ch. Dufour. Sur l'acceleration seculaire du mouvement de la lune. *Comptes rendus des Seances de l'Ac. des Sc.*, LXII:840-842, 1866.
- [17] P. Du Val. *Elliptic Functions and Elliptic Curves*. London Mathematical Society Lecture Notes Series 9, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [18] F.O. Eke, T.C. Mao. On the dynamics of variable mass systems. *The International Journal of Mechanical Engineering Education*, 30 (2), 2002.
- [19] J. Flores, G. Solovey, S. Gill. Variable mass oscillator. *American Journal of Physics*, 71 (7):721-725, 2003.
- [20] Z.-M. Ge, Y.H. Cheng. Extended Kane's equations for nonholonomic variable mass system. *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, 49 (2):429-431, 1982.
- [21] Z.-M. Ge. Equations of motion of nonlinear nonholonomic variable mass system with applications. *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, 51 (2):435-437, 1984.
- [22] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, 1980.
- [23] I.S. Gradstein, I.M. Rjizhik. *Tablici integralov, summ, rjadov i proizvedenij*. Nauka, Moscow, 1971.
- [24] L. N., Grudtsyn. Plane perturbed motion of a material point of variable mass. *PMM*, 36 (1):172-174, 1972.
- [25] H. Gylden. Die Bahnbewegungen in einem Systeme von zwei Koerpern in dem Falle das Massen Veraenderungen unterworfen sind. *Astronomische Nachrichten*, 109 (2593):1-6, 1884.
- [26] J.E. Howard. Particle dynamics with variable mass and charge. *Physics Letters, Section A: general, Atomic and Solid State Physics*, 366 (1-2):91-96, 2007.
- [27] <http://functions.wolfram.com/GammaBetaErf/Beta3/26/01/02/0001>, 2012
- [28] <http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric2F1/03/09/19/02/0017>, 2012
- [29] <http://functions.wolfram.com/EllipticIntegrals/EllipticF/16/01/02/0001>, 2012 □
- [30] <http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric2F1/03/07/17/01/0012>, 2012
- [31] A.O. Ignat'yev. On the instability of an equilibrium point of a linear oscillator with variable parameters. *Prikladnaja Matematika i Mehanika*, 55 (4):701-703, 1991.
- [32] E. Kamke. *Spravochnik po objiknovennjim differencial'njim uravnenijam*. Nauka, Moscow, 1971.
- [33] Ya.F. Kayuk, A. Tilavov. Motion of an elastically suspended solid of variable mass. *Prikladnaja Mekhanika*, 23 (15):102-109, 1987.
- [34] Ya.F. Kayuk, A. Akhmedov. Spatial motion of an elastically suspended cylindrical body of variable mass. *Prikladnaja Mekhanika*, 28 (7):62-69, 1992.

- [35] Ya.F. Kayuk, V.I. Denisenko. Motion of a mechanical system with variable mass - inertial characteristics. *International Applied Mechanics*, 40 (7):814-820, 2004.
- [36] P.G.L. Leach. Harmonic oscillator with variable mass. *Journal of Physics A: General Physics*. 16 (14), art.no. 019:3261-3269, 1983.
- [37] C. Leubnert, P. Krumm. Lagrangians for simple systems with variable mass. *European Journal of Physics*, 11 (1) art.no.005:31-34, 1990.
- [38] T. Levi Civita. Sul moto di un corpo di massa variable. *Rendiconti del Lincei*: 329-333, 621-622, 1928.
- [39] L.G. Luk'yanov. Conservative two-body problem with variable masses. *Astronomy Letters*, 31 (8):563-568, 2005.
- [40] A.M. Lyapunov. An investigation of one of the singular cases of the theory of the stability of motion. II. *Mathematicheskii Sbornik*, 17:253-333, 1893. (in Russian)
- [41] J.J. McPhee, R.N. Dubey. Dynamic analysis and computer simulation of variable-mass multi-rigid-body systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 (8):1711-1725, 1991.
- [42] L. Meirovitch. General motion of a variable-mass flexible rocket with internal flow. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 7 (2):186-195, 1970.
- [43] I.V. Meshcherski. Odin chasnij sluchaj zadachi Gouldena. *Astronomische Nachrichten*, 132(3153):9, 1893.
- [44] I.V. Meshchersky. *Dinamika tochki peremennoj massji*. Magistarskaja disertacija, Peterburgski Universitet, Petersburg, 1897.
- [45] I.V. Meshcherskij. *Rabotji po mehanike tel peremennoj massji*. Gos.Izd. tehniko-teoret.lit, Moscow, 1952.
- [46] R.E. Mickens. *Truly Nonlinear Oscillations*. World Scientific, Singapore, 2010.
- [47] A.H. Nayfeh, D.T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. Wiley, New York, 1979.
- [48] A. Oppalzer. Ueber die Ursache, welche den Unterschied zwischen der theoretischen berechneten Secularacceleration in der Laenge des Mondes und der thatsaechlichen bedingen kann. *Astronomische Nachrichten*, 108 (2573):67-72, 1884.
- [49] C.P. Pesce. The application of Lagrange equations to mechanical systems with mass explicitly dependent on position. *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, 70 (5):751-756, 2003.
- [50] A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2003.
- [51] R. Rosenberg. The ateb(h)-functions and their properties. *Quarterly of Applied Mathematics*, 21 (1):37-47, 1963.
- [52] G.I. Sanchez-Ortiz, A.L. Salas-Brito. Chaos in a variable mass relaxation oscillator model for the leaky tap. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 89 (1-2):151-168, 1995.
- [53] P.M. Senik. Inversion of the incomplete Beta function. *Ukrainian Mathematical Journal*, 21:271--278, 1969.
- [54] V.M. Starzhinskii. *An Advanced Course of Theoretical Mechanics*. Mir Publishers, Moscow, 1982.
- [55] T. Tran, F.O. Eke. Effects of internal mass flow on the attitude dynamics of variable mass systems. *Advances in the Astronautical Sciences*, 119, (Issue SUPPL.):1297-1316, 2005.
- [56] S.M. Wang, F.O. Eke. Rotational dynamics of axisymmetric variable mass systems. *Journal of Applied Mechanics*, 62 (4):970-974, 1995.
- [57] E.W. Weisstein. Lambert W-function. From MathWorld-AWolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html>
- [58] G.-Q. Xie, S.-W. Qian, Z.-Y. Gu. Separation of variables treatment of the time-dependent damped harmonic oscillator with an arbitrary varying mass and with a force

quadratic in the velocity under the action of an arbitrary time-varying force. *Physics Letters A*, 207 (1-2):11-16, 1995.

[59] S.B. Yuste. On Duffing oscillators with slowly varying parameters. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 26 (5):671-677, 1991.

[60] S.B. Yuste, J.D. Bejarano. Improvement of a Krylov-Bogoliubov method that uses Jacobi elliptic functions. *Journal of Sound and Vibration*, 139:151-163, 1990.