

Válasz opponensi bírálatra

Opponens: Béda Péter, egyetemi tanár, az MTA doktora

Szeretném megköszönni Béda Péter Professzor Úr részletes opponensi véleményét, segítő értékelését, érdekes hozzáfűzéseit, megjegyzéseit, kérdéseit.

Válaszaimat az alábbiakban adom meg.

VÁLASZOK

1. Kérdés: *A jelölt bevezeti (17. oldal) a rendszerre ható összes külső aktív erő és a kényszer erők eredőjét (\mathbf{F}_r), majd ennek erő-impulzusát \mathbf{I}^{Fr} (20) képlet. Hasonlóan erőpároknál bevezeti az \mathbf{I}^M mennyiséget. Ezeket használja a (21),(22),(23a), (24),(27),(28),(29) képletekben, majd két lépésben elhanyagolja mindkét mennyiséget, és így jut a 3.1 és 3.2 alfejezetek végén a végeredményhez (30),(31), illetve (33), (34). Miért van szükség minderre?*

A test tömegének változása ütközéskor aktív erők vagy erőpárok fellépésével jár, amelyek hatását számításba kell venni. A dinamika tételei és törvényei szerint translációs mozgás esetén a mozgásmennyiség változása egyenlő az \mathbf{I}^{Fr} erőimpulzussal (20). Rotáció esetén a perdület megváltozása megfelel az \mathbf{I}^M nyomaték-impulzusnak (22). Ez a két vektoregyenlet leírja a test dinamikáját a tömegváltozásra vonatkozóan. Az egyenletek megoldása megadja a változó tömegű test sebességét és szögsebességét.

Ha a test tömegváltozása ütközés nélkül megy végbe, vagyis külső erő vagy erőpár hatása nem jelentkezik, akkor ún. "spontán" tömegváltozás történik (ld. Landau, Lifshitz, 1958). Ez esetben az erőlkések és a nyomaték-impulzusok nullával egyenlőek, ezért nem szerepelnek a sebességet és a szögsebességet meghatározó (30), (31), illetve (33), (34) egyenletekben sem.

Landau, L.D., Lifshitz, E.M., *Teoreticheskaja fizika*, Tom I, Mehanika, Nauka, Moscow, 1958.

2. Kérdés: *A 3.3 alfejezet síkmozgással foglalkozik. Nem találtam annak kijelentését, hogy a mozgás síkjának normálisa a testek (az „egy test” a kettéválás előtt, vagy az összeolvadás után, illetve mindkét test, amikor éppen kettő van belőlük) tehetetlenségi nyomatéki főtengelye. Elképzelhető, hogy nem főtengely a mozgási sík normálisa?*

Egy síkban mozgó testnek mindig van egy olyan szimmetria síkja, amelyik párhuzamos a mozgás síkjával, így a sík normálisa tehetetlenségi nyomatéki főtengely. Például, ha az x és az y koordináta tengelyek a szimmetria síkban vannak, és a harmadik, a z tengely merőleges a síkra, ez a tengely tehetetlenségi nyomatéki főtengely, abban az esetben, ha az I_{xz} és az I_{yz} centrifugális tehetetlenségi nyomatékok értéke zéró. Ha a z tengely a test súlypontjában van, akkor ez a főtengely centrális is. (Az értekezést kibővítettem ezzel az észrevétellel).

3. Kérdés: *Mi biztosítja a dolgozatban tárgyalt esetekben, hogy ha két test síkmozgást végez, akkor összeolvadás után a létrejövő test továbbra is síkmozgást végezzon?*

4. Kérdés: *Mi biztosítja a dolgozatban tárgyalt esetekben, hogy szétválás után a testek mindegyike síkmozgást végezzon?*

Ha a testek szétválásakor, illetve összeolvadásakor fellépő erő- és nyomaték-impulzus a test tömegközéppontjának pályáját is magában foglaló, a mozgás síkjával egybeeső síkban hat, a testek mozgása – a tömeg megváltozása után is, – ugyanazon síkban folytatódik.

5. Kérdés: Kérem a jelöltet, hogy adja meg részletesen, hogy miként jön ki a (96) egyenlet, illetve hogyan gondolja részletesen a 4.1 rész előtti bekezdésben írtakat (33. oldal tetejétől a 4.1 alfejezetig.)

Ezt igen fontosnak tartom, mert a tudományos teljesítmény szempontjából ez a fejezet igen lényeges (4. tézis!)

A (96) egyenlet a tömeg megváltozása után képződő test sebességének és szögsebességének meghatározására használható. Az értekezésben egy, a leválás után megmaradó, szabadon mozgó test sebességének és szögsebességének meghatározása kapcsán mutattam be a (96) egyenlet alkalmazását. A megmaradó és a leválasztott testek is szabadon mozognak, kinematikai paramétereik ismertek. Általános sebességeknek a testek tömegközéppontjainak sebesség- és a testek szögsebességeinek x , y és z irányú komponenseit választottam. A továbbiakban részletesen levezetem a sebességek meghatározását, vagyis a (96) egyenlettől a 4.1 alfejezetig.

Sebesség és szögsebesség a változó tömegű testnél

Felhasználva a sebesség és szögsebesség vetületeit

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_S &= \dot{x}_S \mathbf{i} + \dot{y}_S \mathbf{j} + \dot{z}_S \mathbf{k}, & \mathbf{v}_{S1} &= \dot{x}_{S1} \mathbf{i} + \dot{y}_{S1} \mathbf{j} + \dot{z}_{S1} \mathbf{k}, \\ \mathbf{v}_{S2} &= \dot{x}_{S2} \mathbf{i} + \dot{y}_{S2} \mathbf{j} + \dot{z}_{S2} \mathbf{k}, & \boldsymbol{\Omega}_2 &= \Omega_{2x} \mathbf{i} + \Omega_{2y} \mathbf{j} + \Omega_{2z} \mathbf{k}, \\ \boldsymbol{\Omega} &= \Omega_x \mathbf{i} + \Omega_y \mathbf{j} + \Omega_z \mathbf{k}, & \boldsymbol{\Omega}_1 &= \Omega_{1x} \mathbf{i} + \Omega_{1y} \mathbf{j} + \Omega_{1z} \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

és a tehetelenségi nyomaték tenzorát

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_S &= \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}, & \mathbf{I}_{S1} &= \begin{bmatrix} I_{xx1} & I_{xy1} & I_{xz1} \\ I_{yx1} & I_{yy1} & I_{yz1} \\ I_{zx1} & I_{zy1} & I_{zz1} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{I}_{S2} &= \begin{bmatrix} I_{xx2} & I_{xy2} & I_{xz2} \\ I_{yx2} & I_{yy2} & I_{yz2} \\ I_{zx2} & I_{zy2} & I_{zz2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

megkapjuk az egész test kinetikai energiáját

$$T_1 = \frac{1}{2} M (\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 + \dot{z}_S^2) + \frac{1}{2} (I_{xx} \Omega_x^2 + I_{yy} \Omega_y^2 + I_{zz} \Omega_z^2 + 2I_{xy} \Omega_x \Omega_y + 2I_{xz} \Omega_x \Omega_z + 2I_{zy} \Omega_z \Omega_y), \quad (\text{A3})$$

a leválasztott

$$\begin{aligned} T_{S1} &= \frac{1}{2} (M - m) (\dot{x}_{S1}^2 + \dot{y}_{S1}^2 + \dot{z}_{S1}^2) + \frac{1}{2} (I_{xx1} \Omega_{x1}^2 + I_{yy1} \Omega_{y1}^2 + I_{zz1} \Omega_{z1}^2 \\ &\quad + 2I_{xy1} \Omega_{x1} \Omega_{y1} + 2I_{xz1} \Omega_{x1} \Omega_{z1} + 2I_{zy1} \Omega_{z1} \Omega_{y1}), \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

és a maradvány test kinetikai energiáját is

$$\begin{aligned} T_{S2} &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_{S2}^2 + \dot{y}_{S2}^2 + \dot{z}_{S2}^2) + \frac{1}{2} (I_{xx2} \Omega_{x2}^2 + I_{yy2} \Omega_{y2}^2 + I_{zz2} \Omega_{z2}^2 \\ &\quad + 2I_{xy2} \Omega_{x2} \Omega_{y2} + 2I_{xz2} \Omega_{x2} \Omega_{z2} + 2I_{zy2} \Omega_{z2} \Omega_{y2}). \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

Ha a leválasztott test súlypont sebessége

$$\mathbf{v}_{S2} = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{\rho}_{S2} + \mathbf{u}, \quad (\text{A6})$$

és szögsebessége

$$\boldsymbol{\Omega}_2 = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^*, \quad (\text{A7})$$

ahol $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$ a leválasztás relatív sebessége, $\boldsymbol{\Omega}^*(\Omega_x^*, \Omega_y^*, \Omega_z^*)$ a leválasztás relatív szögsebessége, és,

$$\boldsymbol{\rho}_{S2} = x_{S2}\mathbf{i} + y_{S2}\mathbf{j} + z_{S2}\mathbf{k}, \quad \mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\Omega}^* = \Omega_x^*\mathbf{i} + \Omega_y^*\mathbf{j} + \Omega_z^*\mathbf{k},$$

az abszolút sebesség

$$\begin{aligned} \dot{x}_{S2}\mathbf{i} + \dot{y}_{S2}\mathbf{j} + \dot{z}_{S2}\mathbf{k} &= \dot{x}_S\mathbf{i} + \dot{y}_S\mathbf{j} + \dot{z}_S\mathbf{k} + u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k} \\ &+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Omega_x + \Omega_x^* & \Omega_y + \Omega_y^* & \Omega_z + \Omega_z^* \\ x_{S2} & y_{S2} & z_{S2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Az \mathbf{i} , \mathbf{j} es \mathbf{k} irányban, a leválasztott test sebesség es szögsebesség komponensei

$$\begin{aligned} \dot{x}_{S2} &= \dot{x}_S + u_x + (\Omega_y + \Omega_y^*)z_{S2} - (\Omega_z + \Omega_z^*)y_{S2}, \\ \dot{y}_{S2} &= \dot{y}_S + u_y + (\Omega_z + \Omega_z^*)x_{S2} - (\Omega_x + \Omega_x^*)z_{S2}, \\ \dot{z}_{S2} &= \dot{z}_S + u_z + (\Omega_x + \Omega_x^*)y_{S2} - (\Omega_y + \Omega_y^*)x_{S2}, \\ \Omega_{x2} &= \Omega_x + \Omega_x^*, \quad \Omega_{y2} = \Omega_y + \Omega_y^*, \quad \Omega_{z2} = \Omega_z + \Omega_z^*. \end{aligned}$$

Az előbbi egyenletek parciális deriváltai

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_{S2}}{\partial \Omega_x} &= 0, \quad \frac{\partial \dot{y}_{S2}}{\partial \Omega_x} = -z_{S2}, \quad \frac{\partial \dot{z}_{S2}}{\partial \Omega_x} = y_{S2}, \\ \frac{\partial \dot{x}_{S2}}{\partial \Omega_y} &= z_{S2}, \quad \frac{\partial \dot{y}_{S2}}{\partial \Omega_x} = 0, \quad \frac{\partial \dot{z}_{S2}}{\partial \Omega_x} = -x_{S2}, \\ \frac{\partial \dot{x}_{S2}}{\partial \Omega_z} &= -y_{S2}, \quad \frac{\partial \dot{y}_{S2}}{\partial \Omega_x} = x_{S2}, \quad \frac{\partial \dot{z}_{S2}}{\partial \Omega_x} = 0, \\ \frac{\partial \Omega_{x2}}{\partial \Omega_x} &= 1, \quad \frac{\partial \Omega_{y2}}{\partial \Omega_y} = 1, \quad \frac{\partial \Omega_{z2}}{\partial \Omega_z} = 1. \end{aligned}$$

A maradvány test középpont sebessége és szögsebessége

$$\mathbf{v}_{S1} = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\rho}_{S1} + \mathbf{v}^*, \quad (\text{A8})$$

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}_1^*, \quad (\text{A9})$$

ahol a maradvány test relatív sebessége és szögsebessége, $\mathbf{v}^*(v_x^*, v_y^*, v_z^*)$ és $\boldsymbol{\Omega}_1^*(\Omega_{x1}^*, \Omega_{y1}^*, \Omega_{z1}^*)$. Továbbá,

$$\boldsymbol{\rho}_{S1} = x_{S1}\mathbf{i} + y_{S1}\mathbf{j} + z_{S1}\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}^* = v_x^*\mathbf{i} + v_y^*\mathbf{j} + v_z^*\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\Omega}_1^* = \Omega_{x1}^*\mathbf{i} + \Omega_{y1}^*\mathbf{j} + \Omega_{z1}^*\mathbf{k},$$

a maradvány test abszolút sebessége

$$\begin{aligned} \dot{x}_{S1}\mathbf{i} + \dot{y}_{S1}\mathbf{j} + \dot{z}_{S1}\mathbf{k} &= \dot{x}_S\mathbf{i} + \dot{y}_S\mathbf{j} + \dot{z}_S\mathbf{k} + v_x^*\mathbf{i} + v_y^*\mathbf{j} + v_z^*\mathbf{k} \\ &+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Omega_x + \Omega_{x1}^* & \Omega_y + \Omega_{y1}^* & \Omega_z + \Omega_{z1}^* \\ x_{S1} & y_{S1} & z_{S1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned} \dot{x}_{S1} &= \dot{x}_S + v_x^* + (\Omega_y + \Omega_{y1}^*)z_{S1} - (\Omega_z + \Omega_{z1}^*)y_{S1}, \\ \dot{y}_{S1} &= \dot{y}_S + v_y^* + (\Omega_z + \Omega_{z1}^*)x_{S1} - (\Omega_x + \Omega_{x1}^*)z_{S1}, \\ \dot{z}_{S1} &= \dot{z}_S + v_z^* + (\Omega_x + \Omega_{x1}^*)y_{S1} - (\Omega_y + \Omega_{y1}^*)x_{S1}, \\ \Omega_{x1} &= \Omega_x + \Omega_{x1}^*, \quad \Omega_{y1} = \Omega_y + \Omega_{y1}^*, \quad \Omega_{z1} = \Omega_z + \Omega_{z1}^*. \end{aligned}$$

Ezek az egyenletek parciális deriválása után:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}_{S1}}{\partial \Omega_x} &= 0, & \frac{\partial \dot{y}_{S1}}{\partial \Omega_x} &= -z_{S1}, & \frac{\partial \dot{z}_{S1}}{\partial \Omega_x} &= y_{S1}, \\ \frac{\partial \dot{x}_{S1}}{\partial \Omega_y} &= z_{S1}, & \frac{\partial \dot{y}_{S1}}{\partial \Omega_x} &= 0, & \frac{\partial \dot{z}_{S1}}{\partial \Omega_x} &= -x_{S1}, \\ \frac{\partial \dot{x}_{S1}}{\partial \Omega_z} &= -y_{S1}, & \frac{\partial \dot{y}_{S1}}{\partial \Omega_x} &= x_{S1}, & \frac{\partial \dot{z}_{S1}}{\partial \Omega_x} &= 0, \\ \frac{\partial \Omega_{x1}}{\partial \Omega_x} &= 1, & \frac{\partial \Omega_{y1}}{\partial \Omega_y} &= 1, & \frac{\partial \Omega_{z1}}{\partial \Omega_z} &= 1.\end{aligned}$$

Deriváljuk az (A3), (A4) és (A5) kinetikai energia függvényeket:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{x}_S} &= M\dot{x}_S, & \frac{\partial T_1}{\partial \dot{y}_S} &= M\dot{y}_S, & \frac{\partial T_1}{\partial \dot{z}_S} &= M\dot{z}_S, \\ \frac{\partial T_1}{\partial \Omega_x} &= I_{xx}\Omega_x + I_{xy}\Omega_y + I_{xz}\Omega_z, \\ \frac{\partial T_1}{\partial \Omega_y} &= I_{yy}\Omega_y + I_{xy}\Omega_x + I_{zy}\Omega_z, \\ \frac{\partial T_1}{\partial \Omega_z} &= I_{zz}\Omega_z + I_{xz}\Omega_x + I_{zy}\Omega_y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{S1}}{\partial \dot{x}_S} &= \frac{\partial T_{S1}}{\partial \dot{x}_{S1}} \frac{\partial \dot{x}_{S1}}{\partial \dot{x}_S} = (M - m)\dot{x}_{S1}, \\ \frac{\partial T_{S1}}{\partial \dot{y}_S} &= \frac{\partial T_{S1}}{\partial \dot{y}_{S1}} \frac{\partial \dot{y}_{S1}}{\partial \dot{y}_S} = (M - m)\dot{y}_{S1}, \\ \frac{\partial T_{S1}}{\partial \dot{z}_S} &= \frac{\partial T_{S1}}{\partial \dot{z}_{S1}} \frac{\partial \dot{z}_{S1}}{\partial \dot{z}_S} = (M - m)\dot{z}_{S1}, \\ \frac{\partial T_{S1}}{\partial \Omega_x} &= \frac{\partial T_{S1}}{\partial \dot{y}_{S1}} \frac{\partial \dot{y}_{S1}}{\partial \Omega_x} + \frac{\partial T_{S1}}{\partial \dot{z}_{S1}} \frac{\partial \dot{z}_{S1}}{\partial \Omega_x} + \frac{\partial T_{S1}}{\partial \Omega_{x1}} \frac{\partial \Omega_{x1}}{\partial \Omega_x} \\ &= (M - m)(y_{S1}\dot{z}_{S1} - \dot{y}_{S1}z_{S1}) + I_{xx1}\Omega_{x1} + I_{xy1}\Omega_{y1} + I_{xz1}\Omega_{z1}, \\ \frac{\partial T_{S1}}{\partial \Omega_y} &= \frac{\partial T_{S1}}{\partial \dot{x}_{S1}} \frac{\partial \dot{x}_{S1}}{\partial \Omega_y} + \frac{\partial T_{S1}}{\partial \dot{z}_{S1}} \frac{\partial \dot{z}_{S1}}{\partial \Omega_y} + \frac{\partial T_{S1}}{\partial \Omega_{y1}} \frac{\partial \Omega_{y1}}{\partial \Omega_y} \\ &= (M - m)(z_{S1}\dot{x}_{S1} - x_{S1}\dot{z}_{S1}) + I_{yy1}\Omega_{y1} + I_{xy1}\Omega_{x1} + I_{zy1}\Omega_{z1}, \\ \frac{\partial T_{S1}}{\partial \Omega_z} &= \frac{\partial T_{S1}}{\partial \dot{x}_{S1}} \frac{\partial \dot{x}_{S1}}{\partial \Omega_z} + \frac{\partial T_{S1}}{\partial \dot{y}_{S1}} \frac{\partial \dot{y}_{S1}}{\partial \Omega_z} + \frac{\partial T_{S1}}{\partial \Omega_{z1}} \frac{\partial \Omega_{z1}}{\partial \Omega_z} \\ &= (M - m)(x_{S1}\dot{y}_{S1} - y_{S1}\dot{x}_{S1}) + I_{zz1}\Omega_{z1} + I_{xz1}\Omega_{x1} + I_{zy1}\Omega_{y1},\end{aligned}$$

A 4.1 alfejezet foglalkozik a rendszer kinetikai energiájának változásával a test tömege változásának függvényében. Egy tételt írtam fel és bizonyítottam, hogy a kinetikai energia változása a tömegek képlékeny szétválásánál egyenlő a leváló és a megmaradó testek relatív kinetikai energiájával (a kinetikai energia a testek relatív sebességéből és szögsebességéből származik). A felírt tétel megfelel az immár ismert, két rugalmatlan ütközéssel összekapcsolódó anyagi pontra vonatkozó Carnot-tételnek, amelynél a kinetikai energia változását a testek relatív sebessége határozza meg.

6. Kérdés: *Hogyan alakulnak az általános koordináták, ugyanis egy térben mozgó merev test szabadságfoka 6, kettőé 12. Mi van az általános koordinátákkal, ha a rendszer szabadságfoka éppen változik?*

8. Kérdés: *Ismét felvetődik bennem az általános koordinátákkal kapcsolatos, és a 6. kérdésben megfogalmazott probléma.*

A 6. és a 8. kérdést összevonom. Ha a szabadságfokok száma változik, az általános koordináták, vagyis az általános sebességek száma is változik. Ha az egész testnek hat szabadságfoka van, hat általános koordinátát vagy általános sebességet vezetünk be. Alkalmazva a dinamikai egyenleteket, az egész test mozgását az idő függvényében változó egyenletekkel határozzuk meg. Ha a leválasztott test szabadságfoka hat, akkor újabb hat általános koordinátát, vagy általános sebességet használunk a mozgás leírására. Ezek az általános sebességek az alaptest általános sebességeinek perturbált függvényei, vagyis ha q_i az egész test koordinátája, a levált testé $(q_i)^* = q_i + s_i$. Ha a levált test kinematikai jellemzői ismertek, akkor ezek az általános sebességek is ismert, időben változó függvények. Ha a megmaradó test szabadságfoka hat, ismét újabb hat általános sebességet írunk fel, amelyek eltérnek az alaptest általános koordinátáitól. Mivel az egész test és a leválasztott test mozgása ismert, a megmaradó test általános koordinátái ismeretlenek. A probléma e koordináták idő függvényében változó egyenleteinek meghatározása.

Ha a megmaradó test szabadságfoka kisebb, mint az alaptest szabadságfoka, a szabadságfok változásának körülményei meghatározzák a kinematikai (sebesség, szögsebesség) és dinamikai (tömeg, tehetetlenségi nyomaték) tényezők közötti összefüggéseket.

7. Kérdés: *Kérem magyarázza meg a 39 oldal utolsó mondatát: „The last terms in the Eqs. (154) and (155) represent the reactive force ... (156) and the reactive torque (157)”*

A (154) egyenlet utolsó tagját, illetve a (156) kifejezést ellenerőnek, míg a (155) egyenletben, illetve a (157) kifejezést ellennyomatéknak nevezzük. Az ellenerőt és -nyomatékot a tömegváltozás okozza. Az ellenerő az időben változó tömeg és a relatív sebesség szorzata. Az ellennyomaték az időben változó tehetetlenségi nyomaték és a relatív szögsebesség szorzata. Ez az erő és a nyomaték akkor jelentkezik, ha a tömeg és a tehetetlenségi nyomaték időben állandóan változik. A mozgásegyenletek eltérnek azoktól az alapesetektől, amelyekben a test tömege és tehetetlenségi nyomatéka nem változik. Az értekezésben kimutattam az ellenerőnek és ellennyomatéknak a változó tömegű test mozgására gyakorolt hatását.

8. Kérdés: *Kérem magyarázza meg ennek a fejezetnek és a (246), (247) egyenletek jelentőségét, hiszen alapvetően mindegy, hogy miként jutunk el a mozgásegyenletig. Miért nem jó például a (149), (150) alak?*

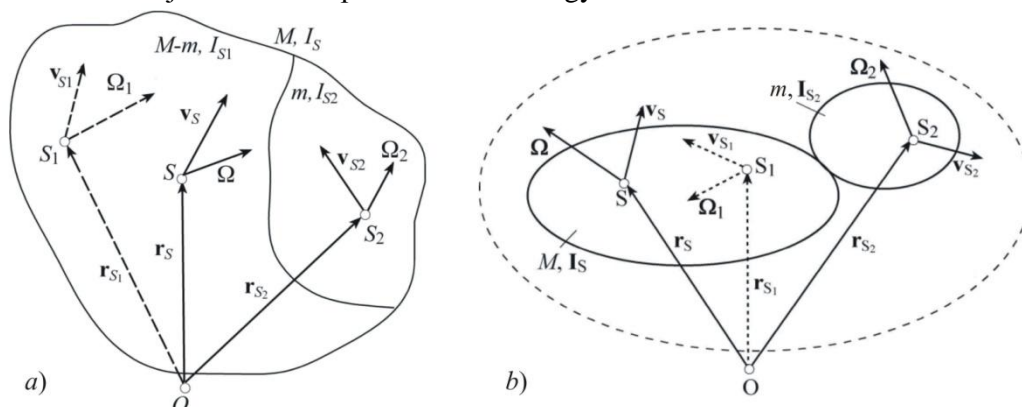
Ismét felvetődik bennem az általános koordinátákkal kapcsolatos, és a 6. kérdésben megfogalmazott probléma.

Egyetértek Béda Péter Professzor Úrral: alapvetően valóban mindegy, hogy miként jutunk el a mozgásegyenletig. A (149), (150) alakú egyenletek megfelelnek a (246), (247) egyenleteknek. A (149), (150) egyenletrendszer a klasszikus mechanika része, míg a (246), (247) egyenletek az analitikai mechanikához tartoznak.

Az analitikai mechanikai egyenletek figyelembe veszik a külső erők és erópárok és a nemideális kényszerek hatását, míg a klasszikus mechanikai egyenleteknél ezek mellett számításba kell venni az ideális kényszerekben ébredő erőket és nyomatékokat is. Ebből következően az analitikai mechanikát használva az egyenletekben nem kell figyelembe venni a gyakran nagyszámban jelentkező, ideális kényszerekben ébredő terhelés-komponenseket. A klasszikus mechanika törvényei gyakran több egyenletet eredményeznek, mint a rendszer szabadságfoka, míg az analitikai mechanikában az egyenletek száma megfelel a rendszer szabadságfokának. Ez optimálisnak tekinthető szám, mivel a rendszer mozgása így meghatározható.

A technikai hiányosságok megszüntetése

- A második fejezetben szereplő 14. ábrát felnagyítottam.



A hetedik fejezetben kijavítottam a következő technikai hibákat:

- a 70. oldalon a hivatkozást: (Byrd & Friedman, 1954).
- a 70. oldalon a képlet száma: (254)
- a 71. oldalon hiányzik a következő képletek száma: $(382)_1$ és $(382)_2$.
- a 72-74. oldalon lévő ábrákon a vékony vonalat felcseréltem szaggatottal, hogy megkülönböztessem a folytonos vonaltól.

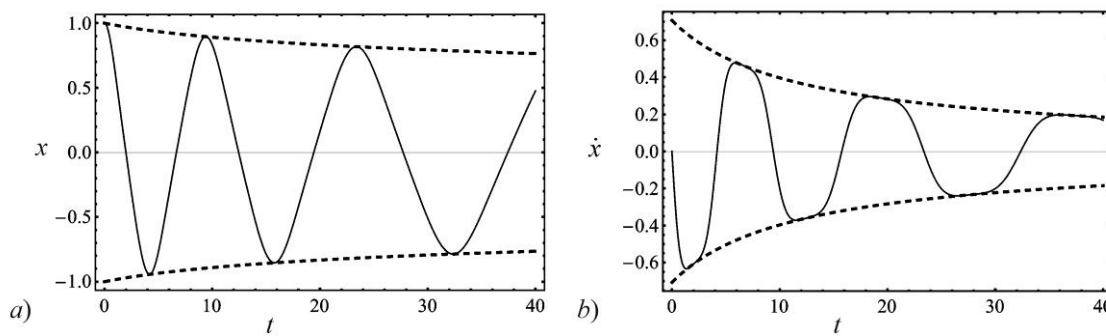


Fig.22. Comparison of the approximate Ateb solution with the numeric one: a) the $x-t$ (full line) and $A-t$ (dashed line) curves, and b) $\dot{x} - t$ (full line) and $\dot{x}_{maxA} - t$ (dashed line) for cubic oscillator with linear mass variation.

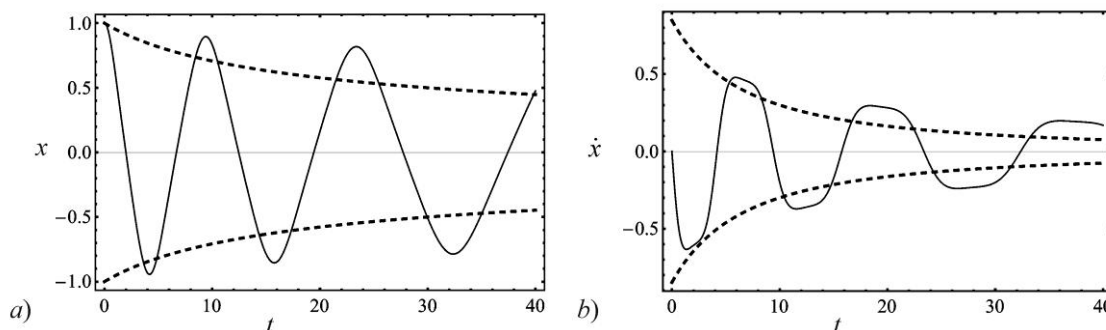


Fig.23. Comparison of the approximate trigonometric solution with the numeric one: a) the $x-t$ (full line) and $A-t$ (dashed line) curves, and b) $\dot{x} - t$ (full line) and $\dot{x}_{maxA} - t$ (dashed line) for cubic oscillator with linear mass variation.

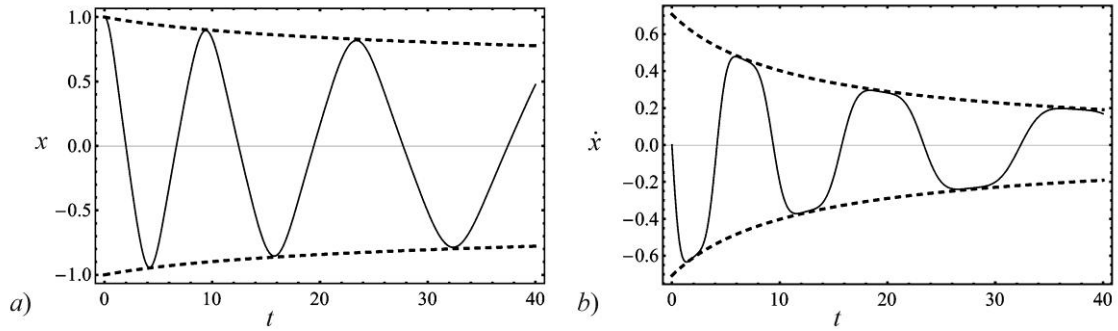


Fig.24. Comparison of the approximate solution in the form of the Jacobi elliptic function with the numeric one: a) the $x-t$ (full line) and $A-t$ (dashed line) curves, and b) $\dot{x} - t$ (full line) and $\dot{x}_{maxA} - t$ (dashed line) for cubic oscillator with linear mass variation.

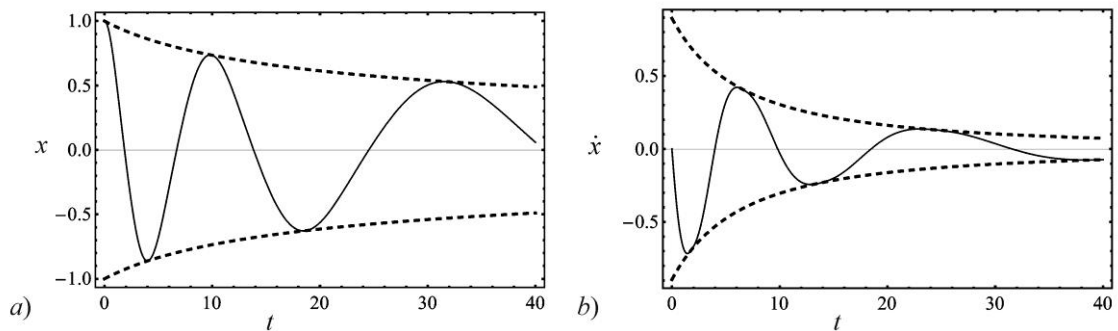


Fig.25. Comparison of the approximate Ateb solution with the numeric one: a) the $x-t$ (full line) and $A-t$ (dashed line) curves, and b) $\dot{x} - t$ (full line) and $\dot{x}_{maxA} - t$ (dashed line) for the oscillator with linear mass variation and order of nonlinearity $3/2$.

a 90. oldal képletének hivatkozásánál felírtam a zárójeleket: (522).

MEGJEGYZÉSEK

1. megjegyzés. Az értekezésben elkülönítve nincs konkrét célkitűzés, továbbá nincs említés a tézisekről sem, azok nem is kerültek megfogalmazásra benne.

Az értekezés első részét átdolgoztam: feltüntettem a konkrét célokat és megfogalmaztam a téziseket. Röviden áttekintettem a doktori értekezés témáját, ismertetem a szerkezetét, és sorra vettem az egyes fejezetek tartalmát.

Abstract

This dissertation is the result of my long-time investigations and interest in the field of dynamics of mass variable systems. Dynamics of the body and the system of bodies with time variable mass and time variable moment of inertia are treated. Namely, there are a lot of machines, mechanisms and system in practical use which parts are mass variable or have the variable moments of inertia. Let us mention some of them: centrifuges, sieves for sorting particles, transportation mechanisms, lifting mechanisms, cranes, automatic weight measuring instruments, and rotors used in the textile, cable, paper industry, etc. The aim of modern industry is to increase productivity and to fully automate, resulting in various new challenges in the dynamics of systems and machines with nonlinearities and mass and also moment of inertia variation. The both types of mass and moment of inertia variation are considered: the discontinual and the continual. The basic laws in dynamics are extended to the case when the

mass is varying in time. Principles of momentum and of angular momentum are applied to obtain the velocity and angular velocity of the body after discontinual mass variation. The same results are applied analytically by introducing the procedures of analytical mechanics. The dynamics of mass addition is treated as the plastic impact, and of the separation as the inverse process to plastic impact. For the case of the continual variation of the mass and of the moment of inertia in time, beside the reactive force, the reactive torque is introduced. The case of the free motion of the mass variable body is investigated. The Lagrange's equations of motion are derived. As the special motion of the mass variable body, the vibration is considered. The main attention is given to approximate solving of the strong non-linear differential equations of motion. The suggested analytic procedures are modified for solving the Van der Pol oscillator, the one-mass two-degree-of-freedom oscillator (rotor) and two-mass system with two-degrees-of-freedom. Obtained solutions are compared with numerical ones and are in good agreement.

To give the correct mathematical description of the machines and mechanism with time variable mass and moment of inertia, a wide knowledge in dynamics of bodies with variable parameters is necessary. The most investigation is done in dynamics of particles with variable mass. Based on this theory and applying the dynamics of a body with constant mass, in this dissertation the dynamics of bodies with variable mass and moment of inertia is extended. The aim of the investigation is to give a new approach and new results for bodies with continual and discontinual time variable mass and geometry. The special attention is given to influence of reactive force and of the newly introduced reactive torque on the motion of the body. Besides, the aim of the dissertation is also to give new solutions for oscillators with time-variable mass and geometry which have nonlinear elastic and damping properties.

The dissertation is divided into eight Chapters:

After the Introduction, various mechanisms and machines with variable mass and moment of inertia are shown. Let us mention some of them: various sieves, band transporters and transportation devices, measuring instruments, centrifuges, textile, paper, cable, carpet machines, etc. The construction and also working properties of machines and mechanisms are described. In general in these machines mass and moment of inertia variation is continual or discontinual in time.

In Chapter 2, the linear momentum and the angular momentum of the body with variable mass and moment of inertia are considered. The linear and angular momentum of the body before and after mass modification due to adding or separating of the mass are determined. Namely, the linear and angular momentum for the initial body with free motion, for the separated or added body with free motion and for the final body with free motion are determined. These values are the fundamental ones for dynamic analysis of the bodies with discontinual or continual time variable properties.

In Chapter 3, the obtained linear and angular momentum relations are applied for calculation of the velocity and angular velocity of the body when the body separation or augmentation is discontinual. The principles of momentum and angular momentum are used as the basic ones and the dynamics of discontinual body addition or separation is extended. Investigations are directed toward defining:

- velocity and angular velocity of final body after augmentation or separation,
- velocity and angular velocity of the separated body,

The special case of the in-plane separation is considered. Depending on the type of motion of the separated body, the kinematic properties of the remainder body are discussed. An example the dynamics of a crumbled rotor is discussed according to the fact of separation of a body from the initial one.

In Chapter 4, the dynamics of the discontinual mass variation is treated analytically, by using the principles of analytical mechanics. Extending the existing procedures in analytical

dynamics, the new one is developed which gives the velocity and angular velocity of the final body after discontinual mass variation. The main attention is given to the case when no external forces and torques act. It is concluded that the process of mass discontinual variation can be described with variation of the kinetic energy of the system before and after mass variation. The process of body addition is treated as the plastic impact and the separation as an inverse process of the plastic impact of bodies. The analytical solutions are compared with those obtained with principles of classic vector dynamics and they agree. At the end of the section an example of in-plane separation of a rotating pendulum into two bodies is treated.

In Chapter 5 and 6, the free motion of the body with continual time variation of the mass and moment of inertia is expressed. Due to mass and also moment of inertia variation in time, in this dissertation beside the reactive force, the reactive torque is introduced. In Chapter 5, the corresponding differential equations of motion are formed. The main attention is directed toward investigation of the influence of these two physical actions on the motion of a body with time variable mass and geometry. As a special type of motion the in-plane motion of the body is considered. The obtained theory is applied for analyzing of the plane motion of the rotor on which the band is winding up. The influence of elasticity of rotor shaft on the dynamics of rotor with time variable mass and moment of inertia is analyzed.

In Chapter 6, the Lagrange's equations of motion for the body with continual variation of mass and moment of inertia is derived. The generalized forces due to the reactive force and the reactive torque are defined. The obtained Lagrange's equations represent the analytical description of the free motion of the body with variable mass and moment of inertia and are the extension of those given in the literature.

Chapter 7 represents the main part of dissertation and considers vibrations as a special type of the motion of the body with variable mass. Based on the general equations of motion given in the previous Chapter, the mathematical model for the oscillatory motion is formed. The main attention is directed to:

- new approximate solution procedures for solving the strong nonlinear differential equations with slow-time variable parameters describing the vibrations of various kinds of oscillators,
- one-degree-of-freedom oscillator with time variable mass,
- Van der Pol oscillators,
- two-degree-of-freedom one-mass oscillators (rotors) and
- two-mass oscillators with two-degrees-of-freedom.

Especially the influence of the reactive force and of the reactive torque on the vibration properties of the system with variable mass and moment of inertia are investigated.

In the dissertation the conclusions and remarks for the future Investigations are given in Chapter 8.

The dissertation ends with the Reference list.

2. megjegyzés. *Célszerű lett volna a dolgozat elején egy (-két) oldalon az értekezésben szereplő összes jelölést felsorolni.*

Egyetértek Professzor Úr megjegyzésével, miszerint hiányzik a jelöléseket tartalmazó táblázat. Elkészítettem a táblázatot, amely Patkó Gyula Professzor Úrnak adott válaszaimhoz csatoltam.

3. megjegyzés. *Nem szerencsés a \pm szerepeltetése a képletekben, például a (3) képletben és később sokszor (6),(8),(12),(13),(15)-(19) stb. Gond van több esetben akkor amikor a jelölt a tömegek addíciójára és szeparációjára vonatkozó képleteket egyszerre akarja felírni. Az eredmény zavar és nehezen követhetők a képletek.*

Az értekezésben a felső előjel a tömeg szeparációjára, az alsó előjel a tömegek addíciójára vonatkozik. A 15. oldalon a következő megjegyzés hiányzik:

Remark 1 *In aforementioned relations with double signs, the upper sign corresponds to mass separation, and the lower sign to mass addition.*

4. megjegyzés. *Az irodalomjegyzék előtti utolsó fejezetben a jelölt részletezően összefoglalja a doktori műben ismertetett munka eredményeit, sajnos azonban itt sem követi a tézisek szerkezetét.*

Az irodalomjegyzék előtti utolsó fejezetet is átdolgoztam annak érdekében, hogy az értekezésben ismertetett munka eredményei kövessék a tézisek szerkezetét.

CONCLUSION AND CONTRIBUTION IN DISSERTATION

In this dissertation the dynamics of the system of bodies with variable mass is considered. The dynamics of the system of particles with variable mass is generalized to the dynamics of the system of bodies with variable mass. Namely, not only the mass variation of the body but also the variation of the moment of inertia is included into investigation. It gives some additional terms in the mathematical model and available the more realistic description of the phenomena which occur during mass and moment of inertia variation.

In the Introduction various mechanisms and machines, in which the mass and the moment of inertia are varying, are shown. The practical use of the phenomena of mass and moment of inertia variation in time are applied to realize some working action and processes in industry and techniques.

In general in Chapter 2, the linear momentum and the angular momentum of the system of bodies with mass variation are expressed. The following assumption was introduced: for the mass separation, the separated body and the final (remainder) body after mass variation give an unique system, while for the case of mass addition, the added mass and the initial mass before mass variation form a close system. This assumption was the basic one for the investigations that follow. The difference between the linear momentums of the system before and after the process of mass variation are equal to the impulses caused by the external forces and torque. It is suggested to omit these impulses as they are negligible in comparison to the impulses caused by forces and torques during mass variation. It is concluded that the mass centre of the final body after body separation and also of the initial body before body addition is practically unmovable, but there is a jump like variation of the velocity of mass centre and of the angular velocity of the bodies due to body separation or addition. The dynamics of body addition or separation to the other body lasts for a very short time. It is a discontinual occurrence during which a body with the new dynamic properties is formed. Besides, during the body addition two bodies form only one.

In Chapter 3, extension of dynamics for particles with discontinual mass variation is done to dynamics of bodies with discontinual mass and moment of inertia variation. The theory is generalized to the case when all bodies (initial, separated or added, and also final) have free motion. It is concluded that the velocity and angular velocity of free motion of the initial body after separation or addition of a body with free motion affects the kinematic properties (velocity and angular velocity) of the final body. Namely, during body addition, if the initial body and the added body move freely, the motion of the final body will be free. The same conclusion is evident for body separation: if the initial body has the free motion, after the separation the separated and also the final bodies have free motion. In this dissertation the properties of motion of the final body after separation or addition are presented. The effects of constraints of motion are discussed. Effect of in-plane motion of initial and separated or added bodies is treated. The result of analyses gives an opportunity to provide the motion of the final body after separation or addition of a body. As an example, the problem of disjoining of the rotor is considered. Initial body is a disc which moves in-plane. It is well known that due to fatigue in the material, separation of a part of the disc occurs. Velocity of separation is equal to the velocity of the initial body and the motion is in the

plane of the disc. The procedure developed in the dissertation gives an opportunity to determine the motion of the final, remainder, body as the function of initial data. The prescience of motion of the final body follows. Results of consideration, given in this Chapter of dissertation, are of interest for engineers and technicians in practice.

In Chapter 4, an analytical procedure for solving the problem of discontinual addition or separation of bodies is developed. The method gives the output parameters (velocity and angular velocity) of the final body after separation or addition. The procedure is based on variation of the kinetic energy of the system before and after body separation or addition and gives new results:

- the dynamics of addition of bodies has to be treated as plastic impact, where impact impulses are inner values,
- the dynamics of the body separation is the inverse plastic impact.

The suggested methodology is applied for the problem of separation of a pendulum rotating around a fixed axle normal to the pendulum plane. As the result the velocity and angular velocity of the remained pendulum and of the separated part is obtained.

Using the relations for variation of the linear momentum and of the angular momentum of the system of bodies before and after body separation and addition and introducing the limiting process, the mathematical model of motion of the continual mass and moment of inertia variation is obtained and presented in Chapter 5. Mathematical model is a system of second order differential equations with time variable parameters. It is worth to say that beside the reactive force (which was known for the particle with time variable mass) in this dissertation the reactive torque is introduced for the first time. Namely, due to mass variation in time, a reactive force occurs, and due to variation of the moment of inertia in time, a reactive torque is present. This result is also a new one in comparison to those given in the literature.

In Chapter 6, applying the principle of analytical mechanics the Lagrange's equation of motion for a system with continual mass variation is obtained. An example of motion of the rotor on which the band is winding up is considered. Mass and moment of inertia of the disc are varying continually in time. It is assumed that the disc, with time variable mass and moment of inertia, as the main part of the rotor has an in-plane motion. The influence of the reactive force on the motion is discussed. The elastic properties of the shaft on the motion of the rotor with variable mass are also considered.

In Chapter 7, vibration of the body with continual mass variation, as a special case of motion is investigated. In this dissertation a new solving procedure for differential equations, which describe vibrations of bodies with variable mass, is developed. The more stronger criteria for the approximate solution to the differential equations with time variable parameters is introduced. Namely, the approximate solution has not only to satisfy initial conditions but also the amplitude and the period of vibration which are equal or very close to the exact ones. For the first time, as it is seen in literature, the additional requirement is added: the extremal values of the first time derivative of the approximate solution have to be equal or very close to the exact velocity of vibration. The following periodic functions were applied for the asymptotic solution of vibration: the Ateb function, the trigonometric function and the Jacobi elliptic function. It is concluded that the most often used trigonometric function gives the most inaccurate result. The solution based on the trigonometric function is satisfactory for qualitative analysis of the problem, while it is not adequate for the quantitative analysis. The asymptotic solution based on the Jacobi elliptic function is much more appropriate than the trigonometric one, as the so calculated amplitude of vibration and velocity of vibration retrace the numerically obtained vibration properties of the oscillator. The main disadvantage of the solution is its complexity in calculation. The approximate solution based on the Ateb function, which is the exact solution of the corresponding differential equation with constant parameters, gives the best results. In spite of its complexity connected with some calculation difficulties, the final relations for the amplitude and frequency variation in time are quite simple and applicable in practical use. They are suggested to be used by engineers and technicians. Namely, it is concluded that the amplitude and period of vibration but also the velocity of vibration variations, according to mass change, depend only on the mass variation and

the order of nonlinearity. The procedure developed in this dissertation is applied for solving the problem of vibration of the one-degree-of-freedom oscillator with time variable mass. The new results are obtained in the analysis of the influence of the reactive force on the vibration of the nonlinear oscillator with variable mass. If the mass increases the amplitude of vibration decreases. The velocity of amplitude decrease on the order of nonlinearity. If the relative velocity of mass variation is zero, the amplitude of vibration increases with mass increase. The order of nonlinearity has a significant influence on the velocity of amplitude variation. In this Chapter the Van der Pol oscillator with time variable parameters is also investigated. This type of oscillator has an analogy in the electrical circuits, where as it is known, the parameters (like capacity) are time variable. It suggests that the Van der Pol oscillator with time variable parameters has to be investigated. Unfortunately, in the literature only the Van der Pol oscillator with constant parameters is considered. The results for Van der Pol oscillator with time variable parameters show that the motion of the oscillator deeply depends on the properties of mass variation. A limit cycle for initial mass is obtained applying the suggested procedure. If the value of initial mass is higher than the obtained limit value, the amplitude of vibration of the Van der Pol oscillator with variable mass tends to zero independently on the initial displacements. If initial mass is smaller than the limit value, the amplitude of vibrations varies and the motion tends to a limit cycle motion with the steady state amplitude, independently on initial displacements.

In this Chapter a contribution to vibrations of two-degrees-of-freedom systems is given. A rotor with variable mass is analyzed as an one-mass system with two-degrees-of-freedom. Amplitude-time and frequency-time functions which describe the oscillatory motion of mass variable rotor's center are determined. The special attention is given to the influence of the reactive force. In the dissertation the two-variable mass body system with two-degrees-of-freedom is also analyzed. Connection is assumed to be nonlinear. It is concluded that the motion of bodies is oscillatory, and depends on the initial displacements of the bodies. The oscillations are equal for both bodies but are in opposite direction.

The future investigation may be directed to excited oscillatory system with time variable mass. The correlation and interaction between the parameters of the excitation and of the mass variation on the motion of the body have to be investigated.

5. megjegyzés. *A 3-4 téziseket összevonva elfogadom, az 5 és 7 tézist elfogadom új tudományos eredményként. A 6 tézist önállóan nem tudom elfogadni, de az 5 tézishez kapcsolva igen.*

Elfogadom Béda Péter Professzor Úr véleményét, amelynek megfelelően a 3-4 és az 5-6 téziseket összevontam. Sajnos, a már beadott értekezést nem lehet megváltoztatni, ezért az így módosított értekezést csatolom a válasz mellékleteként.

A javított, illetve módosított dolgozatnak 126 számozott oldala van. A tartalmat 32 számozott ábra illusztrálja. A doktori munkában egy tartalmi kivonat (Preface) és 6 számozott, alfejezetekre bontott fejezet található. Az irodalomjegyzék 90 tételt, ebből 30 saját publikációt tartalmaz. Az értekezést kiegészítettem a jelölések listájával.

Az értekezésben elfogadtam opponenseim véleményét.

Az értekezésben a következő megjegyzéseket is elfogadtam:

A két vastag nagy betűt, amely egy vektor jelölésére használtam, lecseréltem az átdolgozott értekezésben más egyszerűbb jelöléssel, pld. $\mathbf{SS}_1 = \mathbf{p}_{S1}$, $\mathbf{SS}_2 = \mathbf{p}_{S2}$.

Az átdolgozott értekezésben a két előjelű képletelnél csak egy előjelet használtam, mivel az egyenleteket csak a tömegek szeparációjára írtam fel. A tömegek addíciójára vonatkozó egyenletek azonosak a felírtakkal, azzal a megjegyzéssel, hogy a tömegek és tehetetlenségi nyomatékok előjele + ról megváltozik – ra, és fordítva.