MTA doktori értekezés

SZERKEZETOPTIMÁLÁS DETERMINISZTIKUS ÉS SZTOCHASZTIKUS ESETEKBEN

Lógó János

a műszaki tudomány kandidátusa

Budapest, 2014. január

dc_805_13

TARTALOMJEGYZÉK

1 BEVEZETÉS

Az anyag- és energiatakarékosságra való törekvés az emberiség egyik fő célkitűzése. Ez különösen igaz napjainkra a tartószerkezetek tervezése esetén is. Megvalósításához alapos matematikai, mechanikai és számítástechnikai ismeretek szükségesek, és ezeket összhangba kell hozni. A szerkezeti optimálás tágabb értelemben már több mint fél évezredes múltra tekint vissza, ha a Gallilei-féle konzoltervezést tekintjük az első ilyen jellegű munkának (Kaliszky (1989)). A kezdeti nehézségek leküzdésére azonban több évszázadot kellett várni. A 19. század vége (Pareto-optimum: Pareto (1896)) a 20. század eleje (Farkas-tétel: Farkas (1902)) tekinthető az elméleti háttér első fontosabb állomásának. Az ötvenes, hatvanas évekkel bezárólag publikálásra kerültek a matematikai alapok (pl. Kuhn-Tucker-tétel), a mechanikai alapok (pl. a képlékenységtan szélsőérték-tételei), de hiányoztak az alapvető számítástechnikai eszközök. Kiemelkedő elméleti eredmények születtek, de a numerikus módszerek „fejlettsége” nem tette lehetővé az optimális tervezés széleskörű alkalmazását. A hetvenes évek ugrásszerű változást hoztak e tudományterületen is. A képlékenységtan szélsőérték-tételeinek szélesebb körben való alkalmazása ezen terület robbanásszerű fejlődését eredményezte. A BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszékén különböző kutatások keretében nemlineáris anyagú tartószerkezetek statikai és dinamikai vizsgálatán dolgoztam matematikai programozás alkalmazásával. Ennek kapcsán számítási modelleket és megoldási módszereket dolgoztam ki rugalmas, rugalmas-képlékeny és merev-képlékeny anyagú tartószerkezetek terhelési állapotainak vizsgálatára és optimális tervezésére. Jelen dolgozat 3. és 4. fejezetei ennek a közel két évtizedes munkának az optimális méretezési terén végzett részét foglalják össze. Egy részének a továbbfejlesztéséből PhD fokozatok születtek témavezetésem mellett. Tantárgyként pedig a tartószerkezetek optimális tervezése bekerült az egyetemi képzésbe MSc. és PhD. szinten. Itt a kezdetektől fogva a tárgy előadója vagyok.

Egy tartószerkezet topológiáját (alakját és elrendezését), elemeinek méretét, anyagának tulajdonságait és mechanikai viselkedését különböző paraméterek és változók szabják meg. Ezek egy része adott, más részüket azonban a tervező veszi fel, illetve határozza meg. Ezek a tervezési változók, amelyek kifeszítik a tervezési teret. A tervezés során számos követelményt kell kielégíteni. A tartók alakjára, méreteire előírt korlátokat a geometriai feltételek, a szerkezet szilárdságára, merevségére és stabilitására vonatkozó korlátokat pedig a viselkedési feltételek fejezik ki. Ezeket együtt tervezési feltételeknek nevezik és ezek a tervezési térből kimetszik a tervezési tartományt. A szerkezet mechanikai viselkedését az állapothatározók (feszültségek, alakváltozások és elmozdulások) jellemzik, amelyeknek ki kell elégíteniük az állapotegyenleteket. Az optimális tervezés célja a tervezési változók oly módon történő

megválasztása, illetve meghatározása, hogy kielégítve az állapotegyenleteket és a tervezési feltételeket a szerkezet valamelyik előnyös tulajdonsága (pl. teherbírása, merevsége, energiaelnyelő képessége) a lehető legkedvezőbb, vagy valamelyik előnytelen tulajdonsága (pl. költség, súly, elmozdulás) a lehető legkisebb mértékű legyen. A fenti tulajdonságok mindegyike a tervezési változók függvényében adható meg. Ezt a matematikai kifejezést célfüggvénynek nevezzük. Az optimális tervezés feltételes szélsőérték-feladat, amelyben a célfüggvény maximumát, illetve minimumát keressük. A feltételek egyenletek és egyenlőtlenségek formájában adottak. Az esetek többségében a célfüggvény a tartó súlyát, térfogatát vagy költségét fejezi ki. Ez utóbbi a tartószerkezeti tervezés területén igen fontos (Farkas és Jármai (2003), Jármai és Iványi (2001)).

A rugalmas-képlékeny anyagú tartók optimális tervezése rugalmas állapot vagy képlékeny állapot alapján végezhető el. Rugalmas optimális tervezés esetén az egyensúlyi, geometriai és anyagegyenletek kielégítésén kívül feszültségi, elmozdulási és stabilitási feltételeket kell figyelembe venni. Mivel üzemi állapotban maradó alakváltozások általában nem engedhetők meg, ezért rugalmas optimális tervezést üzemi terhek vizsgálatakor szokás alkalmazni.

A képlékenységtanon alapuló számítási módszerek (Kaliszky (1970, 1989, 1990, 1991)) tájékoztatást nyújtanak a tartók rugalmas határon túl létrejövő állapotáról és tönkremeneteléről, és így lehetővé teszik képlékeny teherbírási tartalékuk részben vagy teljes mértékben való kihasználását. Emiatt a képlékeny optimális tervezés alkalmazása a rugalmas optimális tervezéshez képest a tartó súlyát (esetleg költségét) tekintve nagyobb megtakarításhoz vezethet. Ezt az előnyt még az is növeli, hogy a képlékenységtanban a felhasznált állapotegyenletek (egyensúlyi egyenletek és képlékenységi feltételek) száma kevesebb lehet, mint a rugalmasságtanban. Ez a körülmény viszonylag „jobb” megoldások meghatározását teheti lehetővé. Hátránya a képlékeny optimális tervezés alkalmazásának az, hogy képlékeny állapotban a terhelési folyamat során ismételt képlékeny alakváltozások és növekvő maradó elmozdulások jönnek létre, és ezek halmozódása a tartó használhatóságát csökkenti és tönkremenetelét eredményezheti. Emiatt képlékeny optimális tervezés alkalmazása esetén a fenti kedvezőtlen jelenségek korlátozása, illetve megakadályozása érdekében különböző feltételek alkalmazására van szükség. Ismétlődő terhek esetén a beállásvizsgálat alkalmazása olyan eszköz, amelynek felhasználásával megakadályozhatjuk a képlékeny alakváltozások korlát nélküli halmozódását, ezek nagyságáról azonban nem kapunk tájékoztatást (Kaliszky (1989), Koiter (1960), Melan (1936, 1938), Weichert és Maier (2002)). A képlékeny alakváltozások nagysága a maradó feszültségek kiegészítő alakváltozási energiájára előírt határok segítségével korlátozható, a maradó elmozdulások nagyságát pedig az ezek meghatározására vonatkozó tételek segítségével lehet szabályozni (Lange-Hansen (1998), Ponter (1972)). A fenti korlátok

megfelelő megválasztása rugalmas, rugalmas-képlékeny és teljesen képlékeny állapotú tartók optimális tervezését teszi lehetővé (Kaliszky és Lógó (1995)). Egyes esetben a tartók tervezésekor rendkívüli terheket (robbanás, ütés, ütközés, földrengés) is figyelembe kell venni. Az ilyen terhek előfordulásának valószínűsége igen kicsi, ezért vizsgálatukkor jelentősebb képlékeny alakváltozások is megengedhetők, egyes esetekben pedig elegendő csupán azt biztosítani, hogy a tartó a teher hatására ne omoljon össze. Ilyen különleges esetekben a képlékeny optimális tervezés alkalmazása különösen indokolt és jelentős anyag- és költség megtakarítást eredményez.

Az alábbiakban ismertetem néhány feladat megoldása kapcsán azokat az elveket, modelleket és számítási módszereket, amelyeket többek között az elmúlt 15 évben dolgoztunk ki a statikusan vagy dinamikusan terhelt rugalmas-képlékeny anyagú tartók rugalmas, rugalmas-képlékeny illetve képlékeny optimális tervezésére (Kaliszky és Lógó (1995-2006), Lógó (1995-2013), Lógó és Ghaemi (2001-2009). A dolgozat mechanikai jellegű, matematikai szempontból nem tartalmaz új eredményeket. A bemutatott modellek kapcsán a „klasszikus" képlékenységtan beállási-tételére, illetve képlékeny határállapotára alapuló optimális tervezési feladatokat fejlesztettük tovább. Legtöbb feladatnál a célfüggvény a tartó térfogata, illetve tömege. A dolgozatban feltesszük, hogy a kis elmozdulások elmélete érvényes és a számításainkat az elsőrendű elmélet alapján végezzük. Az alkalmazásokat számpéldák szemléltetik.

Az értekezés négy fejezetből és irodalomjegyzékből áll. Tartalmilag mechanikai jellegű problámák modellezésével foglalkozik, matematikai újdonságot nem tartalmaz. A matematika csak eszközként jelenik meg. Az első két fejezet kivételével minden fejezet szerkezete azonos: a vonatkozó irodalom feldolgozása, az új tudományos eredmény bemutatása, alkalmazások, tézisek ismertetése. Az irodalomjegyzékben szétválasztásra kerültek a saját, illetve az idegen szerzőktől származó dolgozatok. Az érdemi fejezetek (a 3. és 4.) egymástól eltérő témaköröket tárgyalnak. Jelölésrendszerük az adott témakörhöz tartozó nemzetközi irodalomban elfogadott jelölésrendszert és szóhasználatot követi.

Az első fejezet a bevezetést, míg a második az optimális tervezés alapfogalmait, alapelveit mutatja be röviden. Ez a fejezet nem tartalmaz új eredményt. A harmadik fejezetben ismertetem a rugalmas-képlékeny szerkezetek méretezését statikus, illetve dinamikus teher esetén a maradó alakváltozások és elmozdulások korlátozásával. A rugalmas optimális tervezési, illetve a képlékeny optimális tervezési módszer hátrányainak kiküszöbölése és előnyeinek megtartása érdekében a tartók rugalmas-képlékeny állapotára alapuló rugalmas-képlékeny optimális tervezés alapelveit és számítási módszereit dolgoztuk ki és alkalmaztuk különböző feladatok megoldására. Létrehoztunk egy olyan általános méretezési eljárást, amely speciális esetekben a rugalmas optimális tervezés, illetve a képlékeny optimális tervezés eredményeire vezet. A

kutatás - rugalmas-képlékeny anyagú tartókat (elsődlegesen keretszerkezeteket és rácsos tartókat) feltételezve - az alábbi feladatok vizsgálatával foglalkozott:

a. optimális viselkedésű (maximális merevségű, minimális képlékeny alakváltozású, korlátozott képlékeny alakváltozású) tartók tervezése adott anyagmennyiség esetén,
b. minimális térfogatú tartók tervezése rugalmas és képlékeny alakváltozások és elmozdulások korlátozása esetén.

A vizsgálatok során lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékeny, merev–képlékeny anyagokat, stabilitási feltételeket, többparaméteres kvázi-statikus vagy dinamikus (lökésszerű, ütés, földrengés) terheket vettünk számításba. A vizsgálandó feladatok jelentős része nemlineáris feltételes szélsőérték-probléma formájában fogalmazható meg. Megoldásuk során vagy a nemlineáris matematikai programozás eszközrendszerét vagy a feladat összetettsége következtében egy iterációs eljárást alkalmaztunk. Jelen dolgozat csak a determinisztikus tervezési adatokkal való optimális tervezést tárgyalja. A továbbfejlesztett, sztochasztikus eset doktoranduszom, M. Movahedi Rad megvédett PhD. disszertációjában található. A munka anyagi hátterét az egymással összefüggő alapkutatási és nemzetközi közös projektek biztosították. Ezek: *OTKA*: I/3/683, F014288, T015852, T029639, T037922; *MKM támogatások*: FKFP 0397/1997 FKFP 0308/2000; *TÉT együttműködések*: Imperial College, London, Heriot-Watt University, Edinburgh, Politecnico di Milano; *NATO Tudományos Tanács* által támogatott kutatás: University of Essen, University of Liege, IPPT Varsó.

A negyedik fejezet a lineárisan rugalmas szerkezetek topológiaoptimálását mutatja be determinisztikus illetve valószínűségi változókkal adott peremfeltételek esetén az optimalitási feltételre épülő iterációs eljárás felhasználásával. A szerkezetoptimálás területén a topológiaoptimálás az utóbbi 20 év egyik leggyakrabban kutatott témaköre. A topológiaoptimálás elsődleges célja a szerkezet alakjának kialakítása, vagyis a tervezési folyamatban a vázlattervi szint kialakítása. Ebben a fejezetben ismertetésre kerülő szerkezetoptimálás megoldási struktúrájában és az alkalmazott anyagtörvényben különbözik az előzőektől. A kutatás célja 2D szerkezetek optimális méretezése a matematikai programozás elméletének felhasználásával igen nagyszámú (több tízezer) változó felhasználásával. A számítási modellhez standard végeselemes számítógépes programot készítettünk négy csomópontú tárcsa-elemek és két csomópontú rúdelemek felhasználásával lineárisan rugalmas anyag alkalmazásával. A tervezés során a kiinduláskor adottnak tekintettük a terhelést (egyparaméteres, statikus és statisztikai adatokkal is megadható), a megtámasztásokat és a téglalap alakú tervezési tartományt, az ún. "alap"-szerkezetet. A tervezési változók minden esetben a tárcsaelemek vastagsága, illetve a rúdelem keresztmetszeti területe voltak. Két alapmodellt készítettünk el:

a. minimáltuk a szerkezet térfogatát a külső potenciális energia (compliance) nagyságának korlátozásával,
b. minimáltuk a külső potenciális energiát (compliance) adott anyagmennyiség esetén.

Rúdelemek alkalmazásával ezen alapmodellek bővített változataival is foglalkoztunk. Ezek lehetőséget adnak támaszoptimálási, illetve megerősítési feladatok megoldására. Megoldottuk a valószínűségi változókkal adott terhelés, illetve a valószínűségi változókkal adott külső potenciális energia (compliance) eseteit is. A számítási modellek minden esetben nemlineáris matematikai programozási feladatra vezetnek. Az optimalitás feltételére alapuló iterációs formulát vezettünk le. Ezt az optimalitási feltételre épülő eljárást a nemzetközi irodalomban többen SIMP-nek (Solid Isotropic Material with Penaltization) nevezik, amely ellentétben a standard matematikai programozási algoritmusokkal, igen nagyszámú tervezési változó felhasználását teszi lehetővé. Vizsgáltuk az analitikusan kapott, illetve a numerikusan kiszámított optimális topológiák egyezőségét különböző térfogati arányok és merevségek esetén.

A disszertációban bemutatásra kerülő témakörben az alábbi doktoranduszaim: Iványi P.,. M. Ghaemi, M. Movahedi-Rad és cserehallgatóim: J. Vahanian, L. De Carcouët, D. Dehaene, N. Montero, R. Antoun, G. Enkaoua, R. Pige, J. Chanbassoe és B. Blum vettek részt. A témakörben megjelent publikációkban -amik ebben a dolgozatban nem kerültek felhasználásra- együtt dolgoztam, illetve dolgozom Dr. Gáspár Zs., Pomezanski V., Dr. Rozványi Gy. és Dr. Querin, O. Pintér E. kutatótársaimmal. Ebből a munkából Pomezanski V. és Ghaemi M. védte meg PhD fokozatát. A munka anyagi hátterét az egymással összefüggő alapkutatási és nemzetközi közös projektek biztosították. Ezek: *OTKA*: T037922; T042993, K62555, K81185, *MKM támogatások*: FKFP 0397/1997 FKFP 0308/2000; *TÉT együttműködés*: Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Univercity of Rennes.

Végezetül köszönetemet szeretném kifejezni Dr. Kaliszky Sándor akadémikusnak, Dr. Rozványi György ny. egyetemi tanárnak és Dr. Vásárhelyi Anna MTA doktorának mindazért, amit Tőlük tanulhattam a szerkezetoptimálás területén a több mint két évtizedes munkakapcsolatunk során. A közös munkák eredményeként a számos tudományos dolgozat mellett e disszertáció is megszülethetett. Feleségemnek pedig a tudományos tevékenységem támogatásáért és e disszertáció átnézéséért tartozom hálás köszönettel.

Budapest, 2014. január

2 AZ OPTIMÁLIS TERVEZÉS ALAPFOGALMAI, ALAPELVEI, MEGOLDÁSI MÓDSZEREI

A szerkezetek optimális tervezése a mechanika napjainkban is gyorsan fejlődő területe. Célja olyan szerkezetek tervezése, amelyeknél a szerkezet valamilyen jellemző gazdasági vagy mechanikai tulajdonsága (költsége, súlya, teherbírása, elmozdulása, stb.) a lehető legkedvezőbb, azaz optimális. Az optimális tervezés módszereit a mérnöki gyakorlatban széles körben alkalmazzák, mivel segítségükkel gazdaságos szerkezetek tervezhetők. Különösen nagy jelentőségük van az űrhajózásban, a repülőgép- és járműiparban, ahol a szerkezet súlyának csökkentése nemcsak építőanyag, de üzemanyag megtakarítást is eredményez. Ugyancsak jelentős gazdasági megtakarítás érhető el alkalmazásuk révén a nagy mennyiségben előregyártott épületelemek és épületszerkezetek tervezésénél is.

A korlátozott terjedelem az alábbiakban csak az optimális tervezés legfontosabb fogalmainak, alapelveinek, egyes számítási módszereinek az ismertetését teszi lehetővé, de számos mű tartalmazza ezeket (pl. Bazaraa és Shetty (1979), Brandt (1984), Haftka, Gürdal és Kamat (1990), Kirsch (1981)). A bonyolultabb feladatok (mint pl. a topológiai és az alakoptimálás, matematikai programozási eljárások) tanulmányozására is rendkívül gazdag irodalom áll rendelkezésre (pl. Bendsoe (1995), Farkas (1984), Farkas és Jármai (1997, 2003), Jármai (1998), Kaliszky (1989, 1996/97), Rozvany (1976, 1997), Save és Prager (1985), Vásárhelyiné (2003)).

2.1 A tervezési folyamat

A tartószerkezetek tervezése általában az alábbi főbb lépésekben történik.

a) *A funkcionális követelmények megfogalmazása*

A beruházó igényeinek és a technológiai használati követelmények ismeretében meg kell határozni a szerkezet elrendezését és általános méreteit.

b) *Koncepcionális tervezés*

A kivitelezési lehetőségek és technológiai szempontok figyelembevételével ki kell választani a szerkezet anyagát (pl. acél, vasbeton), a szerkezet típusát (pl. rácsos tartó, keretszerkezet, héjszerkezet) és meg kell határozni a geometriai elrendezését. Nagyobb jelentőségű szerkezetek esetén több variációt is ki kell dolgozni. Ez a lépés a tartószerkezet gazdaságossága és viselkedése szempontjából alapvetően fontos, igen nagy tapasztalatot és kiváló mérnöki érzéket igényel.

c) *Mechanikai vizsgálat*

A legelőnyösebb szerkezet, illetve szerkezetek kiválasztását követően el kell végezni a részletes mechanikai vizsgálatot. Ennek során van mód az optimális tervezés módszereinek alkalmazására és az optimális megoldás (geometriai elrendezés, szerkezeti méretek, stb.) meghatározására.

Több variáció esetén ezek eredményeinek összehasonlítása révén lehet a műszaki és gazdaságossági szempontból legelőnyösebb szerkezetet kiválasztani.

d) *Részletes tervezés*

Szükség esetén szerkezeti és kivitelezési szempontok alapján módosítani kell az optimális megoldást, el kell végezni a szerkezeti elemek szilárdságtani méretezését és el kell készíteni a szerkezet részletterveit.

A továbbiakban csak a c) lépésben szereplő optimális tervezés kérdésével foglalkozunk. A módszerek ismertetését megelőzően az alábbi fogalmakkal kell megismerkednünk: állapotváltozók, tervezési változók, feltételek, célfüggvények.

2.2 Állapotváltozók

Amint ismertes, egy szerkezet mechanikai állapotát az alábbi állapotváltozók jellemzik:

Q - általánosított feszültségek, **q** - általánosított alakváltozások, **u** - elmozdulások, **P** - terhek. Ezek között az: egyensúlyi-, geometriai- és az anyagegyenletek, azaz az állapotegyenletek teremtenek kapcsolatot.

2.3 Tervezési változók

Egy szerkezet alakjának, geometriai elrendezésének, méreteinek és szilárdsági tulajdonságainak egyértelmű megadásához számos adatra, paraméterre van szükség. Ezek között vannak kötött értékek, amelyek előre meg vannak szabva, és vannak tervezési változók, amelyeknek ki kell elégíteniük a mechanikai és szerkezeti követelményeket. Optimális tervezésnél a tervezési változók azon értékeit keressük, amelyek alkalmazásakor a szerkezet valamilyen jellemző tulajdonsága (költsége, súlya, teherbírása, elmozdulása, stb.) a lehető legkedvezőbb, azaz optimális.

A továbbiakban a tervezési változókat az $\mathbf{x}[x_1, x_2,..., x_n]$ vektorban foglaljuk össze. Ezek általában folytonos változók, vannak azonban olyan feladatok, amikor csak előre megadott diszkrét értékeket vehetnek fel. Ilyenkor diszkrét optimalizálásról beszélünk.

A tervezési változók a szerkezet alábbi tulajdonságainak leírására alkalmasak:

a) Egyes feladatoknál a szerkezet többféle fajtájú és minőségű anyagból is megépíthető (pl. acél, beton, fa stb.), illetve egyes meg nem határozott részei különböző anyagokból készülhetnek (pl. vasbeton, kompozit szerkezetek). Ezeknek az anyagoknak a gazdasági és mechanikai tulajdonságait az anyagi változók adják meg. Ezek rendszerint diszkrét változók.

b) A tervezést sok esetben egy teljesen általános elrendezésű és hálózatú bonyolult szerkezet alapján végzik, amelyben egyes elemek elhagyhatók, vagy új elemek alkalmazhatók, és így a szerkezet topológiája - bizonyos megkötések mellett - szabadon változhat. A szerkezet

topológiáját jellemző szabad paramétereket topológiai változóknak nevezzük.

c) A tervezés során a szerkezet geometriai elrendezése gyakran szabadon választható meg (pl. csomópontok, támaszok helye). Az ennek megfelelő szabad méreteket geometriai változóknak nevezzük.

d) A szilárdsági és alakváltozási követelmények a keresztmetszetek geometriai jellemzőit (alakját, területét, merevségét, stb.) általában nem határozzák meg egyértelműen. A szabadon megválasztható keresztmetszeti méreteket keresztmetszeti változóknak nevezzük. Egyes esetekben (pl. hengerelt szelvények esetén) ezek diszkrét változók.

Aszerint, hogy az optimális tervezésnél milyen típusú tervezési változók szerepelnek ismeretlenként az alábbi feladatokat különböztetjük meg: anyagoptimálás, topológiaoptimálás, alak- vagy geometriai optimálás, keresztmetszet-optimálás.

A továbbiakban elsősorban a keresztmetszet-, illetve a topológiaoptimálás témakörébe tartozó feladatok megoldását ismertetjük.

2.4 Feltételek

Egy tartószerkezetnek az állapotegyenleteken kívül rendszerint még további szerkezeti, technológiai, geometriai és mechanikai követelményeket is ki kell elégíteni. Ezek a követelmények feltételek segítségével fejezhetők ki. A feltételek két csoportba sorolhatók.

a) A tervezési feltételek funkcionális, gyártási és geometriai követelményeket fejeznek ki. Ilyenek például a szerkezet lehetséges szélső méretei, a lemez vagy héj legkisebb és legnagyobb vastagsága és a keresztmetszetek minimális területe.

b) Az állapotfeltételek a szerkezet viselkedésére vonatkozóan fejeznek ki követelményeket. Ilyenek például a feszültségekre, elmozdulásokra, alakváltozásokra, stabilitásra, önrezgésszámra, stb. vonatkozó korlátok.

A tervezési és állapotfeltételek a tervezési változók függvényében egyenlőtlenségek formájában fejezhetők ki:

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0\,;\ (j=1,2,...,m), \tag{2.1}$$

ahol $\mathbf{x}$ a tervezési változók vektora, g_j a j-edik egyenlőtlenségi feltétel, m az egyenlőtlenségi feltételek száma. Egy tartószerkezet állapotegyenletei általában egyenletek formájában írhatók fel, és amennyiben közvetlenül kifejezhetők a tervezési változók függvényében, akkor az alábbi általános alakban adhatók meg:

$$h_j(\mathbf{x}) = 0\,;\ (j=1,2,...,k), \tag{2.2}$$

ahol $h_j(\mathbf{x})$ a j-edik egyenlőségi feltétel, k az egyenlőségi feltételek száma.

2.5 A tervezési tér

Az x_1, x_2,..., x_n tervezési változók egy n dimenziós tervezési térben ábrázolhatók. Ebben a térben minden megoldásnak egy pont felel meg. Azokat a megoldásokat, amelyek kielégítik a $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$; (j=1,2,...,m) feltételeket, lehetséges megoldásoknak nevezzük. Azok a megoldások, amelyeknél akárcsak j egyetlen értékénél $g_j(\mathbf{x}) > 0$, nem lehetségesek.

A tervezési térben a $g_j(\mathbf{x})=0$; (j=1,2,...,m) egyenletek m számú hiperfelülettel ábrázolhatók, amelyek a teret két tartományra osztják. Azt a tartományt, amelynek minden pontjára vonatkozóan kielégül a $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$; (j=1,2,...,m) feltétel, lehetséges tartománynak nevezzük. A j-edik feltétel aktív, ha egy választott $\mathbf{x}$ megoldás esetében $g_j(\mathbf{x})=0$. Ellenkező esetben a feltétel nem aktív.

Az egyenlőség alakjában kifejezett $h_j(\mathbf{x}) = 0$; (j=1,2,...,k) állapotegyenleteket a tervezési térben k számú hiperfelület ábrázolja. A lehetséges megoldások közül csak azok alkalmazhatók, amelyek a fenti feltételeket is kielégítik, azaz megfelelő pontjaik a $h_j(\mathbf{x}) = 0$; (j=1,2,...,k) hiperfelületek közös tartományában helyezkednek el.

2.6 A célfüggvény

A célfüggvény a szerkezet valamilyen jellegzetes gazdasági vagy mechanikai tulajdonságát fejezi ki a tervezési változók függvényében: $f(\mathbf{x})$. Az optimális tervezésnek az a célkitűzése, hogy a lehetséges megoldások közül azt a megoldást válasszuk ki, amelynél a célfüggvény optimális, azaz értéke minimális, illetve maximális:

$$\min f(\mathbf{x}), \text{ illetve } \max f(\mathbf{x}) \tag{2.3}$$

A továbbiakban csak a min $f(\mathbf{x})$ feladattal foglalkozunk, mivel a második eset is visszavezethető minimum keresésre:

$$\max [\, f(\mathbf{x}) \,] = - \min [- f(\mathbf{x}) \,]. \tag{2.4}$$

A célfüggvény megfelelő megválasztása az optimális tervezés egyik legfontosabb része. Az a leggyakoribb, hogy a célfüggvény a szerkezet anyagának költségét fejezi ki, ami homogén anyagú tartók esetében arányos a tartó súlyával, illetve térfogatával. Általános esetben azonban a célfüggvény magába foglalhatja a gyártás, a szállítás, a fenntartás és javítás költségeit is, vagy más esetben a tartó valamilyen mechanikai tulajdonságát (pl. teherbírás, elmozdulás, stabilitás) fejezi ki. A különböző célokat kifejező tagok a célfüggvényben súlyozott formában szerepelnek:

$$f(\mathbf{x}) = \alpha_1 f^{(1)}(\mathbf{x}) + \alpha_2 f^{(2)}(\mathbf{x}) + \ldots + \alpha_n f^{(n)}(\mathbf{x}) \,. \tag{2.5}$$

Itt $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ a súlyokat jelöli. Egyidejűleg több célfüggvény is alkalmazható, pl.:

$$\min f_I(\mathbf{x}),\ \min f_{II}(\mathbf{x}),\ \min f_{III}(\mathbf{x}). \tag{2.6}$$

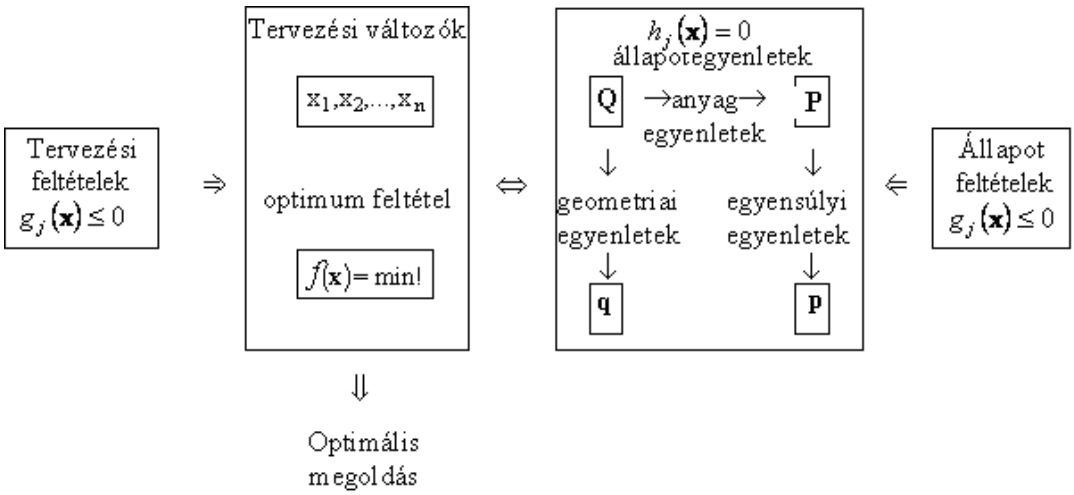
Ennek a többcélfüggvényes feladatnak a megoldása rendszerint igen bonyolult számításokat igényel. Ha a célfüggvényre különböző $f_1 > f_2 > ... > f_n$ értékeket veszünk fel, akkor a

$$f(\mathbf{x}) = f_1,\quad f(\mathbf{x}) = f_2,\ ...,\ f(\mathbf{x}) = f_n \tag{2.7}$$

egyenletek adják a célfüggvény szintfelületeit, amelyek a tervezési térben hiperfelületek. A tervezés szempontjából ezeknek a hiperfelületeknek csak azon szakaszai jöhetnek számításba, amelyek a lehetséges tartományon belül, illetve annak határán helyezkednek el. Ha például a célfüggvény költséget fejez ki, akkor a $f(\mathbf{x})=f_1$ felület lehetséges tartományon belül lévő szakaszán elhelyezkedő pontok mind olyan lehetséges megoldásnak felelnek meg, amelyek költsége f_1. Az optimális tervezésnél azt a hiperfelületet keressük, amelyhez a legkisebb költség tartozik, és ugyanakkor a felületnek legalább egy pontja rajta van a lehetséges tartományon, illetve annak határán. Ez a pont adja az optimális megoldást.

2.7 Az optimális tervezés megoldási módszerei

A 2.1 ábra az optimális tervezés állapotegyenleteit és összefüggéseit szemlélteti. Általános esetben az állapotegyenletek a tervezési változók függvényében nem, vagy csak bonyolult



2.1 ábra. Az optimálás folyamata

alakban fejezhetők ki, és az állapotfeltételek és sokszor a célfüggvény sem lineáris. Emiatt a feladatok megoldásához különösen nagyméretű szerkezetek esetén számítógépes programokra és nagyteljesítményű számítógépekre van szükség. Az alábbiakban a teljesség igénye nélkül röviden áttekintjük az optimális tervezésnél leggyakrabban alkalmazott módszereket. Ezt megelőzően azonban összefoglaljuk a szélsőérték-számítás alapelveit (Bazaraa és Shetty (1979), Brandt (1984), Haftka, Gürdal és Kamat (1990)).

2.7.1 A szélsőérték-számítás alapelvei

2.7.1.1 Feltétel nélküli szélsőérték-feladat

Az $f(\mathbf{x}) \in C^1$ n-változós függvénynek egy $\mathbf{x}^*$ pontban akkor van lokális minimuma, ha az $\mathbf{x}^*$ pont közvetlen környezetében lévő valamennyi $\mathbf{x}$ pontra teljesül az

$$f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}) \tag{2.8}$$

feltétel. A $\nabla f\left(\mathbf{x}^*\right) = 0$ egyenlet teljesülése esetén a lokális minimum létezésének szükséges feltételét kapjuk. Itt ∇f az f függvény gradiens vektora. Az ezt kielégítő $\mathbf{x}^*$ pont az $f(\mathbf{x})$ függvény stacionárius pontja.

2.7.1.2 Feltételes szélsőérték-feladat

Vizsgáljuk meg azt a szélsőérték-feladatot, amikor az $f(\mathbf{x})$ függvény minimumának meghatározásakor egyidejűleg a

$$h_j(\mathbf{x}) = 0\,;\ (j=1,2,...,k), \tag{2.9}$$

egyenlőségi mellékfeltételeknek teljesülniük kell.

A (2.9) feltételi egyenletek és az $f(\mathbf{x})$ függvény minimálásával definiált feltételes szélsőértékfeladat Lagrange-függvénye a következő módon írható fel:

$$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j h_j(\mathbf{x}). \tag{2.10}$$

Az f függvény lokális minimumpontjában ki kell elégülniük a

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0; \quad (i = 1,2,...,n) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= h_j(\mathbf{x}) = 0; \quad (j = 1,2,...,k) \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

feltételeknek, amelyek ($n+k$ számú) egyenletre vezetnek. A fenti képletek fejezik ki az $f(\mathbf{x})$ függvény minimumának szükséges feltételét. Ebből a lokális minimumpont x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* koordinátái és a λ_1, λ_2, ..., λ_k szorzók meghatározhatók. Általános esetben a mellékfeltételeket egyenlőségek és (2.1) alakú egyenlőtlenségek fejezik ki. Az ilyen jellegű szélsőérték-feladatokat matematikai programozási feladatoknak nevezzük.

2.7.2 A matematikai programozás alkalmazása

Eddigi ismereteink alapján a szerkezetek optimális tervezése az alábbi formában fogalmazható meg:

$$\min f(\mathbf{x}) \tag{2.12.a}$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0; \qquad (j = 1,2,...,k), \tag{2.12.b}$$

$$g_j(\mathbf{x}) \le 0; \qquad (j = 1,2,...,m). \tag{2.12.c}$$

Ez általában egy nemlineáris matematikai programozási feladat, melynek megoldására számos eljárás és algoritmus ismert. Ezek közül csak az általunk használt módszerekkel foglalkozunk.

2.7.2.1 A Lagrange-függvény alkalmazása

A matematikai programozásban szereplő (2.12.c) egyenlőtlenségek s_j ismeretlen ún. hiányváltozók bevezetésével egyenlőséggé alakíthatók át:

$$g_j(\mathbf{x}) + s_j^2 = 0; \ (j = 1,2, ..., m) \tag{2.13}$$

és ekkor a (2.12) feladat a következőképpen fogalmazható meg:

$$\left.\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) \\ &h_j(\mathbf{x}) = 0; \quad (j = 1,2,...,k), \\ &g_j(\mathbf{x}) + s_j^2 = 0; \quad (j = 1,2,...,m). \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Ennek a feladatnak a Lagrange-függvénye az alábbi alakban írható fel:

$$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\lambda},s) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [g_j(\mathbf{x}) + s_j^2]. \tag{2.15}$$

Ebben μ_j; (j = 1,2, ..., k) és λ_j; (j = 1,2, ..., m) az ismeretlen Lagrange-szorzókat jelölik. Az $f(\mathbf{x})$ függvény lokális minimumának szükséges feltételét az alábbi egyenletek fejezik ki:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \frac{\partial h_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0; \quad (i = 1,2,...,n), \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_j} = h_j(\mathbf{x}) = 0; (j = 1,2,...,k), \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = g_j(\mathbf{x}) + s_j^2 = 0; (j = 1,2,...,m), \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_j} = 2\lambda_j s_j = 0; (j = 1,2,...,m). \tag{2.19}$$

A (2.16)-(2.19) képletek alapján a következő megállapítások tehetők. Ha a j-edik feltétel inaktív, azaz $g_j(\mathbf{x}) < 0$, akkor (2.13) szerint $s_j^2 \neq 0$, és így (2.19) szerint $\lambda_j = 0$. Ha viszont a j-edik feltétel aktív, azaz $g_j(\mathbf{x}) = 0$, akkor (2.13) szerint $s_j^2 = 0$, és így (2.19) szerint $\lambda_j \ge 0$. (Igazolható, hogy minimum esetén $\boldsymbol{\lambda}$ nem lehet negatív.) A fentiekből következik, hogy valamennyi j=1,2,...,m esetben $g_j(\mathbf{x})\ \lambda_j = 0$. Ezt figyelembe véve a (2.16)-(2.19) képletekben a (2.18) helyett az alábbi két feltételt adhatjuk meg:

$$g_j(\mathbf{x})\lambda_j = 0; (j = 1,2,...,m). \tag{2.20}$$

$$g_j(\mathbf{x}) \le 0; (j = 1,2,...,m), \tag{2.21}$$

A fenti összefüggésekben a j=1,2,...,m feltétel közül r aktív és (m-r) inaktív. A (2.20) egyenletek szerint az r számú aktív feltételnél $g_j(\mathbf{x})=0$, és ezért λ_j tetszőleges értéket felvehet. Az (m-r)

számú inaktív feltétel esetén $g_j(\mathbf{x})<0$, és ezért $\lambda_j=0$. A (2.16.-2.17) és (2.19-2.21) összefüggésekben az $x_1, x_2, ..., x_n$ tervezési változók, $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ és $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ változók szerepelnek, melyek összesen $(n+k+r)$ ismeretlent jelentenek. Ezek a (2.16.-2.17) és (2.19-2.20) valamint a $g_j(\mathbf{x})=0$; $(j = 1,2, ..., r)$ azaz $(n+k+r)$ számú képletből meghatározhatók.

A (2.16.-2.17) és (2.19-2.21) egyenletek a lokális minimum szükséges feltételét fejezik ki. Az elégséges feltétel csak a magasabb rendű deriváltak segítségével definiálható.

2.7.3 A Kuhn-Tucker feltétel

A továbbiakban vizsgáljuk azt az egyszerűbb esetet, amikor a (2.12.b) egyenleteket hiányoznak. Ekkor a (2.16) egyenlet az alábbi egyszerűbb alakot ölti:

$$-\nabla_x f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \nabla_x g_j(\mathbf{x}). \tag{2.22}$$

A képletben a ∇ differenciál operátort jelöl. A lehetséges tartomány egy irreguláris (sarok) pontjában a $g_j(\mathbf{x})=0$; $(j=1,2,...,J)$ felületek metszik egymást és a ponthoz tartozó gradiens vektoraikat a $\lambda_j \nabla_{\mathbf{x}} g_j(\mathbf{x})$; $(j=1,2,...,J)$ kifejezések adják meg. A vektoroknak a $\lambda_j \geq 0$ nemnegatív szorzókkal kifejezett

$$\sum_{j=1}^{J} \lambda_j \nabla_x g_j(\mathbf{x}); \quad \lambda_j \geq 0 \tag{2.23}$$

lineáris kombinációi egy, a vizsgált irreguláris ponthoz illeszthető konvex kúpot határoznak meg. A (2.22) egyenlet alapján tehát megállapíthatjuk, hogy a $f(\mathbf{x})$ függvény minimumának az a szükséges feltétele, hogy valamelyik $\mathbf{x}^*$ pontjához tartozó negatív gradiens vektora az ezt a pontot tartalmazó $g_j(\mathbf{x})=0$; $(j=1,2,...,J)$ aktív feltételek gradiens vektorai által meghatározott kúpon belül, vagy annak felületén helyezkedjék el. A fentiekben megfogalmazott ún. Kuhn-Tucker feltétel a lokális minimum szükséges feltételét fejezi ki. A Kuhn-Tucker feltétel az optimális tervezés egyik fontos eszköze.

2.7.4 Szekvenciális kvadratikus programozási módszer

A matematikai programozási módszerek (Bazaraa és Shetty (1979), Brandt (1984)) közül az egyik leggyakrabban, illetve legszélesebb körben használt eljárást ismertetjük, ami számos számítógépes program elméleti hátterét szolgáltatja (Schittkovski (1985/86)). Az itt bemutatásra kerülő eljárás Powell módszerének egyszerűsített változata Haftka alapján (Haftka, Gürdal és Kamat (1990), Kirsch (1981)). Tekintsük a (2.12) matematikai programozási feladatot továbbra is a (2.12.b) egyenlőségi feltételek nélkül. Jelöljük az i-edik fő iterációs lépésben $\mathbf{x}_i$-vel a tervezési változók vektorát. A matematikai programozási feladat megoldási algoritmusának azon

„kérdésére”, hogy a következő iterációs lépésben milyen irányban (**d**) és mekkorát (α) kell lépnünk a célfüggvény értékének javítása érdekében úgy, hogy az eredeti feltételeket kielégüljenek, egy feltételes és egy feltétel nélküli kvadratikus programozási alfeladatot kell megoldanunk. A **d** irány meghatározása a következő feladatból kapható:

$$\min \Phi(\mathbf{d}) = \min \left(f(\mathbf{x}_i) + \mathbf{d}^T \nabla_x f(\mathbf{x}_i) + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{A}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\lambda}_i) \mathbf{d} \right) \tag{2.24.a}$$

az alábbi feltételek mellett

$$g_j(\mathbf{x}_i) + \mathbf{d}^T \nabla_x g_j(\mathbf{x}_i) \le 0; \quad (j = 1, 2, ..., m), \tag{2.24.b}$$

ahol **A** egy pozitív definit mátrix és a következőkben definiált Lagrange-függvény Hesse-mátrixának közelítésére képezzük. Legyen a (2.24) feladat optimális megoldása **d** és $\boldsymbol{\lambda}_i$. Így a fentiekben említett $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha \mathbf{d}$ lépéshez az α lépésnagyság meghatározása szükséges. Ez a:

$$\Psi(\alpha) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \left| \max\left(0, g_j(\mathbf{x})\right) \right| \tag{2.25}$$

függvény szélsőértékeként kapható meg. Itt μ_j kezdőértéke a Lagrange-szorzók abszolút értékével azonos, míg a további iterációkban a

$$\mu_j = max\left[\left|\lambda_j^{(i)}\right|, \frac{1}{2}\left(\mu_j^{(i-1)} + \left|\lambda_j^{(i-1)}\right| \right) \right] \tag{2.26}$$

alapján számítandó. Itt i az eredeti feladat *i*-edik fő iterációs lépésre utal. A fentiekben -(2.24.b)-említett **A** pozitív definit mátrixot a kezdőlépésben egy egységmátrixként vesszük fel, míg minden további lépésben a BFGS (Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno) algoritmus alapján számítjuk (Haftka, Gürdal és Kamat (1990)):

$$\mathbf{A}^{új} = \mathbf{A}^{régi} - \frac{\mathbf{A}^{régi} \Delta\mathbf{x} \Delta\mathbf{x}^T \mathbf{A}^{régi}}{\Delta\mathbf{x}^T \mathbf{A}^{régi} \Delta\mathbf{x}} + \frac{\Delta\mathbf{l} \Delta\mathbf{l}^T}{\Delta\mathbf{x}^T \Delta\mathbf{x}}, \tag{2.27}$$

ahol $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$, $\Delta\mathbf{l} = \nabla_x \mathrm{L}(\mathbf{x}_{i+1}, \boldsymbol{\lambda}_i) - \nabla_x \mathrm{L}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\lambda}_i)$ és L a (2.12) feladat Lagrange-függvénye. Az **A** mátrix pozitív definit voltának garantálására a $\Delta\mathbf{l}$ értékét módosítanunk kell, ha fennáll a $\Delta\mathbf{x}^T \Delta\mathbf{l} \le 0.2 \Delta\mathbf{x}^T \mathbf{A} \Delta\mathbf{x}$ feltétel, és ekkor a módosított érték:

$$\Delta\mathbf{l}' \le \Theta \Delta\mathbf{l} + (1 - \Theta) \mathbf{A} \Delta\mathbf{x}, \tag{2.28}$$

ahol $\Theta = \dfrac{0.8 \Delta\mathbf{x}^T \mathbf{A} \Delta\mathbf{x}}{\Delta\mathbf{x}^T \mathbf{A} \Delta\mathbf{x} - \Delta\mathbf{x}^T \Delta\mathbf{l}}$. A továbbiakban részben erre az algoritmusra épülő számítógépes programot használjuk a numerikus feladatok megoldásánál az NLPQL szubrutin beépítésével.

2.7.5 Az optimum feltételre alapuló módszerek

A matematikai programozás alkalmazásakor a teljes vizsgálat során biztosítjuk a feltételekre előírt egyenlőségi és/vagy egyenlőtlenségi feltételek kielégítését, és alkalmas algoritmusok felhasználásával keressük a célfüggvény minimumát. Az optimum feltételen alapuló módszerek esetében viszont az iteráció során - megfelelő összefüggések bevezetése révén - a minimum feltétel kielégülését biztosítjuk, és a tervezési változók alkalmas változtatásával fokozatosan elégítjük ki az egyenlőségi és/vagy egyenlőtlenségi feltételek által előírt feltételeket. A módszer hatékonyan alkalmazható egyes optimalizálási feladatok iterációs úton történő megoldására. Bizonyos összefüggések alkalmazása a konvergencia gyorsítására is lehetőséget nyújt. Az alábbiakban röviden Gallagher (1973), Gellatly és Berke (1973) által bemutatott két módszert ismertetünk, amelyek a mérnöki optimálásban széles körben elterjedtek.

2.7.5.1 A teljesen kihasznált feszültségek módszere

A teljesen kihasznált feszültségek módszerének (fully stressed design (FSD)) az a kézenfekvő alapgondolata, hogy a szerkezet súlya akkor a legkisebb, vagyis az az optimális megoldás, ha valamennyi eleme teljesen ki van használva. Rugalmas anyagú szerkezetek esetén ez annyit jelent, hogy valamennyi elemben a legnagyobb feszültség eléri a megengedett feszültséget.

Egyparaméteres terhelés működésekor statikailag határozott szerkezetek esetén, az egyensúlyi egyenletek az igénybevételek eloszlását egyértelműen meghatározzák, ezért nyilvánvaló, hogy a teljesen kihasznált feszültségek módszere a globális optimális megoldást adja meg. Statikailag határozatlan szerkezetek esetében az igénybevételek eloszlása a tervezési változók (pl.: keresztmetszeti méretek) függvénye, ezért több olyan megoldás is lehetséges, amelynél valamennyi elem teljesen ki van használva. Ebben az esetben tehát egy megoldás általában csak a lokális minimumot adja meg. Többparaméteres terhelés esetén statikailag határozott tartóknál sem adja meg a kihasznált feszültségek módszere a globális optimumot. Ilyenkor statikailag határozott és határozatlan szerkezetek esetében egyaránt arra szoktak törekedni, hogy minden egyes elem legalább egy terhelési eset működésekor legyen teljesen kihasználva.

A módszer az igénybevételek ismételt meghatározását és a tervezési változóknak a megengedett feszültségek kihasználása érdekében történő fokozatos korrigálását teszi szükségessé mindaddig, amíg valamennyi tartóelem teljesen ki nincs kihasználva. A célfüggvény ebben az esetben a tartó súlya (térfogata), de ennek külön bevezetésére nincs szükség, mivel a súly minimumát a megengedett feszültségek teljes kihasználtsága biztosítja.

A módszer szemléltetése érdekében vizsgáljunk egy egyparaméteres teherrel terhelt rugalmas anyagú, statikailag határozatlan rácsos tartót, és tételezzük fel, hogy a rudak $x_i^{(k)}$ keresztmetszeteit és $\sigma_i^{(k)}$ feszültségeit egy *k*-adik iterációs lépés során meghatároztuk. Egyes

rudakban ezek a feszültségek nem érik el, másokban pedig túllépik a σ_e megengedett feszültséget. Ekkor a $(k+1)$-edik iterációs lépés alapjául szolgáló $x_i^{(k+1)}$ keresztmetszeteket az alábbi korrigált értékekből kell kiszámítani:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} \frac{\sigma_i^{(k)}}{\sigma_e}. \tag{2.29}$$

Ennek alapján a $(k+1)$)-edik lépésben a $\sigma_i^{(k+1)}$ feszültségek meghatározhatók. Az iterációt a (2.29) képlet felhasználásával addig kell folytatni, ameddig valamennyi rúdban a feszültség a megkívánt pontossággal megközelíti a megengedett feszültséget. Mivel a legtöbb szerkezet esetén az egyik keresztmetszet méretének változása egy másik keresztmetszetben ébredő feszültség nagyságát csak csekély mértékben befolyásolja, ezért az iteráció rendszerint gyorsan konvergál és a konvergencia szempontjából az ismeretlenek számának nincs lényeges befolyása. Gyorsítható a konvergencia, ha a (2.29) képlet helyett az alábbi összefüggést alkalmazzuk:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} \left[\frac{\sigma_i^{(k)}}{\sigma_e} \right]^{\nu}, \tag{2.30}$$

ahol $\nu > 1$, egy alkalmasan megválasztott kitevő.

2.7.5.2 Az optimum feltételre alapuló általános módszer

Az alábbiakban egy olyan általánosabb alakban megfogalmazott optimum feltételen alapuló módszert ismertetünk, amely a (2.16.-2.17) és (2.19-2.21) összefüggések által meghatározott egyenlőségi és/vagy egyenlőtlenségi feladat iterációs úton történő megoldására alkalmas. Az egyszerűség kedvéért csak azoknak a speciális, de a gyakorlatban sokszor előforduló feladatoknak a vizsgálatával foglalkozunk, amelyeknél a $h_j(\mathbf{x})=0$ alakú feltételek nincsenek megadva, illetve ki lettek küszöbölve, továbbá a célfüggvény, és a feltételek olyan tagok összegéből állnak, amelyek mindegyike csak egyetlen tervezési változó függvénye:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i), \tag{2.31}$$

$$g_j(\mathbf{x}) = \bar{g}_j(\mathbf{x}) - g_{jo} = \sum_{i=1}^{n} g_{ji}(x_i) - g_{jo} \le 0; \; (j = 1,2,...,m). \tag{2.32}$$

Itt g_{jo} a j-edik feltételben található konstans értéket jelöli, míg $\bar{g}_j(\mathbf{x})$ a tervezési változók adott kombinációját fejezi ki. Ha (2.32)-t a (2.16) egyenlőségi feltételek törlésével módosított egyenletébe

$$\nabla_x f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla_x g_j(\mathbf{x}) = 0. \tag{2.33}$$

behelyettesítjük, a következőt kapjuk:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{df_1}{dx_1}+\lambda_1\dfrac{dg_{11}}{dx_1}+\ldots+\lambda_m\dfrac{dg_{m1}}{dx_1}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{df_n}{dx_n}+\lambda_1\dfrac{dg_{1n}}{dx_n}+\ldots+\lambda_m\dfrac{dg_{mn}}{dx_n}=0 \end{array}\right\} \tag{2.34}$$

Mivel mindegyik fenti egyenletben csak egyetlen tervezési változó szerepel, ezért az n számú egyismeretlenes egyenletből a tervezési változók viszonylag egyszerűen kifejezhetők a λ_j szorzók függvényében:

$$x_i = f_i(\lambda_j);\ \ (i = 1,2, \ldots, n;\ j=1,2,\ldots,m). \tag{2.35}$$

Ezek a (2.33) optimumfeltétel alapján levezetett egyenletek az iteráció során az optimum szükséges feltételének kielégülését biztosítják. -Ezek a disszertáció topológiaoptimálási fejezetében ismertetett mechanikai problémák nagy többségénél az egyes elemek függetlensége miatt mindig a (2.35)-nek megfelelő formában jelentkeznek.- Ha a (2.31) képletbe behelyettesítjük őket, akkor a célfüggvény megfelelő átalakítások után az alábbi általános formában írható fel:

$$f(\mathbf{x}) = \overline{g}_1(\mathbf{x})\lambda_1 + \ldots + \overline{g}_j(\mathbf{x})\lambda_j + \ldots + \overline{g}_m(\mathbf{x})\lambda_m . \tag{2.36}$$

Az iterációs megoldás alapját a (2.34) optimumfeltétel képezi. Ebből számíthatjuk ki mindenegyes lépésnél a λ_j paraméter újabb értékeiből az új x_i tervezési változókat. Az egyes lépéseknél λ_j értékeit úgy módosítjuk, hogy a (2.32) feltételek fokozatosan kielégüljenek. Ennek biztosítására és a tapasztalati konvergencia gyorsítására a (2.37) összefüggés szolgál. Ez azt fejezi ki, hogy az egyes feltételeknek megfelelő $\overline{g}_j\lambda_j$ tagok hogyan befolyásolják az $f(\mathbf{x})$ célfüggvény nagyságát. Ha például a *j*-edik feltétel nincs kihasználva, azaz $\overline{g}_j < g_{jo}$, akkor az ennek megfelelő $\overline{g}_j\lambda_j$ tag a célfüggvény csökkentése érdekében csökkenthető. Ez λ_j csökkentésével érhető el. Ennek következtében a (2.35) képlet szerint az x_i tervezési változók csökkennek, ami egyben a *j*-edik feltétel jobb kihasználását eredményezi. Ha viszont a *j*-edik feltétel nem elégül ki, azaz $\overline{g}_j > g_{jo}$, akkor az ennek a feltételnek megfelelő $\overline{g}_j\lambda_j$ tagot növelni kell, ami az x_i tervezési változók növelését eredményezi, és ezzel elősegíti a *j*-edik feltétel kielégülését. Ez λ_j növelésével érhető el. A fenti szempontokat figyelembe véve, az optimumfeltétel biztosítása mellett a feltételek fokozatos kielégítése és az iteráció gyorsítása az alábbi képlet alkalmazásával érhető el:

$$\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_j^{(k)}\left(\frac{\overline{g}_j^{(k)}}{g_{jo}}\right)^{\nu};\ (j=1,2,\ldots,m). \tag{2.37}$$

Ebben (k) az előző és ($k+1$) a jelenlegi lépés eredményére utal, és ν a konvergenciát szabályzó alkalmasan választott kitevő. A λ_j szorzók ismételt meghatározására az alábbi iterációs képletet is szokták használni:

$$\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_j^{(k)}[1 + \alpha(\overline{g}_j^{(k)} - g_{jo})]; \; (j = 1, 2, ..., m). \tag{2.38}$$

Ebben α jelöli a konvergenciát szabályzó tényezőt.

A továbbiakban a topológiaoptimálási feladatokban az erre a megoldási elvre épülő eljárást használjuk.

3 RUGALMAS-KÉPLÉKENY TARTÓSZERKEZETEK MÉRETEZÉSE A MARADÓ ALAKVÁLTOZÁSOK ÉS ELMOZDULÁSOK KORLÁTOZÁSÁVAL

Ez a fejezet a korábbi eredményeink alapján (Kaliszky és Lógó (1995-2006)) a rugalmas-képlékeny anyagú vázas szerkezetek (rácsos tartók, gerendák, keretek) és felületszerkezetek (tárcsák és lemezek) optimális tervezését ismerteti. Rácsos tartók, keretek és tárcsák esetében a tartót kvázi-statikus többparaméteres teher, gerendák és lemezek esetében pedig nagy intenzitású, rövid ideig tartó dinamikus teher (robbanás, ütés, ütközés, földrengés) terheli. A túlzott mértékű képlékeny alakváltozások és a nagy maradó elmozdulások korlátozása érdekében a javasolt számítási modellek a beállásvizsgálat mellett a maradó feszültségek kiegészítő alakváltozási energiájára és a maradó elmozdulásokra vonatkozó korlátokat is tartalmaznak, rácsos tartóknál pedig a rudak stabilitásvizsgálatát is előírják. A vizsgálat célja a fenti feltételeket kielégítő minimális térfogatú, illetve tömegű tartók tervezése. Mindegyik feladat matematikai megfogalmazása két, kapcsolt nemlineáris matematikai programozási feladatra vezet. Az alkalmazást számpéldák szemléltetik. Az anyag nemzetközileg jelentős tudományos szaklapokban került publikálásra.

3.1 Rövid irodalmi áttekintés

A képlékeny optimális tervezés alkalmazásával jelentős anyagmennyiség takarítható meg. A képlékeny alakváltozások megengedése következtében a tartószerkezetekben nagy maradó feszültségek, illetve alakváltozások maradhatnak, és ez a mindennapi használatkor jobb esetben esztétikai, rosszabb esetben használati problémákat okozhat, illetve összeomlás is előfordulhat. Ezért alapvető fontosságú ezen alakváltozások és elmozdulások meghatározása, amely viszont megköveteli a teljes terhelési folyamat vizsgálatát. Az elmúlt évtizedekben számos módszert fejlesztettek ki a tehernövekményeket lépésről lépésre követő iterációs eljárásokra az egyparaméteres statikus és dinamikus teherrel terhelt szerkezetek vizsgálata esetén (De Donato (1977), Maier és szerzőtársai (1977, 1979), Freitas (1990), Kaliszky (1989), Martin (1975), Borino és társai (1990), Lloyd Smith (1990, 1991)). Ezek célravezető eljárások, de igen hosszadalmas számítási munkát igényelnek és dinamikus teher esetén különösen bonyolultak. Többparaméteres terhelés esetén a terhelési folyamat teljesen nem ismert, és a hatására kialakuló képlékeny alakváltozások és elmozdulások számítása igen bonyolult vagy megoldhatatlan feladat, de itt is az igen hosszadalmas lépésről-lépésre eljárások alkalmazhatók (Koiter (1960), Horne (1954), Capurso (1974), Neal (1977)). Ebből következően igen fontos a tervezési folyamatban olyan eljárások ismerete, amelynek felhasználásával a képlékeny alakváltozások és elmozdulások nagyságára korlátokat tudunk adni, illetőleg közelítőleg ki tudjuk számolni azokat.

Erre vonatkozóan Symonds és Neal (1952), Corradi (1977), Ponter (1972) hatékony eljárást dolgozott ki egyparaméteres statikus terhelés esetén. Dinamikusan (lökésszerűen) terhelt rugalmas-képlékeny, illetve merev-képlékeny szerkezetek képlékeny elmozdulásainak számítására többek között Kaliszky (1984, 1989), Martin (1975), Ponter (1975), Symonds és Wierzbiczki (1975), Jones (1989) munkáiban találhatunk módszereket, amelyekben a szerzők a tönkremeneteli módok közelítését és az energia megmaradás elvét használják.

Többparaméteres terhelés esetén a váltakozó, illetve összeadódó képlékeny alakváltozások következtében a szerkezeti elemek rideg törésének, illetve a szerkezet összeomlásának veszélye nagy, ezért különösen fontos a képlékeny alakváltozások, illetve elmozdulásának ismerete. Erre a legalkalmasabb eszköz a klasszikus beállásvizsgálat (Melan (1936, 1938), Koiter (1960)). Az általuk ismertetett eljárásra épülve számos kutató (Maier (1969), Polizzotto (1982), König (1987), Kaliszky (1996), Weichert és Maier (2002)) számítási módszert vezetett be és a különböző típusú szerkezetek vizsgálatára, tervezésére, és sikeresen alkalmazta azokat. Ezen klasszikus beállásvizsgálatra alapuló módszerek fő hibája, hogy az összegződő képlékeny alakváltozások, illetve maradó feszültségek nagyságáról nem kapunk információt. Az elmúlt években olyan módszerek kerültek kidolgozásra, amelyek segítségével képesek vagyunk közelítőleg meghatározni a képlékeny alakváltozások, illetve maradó feszültségek és elmozdulások nagyságát és azokra alsó, illetve felső korlátokat tudunk adni (Ponter (1972), Corradi (1977), Capurso és társai (1978), Kaneko és Maier (1981), Polizzotto (1982), Kaliszky és Lógó (1995), Kaliszky (1996, 1996-97), Rozvany (1997), Lange-Hansen (1998), Tin-Loi (2000), Weichert és Maier (2002)).

Mint ahogy látható, az irodalomban számos eljárás található egy- illetve többparaméteres kvázi-statikus teherrel terhelt rugalmas-képlékeny tartószerkezetek képlékeny alakváltozásainak, elmozdulásainak becslésére, közelítő számítására. Most röviden ismertetjük a munkánk alapját képző Capurso-Ponter elmélet alkalmazását szilárd testekre (Kaliszky és Lógó (1995)).

3.1.1 A képlékeny viselkedés általános korlátja

Tekintsünk egy lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékeny, időtől és hőmérséklettől független anyagú V térfogatú és S felületű szilárd testet. Az S felület S_u-val jelzett részén megtámasztott, az S_q rész pedig $\mathbf{q}(t)$ kvázi-statikus teherrel terhelt. Tegyük fel, hogy a térfogati erők zérus nagyságúak, és a test kis alakváltozásokat végez a terhelés következtében. Egy adott t időpontban a $\mathbf{q}(t)$ kvázi-statikus teherhez a következő mennyiségek rendelhetők: a $\boldsymbol{\sigma}(t)$: a tényleges feszültség vektora, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ és $\mathbf{u}(t)$: a tényleges alakváltozás és elmozdulás vektorai,

$\boldsymbol{\sigma}^E(t)$: egy képzeletbeli feszültség vektor, amely akkor alakulna ki, ha a test lineárisan rugalmas anyagú lenne, $\boldsymbol{\varepsilon}^E(t)$ és $\mathbf{u}^E(t)$ a $\boldsymbol{\sigma}^E(t)$ képzeletbeli feszültség következtében kialakuló képzeletbeli rugalmas alakváltozás, illetve rugalmas elmozdulás vektorai. Továbbá vezessünk be három különböző sajátfeszültség-vektort: $\boldsymbol{\sigma}^R(t)$: a tényleges maradó feszültségek vektorát, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^R$ és $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^R$: két, időtől független sajátfeszültség-vektort, értelmezésükre lentebb térünk vissza.

A test egy adott pontjában a $\boldsymbol{\sigma}(t)$ tényleges feszültsége felírható a $\boldsymbol{\sigma}^E(t)$ képzeletbeli és a $\boldsymbol{\sigma}^R(t)$ maradó feszültségek összegeként:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}^E(t) + \boldsymbol{\sigma}^R(t). \tag{3.1}$$

Jelölje $W_p(\tau)$ azt a képlékeny kiegészítő munkát, amely a $t=0$ időponttól a $t=\tau$ időpontig a zavartatlan terhelési folyamat során számítható. Ez egy alkalmas mérőszám a teljes képlékeny viselkedés mérésére és annak a felső korlátjára is egyben. Ezen képlékeny kiegészítő munkát Capurso alapján (Capurso (1974), Capurso és társai (1978)) a következőképpen számíthatjuk: ha található egy $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^R$ időtől független sajátfeszültség-eloszlás amelynél az

$$f\left(\boldsymbol{\sigma}^E(t) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^R\right) \le 0 \tag{3.2}$$

képlékenységi feltétel kielégül a V térfogat minden pontjában bármely $t \le \tau$ időpontig, akkor a teljes képlékeny munka soha nem nagyobb, mint az alábbi módon számítható mérőszám:

$$W_p(\tau) \le \frac{1}{2}\int \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^R\right)^* \mathbf{C}\,\bar{\boldsymbol{\sigma}}^R dV. \tag{3.3}$$

Itt $\mathbf{C}$ az anyagi tulajdonságokat tartalmazó mátrix, * a transzponálás jele. Az így kapott mérőszám egyben a képlékeny viselkedés mértékének felső korlátja.

3.1.2 A képlékeny elmozdulások korlátja

Jelölje $\mathcal{T}_A$ azt a virtuális erőt, amely a vizsgált test felületének A pontjában hat, továbbá $\boldsymbol{\sigma}^{E\mathcal{T}}$ azt a feszültség-eloszlást, amely a $\mathcal{T}_A$ erőből a test V tartományában oly módon számítható, mintha a test korlátlanul lineárisan rugalmas viselkedésű lenne. Továbbá $\mathbf{u}_A^E$ jelölje azt az elmozdulást, amely a $t=\tau$ időpontban az A pontban a $\mathbf{q}(t)$ kvázi-statikus teherből lineárisan rugalmas anyag esetén számítható. Az A pontban keletkező $\mathbf{u}_A(\tau)$ tényleges elmozdulás (a lineárisan rugalmas – tökéletesen képlékeny anyagú testen) Ponter és Capurso (Ponter (1972), Capurso (1974), Capurso és társai (1978)) által kidolgozott elmélet alapján közelítőleg az alábbi módon számítható: ha található egy $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^R$ időtől független olyan sajátfeszültség-eloszlás, amely kielégíti

az

$$f\left(\boldsymbol{\sigma}^{E}\left(t\right)+\boldsymbol{\sigma}^{E\mathcal{J}}+\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{R}\right)\leq 0 \tag{3.4}$$

képlékenységi feltételt a V térfogat minden pontjában minden $t \leq \tau$ időpontig, akkor az A pontban keletkező $\mathbf{u}_A\left(\tau\right)$ tényleges elmozdulásnak a $t=0$ időponttól a $t \leq \tau$ időpontig létrejövő felső korlátja és az alábbi módon számítható:

$$\left(\mathcal{J}_A\right)^{*}\mathbf{u}_A\left(\tau\right)\leq\left(\mathcal{J}_A\right)^{*}\mathbf{u}_A^{E}\left(\tau\right)+\frac{1}{2}\int\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{R}\right)^{*}\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{R}dV\,. \tag{3.5}$$

Jelölje $\mathcal{J}_0$ a $\mathcal{J}_A$ erő nagyságát, illetve az A pontban az $u_0\left(\tau\right)$ a tényleges és $u_0^E\left(\tau\right)$ a képzeletbeli rugalmas elmozdulás-komponenseket a $\mathcal{J}_A$ erő irányában, ekkor az alábbi összefüggések fennállnak:

$$\left(\mathcal{J}_A\right)^{*}\mathbf{u}_A\left(\tau\right)=\mathcal{J}_0 u_0\left(\tau\right),\ \text{illetve}\ \left(\mathcal{J}_A\right)^{*}\mathbf{u}_A^{E}\left(\tau\right)=\mathcal{J}_0 u_0^{E}\left(\tau\right). \tag{3.6}$$

A (3.6) kifejezéseket behelyettesítve a (3.5) egyenlőtlenségbe a tényleges elmozdulás korlátjára egy könnyen kiszámítható felső korlátot kapunk:

$$u_0\left(\tau\right)\leq u_0^{E}\left(\tau\right)+\frac{1}{2\mathcal{J}_0}\int\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{R}\right)^{*}\mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{R}dV\,. \tag{3.7}$$

Az így kapott $u_0\left(\tau\right)$ elmozdulási korlát a $\mathcal{J}_0$ és $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{R}$ értékek „alkalmas” megválasztásával tovább javítható. A továbbiakban a – (3.3) és (3.7) egyenlőtlenségekkel kiszámítható – felső korlátok felhasználásával mutatjuk be az optimális tervezés feladatait statikus terhelésű tartószerkezetek (rácsos tartók, gerendák, tárcsák, lemezek) esetén. Az elmozdulási korlátot és a teljes képlékeny viselkedést szabályzó maradó feszültségek alapján számított képlékeny kiegészítő munkával bővített képlékeny határállapot vizsgálat, illetve a beállásvizsgálat alapfeladatai megtalálhatók több dolgozatban (Kaliszky és Lógó (1995, 1997), Kaliszky (1996)). Ezek nem részei a jelen dolgozatnak.

3.2 Kvázi-statikus terhelésű tartószerkezetek tervezése

3.2.1 Jelölések

A fejezetben a vizsgált tartók lineárisan rugalmas–tökéletesen képlékeny anyagúak, alakjuk és elrendezésük (topológiájuk) adott. A rácsos tartók, gerendák és keretek n számú A_i állandó keresztmetszetű (i=1,2,…,n) és ℓ_i hosszúságú rudat tartalmaznak, a lemezek és tárcsák pedig (i=1,2,…,n) számú h_i vastagságú és Δ_i területű véges elemre vannak felosztva. A további fontosabb jelölések az alábbiak:

E_0, σ_{y0}, ρ_0: az anyag rugalmassági modulusa, folyási határa és sűrűsége,

g : a nehézségi gyorsulás,

M, m: a test-, szerkezet tömege,

$\mathbf{P}_h$; $(h = 1, 2, ..., s)$: az előírt terhelési kombinációkban a tehervektor,

$\mathbf{Q}^{eh}$: a $\mathbf{P}_h$ teherből a rugalmasságtan alapján számított csomóponti erők, illetve rúderők

$\mathbf{Q}^r$: a maradó csomóponti erők, illetve rúderők a csomópontokban, illetve a rudakban,

$\mathbf{Q}^h = \mathbf{Q}^{eh} + \mathbf{Q}^r$: a tényleges csomóponti erők, illetve rúderők a csomópontokban, illetve a rudakban,

$f_i(\mathbf{Q}, \sigma_y)$: az i-edik véges elem, illetve a rúdelem folyási függvénye,

$\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}^*$: hajlékonysági, merevségi, geometriai és egyensúlyi mátrix (a geometria mátrix transzponáltja).

3.2.2 Alakváltozási és elmozdulási korlátok

A itt ismertetendő optimális tervezési módszerek azon a feltevésen alapulnak, hogy a tartók képlékeny alakváltozásokat is végezhetnek, ezek azonban nem halmozódhatnak korlát nélkül, mértékük és a maradó elmozdulások nagysága adott határt nem léphet túl. Ezeknek a feltételeknek a teljesülése statikus terhelés esetén a továbbiakban ismertetendő feltételek figyelembevételével biztosítható.

Többparaméteres terhekkel terhelt tartók esetén a képlékeny alakváltozások korlátlan halmozódása a beállásvizsgálat segítségével előzhető meg. Az ismertetendő módszereknél a beállásvizsgálat statikai tételét alkalmazzuk (Melan (1936, 1938), Kaliszky (1989)).

Mivel a beállásvizsgálat a tartókban kialakuló képlékeny alakváltozások nagyságáról nem ad tájékoztatást, ezért szükség van olyan korlátok alkalmazására, amelyek nagyságukat ugyan nem feltétlenül, de az átlagos mértéküket biztosan szabályozzák. Mivel a maradó feszültségek nagysága a maradó alakváltozások nagyságára is bizonyos tájékoztatást nyújt, ezért ilyen korlát lehet a maradó feszültségek kiegészítő alakváltozási energiájára vonatkozó alábbi feltétel (Kaliszky és Lógó (1995, 1997, 2000), Kaliszky (1996) -ennek szilárd testekre vonatkozó alakját illetően a 3.1.1 fejezet (3.3) képletére utalunk):

$$W_p = \frac{1}{2E_0} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{Q}_i^r\right)^* \mathbf{F}_i \mathbf{Q}_i^r \le W_{p0} . \qquad (3.8)$$

Itt W_{p0} a megengedett képlékeny alakváltozási energiát, $\mathbf{F}_i$ az *i*-edik rúd (elem) hajlékonysági mátrixát jelenti. A W_{p0} nagyságát például a $W_{p0} = \alpha W_e$ képlet alapján becsülhetjük meg, ahol W_e a domináns (legnagyobb) terhelés alapján számított rugalmas kiegészítő alakváltozási

energia és α a szerkezettől függő, megfelelő konstans, ami $1 \le \alpha \le 3$ határok között vehető fel a gyakorlati tapasztalatok alapján.

Egy $\mathbf{P}_h$ többparaméteres teherrel terhelt képlékeny állapotú tartó A pontjában létrejövő u_A eltolódás legjobb $\overline{u}_A$ felső korlátját a 3.1.2 fejezetben ismertetett, Ponter (1972) által kidolgozott módszer alapján diszkretizált szerkezet esetén az alábbi matematikai programozási feladat megoldása adja meg:

$$\overline{u}_A = \min \frac{1}{2|\mathcal{T}|}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{R}_i)^*\mathbf{F}_i\mathbf{R}_i \tag{3.9.a}$$

az alábbi feltételek mellett

$$\mathbf{G}^*\mathbf{R} = \mathbf{0}\,; \tag{3.9.b}$$

$$\mathbf{Q}^{e0} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{K}^{-1}\mathcal{T}_d\,;\ |\mathcal{T}_d| = 1\,; \tag{3.9.c}$$

$$f_{ih}\left[\left(\mathbf{Q}_i^{eh} + \mathbf{R}_i + |\mathcal{T}|\mathbf{Q}_i^{e0}\right);\ \sigma_{y0}\right] \le 0\,,\ (h = 1,2,...,s)\,,\ (i = 1,2,...,n)\,; \tag{3.9.d}$$

$$|\mathcal{T}| \rangle 0\,. \tag{3.9.e}$$

A képletekben $\mathcal{T}_d$ a tartó A pontjában az u_A irányában működő egységerő, $\mathcal{T}$ ismeretlen nagyságú, de a $\mathcal{T}_d$-vel azonos irányú erő, nagyságát a $|\mathcal{T}|$ jelöli, $\mathbf{R}$ pedig ismeretlen maradó erőket jelöl. A továbbiakban, bevezetve egy u_{A0} megengedett eltolódást, a tartó A pontbeli eltolódása az alábbi módon korlátozható:

$$\overline{u}_A - u_{A0} \le 0\,. \tag{3.10}$$

3.2.3 Rácsos tartók optimális tervezése a beállásvizsgálat statikai tétele alapján

Az alábbiakban többparaméteres statikus erőkkel terhelt rácsos tartók optimális tervezését ismertetjük (Kaliszky és Lógó (2000d, 2002b)). A vizsgálat során a rudak A_i keresztmetszeti területét tekintjük tervezési változóknak. Rácsos tartók esetében a 3.2.2 fejezetben ismertetett korlátok alkalmazásán kívül a rudak kihajlását is meg kell gátolni. Ez az alábbi kritikus nyomófeszültségek bevezetésével biztosítható:

$$\sigma_{ci} = \varphi_i\sigma_y\,,\ (i = 1,2,...,n)\,. \tag{3.11}$$

Itt φ_i az A_i tervezési változó függvénye és az EUROCODE 1993 vonatkozó előírásai alapján határozható meg:

$$\varphi_i = \beta_i - \sqrt{\beta_i^2 - \frac{b_i^2}{\lambda_i^2}}\,,\quad \beta_i = \frac{1 + a_i\left(\frac{\lambda_i}{b_i} - 0.2\right) + \left(\frac{\lambda_i}{b_i}\right)^2}{2\left(\frac{\lambda_i}{b_i}\right)^2} \tag{3.12}$$

Itt λ_i az *i*-edik rúd karcsúsági tényezője, a_i, illetve b_i a keresztmetszet alakjától és alkalmazott anyag minőségétől függő konstansok. A beállásvizsgálat statikai tételén alapuló optimális tervezési feladatban a nyomott elemek kritikus feszültségeit az egyes iterációs lépésekben mindig módosítani, aktualizálni kell, mert a keresztmetszet mérete az ismeretlen.

Felhasználva a (3.8) és (3.9) összefüggéseket, és a rácsos tartó térfogatát választva célfüggvénynek, az optimális tervezési feladat az alábbiak szerint fogalmazható meg: határozzuk meg az A_i keresztmetszeti méreteket úgy, hogy a belőlük épített rácsos tartó

- kellő szilárdságú – viseli a $\mathbf{P}_h$ terhet,
- beáll,
- kielégíti a képlékeny alakváltozásokra, illetve a maradó elmozdulásokra vonatkozó korlátokat,
- a nyomott rudak megfelelnek kihajlásra,
- a tartó minimális térfogatú.

Ez a feltételes szélsőérték-feladat az alábbi módon fogalmazható meg:

$$\mathrm{V} = \min \sum_{i=1}^{n} A_i \ell_i \tag{3.13.a}$$

az alábbi feltételek mellett

$$\mathbf{G}^* \mathbf{Q}^r = \mathbf{0}; \tag{3.13.b}$$

$$\mathbf{Q}^{eh} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}_h, \quad (h = 1, 2, ..., s); \tag{3.13.c}$$

$$-A_i\sigma_{ci} \le \left(Q_i^{eh} + Q_i^r\right) \le A_i\sigma_y, \quad (h = 1, 2, ..., s), \quad (i = 1, 2, ..., n); \tag{3.13.d}$$

$$\frac{1}{2E_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i^r \frac{\ell_i}{A_i} Q_i^r - W_{p0} \le 0; \tag{3.13.e}$$

$$\overline{u}_A - u_{A0} \le 0; \tag{3.13.f}$$

$$A_{i0} - A_i \le 0, \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{3.13.g}$$

Itt az $\overline{u}_A$ eltolódás a (3.9.a-e) képletekkel adott matematikai programozási feladattal határozható meg, A_{i0} pedig a rudak előírt minimális keresztmetszeti területét jelöli. Megállapítható, hogy az optimális tervezés elvégzése két, az A_i tervezési változók által kapcsolt nemlineáris matematikai programozási feladat megoldását teszi szükségessé. Erre, a két feladat egymástól független, ismételt megoldására alapuló, iterációs eljárást dolgoztunk ki. A (3.11) alatti kritikus feszültségeket minden lépésnél újra meg kell határozni. Az optimális megoldás lokális minimum, mivel a (3.13.e) feltétel nem konvex, de a megoldás mérnöki szempontból megfelelő és minősíthető.

3.2.3.1 Megoldási algoritmus

A (3.13.a-g) kifejezésekkel meghatározott kapcsolt nemlineáris programozási feladat

megoldására a következő hatékony, iterációs eljárás javasolható:

1. lépés Vegyük fel az A_i keresztmetszeti méreteket és határozzuk meg ennek felhasználásával a Q^{eh} képzeletbeli rugalmas erőt,

2. lépés Felhasználva Q^{eh} erőt és alkalmazva a (3.13) matematikai programozási feladatot, az u_A elmozdulásra vonatkozó korlát nélkül, határozzuk meg a feladat megoldását. Számítsuk ki az A_i, Q^r és a nyomott rudaknál a σ_{ci} értékeket.

3. lépés A 2. lépésben megkapott A_i felhasználásával határozzuk meg Q^{eh} és Q^e rugalmas erőket.

4. lépés A 2. és 3. lépésben megkapott A_i, σ_{ci}, illetve Q^{eh} és Q^e felhasználásával a (3.9) matematikai programozási feladat felhasználásával határozzuk meg az $\overline{u}_A$ elmozdulási felső korlát nagyságát.

5. lépés A 3. és 4. lépésben megkapott Q^{eh} és $\overline{u}_A$ értékeket felhasználva határozzuk meg a (3.13) matematikai programozási feladat optimális megoldását. Számítsuk ki újra az A_i, Q^r és σ_{ci} értékeket.

6. lépés Az 5. lépésben megkapott A_i és σ_{ci} értékek felhasználásával ismételjük 2. – 5. lépéseket mindaddig, míg két egymást követő teljes ciklusban a számított értékek közötti különbség elegendően kicsi.

3.2.3.2 Többcélfüggvényes matematikai programozási feladat megfogalmazása

Felhasználva a többcélfüggvényes matematikai programozás alapelveit (Lógó (1988)) a (3.9) és (3.13) nemlineáris matematikai programozási feladatok könnyen átírhatók vektoroptimálási feladattá (Kaliszky és Lógó (2002c)). A többcélfüggvényes megfogalmazás célfüggvényében minimáljuk a tartó térfogatát és a maradó elmozdulások felső korlátját. A feladat feltételrendszere megegyezik a (3.9) és (3.13) feladatok feltételrendszerével. A beállásvizsgálat statikai tételén alapuló többcélfüggvényes megfogalmazás a következőképp adható meg:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{n} A_i \ell_i,\ \frac{1}{2|\mathcal{I}|}\sum_{i=1}^{n} R_i \frac{\ell_0}{A_i} R_i\right) \tag{3.14.a}$$

az alábbi feltételek mellett

$$\mathbf{G}^*\mathbf{R} = \mathbf{0}; \tag{3.14.b}$$

$$\mathbf{Q}^e = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{K}^{-1}\mathcal{I}_d,\ |\mathcal{I}_d| = 1; \tag{3.14.c}$$

$$-A_i\sigma_{ci} \le \left(Q_i^{eh} + R_i + |\mathcal{I}| Q_i^e\right) \le A_i\sigma_y, \quad (h = 1,2,...,s),\ (i = 1,2,...,n); \tag{3.14.d}$$

$$\mathbf{Q}^{eh} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}_h, \quad (h = 1,2,...,s); \tag{3.14.e}$$

$$-A_i\sigma_{ci} \le \left(Q_i^{eh} + Q_i^r\right) \le A_i\sigma_y, \quad (h = 1,2,...,s), \quad (i = 1,2,...,n); \tag{3.14.f}$$

$$\mathbf{G}^*\mathbf{Q}^r = \mathbf{0}; \tag{3.14.g}$$

$$\frac{1}{2E_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i^r \frac{\ell_i}{A_i} Q_i^r - W_{p0} \le 0; \tag{3.14.h}$$

$$\bar{u}_A - u_{A0} \le 0; \tag{3.14.i}$$

$$|\mathfrak{I}| \rangle 0; \tag{3.14.j}$$

$$A_{i0} - A_i \le 0, \quad (i = 1,2,...,n). \tag{3.14.k}$$

A fenti többcélfüggvényes programozási feladat Pareto-optimális megoldások halmaza (Lógó (1988), Kaliszky és Lógó (2003a)) adja az optimális tervezés megoldásait. A mérnöki szempontból ez a halmaz egy szélesebb lehetőséget nyújt a tervezés során, hiszen ezen Pareto-optimumokból választható ki a kivitelezni szándékozott szerkezet. Numerikusan a (3.14) feladatot számos eljárással (Lógó (1988)) megoldhatjuk (pl. súlyozott célfüggvények, optimálás parametrikus szintekkel, sztochasztikus kereséssel). A (3.14) feladat nem konvex, de a célfüggvények terébe történő leképzés miatt a vektor-optimálási feladat gyenge –efficiens pontjai meghatározhatók (Lógó (1988)).

3.2.3.3 Mintafeladat

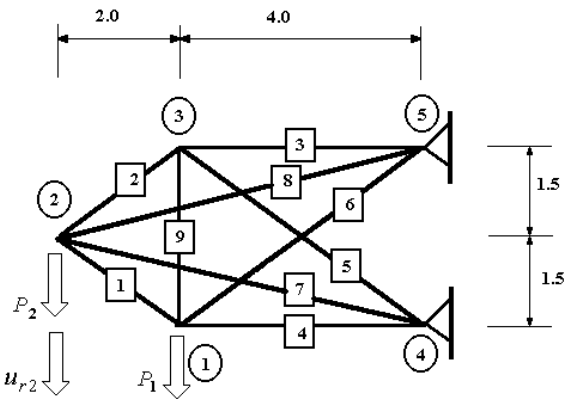
Az ismertetett módszer alkalmazását az 3.1 ábrán látható, rácsos tartó optimális tervezésén mutatjuk be.

Adatok:

$A_{i0} = 0.15\text{cm}^2$,

$E = 21000\text{kN/cm}^2$,

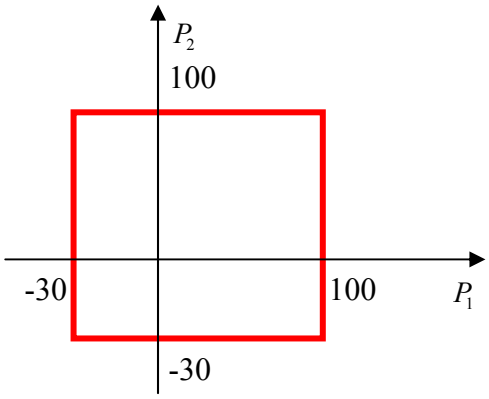
$\sigma_y = 20\text{kN/cm}^2$,



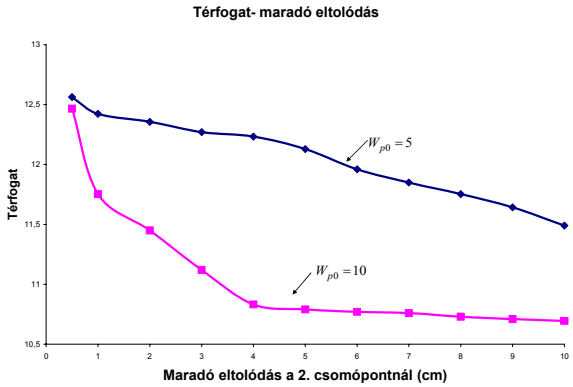
3.1 ábra. Kilenc rudas rácsos tartó

A tartóra ható kétparaméteres terhelés terhelési tartományát a 3.2 ábra tünteti fel. A stabilitás-vizsgálathoz a (3.12) képletekben az EUROCODE alapján az a=0.21 és b=93.01 értékeket vettük figyelembe. A nemlineáris matematikai programozási feladatot szekvenciális kvadratikus programozási algoritmus felhasználásával oldottuk meg (Schittkovski (1985/86)). A 3.3 ábra mutatja a térfogat változását a kiegészítő maradó alakváltozási energia és a maradó elmozdulás függvényében. A $W_{p0} = 10\text{kNm}$, illetve a $u_{r2} =$1, 3, 5 és 7cm értékekhez tartozó optimális

keresztmetszeti méretek a 3.1 táblázatban találhatók. Az optimális megoldás konvergenciája egy adott eltolódási korláthoz kapcsolódóan néhány iterációs lépés után látható volt. Ennek részleteit itt nem közöljük. A mechanikai modell helyességét, konvergenciáját irodalmi (Tin-Loi, F. (2000)) adatokkal való összehasonlítással (5 rudas szerkezet - Kaliszky és Lógó (2002c) -) ellenőriztük.



3.2 ábra. Terhelési tartomány (kN).



3.3 ábra. A tartó térfogatának változása a maradó eltolódások függvényében.

3.1 táblázat. A kilenc rudas rácsos tartó optimális keresztmetszeti méretei

u_{r2} [cm]	A_i $[cm^2]$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	23.02	16.54	62.87	45.26	24.75	87.25	0.15	0.15	27.30
3	41.73	2.93	2.17	86.03	67.60	2.98	41.01	24.25	8.49
5	34.12	20.40	26.13	82.18	60.20	0.15	0.15	28.23	10.71
7	34.08	20.19	25.87	82.28	60.11	0.15	0.41	27.85	10.49

3.2.4 Tárcsák optimális tervezése

Vegyünk szemügyre egy h_0 állandó vastagságú, síkjában $\mathbf{P}_h$ $(h = 1,2,...,s)$ statikus többparaméteres erőkkel terhelt tárcsát. A tárcsa anyagának rugalmassági modulusa E_0, folyási határa σ_{y0} és fajlagos sűrűsége ρ_0. Az Ω tervezési tartományt osszuk fel $i = 1,2,...,n$ végeselemre, ahol az *i*-edik elem területét Δ_i jelölje.

A topológiaoptimálási feladatok numerikus nehézségeinek elkerülése érdekében Kohn és Stang (1986) bevezette a porózus anyag koncepcióját, amely a homogenizáció egyik formája, és Rozvany (1997) munkájában kapunk részletes ismertetést alkalmazásáról a topológiaoptimálás témakörében. A továbbiakban a porózus anyag koncepcióján alapuló számítási modellt

alkalmazzuk. Eszerint a vizsgálatnak egy fiktív inhomogén tárcsa képezi az alapját, amelyben a véges elemek különböző, ismeretlen nagyságú ρ_i fajlagos sűrűséggel rendelkeznek. Az $x_i = \left(\frac{\rho_i}{\rho_0}\right)$ viszony a tervezési változó, és az elemek folyási határa valamint rugalmassági modulusa ennek a tervezési változónak a függvénye:

$$E_i = x_i^{\beta} E_0\,,\ \sigma_{yi} = x_i^{\gamma}\sigma_{y0}\,, \tag{3.15}$$

Ahol β és γ célszerűen felvett paraméterek, amelyek az anyag tulajdonságával nincsenek kapcsolatban, csupán számítástechnikai szerepük van. A továbbiakban legyen $\beta = \gamma = 1$. Az x_i változók meghatározását követően az eredeti homogén tárcsa vastagságának optimális eloszlását a

$$h_i = x_i h_0 \tag{3.16}$$

képletből kapjuk meg.

A 3.2.1 fejezetben bevezetett mennyiségek közül néhány az alábbi módon változik:

$\mathbf{F}_{i0}$, $\mathbf{F}_i = \frac{\mathbf{F}_{i0}}{x_i}$: az E_0, illetve az E_i rugalmassági modulusok alapján számított hajlékonysági mátrixok,

$\mathbf{F}(x_i)$, $\mathbf{K}(x_i)$: az inhomogén tárcsa hajlékonysági, illetve merevségi mátrixa,

$f_i\left(\overline{\mathbf{Q}}_i^h; x_i\sigma_{y0}\right)$: az i-edik végeselem folyási függvénye az elem Gauss-pontjaiban számított $\overline{\mathbf{Q}}_i^h$ erők függvényében.

Továbbá a porozitási tényező figyelembevételével a (3.8), illetve a (3.9) összefüggések az alábbi módon értendők:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{Q}_i^r\right)^* \frac{\mathbf{F}_{i0}}{x_i^{\beta}}\mathbf{Q}_i^r - W_{p0} \le 0\,; \tag{3.17}$$

Illetve

$$\overline{u}_A = \min \frac{1}{2|\mathcal{I}|}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{R}_i\right)^* \frac{\mathbf{F}_{i0}}{x_i^{\beta}}\mathbf{R}_i \tag{3.18.a}$$

az alábbi feltételek mellett

$$\mathbf{G}^*\mathbf{R} = \mathbf{0}\,; \tag{3.18.b}$$

$$\mathbf{Q}^{e0} = \mathbf{F}^{-1}(x_i)\mathbf{G}\mathbf{K}^{-1}(x_i)\mathcal{I}_d\,,\ |\mathcal{I}_d| = 1\,,\ (i = 1,2,...,n)\,; \tag{3.18.c}$$

$$f_{ih}\left[\left(\overline{\mathbf{Q}}_i^{eh} + \overline{\mathbf{R}}_i + |\mathcal{I}|\overline{\mathbf{Q}}_i^{e0}\right);\ \left(x_i^{\gamma}\sigma_{y0}\right)\right] \le 0\,,\ (h = 1,2,...,s)\,,\ (i = 1,2,...,n)\,; \tag{3.18.d}$$

$$|\mathcal{I}| \rangle 0\,. \tag{3.18.e}$$

3.2.4.1 Az optimális tervezés alapfeladata tárcsákra vonatkozóan

Felhasználva a (3.17) és (3.18.a-e) kifejezésekkel meghatározott korlátokat, és a tárcsa tömegét

választva célfüggvénynek, a beállási határállapot statikai tételén alapuló optimális tervezési feladat az alábbiak szerint fogalmazható meg:

$$m = \min\ h_0 \rho_0 \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x_i \tag{3.19.a}$$

az alábbi feltételek mellett

$$\mathbf{G}^* \mathbf{Q}^r = \mathbf{0}; \tag{3.19.b}$$

$$\mathbf{Q}^{eh} = \mathbf{F}^{-1}(x_i)\mathbf{G}\mathbf{K}^{-1}(x_i)\mathbf{P}_h,\ \left(h = 1,2,...,s\right); \tag{3.19.c}$$

$$f_{ih}\left[\left(\overline{\mathbf{Q}}_i^{eh} + \overline{\mathbf{Q}}_i^r\right);\ \left(x_i\,\sigma_{y0}\right)\right] \le 0,\ \left(h = 1,2,...,s\right),\ \left(i = 1,2,...,n\right); \tag{3.19.d}$$

$$W_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{Q}_i^r\right)^* \frac{\mathbf{F}_{i0}}{x_i^{\beta}}\mathbf{Q}_i^r - W_{p0} \le 0; \tag{3.19.e}$$

$$\overline{u}_A - u_{A0} \le 0; \tag{3.19.f}$$

$$x_{i0} - x_i \le 0,\ \left(i = 1,2,...,n\right). \tag{3.19.g}$$

Itt x_{i0} a tervezési változók előírt alsó korlátját jelöli. Megállapítható, hogy az optimális tervezés elvégzése két, az x_i tervezési változók által kapcsolt nemlineáris matematikai programozási feladat – a (3.18) és a (3.19) - megoldását teszi szükségessé. Erre iterációs eljárást dolgoztunk ki (Kaliszky és Lógó (2002b)), amely lényegében megegyezik a 3.2.3.1 pontban ismertetett iterációs lépésekkel. A különbség az, hogy A_i keresztmetszeti méretek helyett x_i tervezési változókat kell használni. Az ismertetett módszer megfelelő átalakítás után keretek, lemezek és héjak optimális tervezésére is alkalmazható.

3.2.4.2 Többcélfüggvényes megfogalmazás

Itt is követhetjük a rácsos tartók tervezésénél ismertetett eljárást a vektoroptimálási feladat felírása kapcsán. A célfüggvény a tárcsa tömegét és a maradó elmozdulás felső korlátját tartalmazza. A beállásvizsgálat statikai tételére alapuló többcélfüggvényes megfogalmazás a következőképp adható meg:

$$\min\left(\frac{1}{2\left|\mathcal{T}\right|}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{R}_i\right)^* \frac{\mathbf{F}_{i0}}{x_i^{\beta}}\mathbf{R}_i;\quad h_0\rho_0\sum_{i=1}^{n}\Delta_i x_i\right) \tag{3.20.a}$$

az alábbi feltételek mellett

$$\mathbf{G}^* \mathbf{Q}^r = \mathbf{0}; \tag{3.20.b}$$

$$\mathbf{G}^* \mathbf{R} = \mathbf{0}; \tag{3.20.c}$$

$$\mathbf{Q}^{eh} = \mathbf{F}^{-1}(x_i)\mathbf{G}\mathbf{K}^{-1}(x_i)\mathbf{P}_h,\ \left(h = 1,2,...,s\right); \tag{3.20.d}$$

$$f_{ih}\left[\left(\overline{\mathbf{Q}}_i^{eh} + \overline{\mathbf{Q}}_i^r\right);\ \left(x_i^{\gamma}\sigma_{y0}\right)\right] \le 0,\ \left(h = 1,2,...,s\right),\ \left(i = 1,2,...,n\right); \tag{3.20.e}$$

$$\mathbf{Q}^{e0} = \mathbf{F}^{-1}(x_i)\mathbf{G}\mathbf{K}^{-1}(x_i)\mathcal{T}_d,\ \left|\mathcal{T}_d\right| = 1,\quad \left(i = 1,2,...,n\right); \tag{3.20.f}$$

$$f_{ih}\left[\left(\bar{\mathbf{Q}}_i^{eh}+\bar{\mathbf{R}}_i+\left|\mathcal{T}\right|\bar{\mathbf{Q}}_i^{e0}\right);\ \left(x_i^{\gamma}\sigma_{y0}\right)\right]\le 0,\ \left(i=1,2,...,n\right),\ \left(h=1,2,...,s\right); \qquad (3.20.g)$$

$$x_{min}\le x_i\le x_{max},\ \ \left(i=1,2,...,n\right); \qquad (3.20.h)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{Q}_i^r\right)^*\frac{\mathbf{F}_{i0}}{x_i^{\beta}}\mathbf{Q}_i^r-W_{p0}\le 0; \qquad (3.20.i)$$

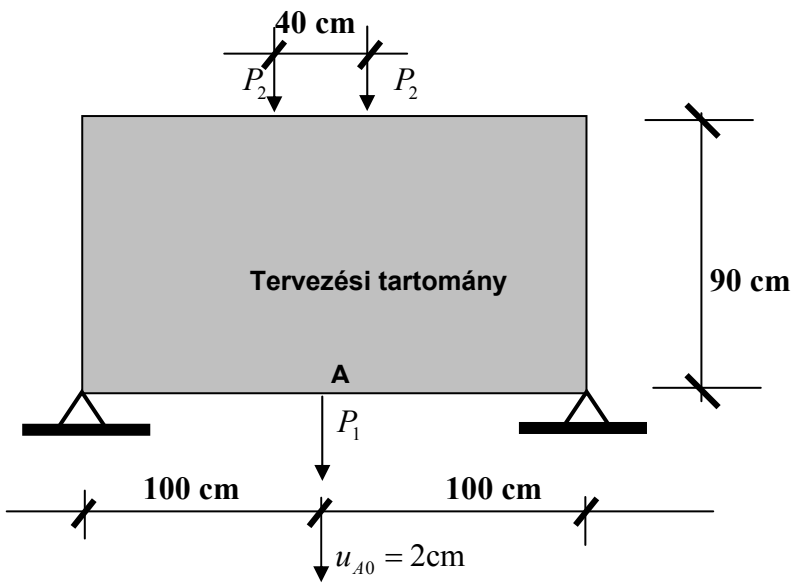
$$\bar{u}_A-u_{A0}\le 0; \qquad (3.20.j)$$

$$\left|\mathcal{T}\right|\rangle 0. \qquad (3.20.k)$$

A (3.20.a-k) feladat optimális megoldásaként kapott Pareto-megoldások halmaza mérnökileg egyenértékű lehet a (3.19) feladat optimális megoldásával. A jelenlegi mérnöki gyakorlat sok esetben a Pareto-optimumok halmazának előállítását követeli meg a kezdeti tervezési fázisban.

3.2.4.3 Mintafeladat

Az ismertetett eljárás alkalmazását a 3.4.a ábrán látható tárcsa optimális tervezésén mutatjuk be. A szükséges adatok -önkényesen felvéve- az ábrán vannak feltüntetve. A tárcsára kétparaméteres teher hat, melynek



Adatok:

$h_0=3$cm,

$E_0=10000$ kN/cm^2

$\sigma_{y0}=120$MPa,

$\rho_0=78$kg/m^3,

$x_{i0}=10^{-5}$cm,

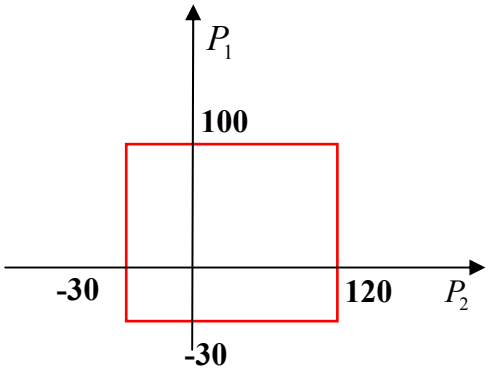
$x_{\max}=20$cm,

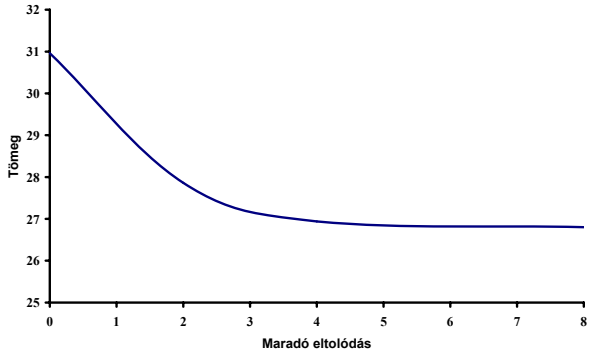
n=180 véges elem.

3.4.a ábra. Tárcsafeladat

terhelési tartománya a 3.4.b ábrán látható. A matematikai programozási feladat folyási feltételeként a Huber-Mises-Hencky képlékenységi feltételt használtuk. A végeselemes diszkretizált feladatban négycsomópontú tárcsaelemeket alkalmaztunk (csomópontonként két elmozdulási szabadságfokkal). A számítást a Gauss-pontokon végeztük (irányonként két-két Gauss-pont). Az egyszerűség kedvéért a maradó csomóponti erőket öt-szabadságfokú erő-(feszültség) rendszer alkalmazásával számoltuk. A nemlineáris matematikai programozási feladatot szekvenciális kvadratikus programozási algoritmus felhasználásával oldottuk meg (Schittkovski (1985/86)). A megoldáshoz viszonylag kevés számú (386) iterációs lépés kellett.

dc_805_13

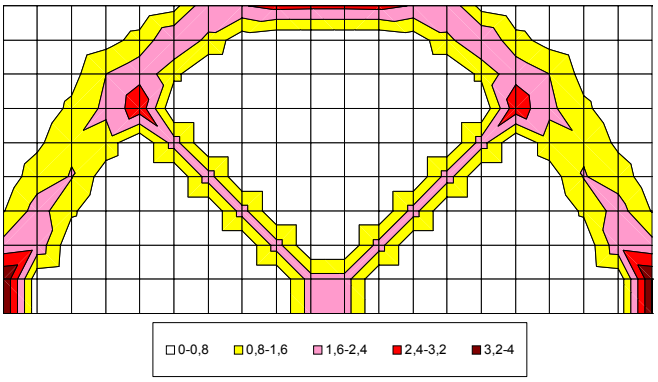




3.4.b ábra. Terhelési tartomány.

3.5 ábra. A tárcsa tömegének változása a maradó eltolódások függvényében

A 3.5 ábra a tárcsa tömegének a megengedett u_{A0} maradó eltolódás függvényében való változását adja meg rögzítet $W_{p0} = 744,6\text{kNm}$ korlát esetére. Jól látható a 3.5 ábrán az eljárás konvergenciája. A tömeg nem csökken, csak a maradó alakváltozások nőnek ezért a képlékenységtan alapján a konvergencia fenáll.



3.6 ábra. Optimális topológia

$W_{p0} = 744,6\text{kNm}$ és $u_{A0} = 2\text{cm}$ korlátok alkalmazása esetén a tárcsa minimális tömege $m_{opt} = 27,86$ kg és ennek az optimális megoldáshoz tartozó eloszlását a 3.6 ábra szemlélteti, ahol az egyes színek a porozitás jelenítik meg.

Abban az esetben ha $W_{p0} = 0$, a (3.19) matematikai programozási feladat optimális megoldása a rugalmas megoldással azonos. Ha W_{p0}, illetve u_{A0} kellően nagy (jelen példa esetén $W_{p0} \geq 1000\text{kNm}$ és $u_{A0} \geq 10\text{cm}$), akkor a W_p-ra és az $\overline{u}_A$-re vonatkozó feltételek inaktívvá válnak és az optimális megoldás a képlékeny megoldással lesz azonos. A közbenső esetben a rugalmas-képlékeny állapotú szerkezet megoldását kapjuk meg.

További mintapéldák más dolgozatokban is találhatók (Kaliszky és Lógó (2000, 2001, 2002)).

3.3 Dinamikusan terhelt tartószerkezetek optimális tervezése

A mérnöki gyakorlatban igen gyakran fordul elő rendkívüli teher (robbanás, ütés, ütközés, földrengés, stb…). Ezekben az esetekben a képlékeny alakváltozások rendszerint megengedettek, de a tartószerkezeteket olyan merevségi és szilárdsági tulajdonságokkal kell megtervezni, hogy a rendkívüli hatások következtében ne legyenek túlzott mértékű képlékeny alakváltozások, a szerkezeti elemek ne szenvedjenek törést, illetve a szerkezet összeomlása ne következzék be. A téma fontossága következtében számos jelentős elméleti és kísérleti munkát ismerünk a témakörben, melyek közül kiemelhető Jones (1997), Kaliszky (1984, 1989), Martin (1975) által közzétett tanulmányok. Szinte valamennyi munka csak a szerkezet globális viselkedésével foglalkozik. Feltételezik, hogy az anyag merev–képlékeny, a kis elmozdulások elmélete érvényes. A nagy intenzitású, rövid ideig tartó terhelést impulzusteherrel helyettesítik.

Ezek az egyszerűsítések lehetővé tették egyszerű megoldási módszerek kifejlesztését. Szinte valamennyi módszer esetén a fő cél a szerkezet válaszidejének, az alakváltozásoknak és az elmozdulásoknak meghatározása (Jones (1997), Kaliszky (1970, 1984), Martin és Ponter (1972), Martin és Symonds (1966), Symonds (1955, 1973), Symonds és Wierzbicki (1975), Wierzbicki (1970), Wierzbicki és Florence (1970)). A hivatkozott dolgozatok közül néhány a nagy elmozdulásokat és az alakváltozási sebességet is figyelembe veszi. Lökésszerű teherrel terhelt rugalmas-képlékeny szerkezetek számítására számos hatékony numerikus eljárás és számítógépes program is készült (Capurso (1972), Jones (1985), Lloyd Smith és Sahlit (1991)). Sajnos csak kevés számú dolgozat foglalkozik a dinamikusan terhelt képlékeny szerkezetek tervezésének témakörével. A tervezési feladatok a fentiekben említett közelítéseket tartalmazzák, és merev-képlékeny szerkezeteket tételeznek fel (Heinloo és Kaliszky (1981), Kaliszky és Lógó (1991), Lellep (1984), Lepik és Mróz (1977)).

Ebben a részben olyan közelítő optimális tervezési eljárást mutatunk be dinamikusan (lökés, robbanás, ütközés, szeizmikus) terhelt képlékeny tartószerkezetek (rácsos tartók, gerendák, lemezek) optimális tervezésére, ahol a mindenkori terhelésből az impulzus megmaradás tételének felhasználásával egy egyenértékű sebességmezőt számolunk. Ezt a sebességmezőt használjuk impulzív teherként a már terheletlen tartón (Jones (1997), Kaliszky (1984, 1989), Martin (1975)). Mivel ilyen esetekben az elmozdulások rendszerint nagyok, mérsékelten nagy elmozdulásokat veszünk számításba. A tartószerkezet képlékeny viselkedésének szabályozására Wierzbicki (1970) által kidolgozott elméletet alkalmazzuk. Ennek felhasználásával a mérsékelten nagy maradó alakváltozások nagyságának egy felső korlátja számítható. Mivel nagy sebességekről van szó, az alakváltozás-sebesség érzékenységét (viszkozitás) figyelembe vesszük, tudva, hogy ezzel növekszik a szerkezet teherbíró képessége.

Az optimális tervezés numerikus megfogalmazásánál a porózus anyagelméletet (Kohn és Stang

(1986), Maute és társai (1998)) használtuk fel a 3.1 fejezetben ismertetettek szerint. A szilárdsági tulajdonságokat leíró (3.15) egyenletek érvényesek. A tervezés során a keresztmetszeti méretek egy alapértékét (pl. lemez vastagsága) ismertnek tételezzük fel, és a folyamatban változatlanul hagyjuk. A tényleges méretet az x_i tervezési változó (porozitási tényező) felhasználásával a (3.16) szerint számoljuk (lemez esetén $h_i = x_i h_0$).

A továbbiakban a jobb megérthetőség kedvéért lemez-feladaton keresztül mutatjuk be a tervezési munkát. A kapott eredmények természetesen minden nehézség nélkül átírhatók rácsos tartókra, gerendákra vagy héjakra is (lásd. pl. mintapélda vagy Lelep és tsai.(2010)).

A bemutatásra kerülő eljárás az alábbi követelményeket és feltételt elégíti ki:

- a szerkezet súlya legyen minimális,
- egy előre megadott pontban a maradó eltolódások nagysága nem haladhat meg egy megadott értéket,
- a deformációs folyamat alatt a teljes kinetikus energia képlékeny munka formájában disszipálódik.

Jelen fejezet a korábban közzétett dolgozatainkon alapszik (Kaliszky és Lógó (1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004)).

3.3.1 Nagy intenzitású, rövid ideig ható, lökésszerű teher esete

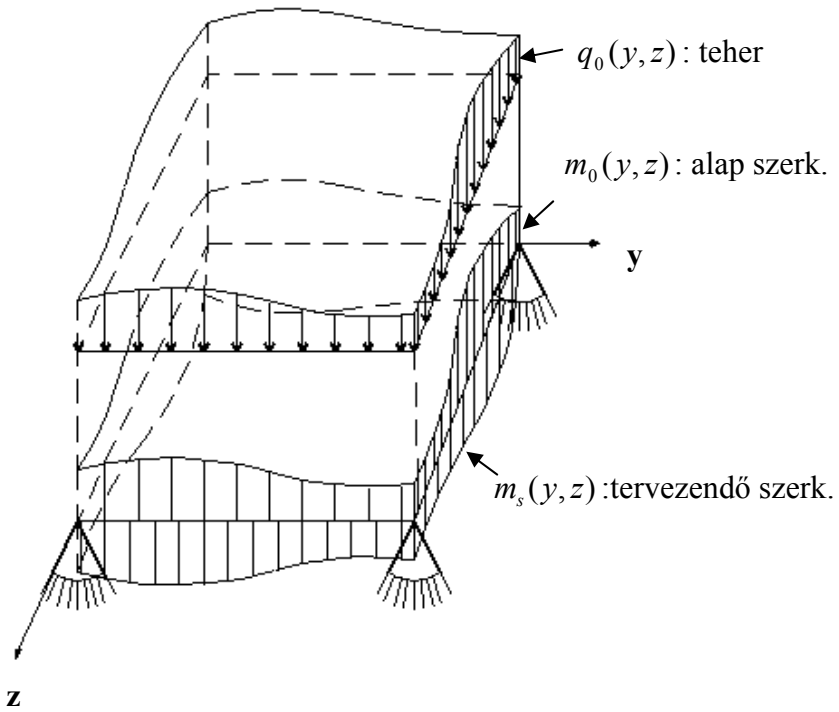
3.3.1.1 Kinematikai egyenletek

Induljunk ki abból a feltevésből, hogy a dinamikai egyenletekben szereplő tömeg két részből tehető össze (3.7.a ábra.):

$$m(y,z) = m_0(y,z) + m_s(y,z)\,. \tag{3.21}$$

Legyen $(i = 1,2,...,n)$ a diszkretizált szerkezetben a végeselemek száma és a (3.21) kifejezésben:

- $m_0(y,z) \to m_{0i}$: jelenti azt a tömeget, ami nem vesz részt az optimálásban,
- $m_s(y,z) \to \rho_0 h_0 x_i$: jelenti a tartószerkezet tömegének az optimálásban számítandó részét, amely a tervezési változóval kifejezhető,
- y és z a lemez középfelületének koordinátái.



3.7.a ábra. A külső-teher és a tartó tömegének eloszlásából az önsúly terhek

A fentiek szerint az i-edik végeselem tömege az alábbi módon fejezhető ki:

$$m_i = m_{0i} + \rho_0 h_0 x_i \,. \tag{3.22}$$

Tételezzük fel, hogy a vizsgált merev-képlékeny anyagú lemezt olyan, nagy intenzitású, rövid ideig tartó dinamikus teher terheli, mely az alábbi szeparálható alakban van megadva:

$$q(y,z,t) = p(t)q_0(y,z) \quad , \tag{3.23}$$

Illetve a diszkretizált szerkezet i-edik eleménél

$$q_i = p(t)q_{0i};\ (i = 1,2,...,n). \tag{3.24}$$

Itt $p(t)$ a lökés időbeli változását, $q_0(y,z)$ pedig a teher lemezen való eloszlását írja le (3.7.b ábra.). A továbbiakban alkalmazzuk a leggyakrabban felhasznált lökésterhet (3.7.c ábra.), amelyben a lökés időbeli változása a következő kifejezésekkel írható le:

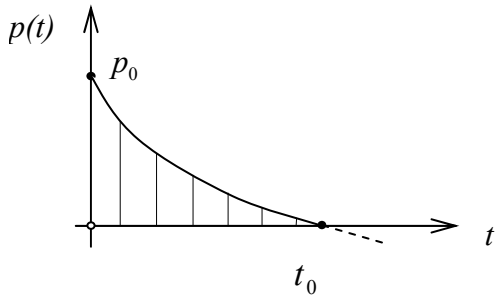
$$\left.\begin{aligned} p(t) &= p_0, \quad \text{ha} \quad t \le t_0 \\ p(t) &= 0, \quad \text{ha} \quad t > t_0 \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

Itt t_0 a lökés időtartamát, p_0 pedig nyomás csúcsértékét jelenti. Amennyiben p_0 igen nagy ($p_0 \to \infty$) és t_0 igen kicsi ($t_0 \to 0$), akkor a lökésszerű teher az

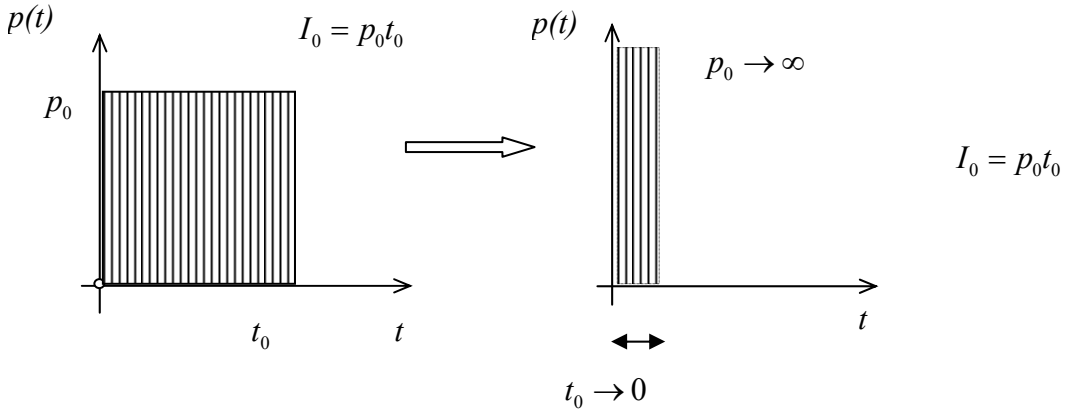
$$I_0 = p_0 t_0 \tag{3.26}$$

impulzussal meghatározott impulzív terheléssel helyettesíthető (Jones (1997)).

dc_805_13



3.7.b ábra. A lökés teher időbeni változása



3.7.c ábra. Impulzív terhelés

A lemez ennek hatására $v(y,z)$ kezdősebességű mozgásnak indul, amelynek eloszlása impulzus megmaradás tételéből vezethető le:

$$\int_A \int_0^{t_0} q(y,z,t)dtdA = \int_A m(y,z)v(y,z)dA. \tag{3.27}$$

Felhasználva a (3.24-3.26) kifejezéseket

$$I_0 \int_A q_0(y,z)dA = \int_A m(y,z)v(y,z)dA. \tag{3.28}$$

Itt A a lemez középfelületének területét jelenti. A továbbiakban feltételezzük, hogy v_i sebesség a lemez mentén való eloszlása a q_{0i} teher eloszlásával arányos, így:

$$v = v_0 q_0(y,z). \tag{3.29}$$

Itt v_0 egy ismeretlen sebességparaméter.

Ennélfogva a (3.28) és (3.29) egyenletek felhasználásával a sebességmező számítható:

$$v(y,z) = I_0 q_0(y,z) \frac{\int_A q_0(y,z)dA}{\int_A m(y,z)q_0(y,z)dA}. \tag{3.30}$$

A kapott kifejezést felhasználva, a diszkretizált szerkezet i-edik (i=1,2,…,n) elemére jutó v_i

kezdősebesség az alábbi formában számítható –ha a parciális terhelés esetét kizárjuk-:

$$v_i = I_0 q_{0i} \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{0i}\Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i q_{0i}\Delta_i}; \left(i = 1,2,...,n\right). \tag{3.31}$$

Itt Δ_i az elem területe, i pedig az elem jele.

Ezzel a nagy intenzitású, rövid ideig tartó lökésszerű teherrel terhelt szerkezet dinamikai vizsgálata egy terheletlen, a (3.30), illetve (3.31) egyenletekkel meghatározott $v(y,z)$ kezdősebességű lemez dinamikai vizsgálatára vezethető vissza.

3.3.1.2 Dinamikai egyenlet megadása lökésszerű teher esetén

A dinamikai egyenlet felírásához felhasználjuk Wierzbicki (1970) feltételezését, ami szerint a szerkezet minden pontjában a mozgás egyidejűleg szűnik meg. Továbbá feltételezzük, hogy az impulzus teher hatására a szerkezet minden eleme mozgás közben állandó gyorsulással mozog a megállásig és egy adott A pontban az u_A elmozdulás elér egy u_{A0} elmozdulás értéket. A szerkezet mozgása közben a lemez és az állandó teher súlyának, a tehetetlenségi erőknek és a belső erőknek dinamikus egyensúlyban kell lenniük, és a diszkretizált szerkezet minden elemében ki kell elégíteniük a képlékenységi feltételeket. Bizonyos egyszerűsítési feltételeket bevezetve ezek a követelmények az alábbi egyenletek kielégítése esetén teljesülnek (Kaliszky és Lógó (2001a, 2003c):

$$\mathbf{G}^*\mathbf{Q} + \mathbf{P}(x_i) - \mathbf{D}(x_i) = \mathbf{0}; \tag{3.32}$$

$$f_i(Q_i, x_i\sigma_{yi}^d) \le 0, (i = 1,2,...,n). \tag{3.33}$$

Itt **G** az egyensúlyi mátrix, f_i az i-edik elem folyási függvénye, σ_{yi}^d a „dinamikus” folyáshatár (benne vesszük figyelembe az alakváltozás-sebesség (viszkozitás) hatását is (Kaliszky és Lógó (2003c)), ezt egy későbbi pontban (3.3.4 fejezet) részletezzük).

A külső erők két részből tevődnek össze. A lökéssel egyidejűleg fellépő normál (használati) csomóponti teherből és az önsúlyból, amelyet a következő egyenlettel adhatunk meg:

$$P_i = P_i^n + g\Delta_i\left(m_{0i} + \rho_0 h_0 x_i\right); \left(i = 1,2,...,n\right). \tag{3.34}$$

Itt P_i^n jelenti a normál (használati) csomóponti terhet, amelyet a nagy intenzitású, rövid ideig tartó dinamikus teherrel egyidejűleg figyelembe veszünk.

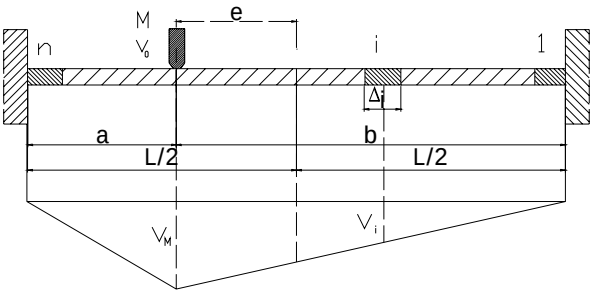
A $\mathbf{D}(x_i)$ inerciaerőket lökésteher esetén a következő kifejezéssel adhatjuk meg (Kaliszky (1989), Martin (1975)) diszkretizált esetben:

$$D_i = \frac{q_{0A}}{2u_{A0}} I_0^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} q_{0i}\Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i q_{0i}\Delta_i} \right)^2 m_i q_{0i}\Delta_i \,;\ (i = 1,2,...,n). \tag{3.35}$$

3.3.2 Leeső teher

3.3.2.1 Kinematikai egyenletek

Tekintsük egy a 3.3.1 fejezetben (3.7.a ábra.) ismertetett elrendezésű merev-képlékeny anyagú lemezt, amelyre a lemez A pontjában v_0 sebességgel egy M tömegű test merőlegesen becsapódik.



3.8 ábra. Leeső teher két oldalon befogott szerkezet esetén

Továbbá tegyük fel, hogy az ütközés után a lemez és a test együtt mozog, és az ütközés következtében keletkező helyi szerkezeti károkat figyelmen kívül hagyhatjuk. A lemezekre bemutatott megoldási módszer és a megadott kifejezések kis módosítások után alkalmasak gerendák, héjak és egyéb védőszerkezetek optimális tervezésére is.

Tételezzünk fel egy kinematikailag lehetséges sebességmezőt, ahol az i-edik elem sebessége a $v_i = \beta_i v_A$ egyenlettel kifejezhető. Itt v_A az M tömeg kezdő sebessége az ütközés után. Felírva az impulzus megmaradás törvényét:

$$Mv_0 = Mv_A + v_A \sum_{i=1}^{n} \beta_i m_i \,, \tag{3.36}$$

a lemez minden i-edik elemének súlypontjában a kezdeti sebesség könnyen számítható:

$$v_i = \frac{M\beta_i}{M + \sum_{i=1}^{n} \beta_i m_i} v_0 \,. \tag{3.37}$$

3.3.2.2 Dinamikai egyenlet megadása ütésszerű teher esetén

Felhasználva a lökésszerű teher esetén bevezetett feltevéseket (3.3.1 fejezet), az előző fejezetben megadott (3.32 és 3.33) dinamikai egyenletek természetesen változatlan formában érvényesek, csak az egyes kifejezések tartalma módosul. A leeső tehernek megfelelően az inerciaerő számítása a

$$D_i = \frac{v_0^2}{2u_{A0}} \left(\frac{M}{M + \sum_{i=1}^{n} m_i \beta_i} \right)^2 \left[\delta M + m_i \beta_i \Delta_i \right]; \; (i = 1,2,...,n), \tag{3.38}$$

egyenlet szerint történik, míg a számításban figyelembe vett külső erőt a

$$P_i = P_i^n + g\Delta_i \left(m_{0i} + \rho_0 h_0 x_i \right) + \delta_i g M \; ; \; (i = 1,2,...,n). \tag{3.39}$$

szerint számítjuk.

Itt $\delta_i = 1$ ha $i \equiv A$, illetve $\delta_i = 0$ ha $i \neq A$ (az i-edik elem és a becsapódási „A” pont viszonya).

3.3.3 Maradó elmozdulások felső korlátja

Az egyszeri alkalommal működő lökésszerű terhelés vizsgálatakor a beállásvizsgálat szükségtelen, és a képlékeny alakváltozások mértékét korlátozó előzőekben ismertetett feltételt sem alkalmazzuk. A várhatóan nagy alakváltozások miatt a rugalmas alakváltozásokat figyelmen kívül hagyjuk, a maradó eltolódásokra azonban mérsékelt mértékű nagy elmozdulások figyelembevételével korlátot alkalmazunk. Wierzbicki (1970) tétele szerint impulzív terhelés esetén egy mérsékelten nagy elmozdulást végző merev-képlékeny anyagú tartó egy adott A pontjában létrejövő eltolódás legjobb u_A felső korlátját az alábbi összefüggés adja meg:

$$\mathcal{J}_{A0} \left[u_A + \frac{h_0 a}{1+\alpha} \left(\frac{u_A}{h_0} \right)^{\alpha+1} \right] \leq K \, . \tag{3.40}$$

Ebben α és $a \geq 1$ mérsékelten nagy elmozdulás figyelembevételével elvégzett statikai vizsgálat alapján kiszámítható állandók (Kaliszky 1984),

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \Delta_i \tag{3.41}$$

a lemez kezdősebességének megfelelő kinematikai energia és $\mathcal{J}_{A0}$ a tartó A pontjában, az u_A eltolódás irányában működő $\mathcal{J}_A$ statikus koncentrált erő képlékeny határértéke. Ez a képlékeny határállapot vizsgálat statikai tétele alapján határozható meg:

$$\max \; \mathcal{J}_{A0} \tag{3.42.a}$$

az alábbi feltételek esetén

$$\mathbf{G}^{*}\mathbf{R} = \mathcal{F}\,; \tag{3.42.b}$$

$$f_i\left(R_i, \sigma_{y0}\right) \le 0;\ (i = 1,2,...,n)\,; \tag{3.42.c}$$

$$x_0 - x_i \le 0,\quad (i = 1,2,...,n)\,. \tag{3.42.d}$$

Itt **R** az ismeretlen csomóponti erőket jelöli. A fentiek felhasználásával a továbbiakban az A pontbeli eltolódás nagyságára az alábbi korlát írható elő:

$$u_A - u_{A0} \le 0\,. \tag{3.43}$$

Itt u_{A0} az eltolódás megengedett értékét jelöli.

3.3.4 A dinamikus határfeszültség meghatározása

Mivel a lemez nagy sebességű mozgást végez, ezért indokolt az anyag viszkózus viselkedésének figyelembevétele (Perrone (1965), Martin és Symonds (1966)). Ezt a hatást

$$\sigma_{yi}^{d} = \Psi_i \sigma_{y0} \tag{3.44}$$

a dinamikus folyási határ bevezetésével vesszük számításba, amelyet a részleteket mellőzve az alábbi módon fejezhetünk ki:

$$\sigma_{yi}^{d} = \sigma_{y0}\left[1 + \chi\left(\frac{v_i}{2Ch}\right)^{\frac{1}{r}}\right]. \tag{3.45}$$

Itt χ, C és r az anyag viszkózus tulajdonságait jellemző állandókat jelölnek és a χ állandó a $\chi = \dfrac{2r}{2r+1}$ kifejezés alapján számítható. A rövid ideig tartó, nagy intenzitású teher esetén a (3.45) egyenletekben a szögletes zárójelben lévő kifejezést az alábbi módon adhatjuk meg:

$$\Psi_i = \left[1 + \chi\left(\frac{I_0 q_{0i}\sum_{i=1}^{n} q_{0i}\Delta_i}{2Ch\sum_{i=1}^{n} m_i q_{0i}\Delta_i}\right)^{\frac{1}{r}}\right]. \tag{3.46}$$

Figyelembe véve (3.15) kifejezéseket a porozitási elméletnek megfelelően, a mindenkori határfeszültség a $\sigma_{yi} = x_i \sigma_{yi}^{d}$ kifejezés alapján számítandó. Mivel $\sigma_{yi}^{d} \ge \sigma_{y0}$, az anyag viszkózus tulajdonságainak (az alakváltozás-sebesség) figyelembevétele mindig növeli az anyag szilárdsági, illetve merevségi tulajdonságait, ezért felhasználásával gazdaságosabb szerkezetek tervezhetők.

3.3.5 Az optimális tervezés alapfeladata dinamikus teher esetén

3.3.5.1 Kapcsolt, nemlineáris matematikai programozási megfogalmazás

Felhasználva a fentiekben ismertetett képleteket, és a lemez tömegét választva célfüggvénynek, az optimális tervezés feladata rövid ideig tartó, nagy intenzitású terhelés esetén az alábbiakban fogalmazható meg:

$$\min\ h_0\rho_0\sum_{i=1}^{n}\Delta_i x_i \tag{3.47.a}$$

az alábbi feltételek mellett

$$\mathbf{G}^*\mathbf{Q}+\mathbf{P}(x_i)-\mathbf{D}(x_i)=\mathbf{0}\,; \tag{3.47.b}$$

$$f_i(Q_i,x_i\Psi_i\sigma_{y0})\le 0,\quad (i=1,2,...,n)\,; \tag{3.47.c}$$

$$x_{i0}-x_i\le 0\,; \tag{3.47.d}$$

$$\mathcal{J}_{A0}\left[u_A+\frac{h_0 a}{1+\alpha}\left(\frac{u_A}{h_0}\right)^{\alpha+1}\right]-\frac{1}{2}I_0^2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}q_{0i}\Delta_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i\left(x_i\right)q_{0i}\Delta_i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}m_i\left(x_i\right)q_{0i}^2\Delta_i\le 0\,; \tag{3.47.e}$$

$$u_A-u_{A0}\le 0\,. \tag{3.47.f}$$

Összekapcsolva a

$$\max\ \mathcal{J}_{A0} \tag{3.48.a}$$

az alábbi feltételek mellett

$$\mathbf{G}^*\mathbf{R}=\mathcal{J}\,; \tag{3.48.b}$$

$$f_i(R_i,x_i\sigma_{y0})\le 0,\quad (i=1,2,...,n)\,; \tag{3.48.c}$$

$$x_0-x_i\le 0,\quad (i=1,2,...,n)\,. \tag{3.48.d}$$

feltételes szélsőérték-feladattal. Megállapítható, hogy a tárcsa-feladathoz hasonlóan a dinamikusan terhelt lemez optimális tervezését is két, az x_i tervezési változók által összekapcsolt nemlineáris matematikai programozási feladat határozza meg. A megoldásra iterációs eljárást dolgoztunk ki.

3.3.5.1.1 Iterációs megoldási eljárás

A (3.47.a-f) és a (3.48.a-d) egyenletekkel meghatározott kapcsolt nemlineáris programozási feladat megoldására a következő hatékony, iterációs eljárás javasolható:

1. lépés Vegyük fel az x_i értékeit. Ezek felhasználásával (3.44) alapján σ_{yi}^d számítható. Majd oldjuk meg a (3.48) matematikai programozási feladatot, mely megadja a $\mathcal{J}_{A0}$ értéket.

2. lépés Felhasználva az 1. lépésben kapott σ_{yi}^d és $\mathcal{J}_{A0}$ értékeket, oldjuk meg a (3.47)

matematikai programozási feladatot. Ennek optimális megoldása a tömegeloszlást meghatározó x_i porozitási tényező.

3. lépés A 2. lépésben megkapott x_i felhasználásával számítsuk ki újra (3.44) alapján σ_{yi}^d és oldjuk meg (3.48) matematikai programozási feladatot, amely $\mathcal{J}_{A0}$ új értékét adja.

4. lépés A 3. lépésben megkapott σ_{yi}^d és $\mathcal{J}_{A0}$ felhasználásával ismételjük a 2.–3. lépéseket mindaddig, míg két egymást követő teljes ciklusban a számított értékek közötti különbség elegendően kicsi.

3.3.5.2 Többcélfüggvényes megfogalmazás

Itt is követhetjük a rácsos tartók tervezésénél ismertetett eljárást a vektoroptimálási feladat felírása kapcsán. Ebben a megfogalmazásban a leeső teher esetén megadott egyenleteket használjuk. A célfüggvény a lemez tömegét és a statikailag elérhető erőt tartalmazza. A képlékeny határállapot statikai tételére alapuló többcélfüggvényes tervezési feladat megfogalmazása a következőképp adható meg (Kaliszky és Lógó 2003a):

$$\min\left(h\rho_0 \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x_i,\ -\mathcal{J}_{A0} \right) \tag{3.49.a}$$

az alábbi feltételek mellett

$$\mathbf{G}^*\mathbf{Q}+\mathbf{P}(x_i)-\mathbf{D}(x_i)=0; \tag{3.49.b}$$

$$f_i\left(Q_i, x_i\sigma_{y0}^d\right) \le 0;\ (i=1,2,...,n); \tag{3.49.c}$$

$$x_i - x_0 \le 0;\ (i=1,2,...,n); \tag{3.49.d}$$

$$\mathcal{J}_{A0}\left[u_A + \frac{ha}{1+\alpha}\left(\frac{u_A}{h}\right)^{\alpha+1} \right] - \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i\right) v_i^2\left(x_i\right)\Delta_i + M v_M^2\left(x_i\right) \right] \le 0; \tag{3.49.e}$$

$$u_A - u_{A0} \le 0; \tag{3.49.f}$$

$$\mathbf{G}^*\mathbf{R} = \boldsymbol{\mathcal{J}}; \tag{3.49.g}$$

$$f_i\left(R_i, x_i\sigma_{y0}\right) \le 0;\ (i=1,2,...,n). \tag{3.49.h}$$

Itt a $\sigma_{y0}^d\left(x_i\right)$ dinamikus határfeszültség minden lépésben újra számítandó. Rövid ideig tartó, nagy intenzitású teher esetén a (3.49) feladatban M=0 a (3.49.e) kifejezésben. Ez a tény felhasználható (3.47) feladatban, ha a leeső teherre kívánjuk megoldani. A (3.49) feladat numerikus megoldására több módszer létezik. Ezek megtalálhatók (Lógó (1988), Kaliszky és Lógó (2003a)).

3.3.6 Szeizmikus teher esete

Szeizmikus terhelésű rugalmas képlékeny keretek optimális tervezését mutatjuk be ebben az alfejezetben. A kapott eredmények a vázlatszinti tervezésben játszanak szerepet és meghatározható vele a végleges szerkezet optimális geometriai elrendezése, "layout"-ja.

A bemutatásra kerülő eljárás alapja egy nemlineáris statikus elmozdulásmódszerre („pushover", - Chopra(1995), Krawinkler és Seneviratne (1998), Dulácska, Joó és Kollár (2008), Dulácska (2009)-) épülő vizsgálat, ami az EUROCODE 1998-ban is megjelenik. A módszer lényege, hogy a többszabadságfokú dinamikus feladatot a módszer statikus jellegű vizsgálatra redukálja, amit egy egyenértékű egyszabadságfokú rugalmas-képlékeny szerkezet számításának a felhasználásával valósít meg. Ebben meghatározzuk az épület elmozdulás igényét, melyet célelmozdulásnak nevezünk. A célelmozdulás számítását az EUROCODE 1998 szabvány is megadja. Az eljárás szerint a szerkezetre állandó gravitációs és monoton növekvő vízszintes terheket működtetünk a két fő vízszintes irányban. A monoton növekvő terhekkel a szerkezetet egészen addig toljuk vízszintes irányban, ameddig a folyási mechanizmus kialakul (az összeomláshoz szükséges utolsó képlékeny csukló is kialakul). Minden kontrollponti elmozduláshoz tartozik egy un. alapnyíróerő. Ennek felhasználásával egy alapnyíróerő – kontrollponti elmozdulás függvényt állítunk elő, melyet kapacitásgörbének nevezünk. Az alapnyíróerő az alapozás felső síkján fellépő teljes eltolóerő, melyet a földrengésből keletkező terhek előjeles összegeként kapunk meg. A kontrollpont jellemzően az épület súlypontjának vetülete legfelső födémen. A kapott kapacitásgörbét ezután átalakítjuk egy ekvivalens bilineáris függvénnyé. A kapacitásgörbék ekvivalenciáját a munka azonosság alapján fejezzük ki (a görbék alatti területek azonosak). A mérnöki tapasztalatok szerint, ha az épület alakváltozási képessége elég nagy a tönkremeneteli folyamat során, akkor a szerkezet megfelelő teherbírással rendelkezik a földrengésteherre. A továbbiakban egy egyszerűsített optimális tervezési modellt mutatunk be erre az egyszerűsített eljárásra alapozva. A szeizmikus terhelésből a függőleges hatásokat itt nem vesszük figyelembe, mert feltételezzük, hogy az ilyen irányú gyorsulások kicsik.

3.3.6.1 Egyszerűsített modál analízis

Tekintsünk egy $k=1,2,\ldots,r$ szintes keretszerkezetet, ahol minden szinthez M_k nagyságú tömeget rendelünk. Itt M_k a k-adik szint valamennyi gravitációs jellegű tömegét reprezentálja.

Először egy egyszerűsített rugalmas modál analízist végzünk az egyik fő vízszintes irányban. Ennek eredményeképpen megadható a T_1 alap rezgésidő, az alap rezgésalak és az egyes M_k szinttömegekhez tartozó u_k vízszintes elmozdulások. A kapott értékek felhasználásával a földrengés terhet helyettesítő P_k normált vízszintes szintterhek felírhatók a k-adik szinthez

tartozó Φ_k normált vízszintes eltolódások függvényében:

$$\overline{P}_k = M_k \Phi_k; \qquad \Phi_k = \frac{u_k}{u_r}, \ (k=1,2,...,r), \tag{3.50}$$

$$P_k = g\overline{P}_k = gM_k \Phi_k; \ (k=1,2,...,r), \tag{3.51}$$

itt g a gravitációs gyorsulást jelenti.

3.3.6.2 Az egyenértékű, egyszabadságfokú rendszerbe történő transzformálás

Az egyenértékű, egyszabadságfokú rendszer M^* redukált tömege az alábbi összefüggés alapján határozható meg:

$$M^* = \sum_{k=1}^{r} M_k \Phi_k = \sum_{k=1}^{r} \overline{P}_k. \tag{3.52}$$

Az P^* helyettesítő erő és a helyettesítő u^* elmozduláshoz szükséges képletek kiszámításához az alábbi kifejezéseket kell használni a „pushover” módszer szerint:

$$P^* = \frac{P_b}{\Gamma}; \qquad u^* = \frac{u_r}{\Gamma}. \tag{3.53}$$

Itt a P_b alapnyíróerőt az épület teljes M tömege és az $S_d(T_1)$ elmozdulási válaszspektrum szorzataként határozzuk meg:

$$P_b = S_d(T_1)M, \tag{3.54}$$

felhasználva egy Γ transzformációs tényezőt:

$$\Gamma = \frac{M^*}{\sum_{k=1}^{r} M_k \Phi_k^2} = \frac{\sum_{k=1}^{r} \overline{P}_k}{\sum_{k=1}^{r} \left(\frac{\overline{P}_k^2}{M_k} \right)}. \tag{3.55}$$

A u_r eltolódás a többszabadságfokú rendszer kontrol pontjának (a tető egy dedikált pontja) eltolódását jelenti. Az $S_d(T_1)$ elmozdulási válaszspektrum az EUROCODE 1998 alapján állítható elő.

3.3.6.3 Az egyenértékű egyszabadságfokú rendszerben az ellenőrző számítás

Először a többszabadságfokú rendszer folyási mechanizmusát létrehozó P_y^* törőerőt kell meghatározni. Feltételezzük, hogy ez egyenlő a helyettesítő egyszabadságfokú rendszer törőerejével. Ezután, egy lépésről-lépésre történő rugalmas-képlékeny vizsgálat során meghatározzunk az alapnyíróerő és a kontrollelmozdulás közötti összefüggést (3.9 ábra), azaz az un. kapacitásgörbét. Az összeomlási u_y^* eltolódása a helyettesítő egyszabadságfokú rendszernek olyan módon határozható meg, hogy az idealizált görbe és az aktuális görbe alatti területek

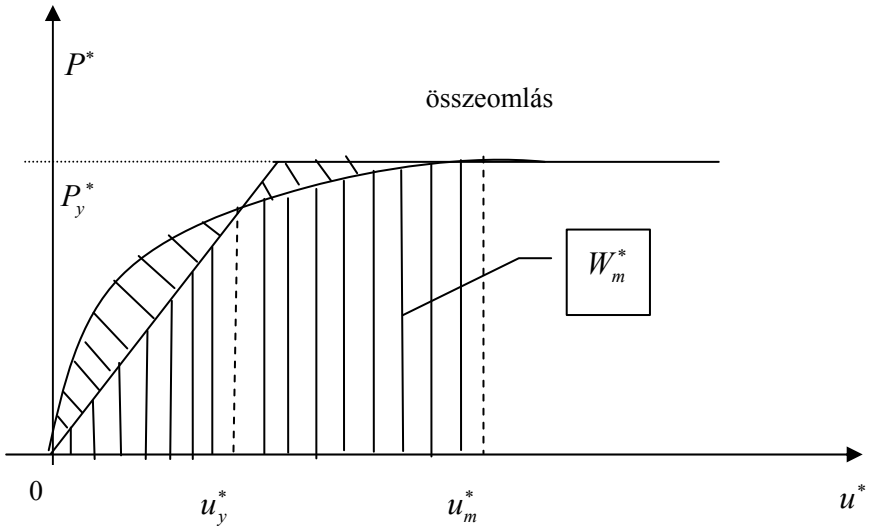
azonosak legyenek: $$u_y^* = 2\left(u_m^* - \frac{W_m^*}{P_y^*}\right). \tag{3.56}$$

A helyettesítő rendszer T^* periódusideje: $$T^* = \sqrt{\frac{M^* u_y^*}{P_y^*}}. \tag{3.57}$$

A T^* periusidő felhasználásával a korlátozás nélküli, rugalmasan meghatározott u_{et}^* cél eltolódást az alábbi képlet felhasználásával tudjuk kiszámítani:

$$u_{et}^* = \left(\frac{T^*}{2\pi}\right)^2 S_e\left(T^*\right). \tag{3.58}$$

Itt $S_e\left(T^*\right)$ az EUROCODE 1998 alapján definiált rugalmas gyorsulási válaszspektrumot jelenti.



3.9 ábra: Erő-eltolódás diagram.

Felhasználva a (3.58) egyenletet a T^* periódusidő és a szabvány által meghatározott, az épület alapját megtámasztó talajfajtától függő T_c periódusidő viszonya alapján két esetet különböztetünk meg. Felhasználva az P_y^* törőerőt a u_t^* cél eltolódás,

ha $T^* \langle T_c$ $$u_t^* = \frac{u_{et}^*}{q_u}\left[1 + \left(q_u - 1\right)\frac{T_c}{T^*}\right] \geq u_{et}^*, \tag{3.59}$$

összefüggés alapján számítható, ahol

$$q_u = \frac{S_e\left(T^*\right)M^*}{P_y^*}. \tag{3.60}$$

Behelyettesítve a (3.57) és (3.58) egyenleteket a (3.59) egyenletbe a u_t^* cél eltolódás meghatározása az alábbi összefüggés szerint módosul:

$$u_t^* = u_y^*\left[1 + \left(q_u - 1\right)\frac{T_c}{T^*}\right] \geq u_{et}^*. \tag{3.61}$$

Abban az esetben, ha $T^* \geq T_c$ vagy $\frac{P_y^*}{M^*} \geq S_e\left(T^*\right)$ feltételek valamelyike teljesül, akkor a szerkezet rugalmas marad és $u_t^* = u_{et}^*$. A T_c referencia periódusidő meghatározására az alapozási talajfajtától függően az EUROCODE 1998 ad iránymutatást.

Végezetül a többszabadságfokú rendszerhez tartozó céletolódás a $k \equiv r$ referencia pontban a következő összefüggés alapján számíthatjuk:

$$u_t = \Gamma u_t^* . \tag{3.62}$$

Az épület viselkedését az így meghatározott u_t eltolódás felhasználásával szabályozhatjuk. A túlzott mértékű képlékeny eltolódások és a károsodások megakadályozására a következő eltolódási feltétel adható meg:

$$u_t - u_{ta} \leq 0 . \tag{3.63}$$

Itt a u_{ta} megengedett határ eltolódás a szabvány adta értékkel vehető számításba.

3.3.6.4 Az optimális tervezés iterációra alapuló számítási módszere

Egy vázas épület (keretszerkezet) optimális tervezése, amely egy iterációra alapuló számítási módszer, szeizmikus teher esetén a „pushover” eljárás felhasználásával az alábbiakban ismertetett lépések alapján elvégezhető:

***1.lépés*:** Induljunk ki, egy a végeselemes diszkretizációnak megfelelő, adott keresztmetszeti méretekkel rendelkező *n* elemű vázas szerkezetből és végezzük el a 3.3.6.2 és 3.3.6.3 pontokban ismertetett számítást.

***2. lépés*:** Felhasználva a (3.51) egyenlet alapján számított vízszintes erőket, mint terhelést, oldjuk meg a következő képlékeny határállapotra alapuló optimális tervezési feladatot:

$$\sum_{i=1}^{n} \ell_i A_i = \min! . \tag{3.64.a}$$

az alábbi feltételek mellett

$$\mathbf{G}^*\mathbf{Q} = \mathbf{P} ; \tag{3.64.b}$$

$$-\mathcal{M}_{pi} \leq \mathcal{M}_i \leq \mathcal{M}_{pi} , \ (i=1,2,\ldots,n); \tag{3.64.c}$$

$$\mathcal{M}_i - \mathcal{M}_{i0} \leq 0 , \ (i=1,2,\ldots,n); \tag{3.64.d}$$

$$A_i = \Theta_i\left(\mathcal{M}_{pi}\right), \ (i=1,2,\ldots,n). \tag{3.64.e}$$

Itt $\mathbf{G}^*$ az egyensúlyi mátrix, $\mathbf{Q}$ a belső erők vektora, $\mathbf{P}$ a helyettesítő vízszintes erők vektorát jelenti. Az $\mathcal{M}_i$, ℓ_i, A_i, és $\mathcal{M}_{pi}$ jelöli az *i*.-dik elemhez tartozó rúdvégi nyomatékot, a rúdelem hosszát, a rúdelem keresztmetszeti területét, a rúdelem képlékeny határnyomatékát. Az $\mathcal{M}_{i0}$

nyomatékot használtuk a minimális keresztmetszeti méret kifejezésére (Kaliszky (1989)). A (3.64.e) egyenlet adja meg a kapcsolatot a keresztmetszeti méret és az adott keresztmetszethez számított képlékeny nyomaték között. Az adott keresztmetszethez tartozó $\Theta_i\left(\mathcal{M}_{pi}\right)$ függvény a keresztmetszet alakjától függő tényező (lásd pl. Kaliszky (1989)). A kapott matematikai programozási feladat megoldásaként megkapjuk a vázas szerkezet egyes rúdelemeinek optimális A_i keresztmetszeti méretét és $\mathcal{M}_{pi}$ képlékeny határnyomatékát.

***3. lépés*:** Felhasználva a *2. lépés*ben megkapott optimális megoldásokat, az egyes elemek A_i keresztmetszeti méretét és $\mathcal{M}_{pi}$ képlékeny határnyomatékát, biztosak lehetünk, hogy az így megépített rúdszerkezet kellő teherbírású az alkalmazott helyettesítő erőkkel szemben, de nem lehetünk abban biztosak, hogy a (3.63) egyenlettel kifejezett elmozdulási korlát is teljesül. Az elmozdulásra vonatkozó (3.63) feltétel teljesítése érdekében végezzünk el egy nemlineáris (lépésről-lépésre) rugalmas-képlékeny számítást –„pushover" vizsgálat-. Itt az egyes rúdelemek $\overline{\mathcal{M}}_{pi}$ képlékeny határnyomatékát a *2. lépés*ben kapott optimális $\mathcal{M}_{pi}$ képlékeny határnyomatéknak és egy ismeretlen λ paraméter ($\lambda \geq 1$) szorzataként tekintjük -$\overline{\mathcal{M}}_{pi} = \lambda \mathcal{M}_{pi}$-. Továbbá a keresztmetszetek $\mathcal{I}_i$ inercia nyomatéka felírható az $\overline{\mathcal{M}}_{pi}$ képlékeny határnyomaték függvényeképp -$\mathcal{I}_i\left(\overline{\mathcal{M}}_{pi}\right)$, pl. Kaliszky (1989)-. Határozzuk meg az ismeretlen λ paraméter függvényében a 3.9 ábrán bemutatott erő-elmozdulás függvényt a (3.51-3.62) egyenletek alapján és adjuk meg a (3.62) egyenlettel meghatározott u_t céleltolódást. Végezetül ezek felhasználásával a λ paraméter az $u_t\left(\lambda\right) = u_{ta}$ feltételből meghatározható. Ennek a λ paraméternek a felhasználásával az az optimális megoldáshoz tartozó $\overline{\mathcal{M}}_{pi} = \lambda \mathcal{M}_{pi}$, ($i=1,2,\ldots,n$) képlékeny határnyomatéka az egyes rúdelemeknek felírható, a vonatkozó $\overline{A}_i$, ($i=1,2,\ldots,n$) keresztmetszeti területek a (3.64.e) egyenlet alapján számítható.

***4. lépés*:** A *3. lépés* után kapott megoldás javítható az *1.-3. lépés*ek ismétlésével. Ez különösen indokolt, ha mérnöki szempontból jelentős különbség mutatkozik az *1. lépés*ben vizsgált és a *3. lépés*ben kapott szerkezet keresztmetszeti méretei között.

A fenti eljárás megismeréséből látható, hogy nem különösebben bonyolult lépések sorozata után kapjuk a mérnöki szempontból optimális megoldást. Ez az optimális szerkezet, egy egyszerűsített modálanalízis után a (3.64) egyenletekkel megadott matematikai programozási feladat megoldásának a felhasználásával egy kiterjesztett rugalmas-képlékeny teherbírási feladat megoldásaként kapható meg. Természetesen szükséges az EUROCODE 1998 előírásainak az

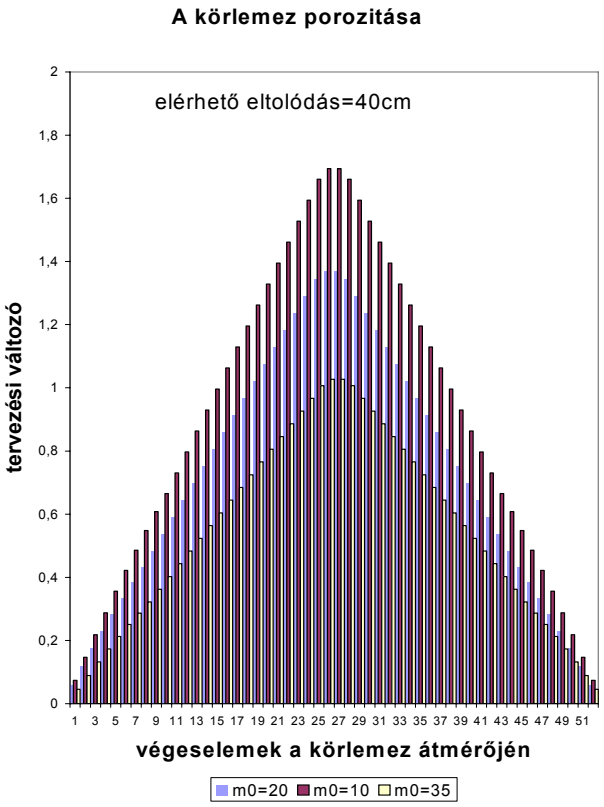
ismerete.

3.3.7 Mintapéldák dinamikus teher esetén

A nemlineáris matematikai programozási feladatotokat szekvenciális kvadratikus programozási algoritmus (Schittkovski (1985/86)) és Schittkovski által a rendelkezésre bocsátott forráskodú FORTRAN 77 nyelven írt optimálási csomag felhasználásával oldottuk meg.

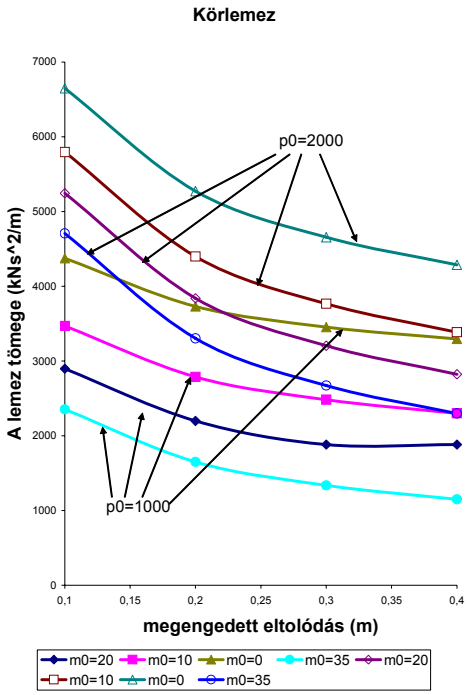
3.3.7.1 Rövid ideig tartó, nagy intenzitású teherrel terhelt lemez

A (3.3.5.1) fejezetben bemutatott számítási módszer alkalmazását egy $R = 5.00\text{m}$ sugarú, $h_0 = 0.40\text{m}$ vastagságú egyenletes eloszlású ($q_0 = 1$) lökésszerű terheléssel terhelt lemez optimális tervezésén szemléltetjük. A lökés csúcsnyomása $p_0 = 1000;\ 2000\text{kN/m}^2$,



3.10. ábra. A tervezési változó változása a körlemez átmérője mentén

időtartama $t_0 = 0.1s$, az egyenletes eloszlású állandó teher nagysága $m_0 = 0;\ 10;\ 20;\ 35\frac{\text{kNs}^2}{\text{m}^3}$, a lemez középpontjának u_{A0} megengedett eltolódása pedig 0.10m és 0.40m között változik.

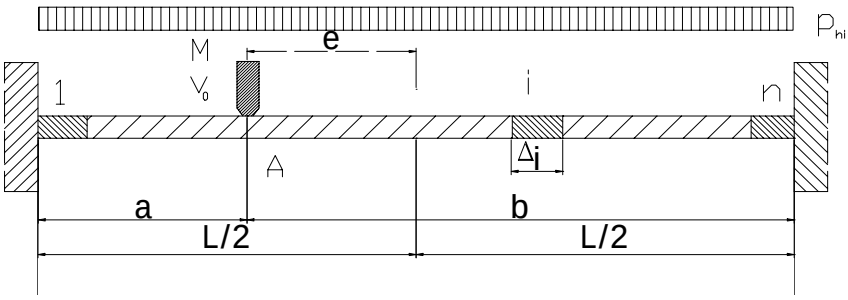


3.11 ábra. A lemez tömegének változása

A (3.40) és (4.45) képletekben szereplő állandók nagysága $\alpha = \frac{1}{3}$, $a = 2$, $C = 40.4s^{-1}$ és $r = 5$ (Jones (1997)). A számítás eredményeit az 3.9 és 3.10 ábrák szemléltetik. Az 3.10 ábra az x_i tervezési változók eloszlását mutatja be m_0 különböző értékeinél. A 3.11 ábrán pedig a lemez tömegének változása látható a megengedett u_{A0} eltolódás és a p_0 paraméter függvényében.

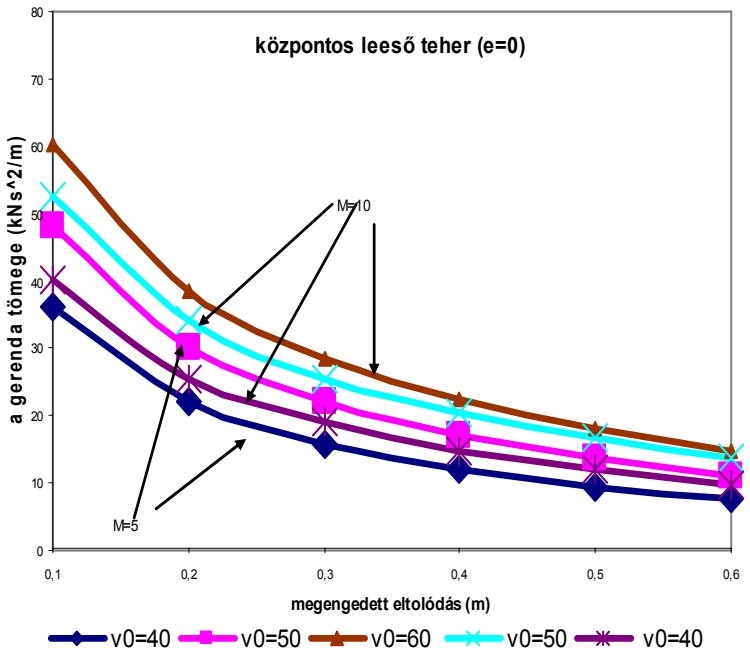
3.3.7.2 Leeső teher gerenda esetén

A (3.3.5.1) fejezetben bemutatott számítási módszer leeső teherre módosított egyenleteinek alkalmazását egy két végén befogott gerenda optimális tervezésén keresztül mutatjuk be (3.12.ábra.). A támaszköz L=10.00m, és derékszögű négyszög keresztmetszetet alkalmaztunk.



3.12 ábra. Leeső teher két végén befogott gerendán

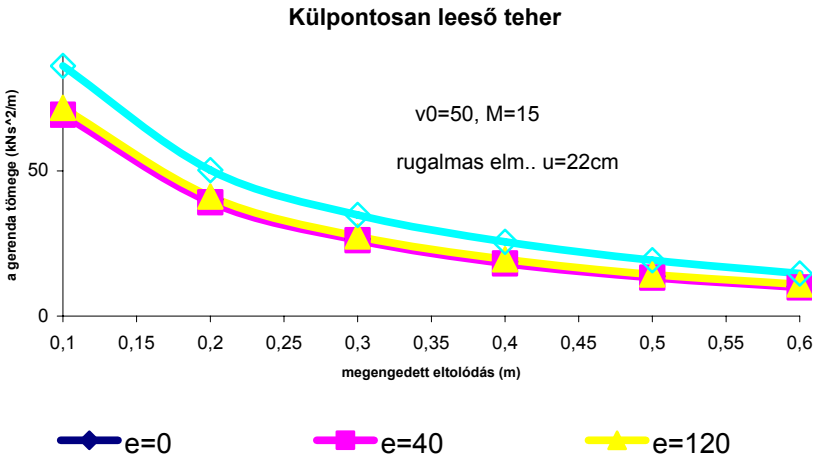
dc_805_13



3.13 ábra. Optimális tömeg változása a kezdősebességek függvényében

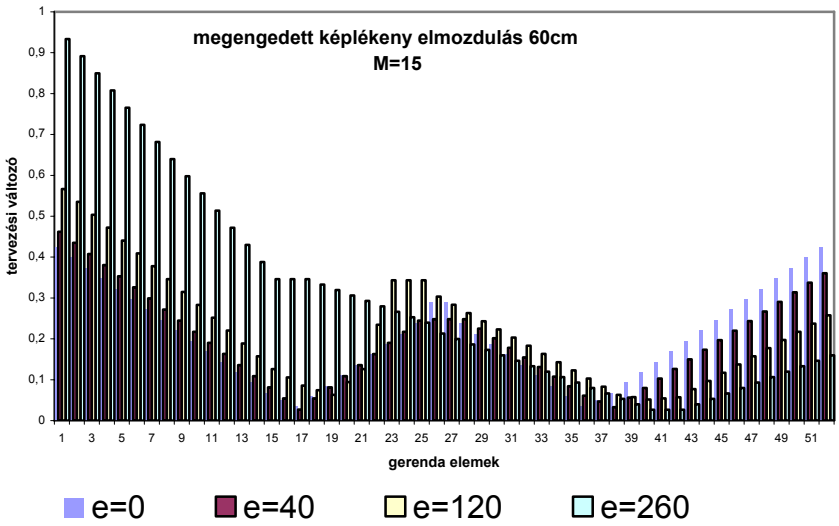
A keresztmetszet alapmagassága h_0=0.60m és a szélessége b=0.20m. Tresca féle képlékenységi feltételt használtuk, melyben az anyag határfeszültsége $\sigma_{y0} = 40\text{kN/cm}^2$. A (3.40) egyenlet felhasználásához szükséges paraméterek $\alpha = \frac{1}{3}$; $a = 2$, $C = 40.4s^{-1}$ és $r = 5$.

A gerenda normál terhelése $p_{hi} = 5$, 10, 25 kN/m, az önsúly teher $p_0 = 5$, 10 kN/m. A rendkívüli teher most egy leeső tömeg, melyet különböző tömegértékekkel, külpontossággal és sebességekkel vettünk számításba. Ezek a tömeg esetében M=5, 10, 15 kN, a sebesség $v_0 = 40$, 50, 60 m/s és a külpontosság értékek e=0, 20, 120, 260 cm.



3.14 ábra. Optimális tömeg változása a külpontosság függvényében

dc_805_13



3.15 ábra. A tervezési változó változása a gerendán

A végeselemes diszkretizálásban a gerendát 51 elemre osztottuk. A 3.13 ábrán látható a gerenda tömegének változása abban az esetben, ha az *M* tömeg a gerenda középpontjára esik. Az eredmények összhangban vannak a várt értékekkel. Különböző külpontos becsapódási pont esetében a 3.14. ábra diagramjai mutatják az optimális tömeg változását a megengedett képlékeny eltolódások függvényében. A 3.15. ábrán látható a tervezési változó változása a gerendán különböző külpontos teher esetén. Jól követhető a külpontosság hatása.

Valamennyi esetben az optimális megoldás, a konvergencia matematikai ellenőrzéséhez felhasználtuk a Schittkovski által rendelkezésre bocsátott matematikai programcsomag kontrol adatait.

A többcélfüggvényes megfogalmazáshoz tartozó alkalmazások, illetve további mintapéldák több dolgozatban megtalálhatók (Kaliszky és Lógó (2002b, 2003a, c). A földrengésteherre való optimális tervezési feladathoz tartozó mintapéldát egy másik dolgozatban találhatjuk meg (Kaliszky és Lógó (2006)).

3.4 Összefoglalás, tézisek

A 3. fejezetben bemutattam, hogy hogyan alkalmazhatók a statikusan és a dinamikusan terhelt rugalmas-képlékeny tartók optimális tervezésénél az alakváltozásokra, elmozdulásokra vonatkozó korlátozások, amelyek a képlékeny viselkedés globális és lokális mérőszámai.

Kutatásaim azt mutatták, hogy a képlékenységtan alaptételei (beállás- és teherbírás vizsgálat) alapján történt optimálistervezés a feltételi egyenletek bővítésével javítható. Először a képlékeny viselkedés szabályzójaként, mint globális feltételt, a maradó alakváltozási energiát használtam. A kapott eredményekből arra a következtetésre jutottam, hogy ez a tervezés mérnöki szempontból még javítható. Így lokális szabályzó korlátként a maradó elmozdulások

nagyságának bizonyos helyeken való korlátozását is feltételnek vettem. Ekkor olyan tervezési eredményeket kaptam, ami lényegesen jobb megoldást jelentett a szerkezettervező számára.

Így a képlékenységtan beállás vizsgálatára és képlékeny teherbírás vizsgálatára épülő statikus, illetve dinamikus teherrel terhelt szerkezetek optimális tervezésére komplex eljárásokat dolgoztam ki, amelyek a globális és a lokális képlékeny viselkedést egyrészt a maradó alakváltozási energia, másrészt a maradó elmozdulás legjobb felső korlátjának a bevonásával veszi figyelembe. Az egyes elemek (korlátok meghatározása) már mások kutatásaiban és a sajátomában is szerepeltek, de együtt, összeépítve nem. Újdonság még, hogy a maradó alakváltozási energia korlátozásával a rugalmas, rugalmas-képlékeny és a képlékeny optimális tervezés egy modellel számítható, a képlékeny viselkedés szabályozható egy paraméter megfelelő kiválasztásával.

Az ismertetett számítási modellek előnye, hogy különleges esetként a rugalmas, illetve a teljesen képlékeny állapotú tartók optimális tervezését is magukba foglalják. Amennyiben ugyanis a bemutatott optimális tervezési feladatokban - (3.13), (3.14), (3.19), (3.20), (3.47) és (3.49) egyenletekben - a $W_{p0} = 0$ értékeket írjuk elő, akkor a kapcsolódó matematikai programozási feladatok a rugalmas optimális megoldást adják meg. Ha viszont W_{p0}-t és u_{A0}-t elegendően nagyra választjuk, akkor a teljesen képlékeny tartók optimális megoldását eredményezik. A W_{p0} és u_{A0} értékek alkalmas megválasztásával a tartó képlékeny viselkedését e két szélső eset között lehet szabályozni.

Az ismertetett feladatoknál a minimális térfogatú, illetve tömegű tartók tervezését tűztem ki célul, a számítási modellek azonban arra is alkalmasak, hogy adott térfogat, illetve tömeg esetén az eltolódást vagy a maradó feszültségek kiegészítő alakváltozási energiáját tekintsük célfüggvénynek. Bemutatásra került, hogy több célfüggvény együttes alkalmazásával is elvégezhető az optimális tervezés. A számítási modelleket kis módosítással, más tartó típusok (gerenda, keret, lemez, héj) optimális tervezésére is alkalmaztam. Dolgozatainkban rácsos tartók tervezése alapján bemutattuk, hogy a tervezés diszkrét keresztmetszetek esetén is elvégezhető a diszkrét matematikai programozás felhasználása nélkül (Kaliszky és Lógó (1997b, 1998, 1999a), de ez itt nem szerepelt. A lökésszerű, illetve a leeső terheléssel terhelt tartók optimális tervezésénél alkalmazott elveket a földrengés esetére is kiterjesztettük az EUROCODE 1998 ajánlásainak figyelembevételével (Kaliszky és Lógó (2004a, 2006)). A fentiek alapján a következő három tézist fogalmazom meg:

1. TÉZIS

1(a) Statikus teherrel terhelt, rugalmas-képlékeny anyagú rúdszerkezetek optimális tervezésére matematikai programozási feladatként képlékeny alakváltozásokra és maradó elmozdulásokra

vonatkozó korlátokkal bővített *beállásvizsgálati* modelleket dolgoztam ki.

1(b) A mérnöki szemléletre alapuló iterációs számítási eljárásokat és megoldási módszereket dolgoztam ki a *beállásvizsgálati* modellek numerikus megoldásához.

2. TÉZIS

2(a) Felhasználva a porózus anyag koncepcióját a mechanikai modelleket kiterjesztettem tárcsák, lemezek beállásvizsgálatra alapuló optimális tervezésének az elvégzésére.

2(b) A bemutatott (rúdszerkezeti, felületszerkezeti) modellek speciális esetként a tökéletesen rugalmas állapotban és a képlékeny határállapotban lévő szerkezetek optimális megoldását is megadják ugyanazon mechanikai modell használatával.

3. TÉZIS

3(a) A matematikai programozás eszközeinek felhasználásával a korlátokkal bővített képlékeny határállapot vizsgálat statikai tételén alapuló mechanikai modelleket, és a mérnöki szemléleten alapuló iterációs számítási eljárásokat és megoldási módszereket dolgoztam ki nagy intenzitású, rövid ideig tartó, lökésszerű teherrel és leeső teherrel terhelt rugalmas-képlékeny anyagú szerkezetek (gerendák, tárcsák, lemezek) optimális tervezésére korlátozott képlékeny alakváltozások és elmozdulások figyelembevételével.

3(b) A földrengésszámítás közelítő módszerének alkalmazásával a képlékeny határállapot vizsgálat statikai tételének felhasználásával optimális tervezési feladat megoldására alkalmas mechanikai modellt adtam meg és iterációra épülő számítási eljárást dolgoztam ki. A kapott optimális szerkezet jó kiindulási alapul szolgálhat a pontosabb részlettervek készítéséhez.

4 LINEÁRISAN RUGALMAS SZERKEZETEK TOPOLÓGIAOPTIMÁLÁSA

A topológiaoptimálás jelenleg a szerkezetoptimálás egyik legnépszerűbb ágazata. Ebben a témában igen sok dolgozat jelent meg, konferenciákat szerveztek az elmúlt években, a résztvevők közül ki kell emelnünk néhány kutató munkáját (Bendsoe (1989), Bendsoe és Mota Soares (1992), Bendsoe és Sigmund (1999, 2003), Jármai (1998), Maute és társai (1998), Rozvany (1989, 1997, 2001, 2009, 2013)). A topológiaoptimálás alapfeladata egy matematikai programozási feladat, melynek numerikus megoldása még a modern matematikai programozási eljárások és számítógépes programok felhasználásával is csak néhány száz változó alkalmazásával volt lehetséges. Az a kívánalom, hogy több ezer változót alkalmazzunk a tervezési feladatban, előre vetíti az optimalitási feltétel (OC) módszerének alkalmazását és egy iterációs összefüggés felhasználását. A matematikai programozás hagyományos eljárásai azt az elvet használják, hogy a megoldási folyamatban egy pontból elindulva milyen irányban és mekkora lépéssel lehet a célfüggvény értékét a legjobban csökkenteni. Az optimalitási feltétel módszere valamely származtatott vagy intuíció alapján megfogalmazott optimalitási feltétel vagy feltételek kielégítésére törekszik az egyes iterációs lépésekben, ezzel indirekt módon csökkenti a célfüggvény értékét. Az optimalitási feltétel módszere a mérnöki problémamegoldás egyik jelentős példája.

Maga az eljárás négy jól definiálható lépésre osztható. Ezek:

1. lépés Az optimalitási feltételt leíró egyenletek származtatása. Ilyenek lehetnek valamely intuíció alapján megfogalmazott feltételek (pl. teljesen kihasznált szerkezetek tervezése (FSD), egyidejű összeomlási módok módszere (SFMD), egyenletes alakváltozási energia sűrűségre való tervezés (USEDD), konstans belsőerőeloszlás módszere (CIFFDD)) vagy közvetlenül a matematikai programozási feladat elsőrendű optimalitási feltételeiből matematikai eszközökkel kifejezett optimalitási feltételek. Ez utóbbiak közül kiemelhető a klasszikus optimalitási módszer (COC), a duális optimalitási módszer (DOC), az általános optimalitási módszer (GOC).

2 . lépés A tervezési változók iterációs számítása.

3. lépés A Lagrange-szorzók számítása.

4. lépés A számítógépes végeselemes program alkalmazása.

Ez a fejezet a lineárisan rugalmas anyagú szerkezetek topológiaoptimálását mutatja be iterációs eljárás felhasználásával és kiterjeszti a feladat megoldását valószínűségi változókkal megadott terhelés esetére is. Már az előző fejezet is tágabb értelemben a topológiaoptimáláshoz tartozik, de az ebben a részben ismertetésre kerülő szerkezetoptimálás a feladat felépítésében (sok tervezési változó, kevés feltételi egyenlet, terhek sztochasztikusak is lehetnek) és megoldási struktúrájában különbözik azoktól. A kutatás célja 2D szerkezetek topológiaoptimálisa a matematikai programozás elméletének és az optimalitási feltétel módszerének felhasználásával

igen nagyszámú (több ezer) tervezési változó alkalmazásával. A számítási modellhez standard végeselemes számítógépes programot készítettünk négycsomópontú tárcsa-elemek és kétcsomópontú rúdelemek felhasználásával lineárisan rugalmas anyag alkalmazásával. A tervezés során a kiinduláskor adottnak tekintettük a terhelést (egyparaméteres, statikus, lehet valószínűségi változókkal adott is), a megtámasztásokat és a tervezési tartományt, az ún. "alap"-szerkezetet. A tervezési változók minden esetben a tárcsaelemek vastagságai, illetve a rúdelemek keresztmetszeti területei voltak. Két alapmodellt készítettünk el:

- minimáltuk a szerkezet térfogatát a külső potenciális energia (compliance) nagyságának korlátozásával,
- minimáltuk a külső potenciális energiát – (compliance minimization) - adott anyagmennyiség esetén.

Ebben a fejezetben az első feladattípussal foglalkozunk egy alapfeladat, egy bővített (támaszoptimálási) probléma és a valószínűségi változókkal megadott terhelésű tartó topológiaoptimálása kapcsán. A számítási modellek minden esetben nemlineáris matematikai programozási feladatra vezetnek. Felhasználva az optimalitás feltételét, egy iterációs formulát vezettünk le – SIMP (Solid Isotropic Material with Penaltization) -, amely ellentétben a standard matematikai programozási algoritmusokkal, igen nagyszámú tervezési változó felhasználását teszi lehetővé. Vizsgáltuk az analitikusan kapott, illetve a numerikusan kiszámított ún. Michell-típusú optimális topológiák egyezőségét különböző térfogati arányok, merevségek és terhelési esetek kapcsán. A fejezet a következő dolgozatok alapján készült: Lógó (2005a, 2006a, 2007c, 2007d, 2012). A Lógó (1995a,b 1999), Lógó és Iványi (1996), Lógó és Ghaemi (2001, 2002, 2003, 2005), Gáspár, Lógó és Rozvany (2002), Ghaemi és Lógó (2005), Rozvany, Lógó és Kaliszky (2003), Rozvany, Lógó és Querin (2004) dolgozatokban használt elvek is felhasználásra kerültek. Szerkezetileg, jelölésrendszerében a fejezet az előző (3.) fejezettől független.

4.1 Rövid irodalmi áttekintés

A topológiaoptimálás története már 100 éves múltra tekint vissza. Az első 80 évben főleg vázas szerkezetek, azon belül is a rácsos tartók optimálására használták a leggyakrabban alkalmazott eljárást, a teljesen kihasznált szerkezetek tervezésének (FSD) módszerét. Cilley (1900) és híres dolgozatában Michell (1904) statikailag határozott szerkezetek tervezésével foglalkoztak, és arra a következtetésre jutottak, hogy eredményük azonos a minimális súlyra való tervezés eredményével. Barta (1957), illetve Schmit (1960) statikailag határozatlan szerkezeteknél alkalmazta a módszert (FSD) és megállapították, hogy a törzstartó felvétele lényegesen

befolyásolhatja a végeredményt. Sajnos módszerük numerikusan nagyon instabil volt. Erre a következtetésre jutottak Lansing és társai (1971) is egy numerikusan sokkal stabilabb eljárás alkalmazásával, és megállapították, hogy a helyes eredmény kialakulásának egyik feltétele az, hogy az egyes iterációs ciklusokban a statikai határozatlanságból származó fölös belső erők konstans értékeket vegyenek fel. Gellatly és Gallagher (1966) az FSD módszert mint kezdő iterációs lépést használták a nemlineáris matematikai programozási feladat megoldásakor. Gallagher (1973) megállapította, hogy az FSD módszer nem megfelelő a minimális súlyú szerkezetek általános tervezésére. Berke és Khot (1974) szerint a minimális súlyra való tervezés esetén „a szerkezetnek van olyan eleme, amely teljesen kihasznált és vannak a keresztmetszeti méretek alsó korlátját tartalmazó elemek is”. Fleury (1979) összehasonlító elemzése jelentős lépés volt az intuíción alapuló (FSD) eljárás, illetve a matematikai egyenletek felhasználásával megfogalmazott általános optimalitási feltétel (GOC) módszer alkalmazhatóságának megítélése tekintetében.

Az intuíció alapján megállapított módszerek közül a másik fontos eljárás az egyenletes alakváltozási energiasűrűségre való tervezés (USEDD) módszere. Kiindulva a varációszámítás hagyományos módszereiből és ezeket diszkretizált szerkezetekre alkalmazva, Taylor (1967), Sheu és Prager (1968a,b), Prager és Schield (1968), Prager és Taylor (1968), Prager (1970) egy új általános optimálási módszert mutattak be. Az első ilyen eljárás a feszültségi feltételekkel korlátozott egyenletes alakváltozási energiasűrűségre való optimális tervezés feladata volt. Prager és Taylor (1968) megmutatta, ha a külső erők munkája egyenlőségi feltétellel korlátozott, akkor az optimális szerkezetben az alakváltozási energiasűrűség eloszlása egyenletes. A „modern” topológiaoptimálás első dolgozata a Rossow és Taylor (1973) által ismertetett végeselemes alkalmazás. Az USEDD módszer legáltalánosabb megfogalmazását Venkayya (1971) adta meg, miszerint „az optimális szerkezet minden elemében az alakváltozási energia és az alakváltozási energia kapacitásának aránya konstans”.

A klasszikus optimalitási feltétel (COC) módszere a 70-es évekre tehető. Berke (1970) egy általános, a matematikai programozási feladatból származtatott algoritmust vezetett le, az FSD-hez hasonlóan, amely néhány iteráció alkalmazásával az optimumot adta. Ő alkalmazta először azt a megoldást, hogy a tervezési változókat egy „aktív”, illetve egy „passzív” halmazba kell csoportosítani. Módszere, túlmutatva az FSD módszeren, már hatékonynak bizonyult a statikailag határozatlan szerkezetek esetében is. Fontos lépést jelentett Gellathy és Berke (1971, 1973) „boríték” módszere a többszörös elmozdulási feltételt tartalmazó feladatok megoldására. Nagy jelentőségű még Fleury és Geradin (1978) munkája, amelyben megmutatják a matematikai programozási, illetve az optimalitási feltételre épülő klasszikus módszerek közötti kapcsolatot, és a két eljárás összehangolásával egy hatékony vegyes eljárást is kidolgoztak. Hasonló Khot,

Berke és Venkayya (1979) összehasonlító elemzése is. Amennyire a nagyszámú tervezési változó kedvező, annyira előnytelennek bizonyult a viszonylag kevés számú feltételi egyenlet a matematikai programozási megfogalmazásban. Így a több feltételi egyenlet alkalmazhatóságának céljából Fleury (1979) ebben az időszakban fejlesztette ki a matematikai programozás „duál" módszerére alapuló igen hatékony eljárását. Ebben a módszerben a tervezési változók reciprok értékével kifejezett feltételi egyenleteknél szekvenciális, lineáris közelítést alkalmazott, de a Lagrange-szorzók meghatározásánál „komoly" nehézségei voltak. Ezek a problémák sikeresen megoldódtak Fleury és Schmit (1980), illetve továbbfejlesztve Fleury és Braibant (1986) munkáival. Sőt Schmit és Fleury (1980a, b) a „duál", illetve a közelítő módszerek alkalmas kombinációjával egy hatékony eljárást dolgozott ki vegyes (folytonos, illetve diszkrét) változójú feladatok megoldására. Ahogy az előzőekben említettük a végeselemes topológiaoptimálás Rossow és Taylor (1973) nevéhez kötődik. Majdnem 10 évvel később 1981-ben Cheng és Olhoff (1981) tudott csak hasonló eredményt felmutatni, mivel az optimális tervezési feladatokban csak a vázas szerkezetekkel tudtak a numerikus nehézségek miatt eredményeket elérni. Nagyon fontos volt az 1988-ban publikált Bendsoe és Kikuchi (1988) dolgozat, melyben a homogenizációt alkalmazták a topológiaoptimálási feladat megoldásánál, és a továbbiakban számos kutató ezt használta, és fejlesztette tovább módszerüket (Allaire és Kohn (1993)). Kaliszky és Lógó (1991) már dinamikai feladat megoldására használta a Berke-féle OC módszert. Hung, Lógó és Kikuchi (1991) munkájában vázas szerkezetek (többnyire rácsos tartók) optimálását végezte az optimalitási feltételre alapuló különböző eljárások alkalmazásával. A kontinuum-típusú szerkezetek topológiaoptimálása Rozvany, aki a 70-es években is számos munkával bővítette az OC eljárásokat (pl. Prager és Rozvany (1977), Rozvany és Mroz (1977)) és kutatócsoportjának nevéhez fűződik. Bevezette a SIMP eljárást - a klasszikus optimalitási feltétel módszerének kontinuum-típusú szerkezetekre való alkalmazása -, ami forradalmasította a topológiaoptimálást. Munkáik (pl. Rozvany (1989, 1997a,b, 2001), Rozvany, Bendsoe és Kirsh (1995), Zhou és Rozvany (1991, 1992/1993), Gáspár, Lógó és Rozvany (2002), Rozvany, Lógó és Kaliszky (2003), Rozvany, Lógó és Querin (2004), Rozvany, Querin, Lógó és Pomezanski (2005), Rozvany, Pomezanski, Querin, Gáspár és Lógó (2005)) a topológiaoptimálás szinte minden kérdésével foglalkoznak (analitikus, numerikus megoldások, támaszoptimálás, „sakk-tábla" minta, stb…).

A sztochasztikus topológiaoptimálás, mint kutatási terület, hiányként jelentkezett és csak az elmúlt néhány évben kezdett a kutatások területén megjelenni. A terület áttekintése megtalálható Lógó és Pintér (2012) munkájában. Itt csak néhány munkát emelünk ki a teljesség igénye nélkül. Az elsősorban matematikai jellegű munkák -Marti és Stöckl (1999, 2000)- tekinthetők a sztochasztikus topológiaoptimálás kezdeti publikációinak. Az ezredforduló után Kharmanda,

Olhoff, Mohamed és Lemaire (2004) munkája adta az áttörést a megbízhatóságelmélet topológiaoptimáláshoz való alkalmazásának. Lógó, Ghaemi és Vásárhelyi (2007) sztochasztikus „compliance” korlátot használt és iterációs formulát dolgozott ki topológiaoptimáláshoz. Dunning és társai a „level-set” módszert terjesztették ki sztochasztikusan megadott erő nagyság és irány esetén. Mechanikai modelljükben a külső potenciális energia –a „compliance”- várható értékét minimálták a szerkezet tervezéshez. Csébfalvi (2013a, b, 2014) foglalkozott rácsos tartók optimálásával. Számos dolgozat kapcsolódik a Guest vezette csoporthoz. Guest és Igusa (2008) topológiaoptimálást végzett bizonytalan teherérték és támadáspont esetén. A terhelési bizonytalanságokat osztott biztonsági tényezők alkalmazásával vették számításba. A diszkretizált szerkezet csomópontjainak geometria bizonytalanságát is figyelembe vették. A modelljük általánosításához különböző feltételekkel egészítették ki a mechanikai feladatokat. Ezek a globális stabilitás-vesztés figyelembe vétele -Jalalpour, Igusa és Guest (2011)-, az anyagi tulajdonságok bizonytalanságainak beépítése -Asadpoure, Guest és Igusa (2010)-. Számítási stratégiát mutattak be, ahol a determinisztikus topológiaoptimálási eljárást kombinálták az általuk kifejlesztett perturbációs technikával (Asadpoure, Tootkaboni és Guest (2011)). Ez utóbbit a geometriai bizonytalanságok becslésére használták. A módszerrel jelentősen csökkentették a számítási időt a Monte-Carlo alapú szimulációs eljáráshoz képest.

A továbbiak a topológiaoptimálási kutatások szerző által elért néhány alapvető eredményét tárgyalják. Az itt bemutatottak továbbfejlesztéséből számos dolgozat, doktori disszertáció született (Ghaemi (2010), Movahedi Rad (2011), Pomezanski (2011)).

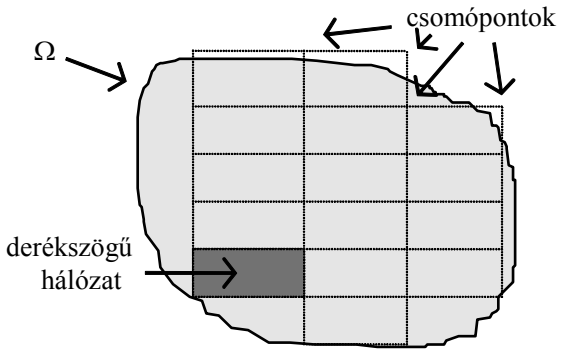
4.2 A topológiaoptimálás feladatai

4.2.1 Az alkalmazott végeselem típusa

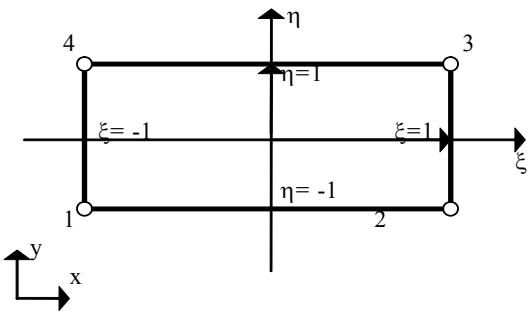
A tervezési tartományt a szokásos módon diszkretizáljuk (4.1 ábra.). Ahogy a bevezetőben említettük a szokásos alkalmazott elemtípus a négycsomópontú, csomópontonként kétszabadságfokú tárcsaelem (4.2 ábra.), mert ennek használata a legalkalmasabb a Prager által definiált „rácsos tartó” típusúi optimális szerkezet kialakulásához (Hegenier és Prager (1969)). Továbbá a szerkezeti megerősítések számításakor (külső, illetve belső) 2D rúdelemet is használtunk. A két típus csomópontonként azonos elmozdulási szabadságfokú, így a számításokban jól kombinálható.

A továbbiakban a diszkretizált szerkezet csomópontjait tárcsa, vagy/és rúdelemekkel kötjük össze. A tárcsa interpolációs függvényei (alakfüggvényei): $N_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$; $N_2(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$; $N_3(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$; $N_4(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$. A szerkezet

megtámasztásaként fix támaszok, lineárisan rugalmas rugók, illetve rugalmas rúdelemek kerültek alkalmazásra.



4.1 ábra. A diszkretizált tervezési tartomány



4.2 ábra. Lokális koordináta-rendszer és a tárcsaelem

4.2.2 A determinisztikus feladat megfogalmazása

Ahogy azt az előző fejezetben jeleztük, itt is az optimalitási feltétel (OC) módszerének négy fő lépését valósítjuk meg. Először a topológiaoptimálási feladat matematikai programozási megfogalmazását adjuk meg rúdelemek használata nélkül. Majd alkalmazva a Lagrange-féle dualitási elvet, felírjuk a Kuhn-Tucker-feltételeket, és ezeket felhasználva tudjuk megadni az optimalitási iterációs képletet. A jobb megértés érdekében, alkalmazva a végeselemes alapfogalmakat, tekintsük az alábbi tervezési esetet:

- Legyen a lineárisan rugalmas anyagú szerkezet (tárcsa) 2D tervezési tartománya ismert. A szerkezetet a végeselemes diszkretizálás szabályi szerint osszuk fel G ($g=1,2,\ldots,G$) alaptartományra. Induláskor az egyes tartományok t_g vastagsága legyen konstans (egységnyi). Minden alaptartományt osszunk fel további E_s (e=1,2,…, E_s) elemre. (Gyakorlatilag ez azt jelenti, hogy a hálózat generáláskor egy elsődleges hálózatot készítünk, majd ezt tovább osztjuk egy másodlagos hálózattal.)
- A terhelés egyparaméteres, statikus, determinisztikus adatokkal leírt.
- A megtámasztások adatai adottak, bizonytalanságok nincsenek.
- Adottak az elmozdulási korlátokat definiáló feltételek – hely ($d=1,2,\ldots,D$) és nagyság -.

Felhasználva az előbbi normált vastagságú szerkezetet, a linearitás miatt a feladat könnyen áttranszformálható egy $t_g = t_{\max}$ vastagságú szerkezet vizsgálatára. Belátható, hogy a terheket $t_g = t_{\max}$ tetszőleges értékkel beszorozva a kapott feladatban a feszültségek, alakváltozások és elmozdulások azonosak lesznek az eredeti normált feladat eredményeivel.

A szerkezet W súlyát az alábbi módon számíthatjuk:

$$W=\sum_{g=1}^{G}\gamma_g A_g t_g \,. \tag{4.1}$$

Itt γ_g a szerkezet anyagának fajsúlya, A_g a g-edik alapelem területe. Az elmozdulási korlát a szerkezet adott pontjában a tényleges elmozdulás ismeretében, amit a tartók statikájában ismert módon (Szabó és Roller (1971)) számíthatunk, felírható:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\mathbf{u}-\Delta_d \le 0;\quad \left(d=1,...,D\right), \tag{4.2.a}$$

ahol $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{d}}$ a *d*-edik helyen és adott irányban (Δ_d) ható, egységnyi nagyságú virtuális erőből számított virtuális csomóponti elmozdulások vektora, **K** a szerkezet merevségi mátrixa, **u** a **P** teherből számított tényleges csomóponti elmozdulások vektora, Δ_d a *d*-edik elmozdulásra előre megadott korlát nagysága.

Abban az esetben, ha egyetlen elmozdulási korlátot (*D=1*) veszünk fel a szerkezet egy megadott pontjában, és a teher is csak itt hat, belátható, hogy (4.2.a) feltétel helyettesíthető a következő kifejezéssel:

$$\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}\mathbf{u}-C \le 0; \tag{4.2.b}$$

ahol C a külső potenciális energia (nemzetközileg használt kifejezéssel „compliance”). A továbbiakban ezt az (4.2.b) egyenlőtlenséget használjuk a topológiaoptimálás matematikai programozási feladatában. (Ezt az ún. (compliance) tervezési módszer elméletét Hegemier és Prager (1969) bizonyította és általános tervezési módszernek javasolta.)

Továbbá adjunk meg minden alaptartomány t_g vastagságára egy alsó, illetve egy felső korlátot (praktikusan $t_{\min}\approx 0$ és $t_{\max}=1$):

$$\begin{aligned} -t_g+t_{\min} &\le 0;\quad \left(g=1,...,G\right),\\ t_g-t_{\max} &\le 0;\quad \left(g=1,...,G\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ezek a korlátok (0 és 1) gyakorlatilag azt szolgálják, hogy a tervezés eredményeként azt adott elem létezik-e vagy nem. Ahhoz, hogy elkerüljük a közbenső vastagsági értékeket a szerkezet súlyát egy módosított képlettel számoljuk. Az új formula $\tilde{W}=\sum_{g=1}^{G}\gamma_g A_g t_g^{\frac{1}{p}}$, ahol p ($p\ge 1$) a büntető paraméter, és szerepe ugyan az, mint a klasszikus OC módszereknél használt büntető paraméteré. Megjegyezzük, hogy $t_g=0$ és $t_g=1$ esetén a módosított képlet is a tényleges súlyt szolgáltatja.

A topológiaoptimálás alapfeladata büntető paraméterrel kifejezett súly-célfüggvény és „compliance”-feltétel alkalmazásával a következőképpen adható meg:

$$\min \tilde{W} = \min \sum_{g=1}^{G} \gamma_g A_g t_g^{\frac{1}{p}} \tag{4.4.a}$$

az alábbi feltételek mellett

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u} - C \le 0; \\ -t_g + t_{\min} \le 0; \quad (g = 1,...,G), \\ t_g - t_{\max} \le 0; \quad (g = 1,...,G). \end{cases} \tag{4.4.b-d}$$

Az (4.4) matematikai programozási feladatban az **u** csomóponti elmozdulások vektora a **Ku = P** lineáris egyenletrendszerből meghatározott **P** teher hatására. Megjegyezzük, hogy az itt bemutatott feladat nemkonvex. A kapott optimális megoldás mérnöki szempontból még elemzésre szorul. A feltételi egyenletek további feltételekkel bővíthetők (stabilitási, feszültségi korlátok), de ez nem témája ennek a dolgozatnak.

4.2.2.1 Lagrange-függvény

Jelöljük az egyes Lagrange-szorzókat a kapcsolódó feltételi egyenleteknek megfelelően ν-vel, α_g-vel és β_g-vel. Továbbá legyenek h_1, h_{2g} és h_{3g} a hiányváltozók jelei. Alkalmazva a Lagrange-féle dualitási eljárást, a (4.4) matematikai programozási feladatból a következő Lagrange-függvény írható fel:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(t_g, \upsilon, \alpha_g, \beta_g, h_1, h_{2g}, h_{3g}\right) = (\sum_{g=1}^{G} \gamma_g A_g t_g^{\frac{1}{p}} + \nu\left(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u} - C + h_1^2\right) + \sum_{g=1}^{G} \alpha_g \left(-t_g + t_{\min} + h_{2g}^2\right) + \\ + \sum_{g=1}^{G} \beta_g \left(t_g - t_{\max} + h_{3g}^2\right)) \end{aligned} \tag{4.5}$$

4.2.2.2 Kuhn-Tucker feltételek

Az ismeretlen vastagság szerint deriválva az (4.5) Lagrange-függvényt, az eredmény:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_g} = \frac{1}{\mathrm{p}} \gamma_g A_g t_g^{\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}} + \nu \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{\mathrm{T}}}{\partial t_g} \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t_g} \mathbf{u} + \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_g} \right) - \alpha_g + \beta_g = 0 \quad (g = 1,...,G). \tag{4.6}$$

A **K** merevségi mátrix szimmetriáját kihasználva az (4.6) egyenlet egyszerűsíthető és a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_g} = \frac{1}{\mathrm{p}} \gamma_g A_g t_g^{\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}} - \nu \sum_{e=1}^{E_s} \mathbf{u}_{ge}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathbf{K}_{\mathrm{ge}}}{\partial t_g} \mathbf{u}_{\mathrm{ge}} - \alpha_g + \beta_g = 0; \ (g = 1,...,G), \tag{4.7.a}$$

ahol a *ge* index a *g*-edik alapelem *e*-edik végeselemét jelenti. Jelentse $\tilde{\mathbf{K}}_{ge}$ az ún. „normált” (($t_g = 1$) az egységnyi vastagsággal számolt) elemi merevségi mátrixot. Így a t_g aktuális vastagsággal kiszámolt $\mathbf{K}_{ge}$ elemi merevségi mátrix az alábbi módon kifejezhető $\mathbf{K}_{ge} = t_g \tilde{\mathbf{K}}_{ge}$ és

fennáll a $\frac{\partial \mathbf{K}_{\mathrm{ge}}}{\partial t_g} = \tilde{\mathbf{K}}_{ge}$ összefüggés. Bevezetve a $\mathrm{R}_g = t_g^2 \sum_{e=1}^{E_s} \mathbf{u}_{ge}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ge} \mathbf{u}_{ge}$ jelölést az (4.7.a) egyenlet átalakítható:

$$\frac{1}{\mathrm{p}} \gamma_g A_g t_g^{\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}} - \nu \frac{\mathrm{R}_g}{t_g^2} - \alpha_g + \beta_g = 0 . \tag{4.7.b}$$

A Lagrange-szorzók szerinti deriváltakból származó egyenletek:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{K} \mathbf{u} - C + h_1^2 = 0 \text{ és } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_1} = 2 \nu h_1 = 0 ; \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_g} = -t_g + t_{\min} + h_{2g}^2 = 0 \text{ és } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{2g}} = 2 \alpha_g h_{2g} = 0 ; \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_g} = t_g - t_{\max} + h_{3g}^2 = 0 \text{ és } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{3g}} = 2 \beta_g h_{3g} = 0 ; \tag{4.10}$$

Az (4.7.b), (4.8), (4.9) és (4.10) egyenletekből az ismeretlen Lagrange-szorzók, a hiányváltozók és az eredeti feladat ismeretlenjei, az egyes alapelemek t_g vastagsága kiszámítható.

4.2.2.3 Az iterációs formula számítása

Ahogy a klasszikus optimalitási feltétel (COC) módszereknél ismert, a ν Lagrange-szorzó kiszámítása előtt az ismeretlen vastagsági értékekre egy tartományt kell megadnunk, amely alapján a kapott vastagsági értékeket ($\mathcal{A}$) aktív, illetve ($\mathcal{P}$) passzív vastagsági értékek halmazába tudjuk sorolni.

Három eset lehetséges:

Ha $t_{\min} < t_g < t_{\max}$ (vagyis a g-edik alapelem "aktív", $g \in \mathcal{A}$) akkor $\alpha_g = \beta_g = 0$ és (4.7.b) felhasználásával a t_g vastagság számítható:

$$t_g = \left(\frac{\nu p R_g}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}} . \tag{4.11}$$

Abban az esetben, ha $t_g = t_{\min}$, akkor a kapcsolódó Lagrange-szorzókra igaz, hogy $\alpha_g \geq 0$, $h_{2g} = 0$. Az (4.7.b) egyenlet magába foglalja a:

$$t_g \geq \left(\frac{\nu p R_g}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}} \tag{4.12}$$

egyenlőtlenséget. Ez azt jelenti, ha a (4.12) alapján számolt t_g vastagság alsó korlátja kisebbre jönne ki mint $t_{\min}$, akkor a (4.12) egyenlőtlenség a $t_g = t_{\min}$ esetén mindig teljesül. Hasonló

módon járunk el a $t_g = t_{\max}$ esetén is. Ebben az esetben is igaz a kapcsolódó Lagrange-szorzókra, hogy $\beta_g \geq 0$, $h_{3g} = 0$ és az (4.7.b) egyenlőtlenség magába foglalja a:

$$t_g \leq \left(\frac{\nu p R_g}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}} \tag{4.13}$$

feltételt. Ez megengedi, hogy a $t_g = t_{\max}$ legyen, amikor a (4.11)–ből számolt t_g vastagság nagyobb min $t_{\max}$. Ha $t_g = t_{\min}$ vagy $t_g = t_{\max}$,akkor a g-edik alapelemet "passzív"-nak nevezzük ($g \in \mathscr{P}$).

A numerikus nehézségek csökkentése érdekében alkalmazzuk azt a feltételt, hogy az ismeretlen alapelem vastagságok ($t_{\min}$) alsó korlátjánál a zérus vastagságok helyett egy véges, de igen kicsi értéket vegyünk fel (pl. $t_{\min} = 10^{-6}$). Ezzel a lépéssel a végeselemek száma a teljes számítás során konstans érték lesz és a rosszul kondícionált merevségi mátrixot elkerülhetjük. Ha az energiakorlát – a compliance-feltétel - aktív (azaz egyenlőségként teljesül) az (4.4) matematikai programozási feladatban, akkor az előző feltételek felhasználásával a következő egyenletet kapjuk:

$$C - \sum_{g=1}^{G} \frac{R_g}{t_g} = 0. \tag{4.14}$$

Mivel mind a passzív ($g \in \mathscr{P}$), mind az aktív elemek $g \in \mathscr{A}$ vastagsága ismert, azaz az előző pont alapján számítható volt, így felírhatjuk a

$$C - \sum_{g \in \mathscr{P}} \frac{R_g}{t_g} = \sum_{g \in \mathscr{A}} \frac{R_g}{t_g} = \sum_{g \in \mathscr{A}} \frac{R_g}{\left(\frac{\nu p R_g}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}} \tag{4.15}$$

egyenlőséget, amelyből a ν Lagrange-szorzó értéke számítható:

$$\nu^{\frac{p}{p+1}} = \frac{\sum_{g \in \mathscr{A}} \left(\frac{A_g \gamma_g}{p} \right)^{\frac{p}{p+1}} R_g^{\frac{1}{p+1}}}{C - \sum_{g \in \mathscr{P}} \frac{R_g}{t_g}} \quad \text{(ahol } \mathscr{A} \neq 0\text{).} \tag{4.16}$$

Az (4.4) matematikai programozási feladat optimális megoldását tehát megkaphatjuk az iterációs eljárás alkalmazásával, ha az (4.11), illetve (4.16) egyenletekből, megfelelő sorrendben, a t_g vastagságokat, illetve a ν Lagrange-szorzó értékét kiszámítjuk.

Könnyen bizonyítható, hogy ha az (4.4) matematikai programozási feladatban a célfüggvényt felcseréljük az energia korláttal, és az ún „compliance" lesz a célfüggvény, a szerkezeti súly pedig feltételként szerepel, akkor az eredeti megfogalmazással egyenértékű feladatot kapunk.

Ennek optimális megoldása, bizonyos feltételek mellett, azonos az (4.4) feladat optimális megoldásával, azaz ugyanazt az optimális topológiát kapjuk. Ez az elsőrendű optimalitási feltételek azonosságából következik.

4.2.2.4 Az alkalmazott SIMP algoritmus

1. Adjunk a t_g ismeretlen vastagságoknak egy maximum és egy minimum értéket, (praktikusan $t_{g\max} = 1$, $t_{g\min} = 10^{-6}$).
2. Állítsuk be a büntető paraméter kezdőértékét (rendszerint p=1) és adjuk meg annak maximális értékét.
3. Adjuk meg a tervezési tartományt, a $t_g = t_{\max}$ kezdő vastagságokat, a terhelést és a támaszokat.
4. Végezzük el a végeselemes számítást.
5. Határozzuk meg az $\mathbf{u}$ csomóponti elmozdulásokat.
6. Adjuk meg a maximális értekét a C (compliance) külső potenciálnak (általában ez 150%-a annak a compliance értéknek, amit akkor kapunk, ha minden elemet $t_g = t_{\max} = 1$ vastagságúnak veszünk, azaz a mérnöki gyakorlatban a $\mathrm{C} = 1.50 * \mathbf{u}^T\mathbf{P}$ képlet alapján számítjuk). *Ezt a lépést csak egyetlen egyszer, a legelső iterációs ciklusban kell elvégezni.*
7. Határozzuk meg minden elemnél a $\overline{C}_e$, és R_g értékeket a t_g vastagsággal meghatározott elmozdulások felhasználásával. Az alkalmazott elemi merevségi mátrix ($\tilde{\mathbf{K}}_e$) a t_g=1 vastagság alapján az eljárás elején egyszer kiszámított érték:
$$\overline{C}_e = \mathbf{u}_e{}^T \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{u}_e .$$
8. Határozzuk meg a ν Lagrange-szorzó értékét:
$$\nu = \frac{\sum_{g\in\mathscr{A}} \left(\frac{A_g\gamma_g}{p}\right) R_g{}^{\frac{1}{p}}}{\left(C - \sum_{g\in\mathscr{P}} \frac{R_g}{t_g}\right)^{\frac{p+1}{p}}} \quad (\text{ ha } \mathscr{A} \neq 0).$$
9. Határozzuk meg az új vastagsági értékeket: $t_{g,new} = \left(\frac{\nu p R_g}{A_g\gamma_g}\right)^{\frac{p}{p+1}}$; ahol $\nu^{\frac{p}{p+1}}$ a 8. lépésben számolt Lagrange-szorzó hatványozott értéke.
10. Csoportosítsuk az elemeket az előzőekben bemutatott „aktív, illetve passzív” szabály alapján, azaz:

    ha $t_{g,new} \leq t_{\min} = 10^{-6}$; akkor $e \in \mathscr{P}$ és $t_{g,new} = t_{\min}$,

ha $t_{g,new} \geq t_{\max} = 1;$ akkor $e \in \mathscr{P}$ és $t_{g,new} = t_{\max}$,

ha $t_{\min} \leq t_{g,new} \leq t_{\max} = 1;$ akkor $e \in \mathscr{A}$ és $t_{g,new} = t_{g,new}$.

11. Amennyiben az „aktív” elemek száma megváltozott, menjünk vissza az 5. lépésre, amelyben már az új vastagsági értékeket használjuk. Ha az „aktív” elemek száma (illetve besorolása) nem változott az előző iterációs lépéshez hasonlítva, akkor ugorjunk a 12. lépésre.
12. Növeljük a *p* büntető paraméter értékét - *p=p+növekmény* (a lépésnagyság dinamikusan szabályozott) - és folytassuk a számítást az 5. lépéstől újra, amíg valamennyi elemünk passzívvá nem válik vagy elértük *p* maximális értékét.

A topológiaoptimálás területén az ún. sakktáblaminta egy olyan optimális megoldás, ami numerikusan lehetséges, de mérnöki szempontból hibás (Díaz és Sigmund (1995), Jog és Haber (1996)). Számos, de igen bonyolult módszer létezik ennek elkerülésére (pl. Zhou és társai (2001), Poulsen (2002), Sigmund és Petersson (1998)). Itt egy egyszerű eljárást alkalmazunk (Gáspár, Lógó, Rozvany (2002)). A módszer lényege az, hogy egy elsődleges hálózat kialakításával, egy azonos vastagsággal rendelkező alapelem csoportot hozunk létre. Majd ezen alapelemeket még további 2x2 elemekre bontjuk és ezek vastagsága minden alapelemre ugyanaz. (Nagyobb felbontás nem szükséges, mert az eredmény lényegesen nem javul.) A sakktáblaminta elkerülése érdekében jelen dolgozatban a dupla hálózást alkalmaztuk a fent említett végeselemes számításnál.

4.3 A determinisztikus topológiaoptimálás bővített feladata

A mérnöki gyakorlat sokszor kíván megoldani olyan tervezési feladatot, hogy a megtámasztások helyét, illetve a belső megerősítések mennyiségét vagy/és minőségét kell meghatároznunk. Ez a feladattípus alkalmas a passzív módon (költségként való figyelembe vétellel) való támaszerő szabályzásra, a súlyelhelyezés miatt a konzolhatás erősítésére, a sajátfrekvencia módosításra. A klasszikus támasz-optimálási feladatok megjelenése a 70-es évek közepére tehető (Rozvany és Mroz (1977)) és az optimalitási feltétel (OC) módszerén alapulnak. A probléma a numerikus nehézségek miatt szinte feltáratlan maradt, és csak néhány éve került ismét a kutatók vizsgálata tárgyává. Buhl (2002), Pomezanski (2004) a támaszoptimálás számítására alkalmas módszert mutatott be. Rozvany, Lógó és Kaliszky (2003) egy „költség”-függvény alkalmazásával oldotta meg a feladatot rúdtámaszok esetén. Itt a célfüggvény a külső, illetve belső megtámasztások egy alkalmas kombinációját fejezi ki az alábbi módon:

$$\min\left(\sum_i k\ell_i |F_i| + \sum_j b\ell_j |R_j|\right); \tag{4.17}$$

ahol *k* és *b* adott konstansok, ℓ_i és ℓ_j az *i*-edik, illetve *j*-edik rúd hossza, F_i és R_j az *i*-edik

belső (a szerkezet két pontját összekötő elem), illetve a *j*-edik külső (a szerkezet egy pontját egy külső ponttal összekötő elem) támaszerő nagysága.

Ebben a pontban az (4.17) célfüggvény egy módosított változata Lógó (2006a) kerül felhasználásra, amelynél feltételeztük, hogy a költség arányos a keletkező erő nagyságával, azaz arányos azzal a térfogattal, amit a kérdéses rúddal megadott támasz képvisel. Ennélfogva az erők helyett a lineárisan rugalmas anyag felhasználása miatt az anyagtörvény szerint a $\sigma_y A_0$ mennyiség került bevezetésre (σ_y egy feszültségi határ mérőszáma, és húzásra, illetve nyomásra az egyszerűség kedvéért azonos pozitív értéket tételezzünk fel, A_0 a keresztmetszeti méret). Az abszolút érték jelek így elhagyhatók és az új típusú célfüggvény az alábbi módon írható (az *i* és *j* indexek a vonatkozó elemet jelölik):

$$\min\left(\sum_i k\ell_i\sigma_{yi}A_i + \sum_j b\ell_j\sigma_{yj}A_j\right). \tag{4.18}$$

A továbbiakban minden támaszt, annak a helyén egy rúdcsoporttal helyettesítünk, oly módon, hogy a rudak minden lehetséges irányban elhelyezésre kerülnek. Továbbá a fix támaszokat is helyettesíthetjük a fentiekben megadott módon. (Ez azt jelenti, hogy egy görgős megtámasztást egységnyi hosszú, de merev rúddal helyettesíthetünk.)

4.3.1 A bővített feladat matematikai programozási megfogalmazása

Tekintsük az 4.2.2 pontban megadott feladatot. A végeselemes diszkretizáláshoz az 4.2.1 pontban megadott elemtípusokat használjuk. Továbbá a feladat megfogalmazásának adatai a következő feltétellel bővülnek:

- a rúdelemek ℓ_i hossza legyen ismert, A_i jelölje az ismeretlen keresztmetszeti méretet. Továbbá a keresztmetszeti méretet fejezzük ki „normált” formában, ahol $A_i = A_0 t_i$. Itt A_0 egy alkalmasan választott keresztmetszeti alapérték (hossz dimenzióval), t_i pedig egy arányossági tényező, de hossz dimenzióval.

Ahogy korábban is jeleztük, most is a szerkezet alapelemeinek (tárcsa és rúdelemek) száma legyen *G*, amely $G = NDisk + NBar$ összefüggés alapján számítható. Itt *NDisk* jelzi a tárcsa-alapelemeinek számát, *NBar* pedig a rúdelemek számát (külső és belső). A teljes szerkezet (*W*) súlya az alábbi módon írható fel:

$$W = \sum_{id=1}^{NDisc} \gamma_{id} A_{id} t_{id} + \sum_{ib=1}^{NBar} \gamma_{ib} A_{ib} t_{ib} \ell_{ib} \,. \tag{4.19.a}$$

Itt γ_{id} és γ_{ib} jelenti a tárcsa, illetve a rudak anyagának fajsúlyát. A_{id} jelöli az *i*-edik tárcsa alapelem területét és t_{id} annak vastagságát. $A_{ib}t_{ib}$ jelölje az *i*-edik rúdelem keresztmetszeti

területét, míg ℓ_{ib} annak hosszát. Az összegzés második tagja mind a külső, mind a belső megtámasztásokat tartalmazza.

Vezessük be az A_g mesterséges változót. Ez a tárcsa elem esetén az előzőekben használt értékkel azonos, azaz a tárcsaelemnél $A_g = A_{id}$. A rúdelemek esetében A_g egy olyan keresztmetszeti területet jelöl, amelyet az $A_g = A_{ib}\ell_{ib}$ összefüggés alapján számolunk és most már terület dimenziójú. Ennélfogva, a $A_{ib}\ell_{ib}t_{ib}$ három tagból álló szorzat az $A_g t_g$ kifejezésre egyszerűsödik az i-edik rúdelemre nézve. Amennyiben a rúdelemek anyagának γ_{ib} fajsúly mérőszámába beleértjük a $k\sigma_y$, illetve a $b\sigma_y$ szorzatokat (a költségeket és a feszültségi korlátokat jelző mennyiségek szorzatát) a teljes szerkezet súlya az (4.1) egyenletben megadott módon a $W = \sum_{g=1}^{G} \gamma_g A_g t_g$ alapján számítható. Az így kialakított feladatnál a szerkezet **K** merevségi mátrixa az egyes tárcsák, illetve rudak elemi merevségi mátrixainak felhasználásával tudjuk összeállítani. Az (4.2) pontban ismertetett elveket követve a bővített topológiaoptimálás feladata „compliance" feltétel esetén formailag az (4.4) matematikai programozási feladattal azonos. Megoldása az ott ismertetett elvek alapján történik. A részletek Lógó (2006a) dolgozatban megtalálhatók.

4.4 Topológiaoptimálás valószínűségi változókkal adott terhek esetén

A valószínűség számítás, mint matematikai elmélet régóta szerepet játszik a mérnöki tervezésben és az azt szabályzó nemzeti szabványokban. A valószínűségi adatokkal megadott tervezés azonban annak komplex volta miatt nem tudott teret nyerni a fontosságának megfelelően, ahol nem elkerülhetetlen, ott ma is a determinisztikus adatokra épülő tervezés játszik elsődleges szerepet. A sztochasztikus számítás elmélete, a megbízhatósági elméletre alapuló optimális tervezés hosszú ideje foglalkoztatja a kutatókat (lásd Marti(2005)), de napjainkban került igazán az optimális tervezéshez kapcsolódó kutatások középpontjába. Ennek további igen fontos bizonyítéka, hogy két fontos nemzetközi folyóirat (ZAMM és a Structural and Multidisciplinary Optimization) is speciális számot adott ki a témakörben 2007-ben és 2008-ban. A kutatási területek igen szerteágazóak (Jendo és Dolinski (2001), Stökl (2003)), de a topológiaoptimálás területén belül nagyszámú tervezési változó alkalmazásával nem publikáltak hatékony eljárást. Jelen alfejezet Lógó (2007d, 2007e, 2012) dolgozatai alapján adja meg ennek lehetőségét. Ebben az alfejezetben az előző, az 4.2 alfejezetben megadott módszert terjesztjük ki valószínűségi változókkal megadott terhek esetére, ahol ismertnek tételezzük fel a terhek eloszlását, várható értékét és szórását. A teher megadáshoz szükséges adatok (nagyság, irány-hatásvonal,

támadáspont) közül az erő nagyságának és támadáspontjának a bizonytalanságait figyelembe vevő számítási eljárásokkal foglalkozunk. Az irány-hatásvonal problémaköre az erő nagyságból adódó bizonytalansággal kezelhető egy egyszerű dekompozíció elvégzésével (Lógó (2007d)). Az általunk kidolgozott eljárás Prékopa (1995) által publikált tételén alapszik, amely szerint egy valószínűségi változók lineáris kombinációjából képzett valószínűséggel korlátozott feltétel, egy vele egyenértékű, konvex determinisztikus kifejezéssé alakítható. Ennek fontossága miatt ezt röviden ismertetjük. A tétel Kataoka (1963) tételére épül.

4.4.1 A feladat matematikai alapjai

Legyenek $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ valószínűségi változók, normális eloszlásúak. Továbbá legyen adott egy valós számokból alkotott $\mathbf{x} \in \Re^n$ vektor, amely kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$\text{Prob}(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n \le 0\ ) \ge q\,; \tag{4.20}$$

Prékopa (1995) megmutatta, hogy az előző (4.20) egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} x_i\mu_i + \Phi^{-1}(q)\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{K}_{\mathrm{ov}}\mathbf{x}} \le 0 \tag{4.21}$$

egyenlőtlenséggel. Itt a ξ_i, $(i = 1, 2, ..., n)$ valószínűségi változók várható értékeit ($E_{xp}(\xi_i)$) jelölje $\mu_i = E_{xp}(\xi_i)$, továbbá $\mathbf{K}_{\mathrm{ov}}$ a $\boldsymbol{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ valószínűségi változókhoz tartozó kovariancia mátrixot (elemei κ_{ij}-vel jelölve), q ($0 \langle q \langle 1$) egy előre adott valószínűségi érték, $\Phi^{-1}(q)$ un. „probit” függvény, azaz a normális eloszlás kommulatív inverz eloszlásfüggvénye. A továbbiakban az erre a tételre alapuló átalakítást alkalmazzuk. Az alfejezetet Lógó (2007d, e) dolgozatai alapján mutatjuk be.

4.4.2 A sztohasztikus topológiaoptimálás matematikai programozási megfogalmazása bizonytalan erőnagyság esetén

Könnyen belátható, hogy (4.2.b) feltétel átírható $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} - C \le 0$ alakba, hiszen $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}$. Így a determinisztikus topológiaoptimálás feltételes szélsőérték feladata más megfogalmazásban a következő módon adható meg:

$$\tilde{W} = \sum_{g=1}^{G} \gamma_g A_g t_g^{\frac{1}{p}} = \min! \tag{4.22.a}$$

az alábbi feltételek mellett

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} - C \le 0; \\ -t_g + t_{\min} \le 0; \quad (g = 1, ..., G), \\ t_g - t_{\max} \le 0; \quad (g = 1, ..., G). \end{cases} \tag{4.22.b-d}$$

Tételezzük fel, hogy $\mathbf{P}^{\mathbf{T}} = \left[P_1, P_2, ..., P_n\right]$ tehervektor zérustól különböző elemei valószínűségi változóként adottak. Az erőmegadás adati közül az erő nagyságát tekintsük valószínűségi változónak, amelyeket normális eloszlásúaknak tételezünk fel. A terhek várható értékét jelöljük $\overline{P}_i = E_{xp}\left(P_i\right)$-vel, $\left(i = 1, ..., n\right)$, míg a kovariancia mátrix $\mathbf{K}_{\mathrm{ov}}$ elemeit $\kappa_{i,j}$-vel; $\left(i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., n;\right)$. A $\overline{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}} = \left[\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n\right]$ terhelés hatására az $\overline{\mathbf{u}}^{\mathbf{T}} = \left[\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\right]$ csomóponti elmozdulásokat a $\mathbf{K}\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{P}}$ lineáris egyenletrendszerből kapjuk. A virtuális erők tételének alkalmazásával az u_i elmozdulás számítható, hiszen $u_i = \mathbf{u}^T\mathbf{K}\tilde{\mathbf{u}}_i$. Itt $\tilde{\mathbf{u}}_i$ az i-edik helyen lévő egységerőből számított elmozdulás vektor. A kapott elmozdulások felhasználásával az $\mathbf{u}^T\mathbf{P} = u_1P_1 + u_2P_2 + ... + u_nP_n$ külső potenciál „compliance" felírható, de (4.20) alkalmazásához ennek linearizálására van szükségünk. Ezt az alábbi módon tehető meg: bontsuk két részre a $\mathbf{P} = \overline{\mathbf{P}} + d\mathbf{P}$ valószínűségi változóként megadott tehervektort. Az elmozdulások és a terhek közötti lineáris kapcsolat miatt:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} \text{ és } \overline{\mathbf{u}} = \mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{P}}. \tag{4.23}$$

Mivel a $\mathbf{K}$ merevségi mátrix szimmetrikus az $\mathbf{u}^T = \mathbf{P}^T\mathbf{K}^{-1}$ és az $\overline{\mathbf{u}}^T = \overline{\mathbf{P}}^T\mathbf{K}^{-1}$ elmozdulások számíthatók és a „sztohasztikus compliance" az alábbi módon írható fel:

$$\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} = \left(\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{dP}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{K}^{-1}\left(\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{dP}\right) = \overline{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{P}} + 2\overline{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}^{-1}\left(\mathbf{dP}\right) + \left(\mathbf{dP}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{K}^{-1}\left(\mathbf{dP}\right). \tag{4.24.a}$$

Elhagyva az utolsó, másodfokú tagot, a „sztohasztikus compliance" számítása az alábbi lineáris képlet alapján közelíthető:

$$\mathbf{u}^T\mathbf{P} \sim \overline{\mathbf{P}}^T\mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{P}} + 2\overline{\mathbf{P}}^T\mathbf{K}^{-1}\left(\mathrm{d}\mathbf{P}\right) = \overline{\mathbf{u}}^T\overline{\mathbf{P}} + 2\overline{\mathbf{u}}^T\left(\mathrm{d}\mathbf{P}\right) = 2\overline{\mathbf{u}}^T\left(\overline{\mathbf{P}} + \mathrm{d}\mathbf{P}\right) - \overline{\mathbf{u}}^T\overline{\mathbf{P}}. \tag{4.24.b}$$

Tehát a „sztohasztikus compliance" egy lehetséges linearizált számított értéke:

$$\mathbf{u}^T\mathbf{P} \sim 2\overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{P} - \overline{\mathbf{u}}^T\overline{\mathbf{P}}. \tag{4.24.c}$$

Adott minimális q valószínűség, ($0 \langle q \langle 1$) és C „compliance" esetén az alábbi feltétel írható fel:

$$\mathrm{Prob}\left(\left(2\left(\overline{u}_1P_1 + \overline{u}_2P_2 + ... + \overline{u}_nP_n\right) - \left(\overline{u}_1\overline{P}_1 + \overline{u}_2\overline{P}_2 + ... + \overline{u}_n\overline{P}_n\right)\right) - C \le 0\right) \ge q. \tag{4.24.d}$$

Bevezetve a P_{n+1} hiányváltozót $E_{xp}(P_{n+1}) = 1$ várható értékkel és zérus kovariancia értékekkel ($\kappa_{n+1,i} = 0$; $\kappa_{i,n+1} = 0$; ($i = 1, ..., n+1$)), a (4.24.d) feltétel az alábbi módon írható:

$$\mathrm{Prob}(2\sum_{i=1}^{n+1} x_iP_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{u}_i\overline{P}_i \le 0\ ) \ge q; \tag{4.25.a}$$

itt $x_i = \overline{u}_i$; $\left(i = 1, ..., n\right)$ és $x_{n+1} = -C/2$. A Prékopa által megadott (4.21) feltétel alapján (4.25.a) az alábbi konvex feltétellé átírható:

$$2\sum_{i=1}^{n+1} x_i \overline{P}_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{u}_i \overline{P}_i + 2\Phi^{-1}(q)\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} \le 0\,; \tag{4.25.b}$$

itt $\Phi^{-1}(q)$ a un. „probit” függvény, $\mathbf{K}_{ov}$ a hiányváltozóhoz kapcsolatos bővített kovariancia mátrix. Belátható, hogy (4.25.b) első része ekvivalens a determinisztikus „compliace” feltétellel:

$$2\sum_{i=1}^{n+1} x_i \overline{f}_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{u}_i \overline{f}_i = \overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \overline{\mathbf{u}} - C \,. \tag{4.26}$$

Így valószínűségi változóként megadott terhelés esetén a bővített „compliance” feltétel az alábbi módon írható fel:

$$\overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \overline{\mathbf{u}} - C + 2\Phi^{-1}(q)\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} \le 0 \,. \tag{4.27}$$

Ennélfogva a valószínűségi változóként megadott terhelés esetén a bővített topológiaoptimálás feladata az alábbi módon írható fel:

$$W = \sum_{g=1}^{G} \gamma_g A_g t_g^{\frac{1}{p}} = \min! \tag{4.28.a}$$

az alábbi feltételek mellett
$$\begin{cases} \overline{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \overline{\mathbf{u}} - C + 2\Phi^{-1}(q)\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} \le 0; \\ -t_g + t_{\min} \le 0; \quad (g = 1,\ldots,G), \\ t_g - t_{\max} \le 0; \quad (g = 1,\ldots,G). \end{cases} \tag{4.28.b-d}$$

A kapott matematikai programozási feladat megoldása az (4.4) feladatnál ismertetett elvek alapján szintén iterációs algoritmus formájában történik. Matematikailag a (4.4) és (4.28) feltételes szélsőérték feladatok azonos tulajdonságúak, hiszen a (4.4.b) feltételt helyettesítő (4.28.b) feltétel konvex (Prékopa(1995)). A feltételi egyenletek további feltételekkel bővíthetők (stabilitási, feszültségi korlát), de ez nem témája ennek a dolgozatnak.

4.4.2.1 Az iterációs képlet számítása

Az (4.2) pontban ismertetett elveket követve a sztohasztikus topológiaoptimálás feladata formailag az (4.4) matematikai programozási feladattal azonos. Megoldása az ott ismertetett elvek alapján történik, azaz az optimalitási feltételekből az iterációs formula levezethető. A részletek Lógó (2007d) dolgozatában megtalálhatók, itt csak a lényeges részeket ismertetjük. Ahogy a klasszikus optimalitási feltétel (COC) módszereknél ismert, a Lagrange-szorzó kiszámítása előtt az ismeretlen vastagsági értékekre egy tartományt kell megadnunk, amely alapján a kapott vastagsági értékeket ($\mathscr{A}$) aktív, illetve ($\mathscr{P}$) passzív vastagsági értékek halmazába tudjuk sorolni.

Három eset lehetséges: ha $t_{\min} < t_g < t_{\max}$ (vagyis a *g*. alapelem “aktív”, $g \in \mathscr{A}$) akkor a t_g

vastagság számított értéke: $t_g = \left(\frac{\nu p\left(R_g + B_g\right)}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}$. (4.29)

Itt az előzőekhez hasonlóan az $R_g = t_g^2 \sum_{e=1}^{E_s} \mathbf{u}_{ge}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ge} \bar{\mathbf{u}}_{ge}$, ahol $\tilde{\mathbf{K}}_{ge}$ az egységnyi vastagságú elemekből ($t_g = 1$)) számított un. „normált” merevségi mátrix. Továbbá a korrelációs értékek miatt egy további tagot eredményez a számítás:

$$B_g = t_g^2 \cdot \Phi^{-1}\left(q\right) \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\kappa_{ij}^2 \bar{u}_j \sum_{e=1}^{E_s} \bar{\mathbf{u}}_{ge}^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{ge}} \tilde{\mathbf{u}}_{gei} + \bar{u}_i \kappa_{ij}^2 \sum_{e=1}^{E_s} \bar{\mathbf{u}}_{ge}^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{ge}} \tilde{\mathbf{u}}_{gej} \right)}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{\mathrm{ov}} \mathbf{x}}}.$$

A következő eset, ha $t_g = t_{\min}$. Ekkor a Kuhn-Tucker feltételekből a következő egyenlőtlenséget kapjuk

$$t_g \geq \left(\frac{\nu p\left(R_g + B_g\right)}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}. \tag{4.30}$$

Ez azt jelenti, ha a (4.30) alapján számolt t_g vastagság alsó korlátja kisebbre jönne ki mint $t_{\min}$, a (4.30) egyenlőtlenség a $t_g = t_{\min}$ esetén mindig teljesül. Végezetül hasonló módon járunk el a $t_g = t_{\max}$ esetén is. Itt a Kuhn-Tucker feltételekből a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$t_g \leq \left(\frac{\nu p\left(R_g + B_g\right)}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}. \tag{4.31}$$

Ez megengedi, hogy a $t_g = t_{\max}$ legyen, amikor a számolt t_g vastagság nagyobb min $t_{\max}$.

Ha $t_g = t_{\min}$ vagy $t_g = t_{\max}$, akkor a *g*-edik alapelemet “passzív”-nak nevezzük ($g \in \mathscr{P}$).

A minimális illetve a maximális vastagsági érték megállapítása az előzőekhez azonos módon történik ($t_{\min} = 10^{-6}$).

Ha az (4.28.b) feltétel aktív, akkor az egyenlőtlenség egyenlőségként teljesül:

$$\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} - C + 2\Phi^{-1}\left(q\right) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{\mathrm{ov}} \mathbf{x}} = 0. \tag{4.32}$$

Mivel a *g*-edik alapelem „determinisztikus compliance” értéke az $\mathrm{R}_g = t_g^2 \sum_{e=1}^{E_s} \bar{\mathbf{u}}_{ge}^T \tilde{\mathrm{K}}_{ge} \bar{\mathrm{u}}_{ge}$ alapján számítódik, a teljes szerkezetre (aktív és passzív elemeket szétválasztva) a következő egyenletet írhatjuk fel.

$$C - 2\Phi^{-1}\left(q\right) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{\mathrm{ov}} \mathbf{x}} = \sum_{g \in \mathscr{P}} \frac{R_g}{t_g} + \sum_{g \in \mathscr{A}} \frac{R_g}{t_g}. \tag{4.33}$$

Ebbe behelyettesítve az aktív elemekre számított vastagsági értékeket

$$C-2\Phi^{-1}(q)\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{K}_{\mathrm{ov}}\mathbf{x}}=\sum_{g\in\mathcal{P}}\frac{R_g}{t_g}+\sum_{g\in\mathcal{A}}\frac{R_g}{\left(\frac{\nu p\left(R_g+B_g\right)}{A_g\gamma_g}\right)^{\frac{p}{p+1}}}. \tag{4.34}$$

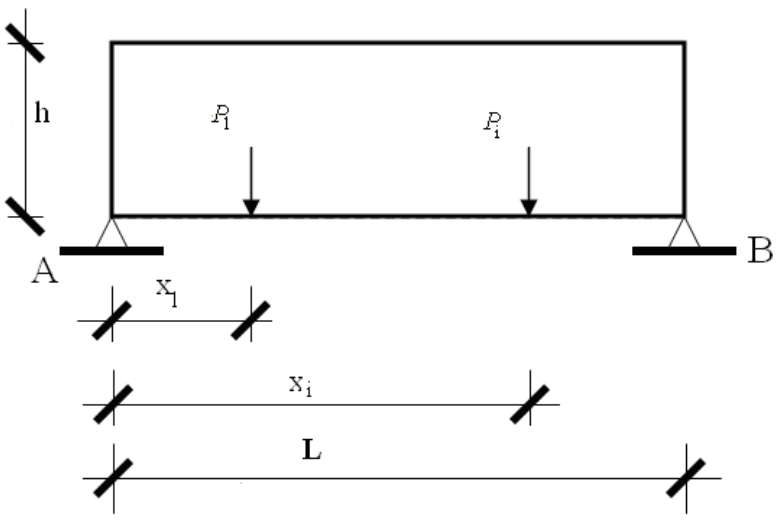
az iterációs lépést szabályzó ν Lagrange szorzó számítható. Értéke

$$\nu=\left(\frac{\sum_{g\in\mathcal{A}}\left(\frac{A_g\gamma_g}{p\left(R_g+B_g\right)}\right)^{\frac{p}{p+1}}R_g}{C-2\Phi^{-1}(q)\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{K}_{\mathrm{ov}}\mathbf{x}}-\sum_{g\in\mathcal{P}}\frac{R_g}{t_g}}\right)^{\frac{p+1}{p}}. \tag{4.35}$$

Ezekután az (4.28) feladat iterációs módszerre alapuló megoldási algoritmusa az előzőekhez hasonlóan történik. Ennek részletes leírása megtalálható Lógó (2007d) dolgozatában.

4.4.3 A sztohasztikus topológiaoptimálás matematikai programozási feladatként való megfogalmazása bizonytalan erőtámadáspont esetén

Legyen a toplógia-optimálás tárgya az 4.3 ábrán látható szerkezet (adott tervezési tartomány, erő és elmozdulási peremfeltételek).



4.3. ábra. Tervezési tartomány és peremfeltételek

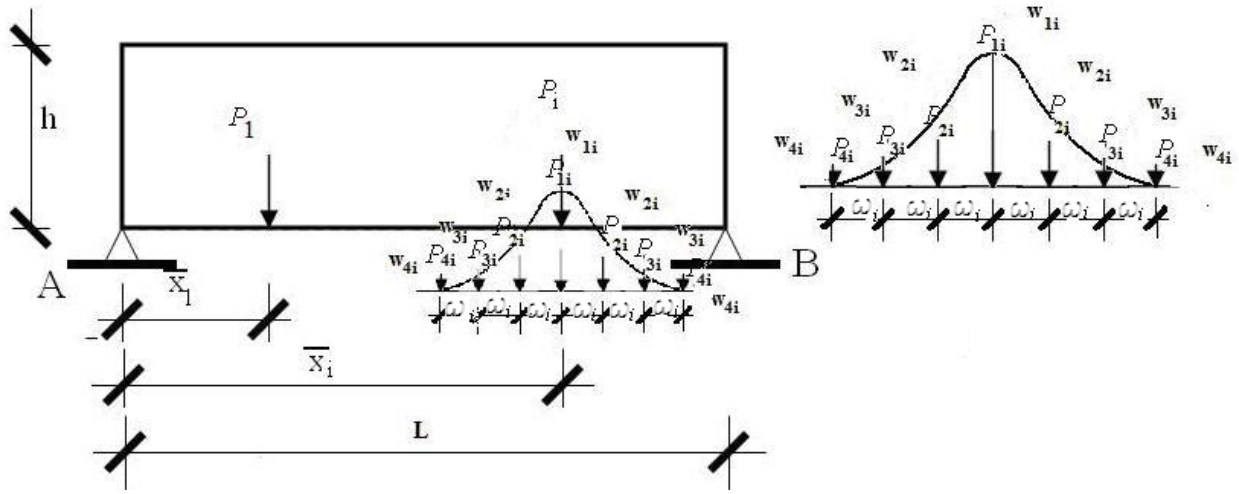
A szerkezet anyaga lineárisan rugalmas és izotróp. A terhelést leíró adatok közül a nagyság és irány determinisztikusan, míg a terhek támadáspontja sztochasztikusan adott. Itt csak azzal az esettel foglalkozunk, ahol a támadásponti bizonytalanságok miatt a végső szerkezeti kialakítás olyan lesz, hogy akár egy másodlagos teherátadó szerkezet beiktatásával is, de az erő mindig tud érintkezni az optimális szerkezettel (a teherátadás mindig lehetséges). Jelöljük $\mathbf{P}^{\mathbf{T}}=\left[P_1,P_2,...,P_i,...,P_n\right]$-vel a tehervektort, ahol az ismert hatásvonalú erőkomponenst

P_i, $(i=1,...,n)$ jelöli. Ennek az erőnek (az *i*-edik erő) a támadáspontját x_i, *(i=1,..,n)* valószínűségi változóval adjuk meg (4.3 ábra), melynek ismertnek tételezzük fel az eloszlás típusát -az egyszerűség kedvéért legyen normális eloszlású-. Továbbá az $\overline{x}_i$, *(i=1,..,n)* jelenti ennek a távolságnak a várható értéke, míg ω_i, *(i=1,..,n)* a szórásáta. Egy egyszerű számítással (vagy adat formájában ismert) meghatározhatjuk azt, hogy a ható terhek milyen valószínűséggel kerülnek egy adott pozícióba. Annak következtében, hogy a terhek támadáspontjai sztochasztikusak a belőlük számolt „compliance" érték is valószínűségi változóként kezelendő és nem számítható könnyen. Így a topológiaoptimálás bonyolultabb, mint determinisztikus esetben volt.

Ahogy az előzőekben (4.4.2 fejezet) is megadtuk a „compliance" –a most használt alakja a külső potenciális energia- az alábbiak szerint számítható „formálisan":

$$\mathbf{u}^T\mathbf{P} = u_1P_1 + u_2P_2 + ... + u_nP_n\,. \tag{4.36}$$

Itt (u_i, $i=1,...,n$) elmozdulás értékek a **Ku = P** lineáris egyenletrendszerből kapott elmozdulás komponens értékek a P_i, $(i=1,...,n)$ erőkomponenseknek megfelelő irányban. A kapott energia érték természetesen probabilisztikus és a továbbiakra tételezzük fel, hogy normális eloszlású - amennyiben nem normális eloszlású lenne, akkor a Prékopa (1988) tétele helyett az eredeti Kataoka (1963)-féle becslést kellene alkalmazni -.



4.4. ábra. Helyettesítő szerkezet tervezési tartománya és peremfeltételei

Alkalmazva a klasszikus topológiaoptimálás alapfeladatában használt „compliance" feltételre vonatkozó korlát sztochasztikus esetre történő kiterjesztését –Lógó (2007d)-, az új típusú tervezési feltétel az alábbiak szerint adhatjuk meg:

$$\mathrm{Prob}\left(\mathbf{u}^T\mathbf{P} - C \le 0\right) \ge q\,. \tag{4.37}$$

Itt $0\langle q\langle 1$ az un. elvárt tervezési biztonsági értéket jelenti és a gyakorlati tervezésben használatos

szerkezeti összeomlási valószínűséggel kapcsolatos (EUROCODE 1990, 1991). Ennek részleteire itt nem térünk ki.

Követve a Prékopa-féle (1995), –vagy az eredeti Kataoka-féle (1963)– felső-korlátra vonatkozó megfogalmazást a (4.37) feltétel a következő konvex kifejezéssel helyettesítő:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \overline{u}_i - C + \Phi^{-1}(q)\sqrt{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathrm{ov}}\mathbf{b}} \le 0 . \tag{4.38}$$

Itt $\overline{u}_i = E_{xp}(u_i),\ (i = 1,...,n)$ az u_i, $(i = 1,...,n)$ elmozdulás értékek várható értékét jelöli a sztochasztikusan megadott $P_i,\ (i = 1,...,n)$ erők alatt és irányában, míg $\mathbf{K}_{\mathrm{ov}}$ ezen elmozdulások kovariancia értékeiből számított kovariancia mátrix. A $\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = [P_1, P_2, ..., P_i, ..., P_n]$ vektort a ható erőkből állítjuk össze. Az $\overline{u}_i = E_{xp}(u_i),\ (i = 1,...,n)$ várható elmozdulásértékek és a hozzájuk kapcsolatos $\kappa_{i,j},\ (i = 1,...,n;\ j = 1,...,n)$ kovariancia értékek a $\mathbf{K}_{\mathrm{ov}}$ kovariancia mátrixban a későbbiekben ismertetett egyszerű parametrikus vizsgálattal vehetők számításba.

Így a klasszikus topológiaoptimálás bizonytalan támadáspontú terhelésre kiterjesztett optimálási feladata a következő formában adható meg (Lógó 2012):

$$W = \sum_{g=1}^{G} \gamma_g A_g t_g^{\frac{1}{p}} = \min! \tag{4.39.a}$$

az alábbi feltételek mellett
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P_i \overline{u}_i - C + \Phi^{-1}(q)\sqrt{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{\mathrm{ov}}\mathbf{b}} \le 0; \\ -t_g + t_{\min} \le 0; \quad (for\ g = 1,...,G), \\ t_g - t_{\max} \le 0; \quad (for\ g = 1,...,G). \end{cases} \tag{4.39.b}$$

Az ilyen típusú mechanikai modell a előzőekben részletezett iterációs eljáráshoz hasonlóan megoldható (Lógó (2007d). A feltételi egyenletek további feltételekkel bővíthetők (stabilitási, feszültségi korlát), de ez nem témája ennek a dolgozatnak.

4.4.3.1 Egyszerűsített parametrikus eljárásra alapuló topológiaoptimálás bizonytalan támadáspontú erők esetén

A következőekben bemutatott mechanikai modellt akkor alkalmazhatjuk, ha a bizonytalan támadáspontokban az adott erők előfordulásainak valószínűsége adott. Tekintsük a 4.3 ábrán megadott optimális tervezési feladatot. Mivel az egyes terhek támadáspontja nem ismert determinisztikusan, egy mechanikailag ekvivalens erőrendszer hozható létre a P_i erő támadáspontjának előre ismert $\overline{x}_i$ várható értéke, mint szerkezeti pont környezetében a parametrikus vizsgálat elvégzéséhez. Felhasználva, hogy ismerjük a támadáspontok eloszlásának

típusait –most normális eloszlás-, várható értékét és szórását egy $P_{ij}, (i=1,2,...,n;\ \ j=1,..,k)$ helyettesítő erőrendszer állítható elő az eredetileg adott P_i erő helyett annak ismert $\overline{x}_i$ várható értékű támadáspontja körül –mint bázispont körül- az ismert nagysággal és irányítással. Jelen esetben ez az egyszerűség kedvéért szimmetrikus elrendezést és hét erőt jelenet a 4.4 ábrának megfelelően a $(P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, P_{i4})$ erőkből komponálva.

Ezen erők a csoporton belül és kívül is függetlenek és mindegyikhez egy előre megadott $w_{ij}, (j=1,..,k=7)$ valószínűségi érték tartozik (ez lehet a gyakorlatban egy tervezési adat). Ennek megfelelően a terheléshez ez a kiegészítő adat tartozik, vagy az előtervezésből számítandó. Tehát a tervezés *i*-edik terhelésre vonatkozó adata ezzel a paraméterkettőzéssel - $w_{ij}, (j=1,..,k=7)$, $(P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, P_{i4})$-lesz teljes, természetesen figyelembe vesszük ezen erők függetlenségét is. Ennek megfelelően az optimális tervezés helyettesítő kiindulási feladata a 4.4 ábrának megfelelő elrendezésű. Az így létrehozott helyettesítő feladat már determinisztikusan megadott feladatok sorozatára bontható a terhelés és elmozdulás számítás szempontjából. Alkalmazva a $P_{ij}\ (i=1,...n;\ j=1,..,k)$ független erőket, mint terhelési eseteket, az *i*-edik teherből számított $\mathbf{u}_{ij}, (j=1,..,k)$ elmozdulás vektora a szerkezetnek a $\mathbf{K}\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{P}_{ij}$ lineáris egyenletrendszerből számítható. Mivel az elsőrendű elméletet alkalmazzuk és az anyag lineárisan rugalmas, az elmozdulások szuperponálhatósága és a reciprocitási tételek (Szabó, Roller (1971)) alkalmazhatók. Felhasználva ezen $\mathbf{u}_{ij}, (j=1,..,k)$ elmozdulás vektorokat és a kapcsolódó tehergyakorisági $w_{ij}\ (i=1,...,n;\ j=1,..,k)$ valószínűségeket az *i*-edik terheléshez kapcsolódó $\mathbf{u}_i$ elmozdulás $\overline{\mathbf{u}}_i$ várható értéke és annak $D^2\left(\overline{\mathbf{u}}_i\right)$ szórásnégyzete az alábbi összefüggésekből számíthatóak:

$$\overline{\mathbf{u}}_i = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{u}_{ij} w_{ij}\ ; \tag{4.40.a}$$

$$D_i^2\left(\overline{\mathbf{u}}_i\right) = \sum_{j=1}^{k} \left(\mathbf{u}_{ij}\right)^2 w_{ij} - \overline{\mathbf{u}}_i^2\ . \tag{4.40.b}$$

Ezek az egyszerűsített parametrikus vizsgálat alapján számított értékek képezik a (4.39) feltételes szélsőérték feladatként megadott mechanikai modell egyes elemeit. Mivel az egyes terhek függetlenek, a $\mathbf{K}_{\mathrm{ov}}$ kovariancia mátrix csak a fődiagonálisban tartalmaz a zérustól különböző értékeket:

$$\mathbf{K}_{\mathrm{ov}} = \left\langle D_1^2\left(\overline{u}_1\right), D_2^2\left(\overline{u}_2\right), ..., D_n^2\left(\overline{u}_n\right)\right\rangle \tag{4.41}$$

Felhasználva, hogy a külső potenciális energia -a „compliance”- értéke az alakváltozási

energiának a kétszerese, a (4.39) topológiaoptimálási feladat átírható az alakváltozási energia korlátozásával megadott általánosított optimális tervezési feladattá felhasználva a Prékopa-tételt:

$$W = \sum_{g=1}^{G} \gamma_g A_g t_g^{\frac{1}{p}} = \min! \tag{4.42.a}$$

az alábbi feltételek mellett
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \bar{\mathbf{u}}_i^T \mathbf{K} \mathbf{u}_i - C + \Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{\mathrm{ov}} \mathbf{b}} \le 0; \\ -t_g + t_{\min} \le 0; \quad (for\ g = 1,...,G), \\ t_g - t_{\max} \le 0; \quad (for\ g = 1,...,G). \end{cases} \tag{4.42.b-d}$$

Matematikailag ez a modell és a korábban bemutatott 4.4 topológioptimálási modellel hasonló, valamennyi konvexitási, deriválhatósági kijelentés -Rozvany (1997), Lógó (2007d)- érvényes. A célfüggvényben -a szerkezet súlya- alkalmazott p „büntető” paraméter alkalmazása az ismeretlen t_g „ground” elemvastagságok jobb mérnöki számításba vételét (van anyag-nincs anyag) teszi lehetővé. Megjegyezzük, ezzel a módszerrel a megoldás unicitása elvész, de a módszer igen széleskörűen alkalmazott a mérnöki gyakorlatban az élet minden területén.

A (4.42) feltételes szélsőérték feladat az előző alfejezetben ismertetett iterációs eljáráshoz (módosított SIMP algoritmus) hasonlóan megoldható. Az iterációs képlet a feltételes szélsőérték feladat elsőrendű optimalitási feltételeiből származtatható. Itt ennek fő lépéseit ismertetetjük. A (4.42)-ből származtatott Lagrange-függvény alapelem t_g vastagsága szerinti parciális deriváltja a következő egyenlettel fejezhető ki:

$$\frac{1}{p}\gamma_g A_g t_g^{\frac{1-p}{p}} + \nu \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i^T}{\partial t_g} \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_i + \mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t_g} \bar{\mathbf{u}}_i + \mathbf{u}_i^T \mathbf{K} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_i}{\partial t_g} \right) + \right.$$
$$\left. + \Phi^{-1}(q) \frac{\partial \left(\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{\mathrm{ov}} \mathbf{b}} \right)}{\partial t_g} \right) - \alpha_g + \beta_g = 0, \qquad (g = 1,...,G). \tag{4.43.a}$$

A $\frac{\partial \left(\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{\mathrm{ov}} \mathbf{b}} \right)}{\partial t_g}$ kifejezést részletezve és átírva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \left(\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{\mathrm{ov}} \mathbf{b}} \right)}{\partial t_g} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{e=1}^{E_s} \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\mathbf{u}_{ije}^T \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{u}_{ie} \right)^2 w_j \right) - \left(\mathbf{u}_{ie}^T \tilde{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{u}}_{ie} \right)^2}{\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{\mathrm{ov}} \mathbf{b}}} = -\frac{VAR_g}{VAR_s}. \tag{4.43.b}$$

Itt VAR_g jelenti a g-edik alapelemhez tartozó compliance” értéket, míg VAR_s a teljes szerkezet „compliance” értékét szimbolizálja, az $\mathbf{u}_{ije}$ a P_{ij} $(i = 1,...n;\ j = 1,..,k)$-ből számított

elmozdulásokat adja az e-dik elemen. Vezessük be az

$$R_g = t_g^2 \sum_{e=1}^{E_s} \mathbf{u}_{\mathrm{ge}}^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{ge}} \bar{\mathbf{u}}_{ge} \quad \text{és} \quad B_g = t_g^2 \Phi^{-1}(q) \frac{VAR_g}{VAR_s} \tag{4.43.c}$$

kifejezéseket. Ekkor a (4.43) egyenletek átírhatók egy egyszerűbb formába:

$$\frac{1}{p} \gamma_g A_g t_g^{\frac{1-p}{p}} - \nu \frac{R_g + B_g}{t_g^2} - \alpha_g + \beta_g = 0\,; \quad (g = 1, \ldots, G). \tag{4.43.d}$$

Annak következtében, hogy a (4.43.d) optimalitási feltételt az előzőekben bemutatott (4.4) klasszikus topológiaoptimálási feladatot $\Phi^{-1}(q)\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{\mathrm{ov}} \mathbf{b}}$ kifejezéssel bővített feltételes szélsőérték feladatából származtattuk, a regularitási feltételek azonosak az eredeti (4.4) topológiaoptimálási feladathoz tartozó regularitási feltételekkel.

Ahogy ismert az optimalitási feltételek módszereiben, két halmazt kell definiálnunk az ismeretlen elemvastagságok tekintetében -($\mathscr{A}$) aktív, illetve ($\mathscr{P}$) passzív elemvastagságok halmazai (Berke, Khot (1974))-.

Amennyiben $t_{\min} < t_g < t_{\max}$ (vagy szavakkal kifejezve, ha egy „ground" elem vastagság az aktív halmazhoz tartozik - $g \in \mathscr{A}$ -) a (4.43.d) feltételből az ezen „ground" elem vastagsága a következő formula alapján számítható:

$$t_g = \left(\frac{\nu p \left(R_g + B_g \right)}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}. \tag{4.44}$$

Az összes többi esetben a $t_g = t_{\min}$ vagy a $t_g = t_{\max}$ vastagságra vonatkozó előírást kell alkalmazni és mindkét esetben az aktuális g „ground" elem az un. „passzív" elemek halmazába tartozik - $g \in \mathscr{P}$ - (Lógó (2005a)).

A numerikus számítás során praktikus okból –elkerülendő a szerkezet merevségi mátrixának rosszul kondícionált volta- a minimális elemvastagságot általában egy nagyon kicsi értékre állítjuk be (pl. $t_{\min} = 10^{-6}$), míg a maximális vastagság a megszokott egységnyi értéket jelenti.

Amennyiben a (4.42) topológiaoptimálási feladatban a (4.42.b) „compliance" feltétel aktív, akkor az egyenlőség formájában teljesül. Azaz

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_i + \Phi^{-1}(q) VAR_s - C = 0\,. \tag{4.45}$$

Ebben az egyenletben a g-edik „ground" elem „compliance" értékét az $R_g = t_g^2 \sum_{e=1}^{E_s} \bar{\mathbf{u}}_{ge}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ge} \bar{\mathbf{u}}_{ge}$ és

$\Phi^{-1}(q) VAR_s = \Phi^{-1}(q) \sqrt{\left(\sum_{g=1}^{G} t_g^2 \sum_{e=1}^{E_s} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left(\mathbf{u}_{ij}^T \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{u}_i \right)^2 w_{ij} - \left(\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{u}}_i \right)^2 \right)}$ kifejezések összegeként

tudjuk számítani. A teljes szerkezet esetében ezeket kell összegezni, ahol az un. „aktív” alapelemek esetében a (4.44) alapján számított vastagságot, míg az un. „passzív” alapelemeknél csak az egységnyi vastagságúakat vesszük figyelembe. Így a (4.45) egyenlet a következő alakba írható:

$$C-\Phi^{-1}(q)\sqrt{\mathbf{b}^T\mathbf{K}_{\mathrm{ov}}\mathbf{b}}=\sum_{g\in\mathscr{P}}\frac{R_g}{t_g}+\sum_{g\in\mathscr{A}}\frac{R_g}{t_g}. \tag{4.46}$$

Behelyettesítve az „aktív” alapelemek vastagságát megadó (4.44) összefüggést a (4.46) egyenlet a következő alakban írható fel:

$$\begin{gathered}C-\sum_{g\in\mathscr{P}}R_g-\Phi^{-1}(q)\sqrt{\left(\sum_{g\in\mathscr{P}}t_g^2\sum_{e=1}^{E_s}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\mathbf{u}_{ij}^T\tilde{\mathbf{K}}_e\mathbf{u}_i\right)^2 w_j-\left(\mathbf{u}_i^T\tilde{\mathbf{K}}_e\bar{\mathbf{u}}_i\right)^2\right)}=\\ \frac{\sum_{g\in\mathscr{A}}R_g+\Phi^{-1}(q)\sqrt{\left(\sum_{g\in\mathscr{A}}t_g^2\sum_{e=1}^{E_s}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\mathbf{u}_{ij}^T\tilde{\mathbf{K}}_e\mathbf{u}_i\right)^2 w_j-\left(\mathbf{u}_i^T\tilde{\mathbf{K}}_e\bar{\mathbf{u}}_i\right)^2\right)}}{\left(\frac{\nu p\left(R_g+B_g\right)}{A_g\gamma_g}\right)^{\frac{p}{p+1}}}=\frac{\sum_{g\in\mathscr{A}}\left(R_g+GVAR\right)}{\left(\frac{\nu p\left(R_g+B_g\right)}{A_g\gamma_g}\right)^{\frac{p}{p+1}}}.\end{gathered} \tag{4.47}$$

Ebből az ismeretlen ν Lagrange-szorzó meghatározható:

$$\nu=\left(\frac{\sum_{g\in\mathscr{A}}\left(\frac{A_g\gamma_g}{p\left(R_g+B_g\right)}\right)^{\frac{p}{p+1}}\left(R_g+GVAR\right)}{C-\sum_{g\in\mathscr{P}}\left(\frac{R_g}{t_g}+\Phi^{-1}(q)\sqrt{\mathbf{b}^T\mathbf{K}_{\mathrm{ov}}\mathbf{b}}\right)}\right)^{\frac{p+1}{p}},\qquad (\text{for } \mathscr{A}\neq 0). \tag{4.48}$$

Ezek után az (4.42) topológiaoptimálási feladat iterációs módszerrel történő megoldási algoritmusa az előzőekhez hasonlóan történik.

4.5 „Michell-típusú” topológiák

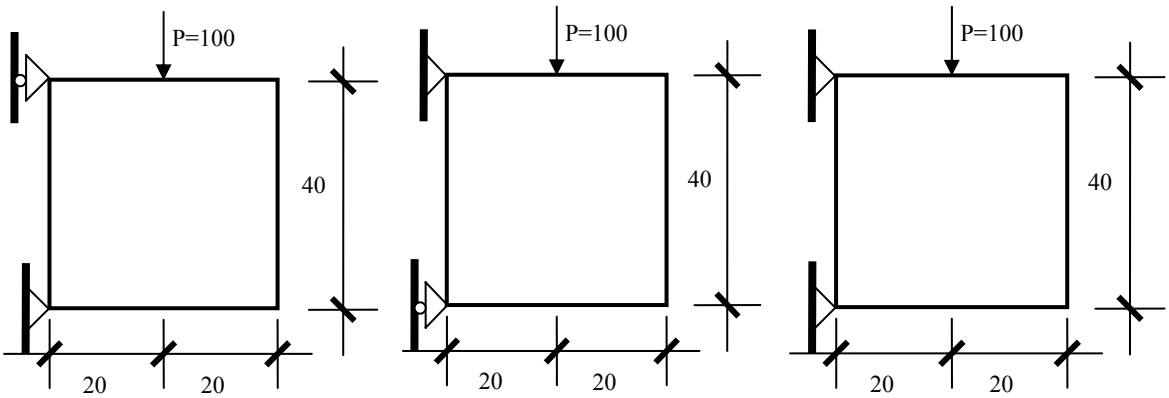
Michell (1904) 110 éve publikálta a legkisebb súlyú rácsos tartók tervezésére vonatkozó dolgozatát, amelyet több kutató mérföldkőnek tart a topológiaoptimálás területén. Az ún. „Michell-elmélet” általánosítása Prager és Rozvany (1977) nevéhez köthető. Az elmúlt évtizedben számos kutató, de leginkább a Rozvany iskolához tartozók mutattak kiemelkedő eredményeket a témakörben (pl. Lewinski, Zhou és Rozvany (1994), Rozvany (1996, 1997), Rozvany, Gollub és Zhou (1997)). A továbbiakban néhány új „Michell-típusú” optimális topológia kiszámítását mutatjuk be az előző pontban bemutatott alap, illetve bővített topológiaoptimálási feladat megoldási algoritmusának felhasználásával. Valamennyi esetben az ún. „rácsos tartó típusú” optimális szerkezet tervezése a cél. A feladatokban a tervezési változók az egyes tárcsaelemek vastagságai. A diszkretizált szerkezet négycsomópontú tárcsa-elemeket és

kétcsomópontú rúdelemeket (ez nem minden példában szerepelt) tartalmazott, a szerkezet anyaga lineárisan rugalmas. A több ezer soros számítógépes program FORTRAN 77 nyelven íródott. Fő modulja a fentiekben bemutatott algoritmusok közül a feladatnak megfelelő eljárást, míg a mellékmodul végeselemes eljárása egy tárcsa és egy keret program összeépítését tartalmazza. A grafikus eredmény megjelenítése is saját programozási munka eredménye. A bemutatott ábrák a jobb ellenőrizhetőség miatt szűrő nélkül készültek, ezért a sakktábla mintázat nincs eltüntetve. A szimmetria miatti feladatméret redukálás sem lett alkalmazva.

Az iterációs algoritmus alkalmazásakor megfigyeltük, hogy lokális és globális jellegű lépésnagyság korlátozása, nagyobb iterációs lépés számot eredményezett, de ezzel nagymértékben elkerülhető volt a szinguláris topológiák kialakulása. A bemutatott feladatokban egy alapelem vastagságának relatív változását max. 5% -ban, míg a teljes térfogati változást max. 10%-ban engedtük meg egy iterációs lépésben.

4.5.1 Csuklós, illetve görgős megtámasztású szerkezetek optimális topológiái

A feladatban három, egyenként 40x40 egység (dimenzió nélküli) méretű szerkezet volt a tervezés tárgya (4.5.a-c ábra).



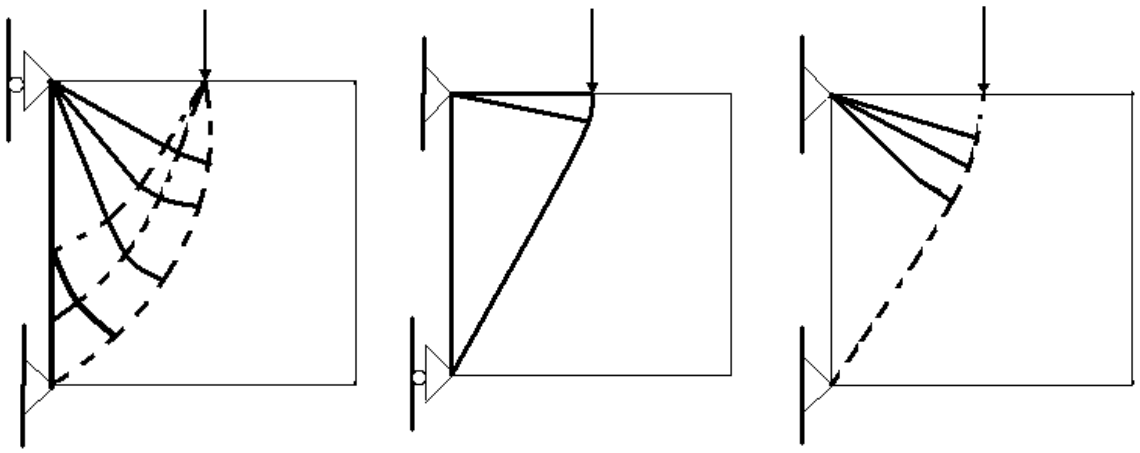
a; b; c;

4.5.a-c ábra. Különböző megtámasztású szerkezetek tervezési tartománya

Az egyes szerkezetek megtámasztási viszonyai az ábrán láthatók. A szerkezeteket 80x80 alapelemre és minden alapelemet 2x2 elemre bontottunk. (A teljes elemszám 25600.) A Poisson-tényező zérus (ez a nemzetközi irodalomban szokásos érték). A teher (100 egység) a tervezési tartomány felső szélének középpontjában hatott. A p büntetőparaméter értékét dinamikusan változtattuk, kiindulási érték p=1. A p paraméter értéke p=1.5-ig $\Delta = 0.1$ lépésközzel növeltük, majd p=2.5-ig (ami a végső érték volt) már $\Delta = 0.25$ volt a növekmény.

A feladatok analitikus megoldásai zérus térfogati arány esetén az 4.6.a-c ábrákon láthatók (Rozvany, Lógó és Querin (2004), Lógó (2005a)). A numerikus megoldáshoz tartozó optimális

topológiákat az 4.7.a-c ábrákon mutattuk be. Látható, hogy a numerikus, illetve az analitikus megoldások jellege egyezőséget mutatnak.



a; b; c;

4.6.a-c ábra. Analitikus megoldások

Az egyes optimális topológiákból jól megfigyelhető a támaszok hatása az optimális topológiára. A feladatok megoldására 950 és 1000 közötti számú iterációra volt szükség.

a; Görgős és csuklós támasz b; Csuklós és görgős támasz c; Csuklós és csuklós támasz

4.7.a-c ábra. Numerikus megoldások

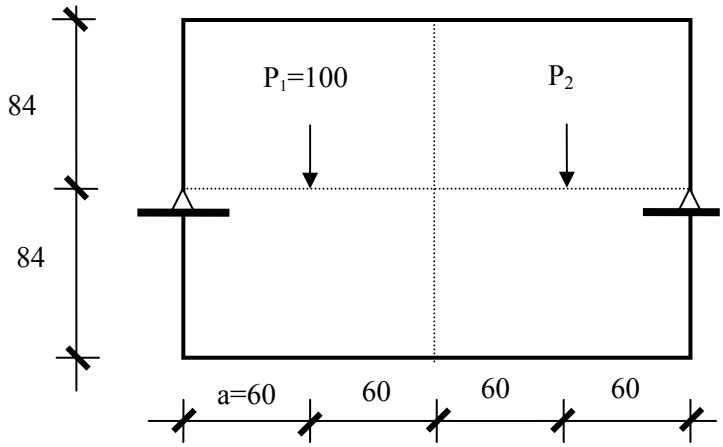
4.5.2 Téglalap alakú tervezési tartomány két koncentrált erővel

A topológiaoptimálási feladatok közül az egyik leggyakrabban vizsgált feladat a téglalap alakú tervezési tartomány, két megtámasztás és két koncentrált erő alkalmazása esetén (4.8. ábra.). A szokásos méretarány (magasság/oldalhossz) 0.5, de ez nem minden esetben elegendő, mivel nem elegendő arány esetén az aktív zóna meghaladná a felső és az alsó él által határolt magasságot. Ennek elkerülése érdekében itt az arány 0.7. A támaszok a bal és jobb oldali él közepén találhatók. Két esetet mutatunk be, melynél az erők nagysága, illetve támadáspontja változik.

4.5.2.1 Aszimmetrikus nagyságú, de szimmetrikus helyzetű koncentrált erők esete

A dimenzió nélküli tervezési tartomány nagysága 168x240 egység (4.8 ábra), amit a

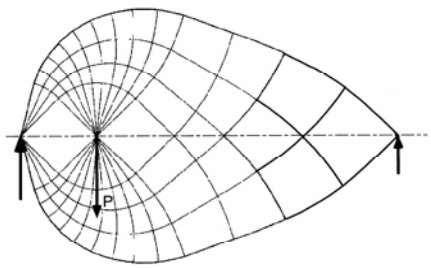
végeselemes diszkretizálás során 84x120 alapelemre és minden alapelemet még 2x2 elemre bontottunk.

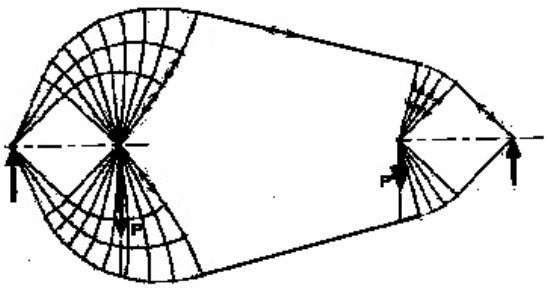


4.8 ábra. Téglalap alakú tervezési tartomány

(A végeselemek száma 40320 a feladatban.) A Poisson-tényező 0. A csuklós megtámasztások a bal, illetve a jobb oldali él közepén találhatók. Az P_1 baloldali koncentrált erőteher 100 egység nagyságú és a tartomány középvonalának egy negyedében van a támadáspontja. Az aszimmetriát a középvonal három negyedében (azaz szimmetrikusan) elhelyezkedő P_2 koncentrált erő változó nagysága okozza. Az P_2 erő praktikusan egy elhanyagolható mértéktől (P_2=0.01 P_1=1 egység) a $P_2 = P_1$=100 egység nagyságig változik. A p büntetőparaméter értékét itt is változtattuk, a kiindulási érték p=1. A p paraméter értéke p=1.5-ig $\Delta = 0.1$ lépésközzel növeltük, majd p=2.5-ig (ami a végső érték volt) már $\Delta = 0.25$ volt a növekmény.

Az analitikus megoldást zérus térfogati arány esetén először Chan (1963,1964) mutatta be P_2=0 esetén ((4.9.a ábra), amit Melchers (2005) később szintén megadott (4.9.b ábra).

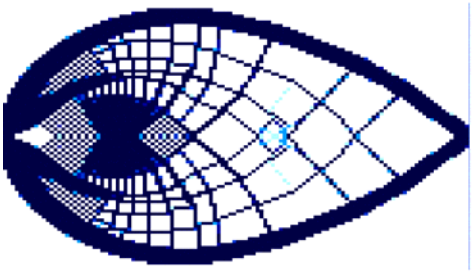
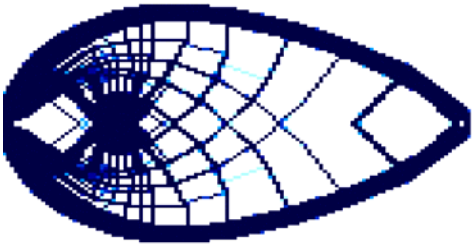
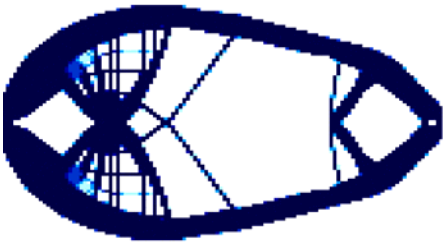
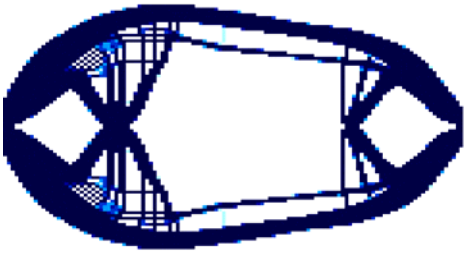
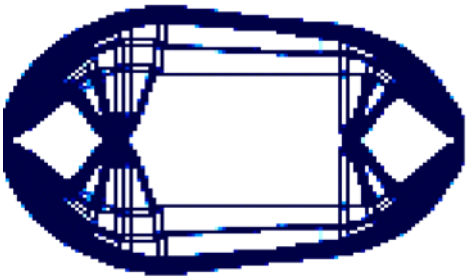
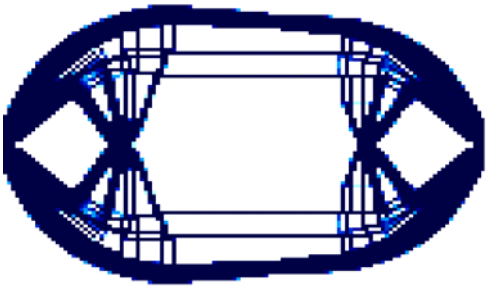
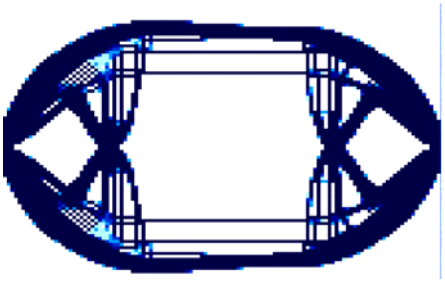
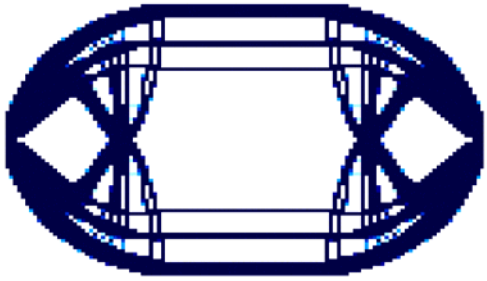




4.9.a ábra. Chan-féle analitikus megoldás 4.9.b ábra. Melchers-féle analitikus megoldás

Az 4.1 táblázat tartalmazza a különböző erőnagyságok esetére kiszámolt optimális topológiák ábráit.

4.1. Táblázat Optimális topológiák változó nagyságú P_2 erő esetén

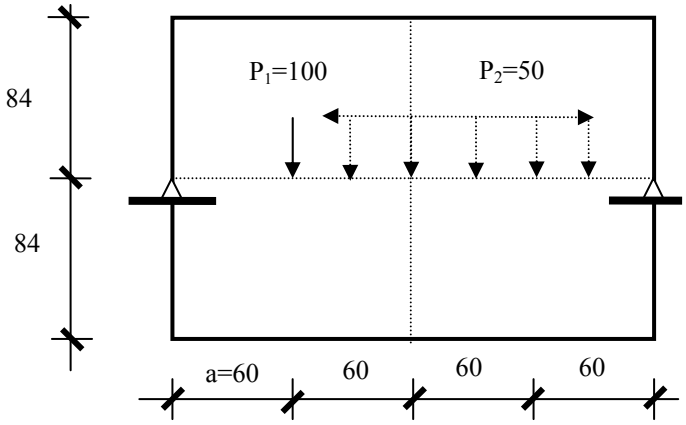
P_2	Optimális topológia	P_2	Optimális topológia
$0.01P_1$		**$0.10P_1$**	
$0.30\ P_1$		**$0.50P_1$**	
$0.70\ P_1$		**$0.80\ P_1$**	
$0.90\ P_1$		**$1.00\ P_1$**	

Megállapítható, hogy a numerikus, illetve az analitikus megoldások jellegükben egyezőséget mutatnak.

4.5.2.2 Aszimmetrikus nagyságú és helyzetű koncentrált erők esete

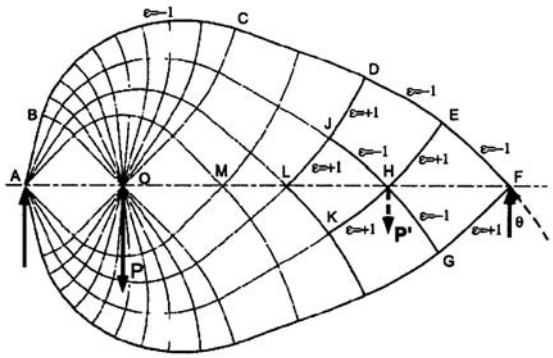
Ebben a pontban az előző feladat módosított változatát mutatjuk be. A tervezési tartomány változatlan - nagysága 168x240 egység (4.10 ábra.), a végeselemes diszkretizálás során 84x120

alapelemre és minden alapelemet még 2x2 elemre bontottunk -. (A végeselemek száma 40320 a feladatban.) A csuklós megtámasztások most is a bal és a jobb oldali él közepén találhatók.



4.10 ábra. Téglalap alakú tervezési tartomány változó támadáspontú $\mathbf{P_2}$ esetén

A Poisson-tényező ismét 0. Az P_1 baloldali koncentrált erőteher 100 egység nagyságú és a támadáspontja a tartomány középvonalának egy negyedében található és mindkét adat változatlan a feladatban. Az P_2 erő 50 egység nagyságú és ez nem változik az egyes feladatokban, míg támadáspontja a szerkezet középvonalán balról haladva a teljes hossz 2/8-tól annak 7/8-ig változik. A *p* büntetőparaméter értékét itt is változtattuk, a kiindulási érték *p*=1.



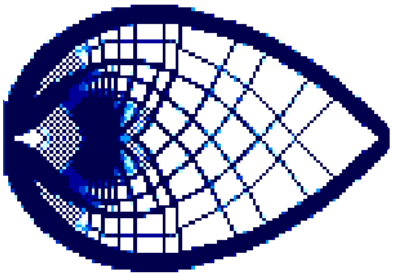
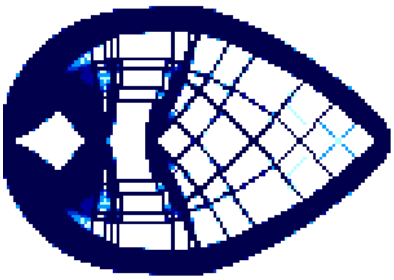
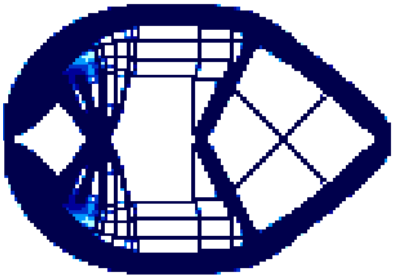
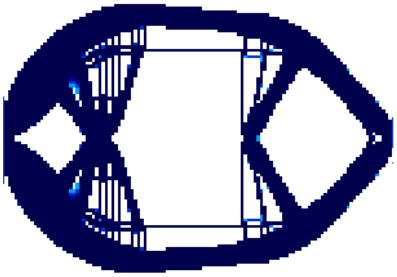
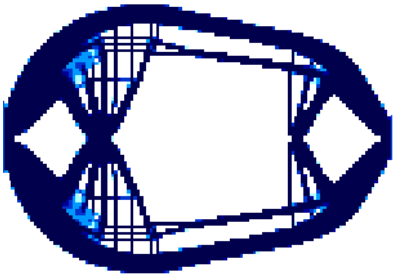
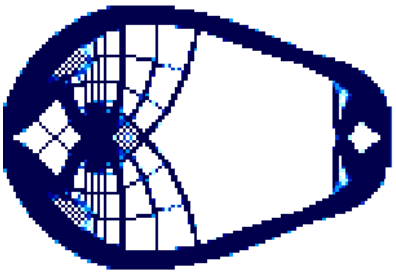
4.11 ábra. Melchers-féle analitikus megoldás.

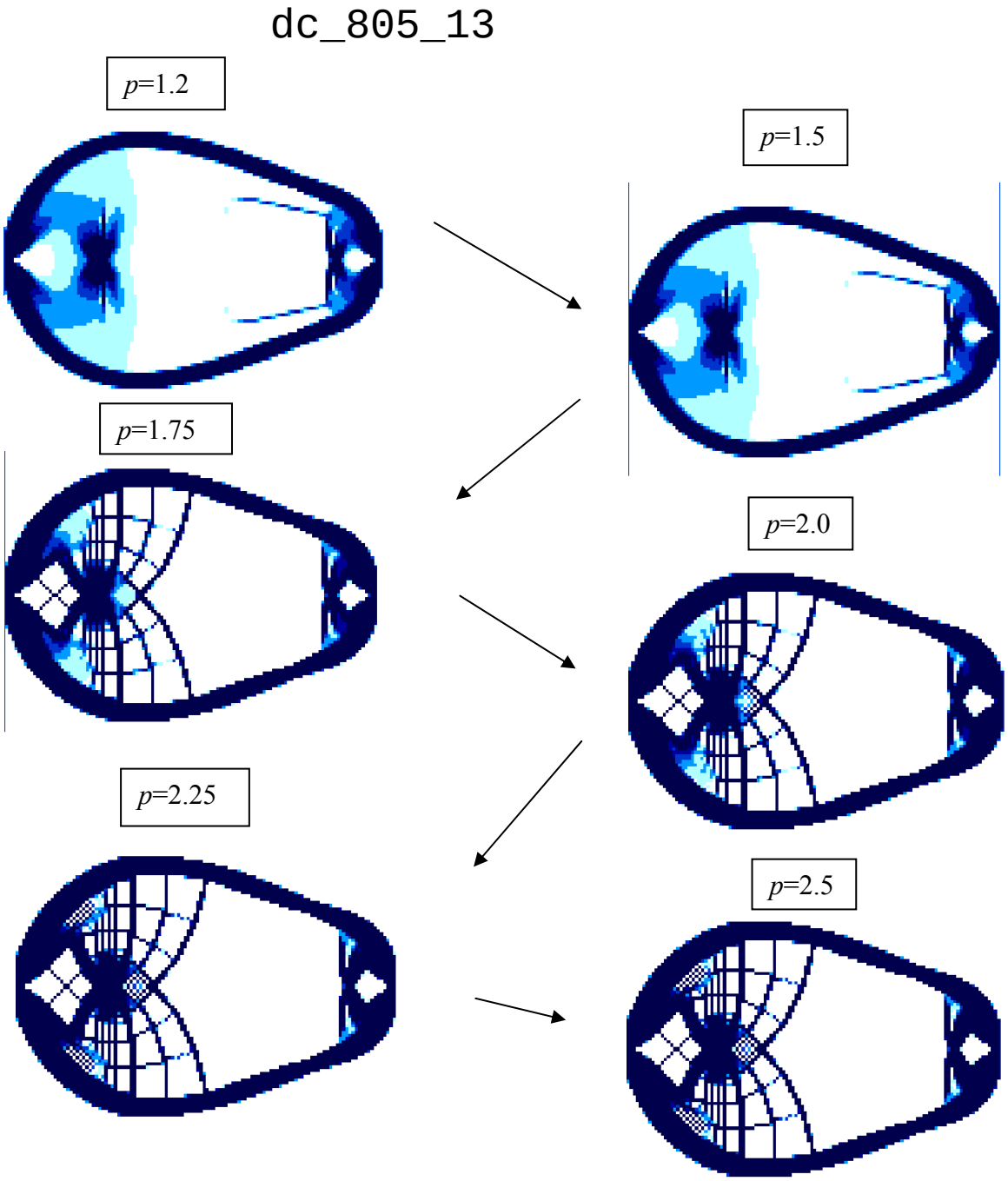
A *p* paraméter értéke *p*=1.5-ig $\Delta = 0.1$ lépésközzel növeltük, majd *p*=2.5-ig (ami a végső érték volt) már $\Delta = 0.25$ volt a növekmény.

Az analitikus megoldást zérus térfogati arány esetén Melchers (2005) alapján az 4.11 ábrán látható. Az 4.2 táblázat tartalmazza a különböző támadáspontok esetére kiszámolt optimális topológiák ábráit. Megállapítható, hogy a numerikus és az analitikus megoldások jellegükben egyezőséget mutatnak. A *p* büntetőparaméter hatását az optimális topológia kialakulására (a 0-1 megoldás elérésére), az egyes fő iterációs ciklusokban kapott megoldások felhasználásával a 4.12 ábrán mutatjuk be. Látható, hogy a kezdő ciklusok után a világos színű közbenső

vastagságok gyorsan eltűnnek és a kívánt fekete-fehér (0-1) megoldás megjelenik.

4.2. Táblázat Optimális topológiák változó támadáspontú P_2 erő esetén

P_2 helye	Optimális topológia	P_2 helye	Optimális topológia
1.0a		1.5a	
2.0a		2.5a	
3.0a		3.5a	

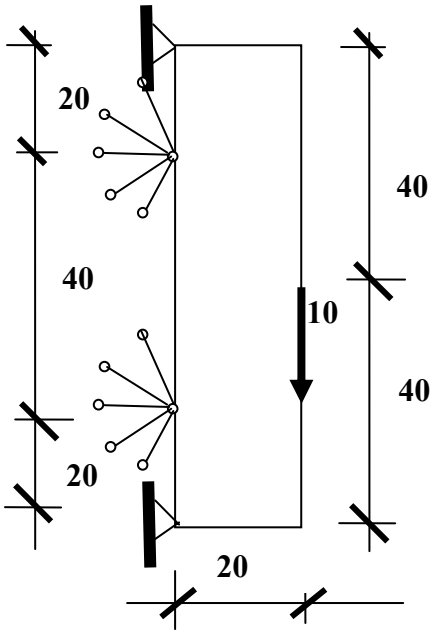


4.12 ábra. A *p* büntetőparaméter hatása a 0-1 típusú optimális topológiára

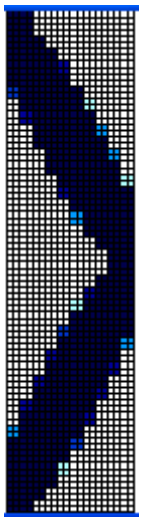
4.5.3 Topológiaoptimálás rudakkal való megtámasztások esetén

Az 4.3 fejezetben ismertetett elvek alkalmazásával tekintsük az 4.13 ábrán látható feladatot. A téglalap alakú tervezési tartomány mérete 20x80 egység. Ezt 10x40 alapelemre és minden alapelemet további 2x2 elemre bontottuk, így 1600 négy csomópontú tárcsaelemet használtunk ennek a résznek a diszkretizálása során. A teher 10 egység nagyságú koncentrált erő és a jobb oldali él közepén hat függőleges irányban. A tervezési tartomány megtámasztásai közül a bal alsó és a felső sarokpontot fix csuklóval támasztjuk meg. Továbbá a bal oldali élen a magasság

¼-ben, illetve ¾ -ben végtelen számú rugalmas anyagú rudat helyeztünk el (ez gyakorlatilag 5 fokonként elhelyezett rudakat jelent). A megtámasztások költsége változik, költség nélküli (ez 1 egység költséget jelent, mivel ez meghagyja a támaszokat), illetve nagy költségű támaszok (10000 egység).



4.13 ábra. Tervezési tartomány a rúdtámaszokkal

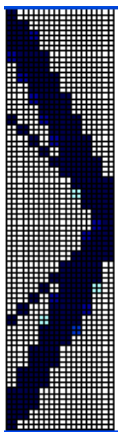


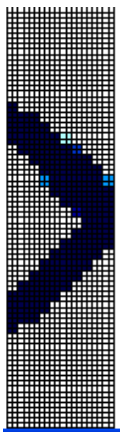
4.14 ábra. Optimális topológia: A eset

Itt három esetet mutatunk be. Ezek: A eset: a rudak költsége magas, míg a fix csuklók költség nélküliek, B eset: minden támasz számításba veendő költséggel rendelkezik, mégpedig a rúdtámaszok költsége háromszorosa a fix támaszok költségének, C eset: minden megtámasztás azonos költséggel bír. Poisson-tényező ismét 0. A p paraméter értékét p=1.5-ig $\Delta = 0.1$ lépésközzel növeltük, majd p=3.0-ig (ami a végső érték volt) már $\Delta = 0.25$ volt a növekmény.

Az egyes esetekhez tartozó optimális topológiák rajzai az 4.14-16 ábrákon láthatók. Megállapíthatjuk, hogy jó egyezőséget mutatnak az előre elvárt képpel. Továbbá jelentős az az eredmény is, hogy a „végtelen” mennyiségű rúdtámasz közül az A esetben nem létezik egy sem, míg a B és C esetekben csak 1-1 rúdtámasz (azaz feladatonként kettő), 135, illetve a 225 fokba eső hatásvonal irányában levők léteznek az optimális megoldásban. Továbbá a C esetben a fix támaszok szükségtelenek az optimális topológiához.

dc_805_13





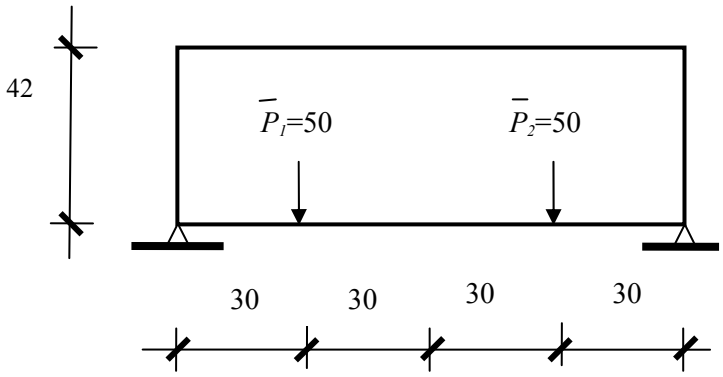
4.15 ábra. Optimális topológia: B eset

4.16 ábra. Optimális topológia: C eset

A feladat továbbfejlesztett változatát, ahol a folytonos tervezési tartomány bizonyos részei előre adottak, más dolgozatban publikáltuk - Rozvany, G.I.N., Querin, O.M., Lógó, J., Pomezanski, V. (2005) -, de ez nem része a jelen dolgozatnak.

4.5.4 Topológiaoptimálás sztochasztikusan adott tehernagyság esetén

A feladatban egy téglalap alakú kéttámaszú tartó topológia optimálását végeztük (4.17 ábra). A szerkezetre $\overline{\mathbf{P}}^T = \left[\overline{P}_1, \overline{P}_2\right]$ két koncentrált erő hat, melyek normális eloszlásúak és várható értékük 50 egység. A tervezési tartományt a végeselemes diszkretizálás során 42x120 alapelemre és minden alapelemet még 2x2 elemre bontottuk. A Poisson-tényező most is zérus. A rugalmassági modulus pedig ismét egységnyi.

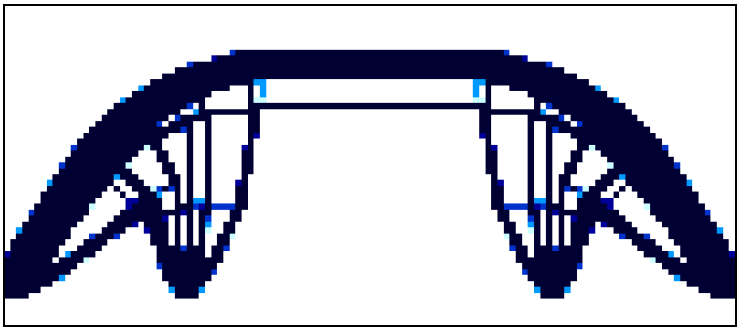


4.17 ábra. A tervezési tartomány és a peremfeltételek.

A feladatot először determinisztikusként oldjuk meg, majd a későbbiekben a kovariancia értékeket változtatjuk.

4.5.4.1 A feladat determinisztikus terheléshez tartozó megoldása

A végeselemek száma 20160. A *p* büntetőparaméter értékét dinamikusan változtattuk, kiindulási érték *p=1*. A *p* paraméter értéke *p*=1.3-ig $\Delta = 0.1$ lépésközzel növeltük, majd *p*=2.5-ig (ami a végső érték volt) már $\Delta = 0.35$ volt a növekmény.

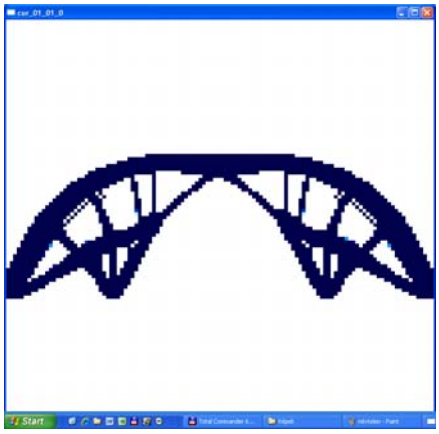


4.18 ábra. Optimális megoldás determinisztikus terhek esetén.

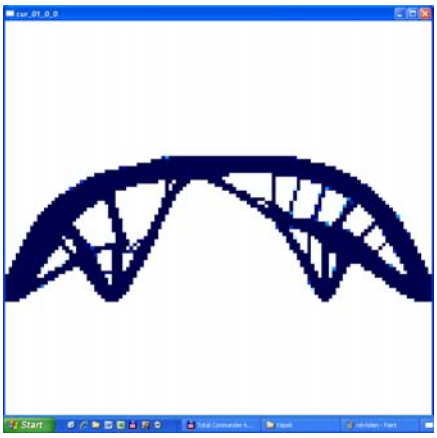
A „compliance” korlátnál C=410000 volt. Az optimális megoldás a 4.18 ábrán látható.

4.5.4.2 Sztochasztikusan adott erőnagyság esetén az optimális topológiák

Az előzőekben ismertetett feltételeknek megfelelően a terheket normális eloszlásúaknak tételezzük fel. A terhek bizonytalanságát az alábbi kovariancia értékekkel fejezzük ki: ($\kappa_{1,1}^2 = 0.1$, $\kappa_{2,2}^2 = 0.1$, $\kappa_{1,2}^2 = 0.0$, $\kappa_{2,1}^2 = 0.0$). A feltételezett minimális valószínűségi érték legyen $q = 0.90$. A „compliance” korlát C=410000. Az iterációt szabályzó feltételek, leállási érték az előző pontban megadott adatokkal történt. Az egyes ábrákon (4.19-4.21) a sztochasztikus topológiaoptimálás eredményei láthatók. A feliratokban a kovariancia értékek a következő sorrendben adottak: $\kappa_{1,1}^2$, $\kappa_{2,2}^2$, $\kappa_{1,2}^2$, $\kappa_{2,1}^2$.

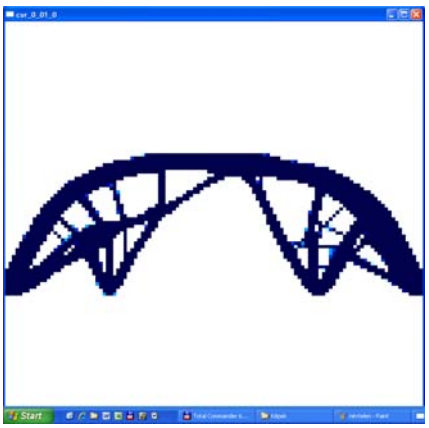


4.19 ábra. Optimális megoldás sztochasztikus terhek esetén. (0.1, 0.1, 0, 0)



4.20 ábra. Optimális megoldás sztochasztikus terhek esetén. (0.1, 0, 0, 0)

dc_805_13

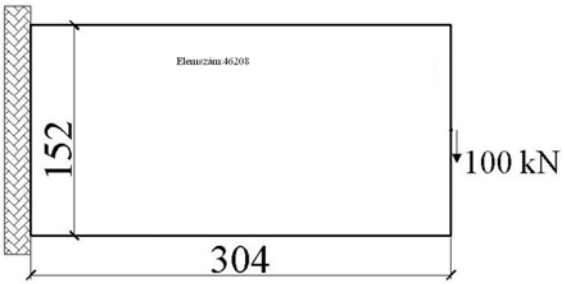


4.21 ábra. Optimális megoldás sztochasztikus terhek esetén (0, 0.1, 0, 0)

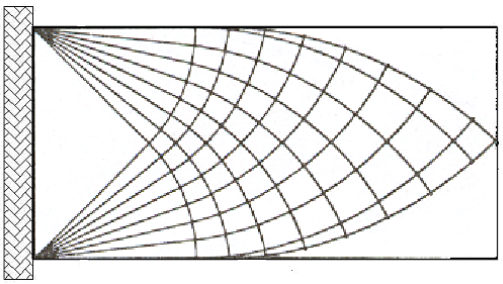
A kapott topológiák megmutatják, hogy a terhelés nagyságának bizonytalansága nagy mértékben befolyásolja az optimális megoldást, ami felhívja a figyelmet a téma fontosságára. A szimmetrikus szerkezet kialakítást a terhek nagyságának szórása befolyásolja. További optimális topológiák más dolgozatainkban Lógó(2007d, e), Lógó, Ghaemi, Movahedi Rad (2008a) találhatók.

4.5.4.3 Sztochasztikusan adott erőtámadáspont esetén az optimális topológiák

A 4.4.3.1 alfejezetben megadott optimalitási kritériumra épülő iterációs eljárás felhasználásával végeztük el a 4.22 ábrán megadott topológiaoptimálási feladatot. A tervezési tartomány mérete a tesztfeladatokban szokásos 2 az 1 arányt követi (304x152 dimenzió nélküli egység). A teljes végeselemszám 46208. A 2x2 alapelem felosztást alkalmaztuk. A Poisson-tényező most is zérus. A rugalmassági modulus pedig ismét egységnyi. A teher nagysága 100 egység. A teher támadáspontjának várható helye a konzol magasságának fele (76 egység magasan). A parametrikus vizsgálathoz szükséges, a támadáspontra vonatkozó szórás 5 egység($\omega = 5$). Az előzőekben ismertetett feltételeknek megfelelően a teher támadáspontjához szükséges eloszlást normális eloszlásúaknak tételezzük fel és ez alapján számítottuk ki az egyes teher előfordulási valószínűségeket (w_{ij}, $(j = 1,..,k = 7)$; (0.0445, 0.1837, 0.7216, 0.1837, 0.0445)). A p büntetőparaméter értékét dinamikusan változtattuk, kiindulási érték $p=1$. A p paraméter értéke p=1.5-ig $\Delta = 0.1$ lépésközzel növeltük, majd p=2.5-ig (ami a végső érték volt) már $\Delta = 0.25$ volt a növekmény. Az iterációt szabályzó érték az előző pontban megadott elvek szerint történt, azaz a vastagsági lépésszabály max. 5%, térfogat változás két iterációs lépés között max. 10% -kal volt szabályozva. A „compliance” korlát C=290000. Az elvárt valószínűségi értéket a $q = 0.70 - 0.85$ tartományban, 0.05 lépésnöveléssel vettük figyelembe.



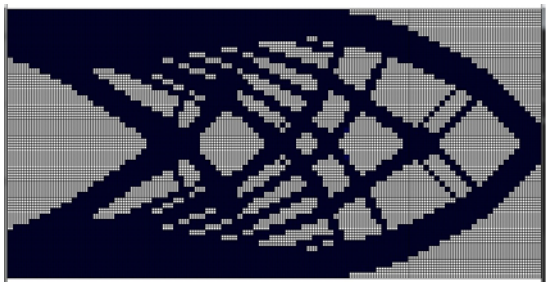
4.22 ábra. A tervezési tartomány és a peremfeltételek



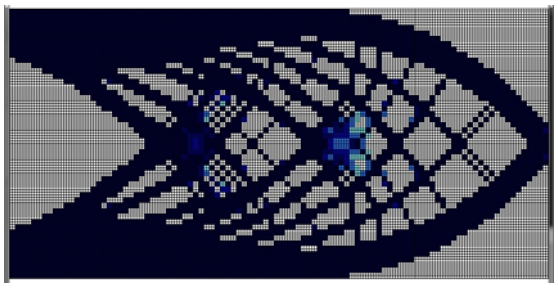
4.23 ábra. A konzol analitikusan meghatározott optimális megoldása determinisztikus esetben

A 4.23 ábrán a feladat determinisztikus támadáspontot figyelembe vevő analitikus megoldása látható.

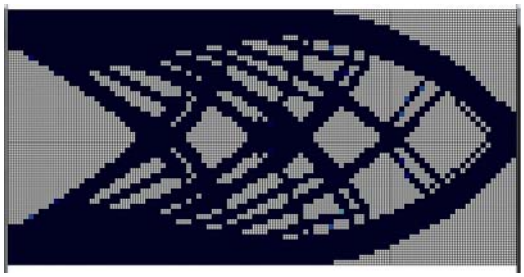
Az egyes ábrákon (4.24-4.27 ábrák) a sztochasztikus topológiaoptimálás eredményei láthatók. Az egyes optimális topológiák közötti különbségek az elvárt valószínűségek - $q = 0.70 - 0.85$ - okozta hatást mutatják meg.



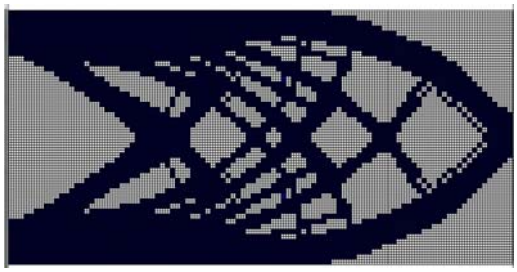
4.24 ábra. A konzol optimális megoldása bizonytalan támadáspont esetén (q=0.70)



4.25 ábra. A konzol optimális megoldása bizonytalan támadáspont esetén (q=0.75)



4.26 ábra. A konzol optimális megoldása bizonytalan támadáspont esetén (q=0.80)



4.27 ábra. A konzol optimális megoldása bizonytalan támadáspont esetén (q=0.85)

A kapott topológiák megmutatják, hogy a terhelés támadáspontjának bizonytalansága befolyásolja az optimális megoldást, ami felhívja a figyelmet a téma fontosságára. Az elvárt valószínűség (q) értékének növelése is jelentős változtatást okoz a szerkezeti kialakításban, mégha a jelleg változatlan tűnik is. További optimális topológiák más dolgozatainkban –Lógó

(2010, 2011, 2013), Lógó és Merczel (2010), Lógó, Merczel és Nagy (2011), Lógó és Pintér (2013)- találhatók.

4.6 Összefoglalás, tézisek

A fejezet a topológiaoptimálás alap, illetve bővített (támasz, sztochasztikus terhek) megfogalmazásának optimalitási feltétel (OC) felírására alapuló módszerét tárgyalta az elmúlt 15 év kutatásai alapján. A bemutatott optimalitási kritériumok és iterációs algoritmusok alkalmasak a Prager-i értelemben rácsos típusú szerkezetek topológiaoptimálására, illetve szerkezeti megerősítések, támaszoptimálási feladatok megoldására determinisztikus és/vagy sztochasztikus terhek esetén. A számítási eljárás hatékonysága mind a CPU idő, mind a memóriaigény tekintetében igen kedvező. Ellentétben más szokásos módszerekhez, nem igényli a mikroszerkezet homogenizációját. Alapvetően a módszer egyszerű, nem szükséges deriváltak használata a megoldáshoz. Az alkalmazható tervezési változók száma többszöröse a hagyományos matematikai programozási feladatoknál előforduló változószámnak. Az alkalmazott dupla végeselemes hálózás alkalmas a sakktáblaminta kiküszöbölésére. A szűrő nélküli megoldásokból látható, hogy a meglévő sakktábla mintázat elhanyagolható mértékű. Numerikus kísérleteinkben olyan új optimális topológiákat kaptunk, amelyek a rendelkezésre álló analitikus megoldásokkal jó egyezőséget mutatnak. A numerikus tapasztalatok alapján a büntető paraméter növelésével egy olyan számítási technikát sikerült megvalósítani, amelynek alkalmazásával nem volt szükség magas büntetőparaméter-értéket használni és a megoldáshoz szükséges iterációszám is kisebb. A numerikus megoldásként kapott optimális topológiák jó kiindulási alapként szolgálnak további kutatásokhoz.

További diagramok és mintapéldák találhatók több dolgozatban: Lógó (2005a, 2006a, 2007d, 2007e), Lógó (1995a,b, 1999), Lógó és Iványi (1996), Lógó és Ghaemi (2001, 2002, 2003, 2005, 2008), Gáspár, Lógó és Rozvany (2002), Rozvany, Lógó és Kaliszky (2003), Rozvany, Lógó és Querin (2004).

A feladatcsoport továbbfejlesztésén (pl. előre definiált résztartomány esete, több tehereset) kutatócsoportunk már dolgozik, és eredményeinket publikáltuk, illetve publikálás alatt vannak, de ezek nem részei jelen dolgozatnak.

Az 4. fejezethez tartozó tézisek a disszertáció mellett a következő dolgozatokban is megtalálhatók: Lógó (2005a, 2006a, 2007d, 2012).

4. TÉZIS

4(a) Topológiaoptimáláshoz determinisztikus tervezési feltételek esetén (beleértve a megerősítést is) az optimalitási feltétel módszerének (OC) alkalmazásával optimalitási

kritériumot adtam az iterációra alapuló, az optimális tervezés támaszoptimálással bővített matematikai programozási feladatának mechanikai modellezéséhez. Az alkalmazott modell, mint topológiaoptimálási feladat, és a kidolgozott számítási eljárás több tízezer tervezési változó alkalmazását teszi lehetővé.

4(b) A numerikus kísérletek alapján megállapítottam, hogy a büntetőparaméter alkalmas változtatása, az iterációs lépésköz szabályozása, valamint az optimáló és a végeselemes eljárás összehangolása egyrészt a helyes topológia „kialakulását", másrészt lényegesen kisebb iterációszámot eredményez.

5. TÉZIS

5(a) Kidolgoztam a topológiaoptimálás optimálási feltétel módszerén alapuló mechanikai módszert valószínűségi változókkal adott tehernagyság esetére. Megadtam az iterációs algoritmus alapját adó, tárcsavastagságot meghatározó optimalitási kritériumot.

5(b) A mechanikai modellt kiterjesztettem a bizonytalan támadáspontú terhekkel való tervezés feladat esetére is. Megmutattam, milyen módosítások szükségesek a tehernagyságot figyelembe vevő tervezési modellhez képest az iterációs algoritmus alapját képző optimalitási kritérium megadásánál.

Irodalom

Saját dolgozatok a disszertáció témájában

1. Gáspár, Zs.; Lógó, J.; Rozvany, G.I.N. (2002): Addenda and Corrigenda to (1) "Aims, Scope, Methods, History and Unified Terminology of Computer-Aided Topology Optimization in Structural Mechanics" and (2) " On Design-Dependent Constraints and Singular Topologies", Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization, 24, (4), 338-342.
2. Ghaemi, M.; Lógó, J. (2005a): Iterative Procedure Based Topology Optimization. Proc. of Finno-Ugric International Conference on Mechanics, Ráckeve, Hungary, May 29-June 4, 2005, 3-4.
3. Ghaemi, M.; Lógó, J. (2005b): Topology optimization by Optimality Criteria Method in Case of Different Boundary Conditions. Proc. of 15th Inter-Institute Seminar, Budapest, April. 22-23, 2005, 30.
4. Hung, J.M.; Lógó, J.; Kikuchi, N. (1991): Mathematical Theory of Optimality Criteria Methods for Large Scale Structural Optimization, University of Michigan, Ann Arbor, NASA Report, 1991.
5. Kaliszky, S.; Lógó, J. (1995a): Elasto-Plastic Analysis and Optimal Design with Limited Plastic Deformations and Displacements, In: Structural and Multidisciplinary Optimization, ed. by N. Olhoff, G.I.N. Rozvany, Pergamon Press, 465-470.
6. Kaliszky, S.; Lógó, J. (1995b): Rugalmas képlékeny tartószerkezetek teherbírás vizsgálata és optimális tervezése korlátozott képlékeny alakváltozások és elmozdulások esetén, VII. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolc, 1995. Aug. 29-31, 49.
7. Kaliszky, S.; Lógó, J. (1997a): Optimal Plastic Limit and Shakedown Design of Bar Structures with Constraints on Plastic Deformation, Engineering Structures, 19, (1), 19-27.
8. Kaliszky, S.; Lógó, J.; Kirchner, I. (1997b): Discrete Optimization of Elasto-Plastic Trusses with Plastic Deformation and Stability Constraints, Proc. of the Second World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, May 26- 30, 1997, Zakopane, Poland, 113-114.
9. Kaliszky, S.; Lógó, J. (1998): Discrete Optimal Design of Elasto-Plastic Trusses Using Compliance and Stability Constraints, Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization, 15, (2-3), 261-268.
10. Kaliszky, S.; Lógó, J. (1999a): Optimal Strengthening of Elasto-Plastic Trusses with Plastic Deformation and Stability Constraints, Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization, 18, (4), 296-299.
11. Kaliszky, S.; Lógó, J. (1999b): Elastoplastic Topology Optimization of Plane Structures with Constraints on Plastic Deformation, Third World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, May 17-21, 1999, Buffalo, USA, 1, 10-11.
12. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2000a): Topology Optimization of Plastic Disks. NATO ARW, In: Topology Optimization of Structures and Composite Continua, (eds.), Rozvany, G.I.N.; Olhoff, N.; Kluwer Academic Publisher, Amsterdam, 359-361.
13. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2000b): Optimal Design of Elasto-plastic Structures. Research Communication, University Publications Budapest, 4, 53-59.
14. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2000c): Plastic Topology Optimization of Plane Structures with Constraints on Plastic Deformation, In: Third World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, (ed.) Bloambaum, C.L.; AIAA/ISSMO/UB Publisher, Buffalo, CD Paper, 9 oldal.
15. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2000d): Plastic Constraints in the Shakedown Analysis and Optimal Design of Bar Structures. Proc. of ECCOMAS 2000, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona, Spain, Sept 11-14, 2000, 164.
16. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2000e): Layout Optimization of Elastoplastic Structures with Plastic Deformation and Displacement Constraints. Proc. of ICTAM2000, Chicago USA, Aug. 28-31. 2000, 52.
17. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2001a): Layout Optimization of Rigid-Plastic Structures under High Intensity Short Time dynamic Pressure. In: 4th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, China, (edS.) Gengdong Cheng et.al.; LIONING ELECTRONIC PRESS, CD paper, ISBN 7-900312-69-2, 5 oldal.
18. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2001b): Layout Optimization of Rigid-Plastic Structures under High Intensity Short Time Dynamic Pressure. 4th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, June 4-8, 2001, Dalian, China, 13-15.
19. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2001c): Bounds On Plastic Displacements in The Optimal Layout Design of

Structures Under Impulsive Loading. Proc. of. 13th Inter-Institute Seminar, Wien, Oct. 26-28, 2001, 21.
20. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2002a): Layout Optimization of Disks by the Use of Rigid-plastic Elements, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 9, 183-189.
21. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2002b): Layout and Shape Optimization of Elastoplastic Disks with Bounds on Deformation and Displacement. Journal of Mechanics of Structures and Machines. 30, (2), 177-191.
22. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2002c): Plastic Behaviour and Stability Constraints in the Shakedown Analysis and Optimal Design of Trusses, Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization, 24, (2), 118-124.
23. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2002d): Layout Optimization by Iterative Method. Proc. of. Conference on Numerical Methods and Computational Mechanics, Miskolc, Hungary, July 15-19, 2002, 128-129.
24. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2003a): Application of Multicriteria Optimization in Layout Optimization of Structures. In: Metal Structures, Design, Fabrication, Economy, (eds.) Jármai, K.; Farkas, J.; Millpress Science Publishers, Rotterdam, The Netherlands, 271-276.
25. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2003b): Statikus és dinamikus terhelésű képlékeny tartók optimális tervezése. Évfordulós kötet Lenkei Péter 70. születésnapjára, (ed.) Bársony J.; Pécsi Egyetem, 53-64.
26. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2003c): Layout Optimization of Rigid-Plastic Structures under High Intensity Short Time Dynamic Pressure. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 31, (2), 131-149.
27. Kaliszky, S. Lógó, J. (2004a): Layout Optimisation of Elasto-plastic Structures Subjected to Normal and Extreme Loads, In: The Seventh International Conference on Computational Structures Technology, (ed.) Topping, B.H.V.; CD paper, Civil-Comp Press. ISBN 0-948749-94-6, 19 oldal.
28. Kaliszky, S. Lógó, J. (2004b): Optimal Design of Elasto-Plastic Structures Subjected to Normal Loads and Earthquake, XXI ICTAM, 15-21 August 2004, Warsaw, Poland, CD paper, 2 oldal.
29. Kaliszky, S. Lógó, J. (2004c): Layout Optimisation of Elasto-plastic Structures Subjected to Normal and Extreme Loads, CST04, 6-10 Sept. 2004, Lisboa, Portugal, 667-668.
30. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2005a): A Unified Model for the Elasto-plastic Optimal Design of Structures with Compliance Constraints. In: The 5th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, (eds.) Cinquini, C.; et al.; CD paper, Italian Press, ISBN 88-88412-27-1, 6 oldal.
31. Kaliszky, S. Lógó, J. (2005b): Optimal Plastic Design of Steel Frames with Elastic Displacement and Plastic Deformation Constraints, Proc. of Finno-Ugric International Conference on Mechanics, Ráckeve, Hungary, May 29-June 4, 2005, 1-2.
32. Kaliszky, S.; Lógó, J. (2006): Optimal Design of Elasto-plastic Structures Subjected to Normal and Extreme Loads, Computers and Structures, 84, (28), 1770-1779.
33. Lógó, J. (1988): Rúdszerkezetek tervezése többcélfüggvényes programozással, Egyetemi doktori értekezés, Budapest.
34. Lógó, J. (1995a): Rácsos tartók topológiaoptimálása matematikai programozás felhasználásával összetett anyagmodell esetén, VII. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolc, 1995. Aug. 29-31, 67.
35. Lógó, J. (1995b): Optimal Layout Design of Truss Structures Made of Hardening Material by Mathematical Programming, Proc. of Seminar on "Computers and the Future of Structural Mechanics", Cracow, Poland, May 14-17, 1995, 66-67.
36. Lógó, J.; Iványi, P. (1995): Topology Optimization of Simple Structures by Mathematical Programming, Proc. of 5th CAD/CAM International Conference and Trade Show, Sept. 12-14, 1995, Budapest, 144-151.
37. Lógó, J. (1999): Egyszerű szerkezetek topológia optimálása matematikai programozással, VIII. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolc, 1999. Aug. 30-szept. 1.; 95.
38. Lógó, J.; Ghaemi, M. (2001): Topology Optimization in Structural Design. Proc. of. 13th Inter-Institute Seminar, Wien, Oct. 26-28, 2001, 22.
39. Lógó, J.; Ghaemi, M. (2002): Topology Optimization by SIMP Method. Proc. of. Conference on Numerical Methods and Computational Mechanics, Miskolc, Hungary, July 15-19, 2002, 165-166.
40. Lógó, J. (2003): Szerkezetek topológiaoptimálása többcélfüggvényes matematikai programozással, IX. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolc, 2003. Aug. 27-29, 67.
41. Lógó, J.; Ghaemi, M. (2003): Paremetrikus vizsgálatok egyszerű szerkezetek topológiájának optimálásakor, IX. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolc, 2003. Aug. 27-29, 68.

42. Lógó, J. (2005a): New Type of Optimal Topologies by Iterative Method, Mechanics Based Design of Structures and Machines, 33, (2), 149-172.
43. Lógó, J. (2006a): Topology Optimization in Case of Different Boundary Conditions by Iterative Method, Journal of Computational and Applied Mechanics, 7, (1), 1-16.
44. Lógó, J. (2007a): Optimal Limit Design of Elasto-Plastic Structures for Time-dependent Loading, Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization, 33(3), 269-273
45. Lógó, J. (2007b): Rugalmas-képlékeny szerkezetek méretezése időtől függő statikus jellegű terhelés esetén parametrikus matematikai programozással, Építés,-Építészettudomány, 35(1), 63-84.
46. Lógó, J. (2007c): Lineárisan rugalmas szerkezetek topológiaoptimálása. Tanulmányok a Bajai III. Béla Gimnázium jubileumára, szerkesztő: Mayer János, Bajapress, Baja, (2007), 237-267.
47. Lógó, J. (2007d): New Type of Optimality Criteria Method in Case of Probabilistic Loading Conditions, Mechanics Based Design of Structures and Machines, 35, (2), 147-162
48. Lógó, J. (2007e): On the Optimal Topologies for Correlated Loading, Proc. of 7th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, May 21-25, 2007, Seoul, Korea, 9 old CD paper, ISBN 978-959384-2-3-98550.
49. Lógó, J. (2012): SIMP type topology optimization procedure considering uncertain load position, Periodica Polytechnica Civil Engineering, 56, 2, pp. 213-220.
50. Lógó, J.; Ghaemi, M.; Vásárhelyi, A. (2007): Stochastic compliance constrained topology optimization based on optimality criteria method, Periodica Polytechnica-Civil Engineering, 51, 2, 5-10.
51. Lógó, J.; Ghaemi M. (2007f): Parametric Study on Optimal Topologies in Case of Probabilistic Loading, in Proceedings of the Eleventh International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, B.H.V. Topping, (Editor), Civil-Comp Press, Stirlingshire, United Kingdom, paper 32, 2007. 19 old CD paper, ISBN 978-959384-2-3-98550.
52. Lógó, J.; Ghaemi, M.; Movahedi Rad, M. (2009): Optimal topologies in case of probabilistic loading: The influence of load correlation, Mechanics Based Design of Structures and Machines, 37, 3, 327-348.
53. Lógó, J.; Merczel, D.B.; Nagy, L. (2011): On Optimal Topologies in Case of Uncertain Load Positions", B.H.V. Topping, Y. Tsompanakis (eds), Proceedings of the Thirteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, Chania, Greece, Edinburgh: Civil-Comp Press, 92, 1-12.
54. Lógó, J., Pintér, E., Merczel, D. B. (2012): Topology Optimization for the case of probabilistic loading. In: B H V Topping (szerk.) Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology. Dubrovnik, Horvátország, 2012.09.04-2012.09.07. Dubrovnik: Civil-Comp Press, Paper 207., 1-11. ISBN: 978-1-90508854
55. Lógó, J., Pintér, E. (2013): Topology Optimization Considering Uncertain Loading Positions and Multiple Load Cases. In: Topping B H V, Iványi P (szerk.) Proceedings of the Fourteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing. Cagliari, Olaszország, 2013.09.03-2013.09.06. Stirlingshire: Civil-Comp Press, Paper 108., 1-19. ISBN: 978-1-905088-57-7
56. Rozvany, G.I.N.; Lógó, J.; Kaliszky, S. (2003): Topology Optimization for Variable External Forces of Nonzero Cost. Proc. of 5th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, May 19-23, 2003, Lido di Jesolo, Venice, Italy, 323-324.
57. Rozvany, G.I.N.; Lógó, J.; Querin, O.M. (2004): New Classes of Analytically Derived Optimal Topologies and their Numerical Confirmation, XXI ICTAM, 15-21 August 2004, Warsaw, Poland, CD paper, 2 oldal.
58. Rozvany, G.I.N.; Pomezanski, V.; Querin, O.M.; Gáspár, Zs.; Lógó, J. (2005): Corner Contact Suppression in Topology Optimization, In: Engineering Design Optimization, Product and Process Improvement, (eds.) Querin, O.M.; Sienz, J.; Gosling, P.D. and Toropov, V.V., University of Leeds Press, LS2 9JT, UK, CD paper, ISBN 0-85316-246-8, 8 oldal.
59. Rozvany, G.I.N.; Querin, O.M.; Lógó, J.; Pomezanski, V. (2006): Exact Analytical Theory of Topology Optimization with Some Pre-existing Members or Elements, Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization, 31, (5), 373-377.

Idegen szerzők dolgozatai a disszertáció témájában

1. Allaire, G.; Kohn, R. (1993): Topology Optimization and Optimal Shape Design Using Homogenization, In: Topology Design of Structures (Proc. NATO ARW, Sesimbra, Portugal 1992), (eds.) Bendsoe, M.P.; Mota Soares, C.A.; Kluwer, Dordrecht, 207-218.
2. Asadpoure, A.; Guest, J.K.; Igusa, T.(2010): Structural topology optimization considering correlated uncertainties in elastic modulus, in Proceedings of the 51st AIAA/ ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 2010-2943.
3. Asadpoure, A.; Tootkaboni, M.; Guest, J.K. (2011): Robust topology optimization of structures with uncertainties in stiffness - Application to truss structures, Computers and Structures, 89(11-12), 1131-1141, 2011.
4. Barta, J. (1957): On the Minimum Weight of Certain Redundant Structures, Acta Tech. Acad. Sci. Hung.; 18, 67-76.
5. Bazaraa, M.S.; Shetty, C.M. (1979):Nonlinear Programming, Theory and Algorithms, John Wiley & Sons, New York.
6. Bendsoe, M.P.; Kikuchi, N. (1988): Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 71, 197-224.
7. Bendsoe, M. P. (1989): Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem, Struct. Optim., 1, 193-202.
8. Bendsoe, M.P.; Mota Soares, C. A.; (eds.) (1993): Topology Design of Structures (Proc. NATO ARW, Sesimbra, Portugal, 1992), Kluwer, Dordrecht.
9. Bendsoe, M.P. (1995): Optimization of Structural Topology, Shape and Material. Springer Verlag. Berlin.
10. Bendsoe, M.P.; Sigmund, O. (1999): Material Interpolation Schemes in Topology Optimization, Arch. Appl. Mech., 69, 635-654.
11. Bendsoe, M. P.; Sigmund, O. (2003): Topology Optimization: Theory, Methods and Applications, Springer Verlag, Berlin.
12. Berke, L. (1970): An Efficient Approach to the Minimum Weight Design of Deflection Limited Design, AFFDL-TM-70-4-FDTR, Wright-Patterson AFB.
13. Berke, L.; Khot, N.S. (1974): Use of Optimality Criteria Methods for Large Scale System, AGARD Lec.70, 1-29.
14. Bhakta, P.C.; Roychandhuri, S. (1988): Optimization in Banach Spaces, Journal of Math. Analysis and Applications, (134), 460-470.
15. Borino, G.; Caddemi, S.; Polizotto, C. (1990): Mathematical Programming Methods for the Evaluation of Dynamic Plastic Deformations, In: Mathematical Programming Methods in Structural Plasticity, (ed): Lloyd Smith, D.; Springer Verlag, Berlin, New York, 349-372.
16. Brandt, A.M. (1984): Criteria and Methods of Structural Optimization, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw.
17. Buhl, T. (2002): Simultaneous Topology Optimization of Structure and Supports, Struct. Multidisc. Optim., 23, 336-346.
18. Capurso, M. (1974): Displacement Bounding Principle in Dynamic Shakedown of Structures Subjected to Cyclic Loads, Int. J. Solids Struct., 10, 77-92.
19. Capurso, M.; Corradi, L.; Maier, G. (1978): Bounds on Deformations and Displacements in Shakedown Theory, In: Proc. Materiaux et Structures sous Chargement Cyclique, Palaiseau, France, 231-244.
20. Chan, H.S.Y. (1963): Optimal Michell Frameworks for Three Parallel Forces, Report No. 167, College of Aeronautics, Cranfield, UK.
21. Chan, H.S.Y. (1964): Tabulation of Some Layouts and Virtual Displacement Fields in the Theory of Michell Optimal Structures, Note No. 161, College of Aeronautics, Cranfield, UK.
22. Cheng, K.T.; Olhoff, N. (1981): An Investigation Concerning Optimal Design of Solid Elastic Plates, Int. J. Solids Struct., 17, 305-323.
23. Chopra, A.K. (1995): Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering, Prentice Hall. Englewood Cliffs, New Jersey.
24. Cilley, F.H. (1900): The Exact Design of Statically Determinate Frameworks and Exposition of its Possibility but Futility, ASME, Trans, 43, 353-407.
25. Cohn, M.Z.; Maier, G.; (eds.) (1979): Engineering Plasticity by Mathematical Programming,

Pergamon Press, New York.
26. Corradi, L. (1977): Deformation Bounding Techniques in Elasto-Plastic Analysis, In: Engineering Plasticity by Mathematical Programming, (eds.) Cohn, M.Z.; Maier, G.; Pergamon Press, New York, 495-516.
27. Csébfalvi, A. (2013): Robust Truss Optimization with Uncertain Load Directions. In: Y Tsompanakis (szerk.) Proc. of 3rd Int. Conf. on Soft Computing Technology in Civil, Structural and Environmental Engineering, Stirling: Civil-Comp Press, Stirling, UK, pp. 1-10., (ISBN:978-1-905088-58-4).
28. Csébfalvi, A. (2013): ANGEL: A simplified hybrid metaheuristic for structural optimization: Chapter 5 In: Dr Helio, J C Barbosa (szerk.) ANT COLONY OPTIMIZATION, Rijeka: In Tech Open Access Publisher, 2013. pp. 107-127. (ISBN:978-953-51-1001-9)
29. Csébfalvi, A. (2014): A new theoretical approach for robust truss optimization with uncertain load directions, Mechanics Based Design of Structures and Machines 42:(2) (megjelenés alatt)
30. De Donato, O. (1977): Fundamentals of Elastic-plastic Analysis, In: Engineering Plasticity by Mathematical Programming, (eds.) Cohn, M.Z.; Maier, G.; Pergamon Press, New York, 325-349.
31. Díaz, A.R.; Sigmund, O. (1995): Checkerboard Patterns in Layout Optimization, Struct. Optim., 10, 40-45.
32. Dulácska, E.; Joó, A.; Kollár, L. P. (2008): Tartószerkezetek tervezése földrengési hatásokra, (Az Eurocode alapján), Akadémiai Kiadó, Budapest.
33. Dulácska E. (2009): Földrengés elleni védelem, egyszerű tervezés az Eurocode 8 alapján, Mérnöki Kamara Nonprofit Kht., Budapest.
34. Dunning, P.D.; Kim, H.A.; Mullineux, G. (2010): Introducing uncertainty in direction of loading for topology optimization, 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Orlando, USA.
35. Dunning, P.D.; Kim, H.A.; Mullineux, G. (2011):Introducing Loading Uncertainty in Topology Optimization", AIAA Journal, 49(4), 760-768.
36. Farkas, Gy. (1902): Theorie der einfachen Ungleichungen, Crelle Journal, 124, 1-27.
37. Farkas, J. (1984): Optimum Design of Metal Structures, Akadémiai Kiadó, Budapest.
38. Farkas, J.; Jármai, K. (1997): Analysis and Optimum Design of Metal Structures, Balkema Publishers, Rotterdam, Brookfield.
39. Farkas, J.; Jármai, K. (2003): Economic Design of Metal Structures, Millpress, Rotterdam.
40. Fleury, C, Geradin, M. (1978): Optimality Criteria and Mathematical Programming in Structural Weight Optimization, Comp. and Struct., 8, 7-17.
41. Fleury, C. (1979): Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming, J. Num. Meth. in Eng., 14. 1761-1783.
42. Fleury, C.; Schmit, L.A. (1980): Primal and Dual Methods in Structural Optimization, J. Strucl. Div. ASCE., 106 (ST5), 1117-1133.
43. Fleury, C.; Braibant, V. (1986): Structural Optimization: a New Dual Method Using Mixed Variables, J. for Num. Meth. in Eng., 23. 409-428.
44. Foulkes, J.D. (1954): The Minimum Design of Structural Frames, Proc. of the Royal Society, Series A.; 223, 482-494.
45. Freitas, J. A. T. (1990): Elasto-plastic Analysis of Skeletal Structures, In: Mathematical Programming Methods in Structural Plasticity, (ed): Lloyd Smith, D.; Springer Verlag, Berlin, New York, 153-169.
46. Gallagher, R.H. (1973): Fully Stressed Design, In: Optimum Structural Design: Theory and Applications, (eds.) Gallagher, R.H.; Zienkiewicz, O.C.; Wiley, London, 19-32.
47. Gellatly, R.A.; Gallagher, R.H. (1966): A procedure for automated minimum weight structural design, Part I, Theoretical Basis, Aeronautical Quart., XVII, 216-230.
48. Gellatly, R.A.; Berke, L. (1971): Optimal Structural Design, AFFDL-TM-70-165.
49. Gellatly, R.A.; Berke, L. (1973): Optimality Criterion Based Algorithms, In: Optimum Structural Design: Theory and Applications, (eds.) Gallagher, R.H.; Zienkiewicz, O.C.;Wiley, London, 33-49.
50. Ghaemi, M. (2010): Topology optimization problems using optimality criteria methods, PhD. Disszetáció, BME, Budapest.
51. Guest, J.K.; Igusa, T. (2008): Structural optimization under uncertain loads and nodal locations", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 198, 116-124.
52. Haftka, R.T.; Gürdal, Z.; Kamat, M.P. (1990): Elements of Structural Optimization, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.

53. Hegenier, G.A.; Prager, W. (1969): On Michell Truss, Int. J. Mech. Sci., 11, 209-215.
54. Heinloo, M.; Kaliszky, S. (1981): Optimal Design of Dynamically Loaded Rigid- Plastic Structures, Application: Thick-Walled Concrete Tube, J. Struct. Mech., 9, (3), 235-251.
55. Horne,M. R. (1954): The Effect of Variable Repeated Loads on Building Structures Designed by the Plastic Theory, Proc. Int. Assoc. Bridge Struc. Engng., 14, 53-74.
56. Jalalpour, M.; Igusa, T. ; Guest, J.K. (2011): Optimal design of trusses with geometric imperfections: Accounting for global instability, International Journal of Solids and Structures, 48(21), 3011-3019, 2011.
57. Jármai, K. (1998): Topology Optimization of Tubular Structures, In: Mechanics and Design of Tubular Structures, (eds.) Jármai, K.; Farkas, J.; CISM Courses and Lectures, Springer Verlag, Wien, 225-284.
58. Jármai, K.; Iványi, M. (2001): Gazdaságos fémszerkezetek analízise és tervezése, Műegyetemi Kiadó, Budapest.
59. Jendo, S.; Dolinski, K. -eds.- (2003) Reliability- Based Design and Optimization. Proc. of AMAS Course – RBO'03, IPPT, Warsaw.
60. Jog, C.S.; Haber, R.B. (1996): Stability of Finite Elements Models for Distributed-parameter Optimization and Topology Design, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng., 130, 203-226.
61. Jones, N. (1985): Recent Progress in Dynamic Plastic Behaviour of Structures, The Shock and Vibration Digest, 17, (2), 33-47.
62. Jones, N. (1989, 1997): Structural Impact, Cambridge University Press, Cambridge.
63. Kaliszky, S. (1970): Approximate Solution for Impulsively Loaded Inelastic Structures and Continua, Int. J. Non-linear Mechanics, 5, 143-158.
64. Kaliszky, S. (1984): Dynamic Plastic Response of Structures, Plasticity Today: Modeling Methods and Applications, (eds.) Sawczuk, A.; Bianchi, G.; Elsevier Science Publishers, London, 788-820.
65. Kaliszky, S. (1989): Plasticity, Theory and Engineering Application, Elsevier Science Publishers, Amsterdam.
66. Kaliszky, S. (1990): Multiconstraint Optimization of Elastoplastic Structures Subject to Static and Dynamic Loads, In: Inelastic Solids and Structures, (eds.) Kleiber, M.; König, J.A., Pineridge Press, Swansea, U.K., 301-310.
67. Kaliszky, S. (1991): Tartószerkezetek optimális tervezése, Építés- Építészettudomány, XXIV, 1-2, 3-32.
68. Kaliszky, S. (1996): Elasto-Plastic Analysis with Limited Plastic Deformations and Displacements, Mechanics of Structures and Machines, 24, (1), 39-50.
69. Kaliszky, S. (1996-97): Képlékenységtan és matematikai programozás, Építés- Építészettudomány, 26, (1-2), 3-30.
70. Kaneko, I.; Maier, G. (1981): Optimum Design of Plastic Structures under Displacements Constraints, Computer Methods Applied Mechanics and Engineering, 27, (3), 369-392.
71. Kataoka, S. (1963): A Stochastic Programming Model, Econometria, 31, (1-2), 181-196.
72. Khot, N.S.; Berke, L.; Venkayya, V.B. (1979): Comparison of Optimality Criteria Algorithms for Minimum Weight Design of Structures, J. AIAA, 17, 182-190.
73. Kirsch, U. (1992): Structural Optimization, Springer Verlag, Berlin, New York.
74. Kohn, R.V.; Strang, G. (1986): Optimal Design and Relaxation of Variational Problems. Comm. Pure Appl. Math., 36, 113-137, 139-182, 353-377.
75. Koiter, W.T. (1960): General Theorems for Elasto-Plastic Solids. In: Progress in Solid Mechanics, (eds.) Sheddon, I.N.; Hills, R.; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 165-221.
76. König, J. A. (1987): Shakedown of Elastic-plastic Structures, Elsevier, Amsterdam.
77. Krawinkler, H.; Seneviratne, G. D. P. K. (1998): Pros and Cons of Pushover Analysis of Seismic Performance Evaluation, Engineering Structures, 20 (4-6), 452-464.
78. Lellep, J. (1984): Optimal Location of Additional Supports for Plastic Cylindrical Shells Subjected to Impulsive Loading, Int. Journal Non-linear Mech., 19, (4), 323-330.
79. Lellep, J.; Puman, E.; Roots, L.; Tungel, E. (2010): Optimization of stepped shells, WSEAS Transactions on Mathematics 9:(2) 130-139.
80. Lepik, Ü.; Mróz, Z. (1977): Optimal Design of Plastic Structures under Impulsive and Dynamic Pressure Loading, Int. J. of Solids and Structures, 13, 657-674.
81. Lange-Hansen, P. (1998): Comparative Study of Upper Bound Methods for the Calculation of

Residual Deformation After Shakedown, Dept. of Struct. Engineering and Materials, Technical University of Denmark, Series R, No. 49.
82. Lansing, W.; Dwyer, W.; Emerton, R.; Ranalli, E. (1971): Application of Fully Stressed Design Procedure to Wing and Empennage Structures, J. of Aircraft, 8, 683-688.
83. Lewinski, T.; Zhou M.; Rozvany, G.I.N. (1994): Extended Exact Least-weight Truss Layouts – Part II: Cantilever with Horizontal Axis of Symmetry, J. Mech. Sci., 36, 399-419.
84. Lloyd Smith, D. (1990): Mathematical Programming Methods in Structural Plasticity, Springer Verlag, Berlin, New York.
85. Lloyd Smith, D.; Sahlit, C. L. (1991): Dynamic Response of Pulse Loaded Structures as a Linear Complementary Problem, Eng. Optimization, 18, 23-41.
86. Maier, G. (1969): Complementary Plastic Work Theorems in Piecewise-linear Elasto-plasticity, Int. J. Solids Struct., 5, 261.
87. Maier, G. (1970): A Matrix Structural Theory of Piecewise Linear Elastoplasticity with Interacting Yield Planes, Meccanica, 5, (1), 55-66.
88. Maier, G.; Gierson, D. E.; Best, M. J. (1977): Mathematical Programming Methods for Deformation Analysis at Plastic Collapse, Computer and Structures, 7, 599-612.
89. Maier, G.; Giacomini, S.; Paterlini, F. (1979): Combined Elasto-plastic and Limit Analysis via Restricted Bases Linear Programming, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 17, 21-48.
90. Marti, K. (2005) Stochastic Optimization Methods. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
91. Marti, K.; Stöckl, G. (1999): Optimal (Topology) Design Under Stochastic Uncertainty, in Safety and Reliability, 2, G.I. Schüller, P. Kafka (eds), Rotterdam-Brookfield, Balkema, 1597-1602.
92. Marti, K.; Stöckl, G. (2000): Topology and Geometry Optimization under Stochastic Uncertainty", in Numerical Methods of Uncertainties, Proceedings EUROMECH 405 Colloquium, P. Level et al. (eds), Presses Universitaires Valenciennes, Valenciennes, 55-63.
93. Martin, J. B.; Symonds, P. S. (1966): Mode Approximations for Impulsively Loaded Rigid- Plastic Structures, J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE 92, EM 5, 43.
94. Martin, J. B.; Ponter, A.R.S. (1972): Bounds on Impulsively Loaded Plastic Structures, J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE 98, EM 1, 107-119.
95. Martin, J. B. (1975): Plasticity: Fundamentals and General Results, MIT Press, Cambridge, MA.
96. Maute, K.; Swartz, S.; Ramm, E. (1998): Adaptive Topology Optimization of Elastoplastic Structures, Structural Optimization, 15, 81-91.
97. Melan E. (1936): Theorie statisch unbestimmter Systeme. In: Prelim. Publ. 2nd Congress, Int. Ass. Bridge Struct. Eng., Berlin, 43-64.
98. Melan, E. (1938): Der Spannungszustand eines Mieses-Henckischen Kontinuums bei veränderlichen Belastung. Sitz. Berg Akad. Wis. Wien Abt. 11/a, 147-173.
99. Melchers, R.E. (2005): On Extending the Range of Michell-like Optimal Topologies Structures, Structural and Multidisc. Optimization, 29, 85-92.
100. Michell, A.G.M. (1904): The Limits of Economy of Material in Frames Structures. Phil. Mag., 8, 589-597.
101. Movahedi Rad, M. (2011): Extended Optimization Methods in Structural Plasticity with Uncertainties, PhD. Disszetáció, BME, Budapest.
102. Neal, B. G. (1977): The Plastic Methods of Structural Analysis, Chapman and Hall, London.
103. V. Pareto, V. (1896): Cours d'Economie Politique. Droz, Geneva.
104. Perrone, N. (1965): On a Simplified Method for Solving Impulsively Loaded Structures of Rate Sensitive Materials, J. Appl. Mech., 32, 489-492.
105. Polizzotto, C. (1982): A Unified Treatment of Shakedown Theory and Related Bounding Techniques, Solid. Mech. Arch., 7, 19-75.
106. Pomezanski, W. (2012):Tartószerkezetek topológiai optimálása: diszkretizációs hibák kiküszöbölése, PhD. Disszetáció, BME, Budapest.
107. Ponter, A.R.S. (1972): An Upperbound on the Small Displacements of Elastic, Perfectly Plastic Structures, Journal of Applied Mechanics, 39, 959-963.
108. Ponter, A.R.S. (1975): General Displacement and Work Bounds for Dynamically Loaded Bodies, J. Mech. Phys. Solids, 23, 151-163.
109. Pomezanski, V. (2004): Changing the Connections of Structural Elements During an Optimization Process, JCAM, 5, (1), 117–127.

110. Poulsen, T. A. (2002): A Simple Scheme to Prevent Checkerboard Patterns and One Node Connected Hinges in Topology Optimization, Struct. Multidisc. Optim., 24, 396-399.
111. Prager, W.; Shield, R.T. (1968): Optimal Design of Multi-purpose Structures, Int. J. Solids Struct., 4, (4), 469-475.
112. Prager, W.; Taylor, J.E. (1968): Problems of Optimal Structural Design, J. Appl. Mech. ASME, 35, 122-106.
113. Prager, W. (1970): Optimization of Structural Design, J. Optimization Theory and Application, 6, (1), 1-21.
114. Prager, W. (1972): Condition for Optimality, Comp. and Struct., 2, 833-840.
115. Prager, W. (1974): Introduction to Structural Optimization, CISM Courses and Lectures Notes 212, Springer Verlag, Wien, New York.
116. Prager, W.; Rozvany, G.I.N. (1977): Optimal Layout of Grillages. J. Struct. Mech., 5, 1-18.
117. Prékopa, A. (1995) Stochastic Programming. Akadémia Kiadó and Kluwer, Budapest, Dordrecht.
118. Rossow, M.P.; Taylor, J.E. (1973): A Finite Element Method for the Optimal Design of Variable Thickness Sheets. J. AIAA, 11, 1566-1569.
119. Rozvany, G.I.N. (1976): Optimal Design of Flexural Systems: Beams, Grillages, Slabs, Plates and Shells, Pergamon Press, Oxford, New York, Sydney, Toronto.
120. Rozvany, G.I.N, Mroz, Z. (1977): Column Design: Optimization of Support Conditions and Segmentation, J. Struct. Mech., 5, 279-290.
121. Rozvany, G.I.N. (1989): Structural Design via Optimality Criteria, Kluwer Academic Publisher, Dordrect.
122. Rozvany, G.I.N. (1992): Shape and Layout Optimization of Structural Systems and Optimality Criteria Methods. CISM Courses and Lectures, No. 325, Springer Verlag, Wien.
123. Rozvany, G.I.N.; Bendsoe, M.P.; Kirsh, U. (1995): Layout Optimization of Structures, Appl. Mech. Reviews, 48, (2), 41-118.
124. Rozvany, G.I.N. (1996): Some Shortcomings in Michell's Truss Theory, Struct. Optim., 12, 244-250.
125. Rozvany, G.I.N. (1997a): Partial Relaxation of the Orthogonality Requirement for Classical Michell Structures, Struct. Optim., 13, 271-274.
126. Rozvany, G.I.N. (1997b): Topology Optimization in Structural Mechanics. CISM Courses and Lectures, No. 374, Springer Verlag, Wien.
127. Rozvany, G.I.N.; Gollub, W.; Zhou, M. (1997): Exact Michell Trusses for Various Combinations of Line Supports, Part II, Struct. Optim., 14, 138-149.
128. Rozvany, G.I.N. (2001): Stress Ratio and Compliance Based Methods in Topology Optimization - a Critical Review, Structural and Multidisc. Optimization, 21, 109-119.
129. Save, M.; Prager, W. (1985): Structural Optimization-Optimality Criteria, Plenum Press, New York, London.
130. Sawczuk, A. (1989): Mechanics and Plasticity of Structures, Ellis Horwood Ltd., Chichester.
131. Schittkowski, K. (1985/86): NLPQL: A FORTRAN Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems, Annals of Operation Research, 5, 485-500.
132. Schmit, L.A. (1960): Structural Design by Systematic Synthesis, ASCE J. of Struct. Div., Proceeding 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, 105-132.
133. Schmit, L.A.; Fleury, C. (1980a): Structural Synthesis by Combining Approximation Concepts and Dual Method, J. AIAA, 18, 1252-1254.
134. Schmit, L.A.; Fleury, C. (1980b): Discrete-Continuous Variable Structural Synthesis Using Dual Method, J. AIAA, 18, 1515-1524.
135. Sheu, C.Y.; Prager, W. (1968a): Recent Development in Optimal Structural Design, Appl. Mech. Rev., 21, (10), 985-992.
136. Sheu, C.Y.; Prager, W. (1968b): Minimum Weight Design with Piecewise Constance Specific Stiffness, J. Optimization Theory and Application, 2, (3), 179-186.
137. Sigmund, O.; Petersson, J. (1998): Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey on Procedures Dealing with Checkerboards, Mesh-dependencies and Local Minima. Struct. Optim., 16, 68-75.
138. Stöckl, G. (2003) Optimaler Entwurf elastplastisher mechanischer Structuren unter stochastisher Unsicherheit. Fortschr.-Ber.VDI Reihe 18 Nr. 278. Düsseldorf: VDI Verlag.

139. Symonds, P. S.; Neal, B. G. (1952): The Interpretation of Failure Loads in the Plastic Theory of Continuous Beams and Frames, J. Aero. Sci., 19,15-28.
140. Symonds, P. S. (1955): Large Plastic Deformations of Beams under Blast-Type Loading, Proc. 2nd US Nat. Congr. Appl. Mech.; Ann Arbor, Mich., (ed.), Naghdi, P. M., ASME, New York.
141. Symonds, P. S. (1973): Approximation Techniques for Impulsively Loaded Structures with Rate Sensitive Plastic Behaviour, SIAM J. Appl. Math., 25, (3), 41-60.
142. Symonds, P. S.; Wierzbicki, T. (1975): On an Extremum Principle for Mode Form Solutions in Plastic Structural Dynamics, J. Appl. Mech., 42, 630-640.
143. Szabó, J.; Roller, B. (1971): Rúdszerkezetek elmélete és számítása, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
144. Taylor, J.E. (1967): Strongest Column: An Energy Approach, J. Appl. Mech., 89, (2), 486-487.
145. Tin-Loi, F. (2000): Optimum Shakedown Design under Residual Displacement Constraints, Struc. and Mult. Optimization, 19, (12), 130-139.
146. Venkayya, V.B. (1971): Design of Optimum Structures, Comp. and Struct., l, 265-309.
147. Vásárhelyiné Szabó, A. (2003): Mechanikai folyamatok ellenőrző számítása matematikai programozással, MTA doktori értekezés, Budapest.
148. Weichert, D.; Maier, G.; (eds.) (2002): Inelastic Behaviour of Structures under Variable Repeated Loads. CISM Courses and Lectures Notes, Springer Verlag, Wien, New York.
149. Wierzbicki, T. (1970): Bounds on Large Dynamic Deformations of Structures, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, June EM3, 267-275.
150. Wierzbicki, T.; Florence, A.L. (1970): A Theoretical and Experimental Investigation of Impulsively Loaded Clamped Circular Plastic and Viscoplastic Plates, Int. J. of Solids and Structures, 6, 553-568.
151. Zhou M.; Rozvany, G.I.N. (1991): The COC algorithm, Part II: Topological, Geometrical and Generalized Shape Optimization, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 89, 309-336.
152. Zhou, M.; Rozvany, G.I.N. (1992/1993): DCOC: An Optimality Criterion Method for Large Systems. Part I: Theory. Part II: Algorithm, Struct. Optim., 5, 12-25.
153. Zhou, M.; Shyy, Y.K.; Thomas, H.L. (2001): Checkerboard and Minimum Member Size Control in Topology Optimization, Struct. and Multidisc. Optim., 21, 152-158.