Válasz Dr. Biró András bírálatára

Mindenek előtt szeretném megköszönni Biró Andrásnak a benyújtott MTA doktori értekezésem pozitív megítélését és támogatását. A bíráló két kérdést tett fel a bírálatában.

Az 1. kérdés, és a rá adott válasz

„*Adható végül is szükséges és elégséges feltétel arra, hogy adott G_n bináris rekurzív nem degenerált sorozat (a $D > 0$ esetben) mikor tartalmaz végtelen sok diofantikus hármast? Az ugyanis világos, hogy a 12. Tétel sokat elmond egy olyan G_n sorozatról, amely végtelen sok diofantikus hármast tartalmaz, de legalább is explicite nincs kimondva G_n-re vonatkozó szükséges és elégséges feltétel.*"

A 12. Tétel (melynek jelöléseit használjuk a válaszban) szükséges feltételt ad egy pozitív diszkriminánsú nem degenerált bináris rekurzív G_n sorozattal kapcsolatban arra, hogy végtelen sok diofantikus hármas létezzen a sorozat értékeivel. A tétel jelenlegi formájába valóban nem ad elégségességet is. Legyen például $\beta = -1$, $\delta = 1$, $\gamma = \alpha = 2$ (azaz $\gamma\alpha$ négyzetszám). Itt jegyezzük meg, hogy a sorozat karakterisztikus polinomjának $\alpha \neq \beta$ gyökei mellett a sorozat kezdőelemei határozzák meg a

$$G_n = \frac{(G_1 - \beta G_0)\alpha^n - (G_1 - \alpha G_0)\beta^n}{\alpha - \beta}$$

explicit formulát, azaz a kezdőelemek alkalmas megválasztásával (és a gyökök ismeretében) gyakorlatilag bármely γ és δ „beállítható" a

$$G_n = \gamma\alpha^n + \delta\beta^n$$

formulában. (Ha $\beta = -1$ és $\delta = 1$, akkor $G_0 = \gamma + 1$ és $G_1 = \gamma\alpha - 1$.) Folytatva a példát, világos, hogy ekkor $G_n = 2^{n+1} + (-1)^n$. Tegyük fel, hogy $\delta\beta^z = \delta\beta^y = \delta\beta^x = 1$. Következésképpen x, y és z mindegyike páros. Másrészt az

$$\begin{aligned} ab &= 2^{x+1}, \\ ac &= 2^{y+1}, \\ bc &= 2^{z+1} \end{aligned}$$

egyenletrendszernek nincs megfelelő pozitív egész megoldása, hiszen a, b és c mindegyike kettő hatvány kell, hogy legyen, de a hatványkitevők páronként vett összege nem lehet mindhárom esetben páratlan.

A példa arra is rámutat, hogy az elégséges feltételhez milyen pontosítást kell tenni az (i) esetben. Megtartva a $\beta \in \{\pm 1\}$, $\delta \in \{\pm 1\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, $\delta\beta^z = \delta\beta^y = 1$ következtetéseket, a módosított állítás a következő.

(i*) $\delta\beta^x = 1$. Ekkor

- $\beta = 1$, $\delta = 1$ esetén γ vagy $\gamma\alpha$ négyzetszám,
- $\beta = -1$, $\delta = 1$ esetén γ négyzetszám,

- $\beta = -1$, $\delta = -1$ esetén $\gamma\alpha$ négyzetszám.

A három közül vizsgáljuk meg részletesen a középső esetet (a másik kettő hasonlóan kezelhető), amely kapcsolódik a korábban említett ellenpéldához. Előtte megjegyezzük, hogy $\beta \in \{\pm 1\}$ és $\delta \in \{\pm 1\}$ elvileg a $G_n = \gamma\alpha^n \pm (\pm 1)^n$ négy esetet teszi lehetővé, amelyből $G_n = \gamma\alpha^n - 1$ lehetetlen, mert ellentmond pl. $\delta\beta^y = 1$-nek. A másik három eset generálja a pontosítás három ágát.

Legyen γ a pozitív γ_1 egész szám négyzete, továbbá vegyünk tetszőleges, azonos paritású $0 \le u < v < w$ egészeket (ami végtelen sok féle képpen megtehető). Ekkor az

$$a = \gamma_1\alpha^u, \qquad b = \gamma_1\alpha^v, \qquad c = \gamma_1\alpha^w$$

hármas nyilvánvalóan kielégíti az

$$\begin{aligned} ab + 1 &= \gamma\alpha^x + 1, \\ ac + 1 &= \gamma\alpha^y + 1, \\ bc + 1 &= \gamma\alpha^z + 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert, hiszen a közös paritás miatt $x = u + v$, $y = u + w$ és $z = v + w$ mindegyike páros lesz.

A 12. Tétel (ii) esetét is pontosítani kell az elégségességhez. Sajnos meglehetősen szétágazó és mesterséges esetekhez jutunk, melyekből egyet részletesen kidolgozunk.

Először vegyük észre, hogy a $\delta\beta^x = -1$ feltétel (azzal együtt, hogy $\delta\beta^z = \delta\beta^y = 1$) már csak a $G_n = \gamma\alpha^n \pm (-1)^n$ lehetőségeket adja. Ha $\delta\beta^x = -1$ és $x = 0$, akkor $G_n = \gamma\alpha^n - (-1)^n$, ha $\delta\beta^x = -1$ és $x = 1$, akkor $G_n = \gamma\alpha^n + (-1)^n$ teljesül. A következőkben ezen két eset szétválasztása adja a módosítás alapját.

Legyen $x = 0$, ekkor az

$$\begin{aligned} ab &= \gamma - 2, \\ ac &= \gamma\alpha^y, \\ bc &= \gamma\alpha^z \end{aligned}$$

rendszer vizsgálatához jutunk, ahol y és z páratlanok. Egyrészt

$$\gamma^2\alpha^{y+z} = abc^2 = (\gamma - 2)c^2,$$

másrészt $\gcd(\gamma, \gamma - 2) = 1$ vagy $\gcd(\gamma, \gamma - 2) = 2$. A két lehetséges esetből tekintsük az elsőt. Ekkor γ páratlan, tehát a és b is. Ebből következik, hogy α is páratlan, mert különben $\gamma\alpha^y$-ban és $\gamma\alpha^z$-ben a 2 más-más kitevőn jelenne meg. Vegyük észre, hogy most $\gamma^2 \mid c^2$, azaz $c = \gamma h$. Az előbbi egyenletrendszer új formája

$$\begin{aligned} ab &= \gamma - 2, \\ ah &= \alpha^y, \\ bh &= \alpha^z. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a, b és h prímfelbontásában is csak α prímtényezői fordulhanak elő. Legyen

$$\alpha = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}, \qquad (2 \ne p_i \in \mathbb{P},\ r_i > 0),$$

továbbá

$$a = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}, \qquad b = p_1^{b_1} \cdots p_s^{b_s}, \qquad h = p_1^{h_1} \cdots p_s^{h_s}, \qquad (a_i, b_i, h_i \geq 0).$$

Az egyenletrendszer második és harmadik egyenletét felhasználva, a prímfelbontásokból

$$a_i + h_i = r_i y, \quad b_i + h_i = r_i z \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

adódik, azaz $z - y = (b_i - a_i)/r_i$ teljesül minden i-re. Ha rögzítjük a $z - y$ különbséget, akkor elegendő végtelen sok y megoldást garantálni. Legyen $d = z - y$, ahol d páros. A sorozat kezdőelemeinek beállításával elérhető, hogy $\gamma = ab + 2$ legyen. A fentiek alapján a 12. tételben szereplő (ii) egy módosítása a következő.

(ii*) $\delta\beta^x = -1$. Ekkor $x \in \{0, 1\}$.

Ha $x = 0$ akkor

- $\alpha = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$, $(2 \neq p_i \in \mathbb{P},\ r_i > 0)$ esetén
  $a = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$, $(a_i \geq 0)$,
  $b = p_1^{b_1} \cdots p_s^{b_s}$, ahol $b_i = a_i + dr_i$, (d páros),
  $\gamma = ab + 2$,
  $c = \gamma h$, ahol $h = p_1^{r_1 y - a_1} \cdots p_s^{r_s y - a_s}$, ($y \geq y_0$ tetszőleges páratlan egész).

Világos, hogy (ii*) most már elégséges is, hiszen

$$\begin{aligned}
ab &= \gamma - 2, \\
ac &= p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s} \cdot \gamma p_1^{r_1 y - a_1} \cdots p_s^{r_s y - a_s} = \gamma \left(p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}\right)^y = \gamma \alpha^y, \\
bc &= p_1^{b_1} \cdots p_s^{b_s} \cdot \gamma p_1^{r_1 y - a_1} \cdots p_s^{r_s y - a_s} = \gamma p_1^{r_1 y + b1 - a_1} \cdots p_s^{r_s y + b_s - a_s} \\
&= \gamma \left(p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}\right)^{y+d} = \gamma \alpha^z,
\end{aligned}$$

ahol y tetszőleges páratlan szám, $z = y + d$ szintén páratlan.

További feltételrendszert kapunk ha hasonló módon áttekintjük a páros γ esetét, illetve utána külön megvizsgáljuk $x = 1$ következményeit.

A 2. kérdés, és a rá adott válasz

„*A $D < 0$ esetben létezik-e valamilyen részeredmény vagy sejtés arra, hogy egy bináris rekurzív sorozat mikor tartalmaz végtelen sok diofantikus hármast?*”

A sejtés az alábbi.

Sejtés. *Ha a $\{G_n\}$ sorozat karakterisztikus polinomjának D diszkriminánsa negatív, akkor az*

$$\begin{aligned}
ab + 1 &= G_x, \\
ac + 1 &= G_y, \\
bc + 1 &= G_z
\end{aligned} \tag{1}$$

egyenletrendszernek az $1 \leq a < b < c$ egészekben és x, y, z nemnegatív egészekben véges sok megoldása van.

A sejtés két pilléren alapszik. Elsőként idézzük fel, hogy $D > 0$ esetén akkor volt végtelen sok megoldás, ha a sorozat tagjaira vonatkozó explicit formulában a $\delta\beta^n$ tag

végtelen sokszor állította elő az 1-et. Ez $D < 0$ mellett is elérhető úgy hogy $\gamma = \pm 1$ helyett valamely más egységgyökkel lesz egyenlő. Ismert, hogy az $x^2 - Ax - B = 0$ másodfokú egyenlet ε egységgyök megoldásai (ha A és B egészek) az alábbiak lehetnek:

$$\varepsilon \in \{\pm 1,\ \pm i,\ \pm \varrho,\ \pm \varrho^2\}, \quad \text{ahol} \quad \varrho = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Mivel a karakterisztikus polinom egészegyütthatós, így a másik gyöke az előbb felsoroltak komplex konjugáltja lesz, amely ugyanazt a halmazt adja. Így összesen 3 új sorozat jöhet szóba $x^2 - Ax - B = (x - \varepsilon)(x - \bar{\varepsilon})$ alapján, mégpedig

- $(x - i)(x - \bar{i}) = x^2 + 1$ szerint $G_n = -G_{n-2}$,
- $(x - \varrho)(x - \bar{\varrho}) = x^2 - x + 1$ szerint $G_n = G_{n-1} - G_{n-2}$,
- $(x - \varrho^2)(x - \bar{\varrho}^2) = x^2 + x + 1$ szerint $G_n = -G_{n-1} - G_{n-2}$.

Mindhárom sorozat tetszőleges kezdőelemekkel indulva periodikus, a periodushosszak rendre 4, 6, és 3, tehát (1)-nek nem lehet végtelen sok megoldása. Vegyük egyúttal észre, hogy a fenti sorozatok degeneráltak, hiszen k-adik egységgyökök hányadosa is k-adik egységgyök.

A sejtés megerősítését szolgálják a számítógéppel végzett numerikus kísérletek is. Egyik ilyen vizsgálat mindösszesen 2 diofantikus hármast talált az $3 \le A \le 14$, $-50 \le B < -A^2/4$ intervallumban, a sorozatok első 200 tagját vizsgálva a $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ kezdőelemekkel. Mindkét megoldásra a tágabb $1 \le a \le b \le c$ feltételekkel bukkantunk:

- $(A, B) = (3, -4)$, $(a, b, c) = (1, 2, 2)$, $(x, y, z) = (2, 4, 3)$,
- $(A, B) = (4, -6)$, $(a, b, c) = (1, 3, 3)$, $(x, y, z) = (2, 5, 3)$.

A vizsgálatot elvégeztük több más véletlenszerűen választott megfelelő (A, B) párra is, a sorozat első 1000 tagját tekintve, további megoldást nem találtunk.

Szalay László