Effektív eredmények diofantikus problémákra végesen generált tartományok felett

MTA doktori értekezés tézisei

Dr. Bérczes Attila
Debreceni Egyetem

2016

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **4**

2. Eredmények az algebrai számok körében **10**

2.1. Jelölések, elnevezések 12
2.2. Általánosított egységegyenletekre vonatkozó effektív eredmények 14
2.3. Általánosított egységpontok görbéken 19
2.4. N-dimenziós varietások általánosított egységpontjai 21

3. Eredmények általános végesen generált tartományok felett **24**

3.1. Végesen generált tartományok 25
3.2. Effektív eredmények diofantikus egyenletekre végesen generált tartományok felett 26
3.2.1. Thue egyenletek 27
3.2.2. Hiper- és szuperelliptikus egyenletek 28
3.3. Egységpontok görbéken végesen generált tartományok felett 29
3.4. Divíziópontok görbéken végesen generált tartományok felett 31

1. fejezet

Bevezetés

A diofantikus egyenletek elméletében az alapproblémák a megoldhatóság eldöntése, a megoldásszám vizsgálata és az összes megoldás megkeresése. 1970-ben Matjaszevics negatív választ adott Hilbert 10. problémájára, amennyiben megmutatta, hogy nem létezik minden egyes egyenletre érvényes univerzális eljárás diofantikus egyenletek megoldhatóságának eldöntésére. Így méginkább nincs univerzális eljárás a megoldásszám és az összes megoldás meghatározására. Ezért különösen jelentősek azok az eredmények, melyek diofantikus egyenletek egy-egy széles és fontos osztálya esetén adnak választ az alapproblémákra.

Rendkívül értékesek az effektív végességi tételek, melyek egy-egy egyenlet osztály valamennyi egyenletére állítják a megoldásszám végességét és adnak algoritmust az összes megoldás megkeresésére. Ilyen vonatkozásban jelentős áttörést jelentettek A. Baker Fields éremmel díjazott eredményei (ld. [2], [3], [4], [5]), melyekben algebrai számok logaritmusainak lineáris formáira ad nem-triviális effektív alsó becsléseket. A diofantikus egyenletekre vonatkozó, Baker módszerrel nyert effektív eredmények többnyire elméleti jelentőségűek, rendszerint explicit korlátot szolgáltatnak a megoldásokra a fellépő paraméterek (például a fokszám és együtthatók) függvényében. A korlátok azonban túl nagyok ahhoz, hogy konkrét egyenletek megoldására alkalmazni lehessen őket. Viszont sok esetben a bizonyításukra kidolgozott módszert más módszerekkel, például a Lenstra-Lenstra-Lovász-féle redukciós eljárással kombinálva, végül hatékony algoritmust eredményeznek, melyek konkrét esetekben, nem túl nagy paraméter értékek mellett, számítógépet is felhasználva az összes megoldás meghatározását is lehetővé teszik.

A klasszikus diofantikus problémák kezdetben (racionális) egész megoldásokkal foglalkoztak. A nyert eredmények igen sok alkalmazással jártak. Kiderült azonban, hogy az egész megoldások vizsgálata során gyakran egy bővebb gyűrűben, egy rögzített algebrai számtest egészeinek vagy még általánosabban ún. S-egészeinek a gyűrűjében kell a megoldásokat tanulmányozni. Az ilyen eredmények számos újabb alkalmazáshoz vezettek egyebek között az algebrai számelméletben. Végül a diofantikus geometria kialakulása lehetővé és szükségessé tette az eredmények kiterjesztését $\mathbb{Z}$ felett végesen generált tartományok feletti egyenletekre, mely tartományok transzcendens elemeket is tartalmazhatnak $\mathbb{Q}$ felett. Fontos megjegyezni, hogy nem szükségképpen végesen generált tartományok felett az ilyen eredmények már érvényüket vesztik, ilyen általánosságban végességi állítások már nem bizonyíthatók.

Érthetően, történetileg minden szinten először ineffektív végességi tételek születtek, melyek még elméleti értelemben sem szolgáltattak eljárást a megoldások meghatározására. Később, más módszerekkel, sok esetben kevésbé általános, de effektív eredményeket sikerült nyerni.

Alkalmazások szempontjából a legfontosabb egyenlet osztályok közé tartoznak az *egységegyenletek* és *általánosításaik*, a *Thue-egyenletek*, a *hiper- és szuperelliptikus egyenletek*, valamint a *Schinzel-Tijdeman egyenlet*. Disszertációmban a $\mathbb{Z}$ felett végesen generált tartományok felett az említett egyenlet osztályok esetén nyert effektív végességi tételeimet foglalom össze és mutatom be. Mindegyik említett egyenlet osztálynak rendkívül gazdag irodalma van. Az alábbiakban röviden ismertetem a legfontosabb korábbi eredményeket, majd egyszerűsített formában megfogalmazom a saját eredményeimet és elhelyezem őket az irodalomban. Eredményeim részletes tárgyalására és pontos megfogalmazására a 2. és 3. Fejezetben kerül sor.

A továbbiakban legyen A egy $\mathbb{Z}$-t tartalmazó, $\mathbb{Z}$ felett végesen generált integritástartomány és jelölje K az A hányadostestét. Ilyen tartomány $\mathbb{Z}$, általánosabban egy algebrai számtest egészeinek vagy S-egészeinek a gyűrűje és még általánosabban a $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_r]$ típusú gyűrűk, ahol $z_1, \dots, z_r$ $\mathbb{Q}$ felett algebrai vagy transzcendens elemek. Speciálisan, ilyenek a $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_r]$ polinomgyűrűk. Ismeretes, hogy minden ilyen A tartomány egységeinek (invertálható elmeinek) az A^* multiplikatív csoportja végesen generált.

Lang után egy

$$ax + by = 1 \quad , \qquad x, y \in A^* \text{ ismeretlenek} \tag{1.1}$$

alakú egyenletet, ahol $a, b \in A \setminus \{0\}$, *egységegyenletnek* nevezünk. Abban az esetben, amikor A egy algebrai számtest egészeinek gyűrűje, Siegel (1921) implicit módon igazolta (1.1) megoldásszámának a végességét. Mahler (1933) a végességet $A = \mathbb{Z}[(p_1 \dots p_s)^{-1}]$ típusú gyűrűk esetén igazolta, ahol $p_1, \dots, p_s$ különböző prímek. Parry (1950) eredményeiből Siegel és Mahler tételeinek közös általánosítása következik algebrai számtestek felett. Végül Lang (1960) teljes általánosságban, tetszőleges végesen generált A tartományok felett igazolta a megoldásszám végességét.

Lang az (1.1) egyenletre vonatkozó végességi eredményét az

$$F(x,y)=0 \quad , \qquad x,y\in\Gamma \;\; \text{ismeretlenek} \tag{1.2}$$

alakú egyenletekre is kiterjesztette, ahol $F \in A[X,Y]$ egy polinom mely nem osztható egyetlen

$$X^mY^n-\alpha \qquad \text{vagy} \qquad X^m-\alpha Y^n \tag{1.3}$$

alakú polinommal sem, ahol m,n nem-negatív egész számok, legalább az egyik nem nulla és $\alpha\in\Gamma$, továbbá Γ a K^* multiplikatív csoport egy végesen generált részcsoportja. Könnyen belátható, hogy az (1.3) alakú kivételek kizárása szükséges. Lang [41], [42] (ld. még [43]) azt sejtette, hogy ez a végességi állítás igaz abban a még általánosabb esetben is, amikor (1.2)-ben Γ helyett a Γ

$$\overline{\Gamma} := \left\{ x\in\overline{K}^* : \exists m\in\mathbb{Z}_{>0} \;\; \text{melyre} \;\; x^m\in\Gamma \right\}$$

divíziócsoportját tekintjük. Lang sejtését Liardet [46], [47] igazolta.

Az említett eredmények valamennyien ineffektívek, a bizonyításaik a mély de ineffektív Thue-Siegel-Roth módszeren alapulnak.

Az (1.1)-re vonatkozó első effektív eredményeket algebrai számtestek egészeinek gyűrűje felett Győry (1972, 1974), S-egészeinek gyűrűje felett ismét Győry (1979) nyerte. A Baker-módszer felhasználásával explicit felső korlátot adott (1.1) megoldásainak a magasságára, amit később sokan javítottak. Később Mason [49] az (1.1)-re vonatkozó effektív eredmények effektív analógját adta függvénytestek felett.

Speciális esetben, algebrai számtestek felett, Bombieri és Gubler [16] effektivizálta Lang [39] (1.2) egyenletre vonatkozó eredményét.

Győry (1983, 1984) egy módszert dolgozott ki végesen generált A tartományok feletti effektív végességi eredmények bizonyítására abban az esetben, amikor a tekintett egyenletekre vonatkozóan a megfelelő effektív végességi tétel mind számtestek, mind függvénytestek felett már rendelkezésre áll. Egységegyenletek és más fontos egyenlet típusok esetén az A tartomány helyet egy bővebb, de jobban kezelhető B tartományból vett megoldásokra bizonyította állításait, a B-re vonatkozó alkalmas effektív specializációkkal visszavezetve a bizonyítást a számtest és a függvénytest esetre. Teljes általánosságban azonban nem volt mód a B-beli megoldások közül az A-beli megoldások kiválogatására. Újabban Evertse és Győry (2013) Győry módszerét Aschenbrenner [1] egy újabb eredményével kombinálva teljes általánosságban effektivizálta Lang (1.1)-re vonatkozó végességi tételét, megmutatva, hogy az (1.1) egységegyenletnek minden A végesen generált tartomány esetén csak véges sok és effektíve meghatározható megoldása van mind A^*-ban, mind a K^* egy tetszőleges, de effektíve adott Γ végesen generált részcsoportjában.

Most röviden összefoglalom a disszertációm tárgyát képező, (1.1) és (1.2) egyenletekre vonatkozó eredményeimet.

Evertsével és Győryvel közösen [8] az (1.1) egyenletre vonatkozó, algebrai számtestek feletti korábbi effektív eredményeket kiterjesztettük arra az esetre, amikor az x, y ismeretleneket a Γ divíziócsoportjából, vagy általánosabban, a divíziócsoporthoz "közeli" pontok halmazából vesszük; ld. 2.1., 2.2., 2.4. Tételek és 2.3. Következmény. Ezek bizonyításához $|\alpha - \xi|_v$ alakú különbségekre vonatkozó explicit alsó korlátot adtunk, ahol $\alpha \neq 0$ algebrai szám, ξ egy algebrai számokból álló végesen generált multiplikatív csoport eleme, v pedig egy tetszőleges place az α számot és a csoportot tartalmazó számtestben. Evertsevel, Győryvel és Ponteauval közösen [10] pedig az (1.1)-re vonatkozó eredményeket kiterjesztettük az (1.2) egyenletre; ld. 2.7., 2.8., 2.9. Tétel. Egyben explicit felső korlátot adtunk a megoldások magasságára és fokszámára. Ezzel lényesen általánosabb és explicit változatát adtuk Bombieri és Gubler eredményének.

Újabban, a [7] és [6] egyszerzős dolgozatokban Evertse és Győry módszerét használva, valamennyi korábbi, az (1.1) és (1.2) egyenletek Γ illetve $\overline{\Gamma}$-beli megoldásaira vonatkozó effektív végességi eredménynek - a korlátok alakjától eltekintve - közös általánosítását bizonyítottam tetszőleges, $\mathbb{Z}$ felett végesen generált tartományok felett. Ez a disszertációm egyik fő eredménye.

Thue-egyenletekre, valamint hiper- és szuperelliptikus egyenletekre vonatkozóan rengeteg eredmény született az elmúlt évtizedekben. Ezek közül most csak a legfontosabbakat emelem ki, melyek eredményeimhez szorosan kapcsolódnak.

Tekintsük először a Thue-egyenleteket. Legyen ismét A egy $\mathbb{Z}$ felett végesen generált tartomány, $F(X, Y) \in A[X, Y]$ egy binér forma $n \geq 3$ fokszámmal és zérustól különböző diszkriminánssal, legyen $\delta \in A \setminus \{0\}$, és tekintsük az

$$F(x, y) = \delta \quad , \qquad x, y \in A \ \text{ ismeretlenek} \tag{1.4}$$

egyenletet. A klasszikus $A = \mathbb{Z}$ esetben Thue (1909) bizonyította, hogy az (1.4) egyenletnek csak véges sok megoldása van. Ezért az (1.4) típusú egyenleteket szokás *Thue-egyenleteknek* nevezni. Ezt az eredményt Siegel (1921) általánosította arra az esetre, amikor A egy algebrai számtest egészeinek a gyűrűje. Thue eredményét Mahler (1933) kiterjesztette az $A = \mathbb{Z}[(p_1 \dots p_s)^{-1}]$ típusú alaptartományok esetére, ahol $p_1, \dots, p_s$ különböző prímek. Parry (1950) a közös általánosítását adta Siegel és Mahler tételeinek. Végül Lang (1960) ezeket az eredményeket tetszőleges végesen generált A tartományok esetére is kiterjesztette. Az említett eredmények bizonyításai a Thue-Siegel-Roth módszeren alapulnak, ezért ineffektívek.

Az $A = \mathbb{Z}$ esetben az első általános effektív eredményt Baker [2] nyerte az általa kidolgozott effektív módszer segítségével. Eredményét Coates [24] kiterjesztette az $A = \mathbb{Z}[(p_1 \dots p_s)^{-1}]$ típusú alaptartományok esetére, Kotov és Sprindžuk [59] pedig arra az esetre, amikor A egy algebrai számtest S-egészeinek a gyűrűje. Explicit felső korlátokat adtak a megoldások magasságára, melyeket később sokan élesítettek. Mason [49] az említett eredmények analógját bizonyította függvénytestek felett. Győry [34] specializációs módszerével a számtestek feletti effektív eredményeket általánosította végesen generált, algebrai és transzcendens elemeket is tartalmazó tartományok egy osztályára. Itt jegyezzük meg, hogy az egységegyenletek és Thue-egyenletek elmélete lényegében ekvivalens; ld. pl. Evertse és Győry [28].

Evertsevel és Győryvel közösen [9], a már említett Evertse-Győry módszert [27] felhasználva, teljes általánosságban, tetszőleges végesen generált A tartományok felett nyertünk effektív végességi eredményt az (1.4) egyenletre. Ez az eredmény értekezésem 3.1. Tétele.

Ezután tekintsük az

$$F(x) = \delta y^m \quad , \qquad x, y \in A \text{ ismeretlenek} \tag{1.5}$$

egyenletet, ahol $F(X) \in A[X]$ egy $n \geq 2$ fokszámú polinom, zérustól különböző diszkriminánssal, $m \geq 2$ egész, és $\delta \in A \setminus \{0\}$. Az (1.5) egyenletet az $n \geq 3$, $m = 2$ esetben *hiperelliptikus egyenletnek*, az $n \geq 2$, $m \geq 3$ esetben pedig *szuperelliptikus egyenletnek* nevezzük. A hiperelliptikus esetben $A = \mathbb{Z}$ mellett Siegel (1926) nyerte az első végességi eredményt. LeVeque (1964) végességi kritériumot adott az (1.5) egyenletre abban az esetben, amikor A egy számtest egészeinek gyűrűje. Lang (1960) már említett munkájában teljes általánosságban, végesen generált tartományok felett bizonyította (1.5) megoldásszámának végességét.

Az (1.5) egyenletre vonatkozó első effektív végességi tételt $A = \mathbb{Z}$ esetén szintén Baker [3] nyerte effektív módszere segítségével. $\mathbb{Z}$ felett Schinzel és Tijdeman [56] tekintette először az (1.5) egyenletet abban az általánosabb helyzetben, amikor az m kitevő is ismeretlen, és effektív felső korlátot adtak az m értékére. Ezért ismeretlen m esetén az (1.5) egyenletet szokás *Schinzel-Tijdeman egyenletnek* is nevezni. Trelina [61] és Brindza [18] algebrai számok S-egészei felett nyertek effektív korlátokat az (1.5) egyenlet megoldásainak magasságára. Mason [49] az említett eredmények analógját bizonyította függvénytestek felett. Végül Brindza [19] és Végső [62] a Győry [34], [35] által tekintett végesen generált tartományok felett nyert effektív végességi eredményt az (1.5) egyenletre és a Schinzel-Tijdeman egyenletre.

Evertsevel és Győryvel közösen [9], teljes általánosságban, tetszőleges $\mathbb{Z}$ felett végesen generált tartományok felett nyertünk effektív végességi eredményeket az (1.5) egyenletre és a Schinzel-Tijdeman egyenletre; ld. a jelen disszertáció 3.3. és 3.4. Tételeit. Bizonyításunkban itt is az Evertse és Győry [27] által kidolgozott effektív módszert alkalmaztuk.

Itt jegyezzük meg, hogy Evertse és Győry a [26] könyvükben módszerükkel diszkrimináns egyenletekre is nyertek effektív végességi tételeket tetszőleges végesen generált tartományok felett.

Összefoglalva elmondható, hogy disszertációm eredményei bizonyos értelemben már véglegesek, lezárják az (1.2), (1.4) és (1.5) egyenletek effektív végességi vizsgálatát. Ezek az eredmények kvantitatív formában kerültek bizonyításra, effektív felső korlátokat szolgáltatva a megoldások méretére. Természetesen fontos feladat marad a megoldásokra nyert korlátok csökkentése, továbbá konkrét egyenletek megoldására alkalmazható hatékony algoritmusok kidolgozása és a megoldások meghatározása.

2. fejezet

Eredmények az algebrai számok körében

A végesen generált tartományok közül fontosak azok, amelyek kizárólag $\mathbb{Q}$-felett algebrai elemeket tartalmaznak. Ebben a fejezetben azon effektív eredményeimet foglalom össze, melyek az algebrai esetre vonatkoznak.

Jelölje $\mathbb{Q}$ a racionális számtestet, és legyen $\overline{\mathbb{Q}}$ ennek egy algebrai lezártja. Az N-dimenziós tórusz $\overline{\mathbb{Q}}$-racionális pontjainak csoportja nem más mint a

$$\mathbb{G}_m^N(\overline{\mathbb{Q}}) = (\overline{\mathbb{Q}}^*)^N = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) : x_i \in \overline{\mathbb{Q}}^*, \ i = 1, \ldots, N\}$$

halmaz a koordinátánkénti szorzással mint művelettel. Jelölje $h(x)$ az $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ abszolút Weil magasságát. Egy $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$ elem esetén legyen $h(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^N h(x_i)$ az $\mathbf{x}$ magassága és $[\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_N) : \mathbb{Q}]$ az $\mathbf{x}$ fokszáma.

Legyen $\mathcal{X}$ a $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$ egy algebrai részvarietása (azaz, $\overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_N]$-beli polinomok közös $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$-beli zérushelyeinek halmaza) és Γ a $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$ csoport egy végesen generált részcsoportja.

Legyen $\varepsilon > 0$ valós szám. Ebben a fejezetben az $\mathcal{X}$ részvarietásnak a

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma} &:= \left\{\mathbf{x} \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^N : \exists\, m \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ melyre } \mathbf{x}^m \in \Gamma\right\} \quad (\Gamma \text{ divíziócsoportja}),\\
\overline{\Gamma}_\varepsilon &:= \left\{\mathbf{x} \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^N : \exists\, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^N \text{ melyre } \mathbf{x} = \mathbf{y}\mathbf{z},\ \mathbf{y} \in \overline{\Gamma},\ h(\mathbf{z}) < \varepsilon\right\},\\
C(\overline{\Gamma}, \varepsilon) &:= \Big\{\mathbf{x} \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^N : \exists\, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^N \\
&\qquad\qquad \text{melyre } \mathbf{x} = \mathbf{y}\mathbf{z},\ \mathbf{y} \in \overline{\Gamma},\ h(\mathbf{z}) < \varepsilon(1 + h(\mathbf{y}))\Big\},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

halmazok valamelyikével való metszetét kívánjuk vizsgálni. Fontos megjegyezni, hogy a $\overline{\Gamma}$ csoporttal ellentétben $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ és $C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$ nem alkot algebrai struktúrát.

A $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$ egy algebrai részcsoportján egy olyan algebrai részvarietást értünk, mely egyben részcsoportja is a $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$ csoportnak. Egy algebrai részcsoport eltoltján egy $\mathbf{x}\mathcal{H} = \{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} : \mathbf{y}\in\mathcal{H}\}$ mellékosztályt értünk, ahol $\mathcal{H}$ a $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$ egy algebrai részcsoportja és $\mathbf{x}\in(\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$.

Az említett metszethalmazokkal kapcsolatban számos **ineffektív** eredmény született. Poonen [52] munkájából következik, hogy létezik olyan csak N-től és $\mathcal{X}$ fokszámától függő $\varepsilon > 0$, melyre $\mathcal{X}\cap\overline{\Gamma}_\varepsilon$ részhalmaza egy

$$\mathbf{x}_1\mathcal{H}_1 \cup\cdots\cup \mathbf{x}_T\mathcal{H}_T \tag{2.2}$$

alakú véges uniónak, ahol $\mathbf{x}_i\in\overline{\Gamma}_\varepsilon$, $\mathcal{H}_i$ pedig a $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$ egy algebrai részcsoportja, továbbá $\mathbf{x}_i\mathcal{H}_i\subset\mathcal{X}$ minden $i = 1,\dots,T$ esetén. Ez lényegében egyesítve magában foglalja Liardet [47] és Laurent [44] korábbi eredményeit (akik az $\mathcal{X}\cap\overline{\Gamma}$ esetet vizsgálták) valamint Zhang [63] eredményét (aki az $\mathcal{X}\cap\{\mathbf{x}\in(\overline{\mathbb{Q}}^*)^N : h(\mathbf{x})<\varepsilon\}$ esettel foglalkozott).

Bombieri és Zannier [17] valamint Schmidt [57] Zhang eredményének kvantitatív verzióit igazolták, megadva egy kizárólag az N-től és $\mathcal{X}$ fokszámától függő explicit pozitív ε értéket és egy szintén csak N-től és $\mathcal{X}$ fokszámától függő explicit felső korlátot az eltoltak T számára. Később Rémond [53] bizonyította Poonen eredményének egy kvantitatív verzióját egy kizárólag N-től és $\mathcal{X}$ fokszámától függő explicit pozitív ε értékkel és egy N-től, $\mathcal{X}$ fokszámától és Γ rangjától függő explicit felső korláttal az eltoltak T számára.

Legyen $\mathcal{X}^{\mathrm{exc}}$ azon $\mathbf{x}\in\mathcal{X}$ elemek halmaza, melyekre létezik olyan $\mathcal{H}$ pozitív dimenziós algebrai részcsoportja a $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$ csoportnak, melyre $\mathbf{x}\mathcal{H}\subset\mathcal{X}$, és legyen $\mathcal{X}^0 := \mathcal{X}\setminus\mathcal{X}^{\mathrm{exc}}$. Evertse [25] igazolta, hogy létezik $\varepsilon > 0$, kizárólag N-től, $\mathcal{X}$-től és Γ-tól függő konstans, hogy $\mathcal{X}^0\cap C(\overline{\Gamma},\varepsilon)$ véges. Ezt Rémond [53] még általánosabb formában bizonyította. Abban az esetben, ha $\mathcal{X}$ egy görbe, Rémond az ε bizonyos, csak N-től, Γ rangjától, $\mathcal{X}$ magasságától és fokszámától függő explicit értéke esetén explicit felső korlátot adott az $\mathcal{X}^0\cap C(\overline{\Gamma},\varepsilon)$ halmaz számosságára; ezt az eredményt később Pontreau [51] javította $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^2$-beli görbék esetén. Magasabb dimenziós varietások esetén hasonló kvantitatív eredmény még nem született.

Ebben a fejezetben az $\mathcal{X}$ részvarietás bizonyos speciális osztályai esetén a fenti eredmények **effektív** verzióit ismertetjük. Az $\mathcal{X}\cap\overline{\Gamma}_\varepsilon$ metszet vonatkozásában ez azt jelenti, hogy megadjuk az ε egy explicit értékét és egy effektív módon kiszámítható felső korlátot a (2.2)-ben szereplő $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_T$ pontok magasságára és fokszámára. Az $\mathcal{X}^0\cap C(\overline{\Gamma},\varepsilon)$ tekintetében ez azt jelenti, hogy megadjuk az ε egy explicit értékét és egy effektív módon kiszámítható felső korlátot az ebben a metszetben található pontok magasságára és fokszámára. Megjegyezzük, hogy az effektív eredmények igazolásához feltétlenül szükséges, hogy a fokszámra is felső korlátot adjunk, mivel a tekintett pontok koordinátái nincsenek benne egy előre megadott algebrai számtestben.

Az általunk tekintett varietás-osztályok olyanok, hogy lehetővé teszik a logaritmikus formákra vonatkozó nem-triviális alsó becslések (azaz a Baker-módszer) használatát. Három osztályra vonatkozóan dolgoztuk ki részletesen az eredményeket. Az $N = 2$ esetén a lineáris polinom által meghatározott részvarietás vizsgálata lényegében a kétismeretlenes általánosított egységegyenlet megoldásainak vizsgálatát jelenti. Ez a jelen fejezet második alfejezetét alkotja. Másrészt, szintén $N = 2$ esetén $\mathcal{C} := \{(x, y) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^2 \mid f(x, y) = 0\}$ alakú görbéket tekintettünk, ahol $f \in \overline{\mathbb{Q}}[X, Y]$ nem binom. Ezt az eredményt a fejezet harmadik alfejezete ismerteti. Harmadrészt, $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$ azon varietásait tekintjük, melyek $f_1(\mathbf{x}) = 0, \ldots, f_m(\mathbf{x}) = 0$ egyenletekkel vannak megadva, ahol mindegyik f_i polinom vagy binom vagy trinom. Ezeket az eredményeket a fejezet negyedik alfejezetében tárgyaljuk, és a bizonyításuk nagymértékben a második alfejezet $ax + by = 1$ egyenletre vonatkozó eredményein alapul.

A fejezetben ismertetett eredmények Jan-Hendrik Evertse, Győry Kálmán, illetve részben Corentin Pontreau kollégáimmal közös eredmények, ld. [8] és [10].

2.1. Jelölések, elnevezések

Legyen K egy algebrai számtest, melynek fokszáma d. Jelölje $\mathcal{O}_K$ a K egészeinek gyűrűjét és M_K a K place-einek halmazát. Minden $v \in M_K$ esetén definiáljuk a $|\cdot|_v$ abszolútérték függvényt az alábbiak szerint. Ha v végtelen és a $\sigma : K \to \mathbb{C}$ beágyazásnak felel meg, akkor legyen $|x|_v := |\sigma(x)|^{d_v/d}$ minden $x \in K$ esetén, ahol $d_v = 1$ vagy 2 annak megfelelően, hogy $\sigma(K)$ részhalmaza $\mathbb{R}$-nek vagy sem; ha v véges place, amely $\mathcal{O}_K$ egy $\mathfrak{p}$ prímideáljának felel meg, akkor legyen $|x|_v := N(\mathfrak{p})^{-\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}} x/d}$ minden $x \in K \setminus \{0\}$ esetén és $|0|_v = 0$. Itt $N(\mathfrak{p})$ a $\mathfrak{p}$ ideál normáját jelöli, míg $\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}} x$ a $\mathfrak{p}$ kitevője az (x) főideál prímideál-faktorizációjában.

Egy $x \in K$ elem abszolút logaritmikus Weil-magasságát $h(x)$-szel jelöljük, és az alábbiak szerint definiáljuk:

$$h(x) = \sum_{v \in M_K} \max(0, \log |x|_v). \tag{2.3}$$

Általánosabban, ha $x \in \overline{\mathbb{Q}}$, válasszunk egy K algebrai számtestet, melyre $x \in K$ és definiáljuk a $h(x)$ mennyiséget a (2.3) szerint. Ez az érték független lesz K választásától. Megjegyezzük, hogy $h(x) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x \in \overline{\mathbb{Q}}^*_{\text{tors}}$, ahol $\overline{\mathbb{Q}}^*_{\text{tors}}$ a $\overline{\mathbb{Q}}^*$-beli egységgyökök csoportja.

Jelölje S az M_K egy olyan véges részhalmazát, amely tartalmazza az összes végtelen place-t. Ekkor egy $x \in K$ elemet S-egésznek nevezünk, ha $|x|_v \leq 1$ minden $v \in M_K \setminus S$ esetén. A K testbeli S-egészek gyűrűt alkotnak, amit $\mathcal{O}_S$-sel jelölünk. Ennek egységcsoportjára az $\mathcal{O}_S^*$ jelölést használjuk, és a K testbeli S-egységek csoportjának nevezzük. Minden $v \in M_K$ esetén legyen

$$P(v) := 2 \text{ ha } v \text{ végtelen}, \qquad P(v) := \#\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_v \text{ ha } v \text{ véges}, \tag{2.4}$$

ahol $\mathfrak{p}_v$ az $\mathcal{O}_K$ azon prímideálja ami a v place-nek felel meg, és legyen

$$\mathbf{P} := \max_{v\in S} P(v). \tag{2.5}$$

A (2.3) definícióból és a szorzat-formulából következik, hogy

$$h(x) = \frac{1}{2}\sum_{v\in S} |\log |x|_v| \ , \quad \text{ha } \ x \in \mathcal{O}_S^*. \tag{2.6}$$

Egy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$ esetén definiáljuk $\mathbf{x}$ magasságát a

$$h(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{N} h(x_i)$$

összefüggéssel. Egy $\xi \in \mathbb{Q}$ esetén legyen $\mathbf{x}^\xi := (x_1^\xi, \ldots, x_N^\xi)$. Az $\mathbf{x}^\xi$ pont csak $(\overline{\mathbb{Q}}_{\text{tors}}^*)^N$-beli elemekkel való szorzás erejéig van egyértelműen meghatározva, ahol $\overline{\mathbb{Q}}_{\text{tors}}^* = \{\boldsymbol{\rho} \in \overline{\mathbb{Q}}^* : \exists m \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ melyre } \boldsymbol{\rho}^m = 1\}$. Ugyanakkor a $h(\mathbf{x}^\xi)$ érték jóldefiniált, és igazak az alábbi összefüggések:

$$h(\mathbf{xy}) \leq h(\mathbf{x}) + h(\mathbf{y}), \ h(\mathbf{x}^\xi) = |\xi| h(\mathbf{x}) \qquad \text{minden } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^N, \ \xi \in \mathbb{Q} \text{ esetén},$$

továbbá $h(\mathbf{x}) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $\mathbf{x} \in (\overline{\mathbb{Q}}_{\text{tors}}^*)^N$.

Egy L algebrai számtest és $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$ esetén használni fogjuk az $L(\mathbf{x}) := L(x_1, \ldots, x_N)$ jelölést.

Egy $f \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_N]$ polinom esetén jelölje $\deg f$ az f fokszámát, és $\deg_s f := \sum_{i=1}^N \deg_{X_i} f$, ahol $\deg_{X_i}$ az f polinom X_i változóbeli fokszámát jelenti. Tegyük fel, hogy $a_1, \ldots, a_R$ az f nem-nulla együtthatói, és legyen $K := \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_R)$. Ekkor f magasságát a

$$h(f) := \sum_{v\in M_K} \log \max_{1\leq i\leq R} |a_i|_v$$

összefüggéssel definiáljuk.

Legyen továbbá $\log^* x := \max(1, \log x)$ minden $x > 0$ esetén és $\log^* 0 := 1$.

2.2. Általánosított egységegyenletekre vonatkozó effektív eredmények

Ebben a fejezetben az $N = 2$ esetet vizsgáljuk, mégpedig abban az igen fontos speciális esetben, amikor az $\mathcal{X}$ részvarietást egyetlen elsőfokú polinom definiálja. Ekkor az $\mathcal{X}$ részvarietásnak a $\overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}_\varepsilon, C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$ halmazokkal való metszete nem más, mint a definiáló polinom által indukált diofantikus egyenlet $\overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}_\varepsilon, C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$ halmazokbeli megoldásainak halmaza. Mivel most $\mathcal{X}$ egy lineáris polinommal van megadva, így lényegében egy általánosított S-egységegyenlet $\overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}_\varepsilon, C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$ halmazokbeli megoldásait keressük.

Az irodalomban számos *kétismeretlenes S-egységegyenletekre vonatkozó effektív* eredmény ismert. Ebben a fejezetben az általánosabb

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 1 \;, \qquad (x_1, x_2) \in \Gamma \quad \text{ismeretlenek} \tag{2.7}$$

egyenletre vonatkozó effektív eredményeket ismertetek, ahol $a_1, a_2 \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ és Γ a $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^2 = \overline{\mathbb{Q}}^* \times \overline{\mathbb{Q}}^*$ (koordinátánkénti szorzással ellátott) multiplikatív csoport egy végesen generált, pozitív rangú részcsoportja. Az erre vonatkozó eredmény alkalmas arra, hogy segítségével a diszkrimináns egyenletre és bizonyos széteső forma egyenletekre vonatkozó ismert effektív eredményeket (ld. Győry [33], [36] valamint Evertse és Győry [28], [26]) javítsunk, illetve általánosítsunk.

Valójában Jan-Hendrik Evertsevel és Győry Kálmánnal [8] még ennél is általánosabb effektív eredményeket igazoltunk (2.7) alakú egyenletekre, melyek (x_1, x_2) megoldásai egy nagyobb csoportból, nevezetesen a Γ csoport

$$\overline{\Gamma} := \{(x_1, x_2) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^2 \,|\, \exists k \in \mathbb{Z}_{>0} : \, (x_1^k, x_2^k) \in \Gamma\}$$

divíziócsoportjából valók, sőt még olyan (x_1, x_2) megoldásokra is melyek "nagyon közel vannak" az $\overline{\Gamma}$ csoporthoz. Ezek az első ilyen típusú effektív diofantikus eredmények az irodalomban. Eredményeink effektív felső korlátot adnak mind az (x_1, x_2) megoldások magasságára, mind a $\mathbb{Q}(x_1, x_2)$ számtest fokszámára (ld. 2.2. és 2.4. Tétel valamint 2.3. Következmény).

Ezen tételek bizonyítása során felhasználjuk a (2.7) egyenlet Γ csoportbeli megoldásaira vonatkozó 2.1. Tételt, valamint Beukers és Zagier [12] egy eredményét, mely szerint a (2.7) egyenletnek legfeljebb két $(x_1, x_2) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^2$ olyan megoldása van, melyeknek a magassága "nagyon kicsi".

Az imént említett eredményeink bizonyításának sarokköve egy új effektív alsó korlát az $|1 - \alpha\xi|_v$ kifejezésre, ahol α egy rögzített elem egy adott K algebrai számtestből, v

a K egy place-e, és a ξ ismeretlen a K^* egy rögzített végesen generált részcsoportjából való (ld. 2.5. Tétel). Ennek a Tételnek a bizonyítása a Baker-módszeren alapszik. A 2.5. Tételünknek van egy következménye (ld. 2.6. Tétel) amely hasonlít Bombieri [13], Bombieri és Cohen [14], [15], valamint Bugeaud [22] (ld. még Bombieri és Gubler [16, Chap. 5.4]) eredményeire, de sok esetben jobb becslést ad azoknál. Így a 2.5. Tételünket alkalmazva, a (2.7) egyenlet megoldásainak magasságára olyan explicit felső korlátokat nyerünk, melyek sok esetben élesebbek azoknál, melyek Bombieri és társszerzői munkájából levezethetők.

Tekintsük újra az

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 1\ , \quad (x_1, x_2) \in \Gamma \quad \text{ismeretlenek} \tag{2.7}$$

egyenletet, ahol $a_1, a_2 \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ és Γ a $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^2$ egy végesen generált pozitív rangú részcsoportja. Legyen $\mathbf{w}_1 = (\xi_1, \eta_1), \dots, \mathbf{w}_r = (\xi_r, \eta_r)$ a $\Gamma/\Gamma_{\text{tors}}$ egy generátorrendszere (mely nem feltétlenül bázis). Ekkor a Γ minden eleme felírható $\zeta\mathbf{w}_1^{x_1}\cdots\mathbf{w}_r^{x_r}$ alakban, ahol $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{Z}$ és $\zeta \in \Gamma_{\text{tors}}$, azaz ζ koordinátái egységgyökök.

Legyen $K := \mathbb{Q}(\Gamma)$, azaz a Γ által $\mathbb{Q}$ felett generált algebrai számtest. Vegyük észre, hogy az $a_1, a_2 \in K$ feltételt nem követeltük meg. Legyen S az M_K azon legszűkebb részhalmaza, mely tartalmazza az összes végtelen place-t és amelyre $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r \in (\mathcal{O}_S^*)^2$, ahol $\mathcal{O}_S^*$ a K-beli S-egységek csoportját jelöli. Legyenek

$$\begin{aligned} &Q_\Gamma := h(\mathbf{w}_1)\cdots h(\mathbf{w}_r),\\ &d := [K:\mathbb{Q}], \quad s := \#S, \quad \mathbf{P} := \max_{v\in S} P(v). \end{aligned}$$

Jelölje t a $\overline{\mathbb{Q}}^*$ $\xi_1, \dots, \xi_r$, illetve $\eta_1, \dots, \eta_r$ által generált részcsoportjainak rangja közül a nagyobbat. Mivel Γ rangja pozitív, így $t > 0$. Legyenek

$$\begin{aligned} &c_1(r,d,t) := 3(16ed)^{3(t+2)}\left(d(\log 3d)^3\right)^{r-t}(t/e)^t,\\ &A := 26c_1(r,d,t)s\frac{\mathbf{P}}{\log\mathbf{P}}Q_\Gamma \max\{\log(c_1(r,d,t)s\mathbf{P}), \log^* Q_\Gamma\},\\ &H := \max(h(a_1), h(a_2), 1). \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.1. Tétel. (Bérczes, Evertse és Győry [8]) *A (2.7) minden $(x_1, x_2) \in \Gamma$ megoldása esetén*

$$h(x_1, x_2) < AH. \tag{2.9}$$

Eredményünk speciális esetként effektív felső korlátot ad S-egységegyenletek megoldásainak magasságára. Mint már említettük, az első ilyen korlátot Győry [32] nyerte, melyet később több matematikus is javított. A jelenleg ismert legjobb korlátok S-egységegyenletek megoldásainak magasságára Bugeaud és Győry [23], Bugeaud [22] illetve Győry és Yu [37] nevéhez fűződnek, mely korlátokkal összemérhető eredmény vezethető le a fenti tételünk bizonyításából.

Most folytatjuk a (2.7) alakú egyenletek vizsgálatát, de olyan (x_1, x_2) megoldásait tekintjük, melyek egy nagyobb halmazból származnak.

Emlékeztetünk, hogy a Γ csoport divíziócsoportja a

$$\overline{\Gamma} := \left\{ \mathbf{x} \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^2 \mid \exists\, k \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ melyre } \mathbf{x}^k \in \Gamma \right\} \tag{2.10}$$

csoportot jelenti. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a $\overline{\Gamma}$ körüli „henger”-en illetve „csonkakúp”-on pedig a

$$\overline{\Gamma}_\varepsilon := \left\{ \mathbf{x} \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^2 \mid \exists\, \mathbf{y}, \mathbf{z} \text{ melyre } \mathbf{x} = \mathbf{y}\mathbf{z},\ \mathbf{y} \in \overline{\Gamma},\ \mathbf{z} \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^2,\ \ h(\mathbf{z}) < \varepsilon \right\} \tag{2.11}$$

illetve

$$\begin{aligned} C(\overline{\Gamma}, \varepsilon) := \Big\{ \mathbf{x} \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^2 \mid \exists\, \mathbf{y}, \mathbf{z} \text{ melyre } \mathbf{x} = \mathbf{y}\mathbf{z},\ \mathbf{y} \in \overline{\Gamma}, \\ \mathbf{z} \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^2,\ h(\mathbf{z}) < \varepsilon(1 + h(\mathbf{y})) \Big\} \end{aligned} \tag{2.12}$$

halmazokat értjük.

A $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ halmazt Poonen [52] vezette be, míg a $C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$ halmaz definíciója Evertse [25] nevéhez fűződik.

Fontos kiemelni, hogy a $\overline{\Gamma}$, $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ és $C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$ halmazok elemei olyanok, hogy koordinátáik nincsenek benne egy előre megadott számtestben. Így ahhoz, hogy effektív eredményt igazoljunk diofantikus egyenletek $\overline{\Gamma}$, $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ illetve $C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$ halamzokbeli megoldásaira nem elegendő a megoldások magasságára korlátot adni, hanem az általuk generált számtest fokszámát is felülről korlátozni kell.

Rögzítsük az $a_1, a_2 \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ elemeket és legyenek

$$K := \mathbb{Q}(\Gamma), \quad K_0 := \mathbb{Q}(a_1, a_2, \Gamma).$$

A d, s, N, H és Q_Γ jelölje ugyanazt mint a 2.1. Tételben, A pedig legyen a (2.8) képlettel definiált konstans. Legyen továbbá

$$h_0 := \max\{h(\xi_1), \ldots, h_(\xi_r), h(\eta_1), \ldots, h(\eta_r)\},$$

ahol $\mathbf{w}_i = (\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, \ldots, r$ a $\Gamma/\Gamma_{\text{tors}}$ csoport egy rögzített generátorrendszere.

Tekintsük most az

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 1 \ , \qquad (x_1, x_2) \in \overline{\Gamma}_\varepsilon \text{ ismeretlenek} \tag{2.13}$$

egyenletet.

2.2. Tétel. (Bérczes, Evertse és Győry [8]) *Tegyük fel, hogy* (x_1, x_2) *a (2.13) egy megoldása és, hogy*

$$\varepsilon < 0.0225. \tag{2.14}$$

Ekkor

$$h(x_1, x_2) \leq Ah(a_1, a_2) + 3rh_0A \tag{2.15}$$

és

$$[K_0(x_1, x_2) : K_0] \leq 2. \tag{2.16}$$

Az alábbi következmény a divíziócsoportbeli megoldásokra szolgáltat effektív felső korlátot:

2.3. Következmény. (Bérczes, Evertse és Győry [8]) *A fenti jelölésekkel és feltételek mellett legyen* (x_1, x_2) *az*

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 1 \quad , \qquad (x_1, x_2) \in \overline{\Gamma} \;\; \textit{ismeretlenek} \tag{2.17}$$

egyenlet egy megoldása. Ekkor $h(x_1, x_2) \leq Ah(a_1, a_2) + 3rh_0A$ *és* $[K_0(x_1, x_2) : K_0] \leq 2.$

Végül tekintsük az

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 1 \quad , \qquad (x_1, x_2) \in C(\overline{\Gamma}, \varepsilon) \;\; \text{ismeretlenek} \tag{2.18}$$

egyenletet.

2.4. Tétel. (Bérczes, Evertse és Győry [8]) *Tegyük fel, hogy* (x_1, x_2) *a (2.18) egyenlet egy megoldása és hogy*

$$\varepsilon < \frac{0.09}{8Ah(a_1, a_2) + 20rh_0A}. \tag{2.19}$$

Ekkor

$$h(x_1, x_2) \leq 3Ah(a_1, a_2) + 5rh_0A \tag{2.20}$$

és

$$[K_0(x_1, x_2) : K_0] \leq 2. \tag{2.21}$$

Beukers és Schlickewei [11] dolgozatukban explicit felső korlátot adnak a (2.17) egyenlet megoldásszámára, míg Evertse, Schlickewei és Schmidt [29] eredményéből explicit korlátok vezethetők le a (2.17), (2.13), (2.18) egyenletek többismeretlenes általánosításainak megoldásszámára. Mint a fejezet elején láttuk a $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ és $C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$ halmazok lényegesen általánosabb formában kerültek bevezetésre (ld. [52], [55]). Rémond az [53], [54] dolgozatokban kvantitatív verzióját adta Evertse, Schlickewei és Schmidt [29] eredményének Abel-varietásokra illetve tóruszok részvarietásaira. Ugyanakkor megjegyezzük, hogy a [11], [29] és [52],

[53], [54], [55] dolgozatok eredményei ineffektívek, azaz nem szolgáltatnak még elméletileg sem eljárást a megoldások megkeresésére, míg a fent ismertetett eredményeink effektív eredmények.

Az ebben a fejezetben ismertetett Tételek bizonyításának sarokköve az alábbi két diofantikus approximációs tételünk.

Legyen K egy algebrai számtest, melynek foka d, M_K a K place-einek halmaza, és G a K^* egy végesen generált multiplikatív részcsoportja, melynek rangja $t > 0$. Legyen továbbá $\{\xi_1, \ldots, \xi_r\}$ egy (nem feltétlenül multiplikatíve független) generátorrendszere G-nek, úgy, hogy $\xi_1, \ldots, \xi_r$ között nincs egységgyök. Legyen

$$Q_G := h(\xi_1) \cdots h(\xi_r),$$

és minden $v \in M_K$ esetén definiáljuk a $P(v)$ értékét (2.4) szerint.

2.5. Tétel. (Bérczes, Evertse és Győry [8]) *Legyen $v \in M_K$, $\alpha \in K^*$ és tegyük fel hogy $\max(h(\alpha), 1) \le H$. Ekkor minden $\xi \in G$ esetén, melyre $\alpha\xi \neq 1$, igaz, hogy*

$$\log |1 - \alpha\xi|_v > -c_2(r, d, t) \frac{P(v)}{\log P(v)} Q_G H \log^* \left(\frac{P(v)h(\xi)}{H} \right), \tag{2.22}$$

ahol

$$c_2(r, d, t) = (16ed)^{3(t+2)} \left(d(\log 3d)^3\right)^{r-t} (t/e)^t.$$

Speciálisan, ha $r = t$ és $\{\xi_1, \ldots, \xi_t\}$ bázisa G/G_{tors}-nek, akkor $c_2(r, d, t)$ helyett (2.22)-ben $c_2(d, t) = 36(16ed)^{3t+5}(\log^* d)^2$ vehető.

Megjegyezzük, hogy $c_2(d, t)$ nem tartalmazza a t^t faktort.

Az alábbi tétel a 2.5. Tétel egyszerű következménye, mely ugyanakkor alkalmazások szempontjából fontos és érdekes.

2.6. Tétel. (Bérczes, Evertse és Győry [8]) *Legyen $\alpha \in K^*$ rögzített és tegyük fel hogy $\max(h(\alpha), 1) \le H$. Legyen továbbá $v \in M_K$, és $0 < \kappa \le 1$. Ekkor minden $\xi \in G$ esetén, melyre $\alpha\xi \neq 1$ és melyre*

$$\log |1 - \alpha\xi|_v < -\kappa h(\xi), \tag{2.23}$$

igazak az alábbi becslések:

$$h(\xi) < (c_2(r, d, t)/\kappa) \frac{P(v)}{\log P(v)} Q_G H \log^* \left(\frac{P(v)h(\xi)}{H} \right) \tag{2.24}$$

és

$$h(\xi) < 6.4(c_2(r,d,t)/\kappa)\frac{P(v)}{\log P(v)}Q_G H \cdot \\ \cdot \max\Big(\log\big((c_2(r,d,t)/\kappa)P(v)\big), \log^* Q_G\Big), \tag{2.25}$$

ahol $c_2(r,d,t)$ a 2.5. Tételbeli konstans.

Speciálisan, ha $r = t$ és $\{\xi_1,\dots,\xi_t\}$ bázisa G/G_{tors}-nek, akkor a (2.24) és (2.25) becslésekben $c_2(r,d,t)$ helyett $c_2(d,t)$ vehető.

A 2.5. és 2.6. Tételek bizonyításában a legfontosabb eszköz a logaritmikus formák elmélete, azaz a Baker-módszer. Bombieri [13] illetve Bombieri és Cohen [14], [15] a Thue-Siegel elvet kiterjesztve, felhasználva a Dyson Lemmát és bizonyos geometriai számelméleti eredményeket, kidolgozott egy másik effektív diofantikus approximációs módszert. Bugeaud [22], ezt a megközelítést követve és ezt két illetve három logaritmust tartalmazó formákra vonatkozó alsó becslésekkel kombinálva élesebb korlátot adott, mint Bombieri és Cohen. A fenti eredményünk jól összevethető Bugeaud eredményével, és a legtöbb paraméterben (kivéve esetenként a H és Q_G paramétereket) annál élesebb becslést ad.

2.3. Általánosított egységpontok görbéken

Ebben az alfejezetben $\mathcal{C} := \{(x,y) \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^2 \mid f(x,y) = 0\}$ alakú görbéket tekintünk ahol $f \in \overline{\mathbb{Q}}[X,Y]$ nem binom polinom. Itt egyrészt Bombieri és Gubler [16, p. 147, Theorem 5.4.5] másrészt Bérczes, Evertse és Győry [8, Theorems 2.1, 2.3 and 2.5] eredményeit általánosítjuk. Ez utóbbi eredmények szerepelnek jelen fejezet második alfejezetében is (ld. 2.1. Tétel, 2.2. Tétel, 2.4. Tétel). Pontosabban szólva, explicit felső korlátokat adunk azon $\mathbf{x}$ pontok magasságára és fokszámára, melyek benne vannak a $\mathcal{C}$ halmazban és a Γ, $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ illetve $C(\overline{\Gamma},\varepsilon)$ halmazok egyikében is. A $\mathcal{C} \cap \overline{\Gamma}$ halmazra vonatkozó eredményünk lényegében Liardet [46], [47] görbéken található divíziópontok végességére vonatkozó nevezetes eredményének első effektív változatát adja, abban a speciális esetben, amikor Γ kizárólag algebrai elemeket tartalmaz.

Legyen Γ a $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^2$ egy végesen generált részcsoportja. Jelölje továbbá $\overline{\Gamma}$, $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ és $C(\overline{\Gamma},\varepsilon)$ a (2.10), (2.11) és (2.12) alatt definiált halmazokat. Legyen $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_r\}$ a $\Gamma/\Gamma_{\mathrm{tors}}$ egy bázisa és

$$h_0 := \max\big(1, h(\mathbf{w}_1),\dots,h(\mathbf{w}_r)\big).$$

Jelölje K a legkisebb olyan számtestet melyre $\Gamma \subset (K^*)^2$, és legyen $d := [K : \mathbb{Q}]$. Legyen S a K place-einek az a legszűkebb halmaza, mely tartalmazza az összes végtelen place-t és melyre $\Gamma \subset (\mathcal{O}_S^*)^2$. Ekkor S véges és jelölje s az S számosságát. Legyen $\mathbf{P}$ a (2.5)-ben definiált mennyiség. A továbbiakban is használjuk a 2.1 alfejezetben bevezetett jelöléseket.

Legyen $f(X,Y) \in \overline{\mathbb{Q}}[X,Y]$ egy abszolút irreducibilis polinom, amely nem $aX^mY^n - b$ vagy $aX^m - bY^n$ alakú semmilyen $a, b \in \overline{\mathbb{Q}}$, $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ értékekre. Ez a feltétel természetes megszorítás, mivel ilyen alakú polinomok esetén már nem adható általános végességi állítás a $\mathbb{C} \cap \Gamma$, $\mathbb{C} \cap \overline{\Gamma}$, $\mathbb{C} \cap \overline{\Gamma}_\varepsilon$, $\mathbb{C} \cap C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$ halmazokra. Pontosabban, minden ilyen alakú polinom esetén van olyan végesen generált Γ csoport melyre a fenti metszeteknek végtelen sok eleme van. Jelölje L a K azon testbővítését, melyet f együtthatói generálnak. Legyen

$$\delta := \deg_s f, \quad H := \max(1, h(f)),$$
$$C_1 := \left(e^{13}\delta^7 d^3 r\right)^{r+3} s \cdot \frac{\mathbf{P}^{2\delta^2}}{\log \mathbf{P}} h_0^r \cdot \log^* \left(\max(\delta d s \mathbf{P}, \delta h_0)\right).$$

Legyen $\mathcal{C} \subset (\overline{\mathbb{Q}}^*)^2$ az $f(x,y) = 0$ által definiált görbe. Az f-re vonatkozó feltételezésünk szerint $\mathcal{C}$ nem eltoltja a $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^2$ egy valódi algebrai részcsoportjának.

2.7. Tétel. (Bérczes, Evertse, Győry és Pontreau [10]) *Minden* $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathcal{C} \cap \Gamma$ *pont esetén*

$$h(\mathbf{x}) = h(x) + h(y) \leq C_1 H.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti tételben szereplő korlát nem függ az L testtől, eltekintve attól az implicit függéstől ami a H magasságtól való függésből adódik.

Az alábbi eredményeket a fenti tétel és $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^2$-beli görbéken található kis-magasságú pontok számára adott felső korlátok kombinálásával igazoltuk.

2.8. Tétel. (Bérczes, Evertse, Győry és Pontreau [10]) *Legyen*

$$\varepsilon := \left(2^{48}\delta(\log\delta)^5\right)^{-1}. \tag{2.26}$$

Ekkor minden $\mathbf{x} \in \mathcal{C} \cap \overline{\Gamma}_\varepsilon$ *esetén*

$$h(\mathbf{x}) \leq r h_0 \delta C_1 + C_1 H, \quad [L(\mathbf{x}) : L] \leq 2^{50}\delta(\log\delta)^6.$$

2.9. Tétel. (Bérczes, Evertse, Győry és Pontreau [10]) *Legyen*

$$\varepsilon := \left(2^{50}\delta(\log\delta)^5\right)^{-1} \cdot \left(r h_0 \delta C_1 + C_1 H\right)^{-1}. \tag{2.27}$$

Ekkor minden $\mathbf{x} \in \mathcal{C} \cap C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$ *esetén*

$$h(\mathbf{x}) \leq 2 r h_0 \delta C_1 + 2 C_1 H, \quad [L(\mathbf{x}) : L] \leq 2^{50}\delta(\log\delta)^6.$$

Megjegyzés. Abban a speciális esetben, amikor f lineáris, (azaz $\mathcal{C}$ egy egyenes), a fenti tételeink lényegében a 2.1., 2.2. és 2.4. Tételeket adják, melyek eredetileg a [8] dolgozatban szerepeltek, csak ott nagyobb ε és élesebb felső korlátok mellet kerültek igazolásra.

2.4. N-dimenziós varietások általánosított egységpontjai

Ebben az alfejezetben N dimenziós varietások vizsgálatára fordítjuk figyelmünket.

Legyen Γ a $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$ egy végesen generált részcsoportja. Jelölje továbbá $\overline{\Gamma}$, $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ és $C(\overline{\Gamma},\varepsilon)$ a (2.1) alatt definiált halmazokat. Legyen $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_r\}$ a $\Gamma/\Gamma_{\mathrm{tors}}$ egy bázisa és

$$h_0 := \max\big(1, h(\mathbf{w}_1),\dots,h(\mathbf{w}_r)\big).$$

Jelölje K a legkisebb olyan számtestet, melyre $\Gamma \subset (K^*)^N$, és legyen $d := [K:\mathbb{Q}]$. Legyen S a K place-einek az a legszűkebb halmaza, mely tartalmazza az összes végtelen place-t és melyre $\Gamma \subset (\mathcal{O}_S^*)^N$. Ekkor S véges és jelölje s az S számosságát. Legyen $\mathbf{P}$ a (2.5)-ben definiált mennyiség.

Legyen

$$\mathcal{X} := \{\mathbf{x} \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^N :\ f_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1,\dots,m\}$$

a $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$ egy rész-varietása, ahol $f_1,\dots,f_m \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1,\dots,X_N]$ nem-konstans polinomok, melyek mindegyike 2 vagy 3 monomból áll. Legyen

$$\delta := \max(\deg f_1,\dots,\deg f_m), \quad H := \max(1, h(f_1),\dots,h(f_m)).$$

Jelölje L azt a legkisebb számtestet, mely tartalmazza a K testet és az f_i $(i = 1,\dots,m)$ polinomok minden együtthatóját.

Az $\mathcal{X}$ stabilizátorát a

$$\mathrm{Stab}(\mathcal{X}) = \Big\{\mathbf{x} \in (\overline{\mathbb{Q}}^*)^N \mid \mathbf{x}\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}\Big\}$$

halmazként definiáljuk, ahol $\mathbf{x}\mathcal{X} = \{\mathbf{xy}\ :\ \mathbf{y} \in \mathcal{X}\}$. $\mathrm{Stab}(\mathcal{X})$ nyilván a $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$ egy algebrai részcsoportja, és az $\mathcal{X}$ részvarietást definiáló $f_1,\dots,f_m$ polinomok függvényében effektív módon kiszámítható.

Legyenek

$$C^* := \big(e^{11}d^3r\big)^{r+3}(\delta h_0)^r s \cdot \frac{\mathbf{P}}{\log \mathbf{P}} \cdot \log^* \max(ds\mathbf{P}, \delta h_0) \tag{2.28}$$

és

$$\begin{cases} C_2 := C^* N(2\delta)^{N-1}, \\ C_3 := C^* \cdot 2mh_0 \left(r4^{r+1} \cdot d(\log 3d)^3 \cdot m\delta h_0\right)^r. \end{cases} \tag{2.29}$$

2.10. Tétel. (Bérczes, Evertse, Győry és Pontreau [10])
Tegyük fel, hogy $\mathcal{X}$ a $(\overline{\mathbb{Q}}^*)^N$ egy olyan rész-varietása, mely teljesíti a fent előírt feltételeket és legyen $\mathcal{H} := \mathrm{Stab}(\mathcal{X})$.
(i) *Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ véges. Ekkor minden $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \cap \Gamma$ esetén*

$$h(\mathbf{x}) \leq C_2 H.$$

(ii) *Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ végtelen. Ekkor $\mathcal{X} \cap \Gamma$ lefedhető egy*

$$\mathbf{x}_1\mathcal{H} \cup \cdots \cup \mathbf{x}_T\mathcal{H},$$

alakú véges unióval, ahol

$$\mathbf{x}_i\mathcal{H} \subset \mathcal{X}, \quad \mathbf{x}_i \in \Gamma, \quad h(\mathbf{x}_i) \leq C_3 H \text{ minden } i = 1, \ldots, T \text{ esetén.} \tag{2.30}$$

Az alábbiakban megfogalmazzuk az $\mathcal{X} \cap \overline{\Gamma}_\varepsilon$ és $\mathcal{X} \cap C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$ halmazokra vonatkozó eredményeinket.

2.11. Tétel. (Bérczes, Evertse, Győry és Pontreau [10]) *Legyen*

$$\varepsilon := \frac{0.03}{4\delta}. \tag{2.31}$$

(i) *Tegyük fel, hogy $\mathcal{H} := \mathrm{Stab}(\mathcal{X})$ véges. Ekkor minden $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \cap \overline{\Gamma}_\varepsilon$ esetén*

$$h(\mathbf{x}) < rh_0\delta C_2 + C_2 H, \quad [L(\mathbf{x}) : L] \leq 2^{m+N}\delta^N. \tag{2.32}$$

(ii) *Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ végtelen. Ekkor $\mathcal{X} \cap \overline{\Gamma}_\varepsilon$ lefedhető egy*

$$\mathbf{x}_1\mathcal{H} \cup \cdots \cup \mathbf{x}_T\mathcal{H},$$

alakú véges unióval, ahol minden $i = 1, \ldots, T$ esetén $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X} \cap \overline{\Gamma}_\varepsilon$, $\mathbf{x}_i\mathcal{H} \subset \mathcal{X}$, és ahol $h(\mathbf{x}_i)$ és $[L(\mathbf{x}_i) : L]$ felülről korlátozhatók egy kizárólag a $\Gamma, f_1, \ldots, f_m$ objektumoktól függő effektív módon kiszámítható konstanssal.

Megjegyzés. Minden további nélkül megadható lenne explicit alakban a 2.11. Tétel (ii) pontjában szereplő korlát, de ez igen bonyolult kifejezés lenne.

2.12. Tétel. (Bérczes, Evertse, Győry és Pontreau [10]) *Legyen*

$$\varepsilon := \frac{0.03}{4\delta(C_2\delta r h_0 + 2C_2H)}. \tag{2.33}$$

Tegyük fel, hogy $\mathrm{Stab}(\mathcal{X})$ *véges. Ekkor minden* $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \cap C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$ *esetén*

$$h(\mathbf{x}) \leq 2rh_0\delta C_2 + 2C_2H, \quad [L(\mathbf{x}) : L] \leq 2^{m+N}\delta^N.$$

Megjegyzés. Ha $\mathcal{H} := \mathrm{Stab}(\mathcal{X})$ végtelen, akkor általában $\mathcal{X} \cap C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$ nem feltétlenül fedhető le egy $\mathbf{x}_1\mathcal{H} \cup \cdots \cup \mathbf{x}_T\mathcal{H}$ alakú véges unióval. Valóban, tegyük fel, hogy $\dim \mathcal{X} > \dim \mathcal{H}$ és hogy $\mathcal{H} \cap \Gamma$ tartalmaz végtelen rendű pontokat. Válasszunk egy $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ pontot és egy $\mathbf{u} \in \mathcal{H} \cap \Gamma$ végtelen rendű elemet. Így $h(\mathbf{u}) > 0$ és bármely elég nagy n esetén

$$h(\mathbf{x}_0) \leq \varepsilon(1 + nh(\mathbf{u}) - h(\mathbf{x}_0)) \leq \varepsilon(1 + h(\mathbf{u}^n)).$$

Ezért $\mathbf{x} := \mathbf{x}_0\mathbf{u}^n \in \mathbf{x}_0\mathcal{H} \cap C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$, ami azt jelenti, hogy minden $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ esetén $\mathbf{x}_0\mathcal{H}$ tartalmaz elemeket az $C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$ halmazból. Ha $\mathcal{X} \cap C(\overline{\Gamma}, \varepsilon)$ egy $\cup_{i=1}^t \mathbf{x}_i\mathcal{H}$ alakú véges unió része lenne, akkor ugyanez lenne igaz $\mathcal{X}$-re is, ami lehetetlen.

3. fejezet

Eredmények általános végesen generált tartományok felett

Legyen $A := \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_r] \supset \mathbb{Z}$ egy végesen generált tartomány $\mathbb{Z}$ felett. Ebben a fejezetben végesen generált tartomány felett mindig egy $\mathbb{Z}$-t tartalmazó tartományt fogunk érteni, mely $\mathbb{Q}$ felett algebrai és transzcendens elemeket is tartalmazhat. Az A tartomány felett tekintett Diofantikus egyenletekre és problémákra vonatkozó első végességi eredmények a múlt század közepén születtek. Serge Lang a [40] könyvében és [39] cikkében számos, Diofantikus egyenletekre vonatkozó korábbi (racionális egészek vagy algebrai számtestek egészei feletti) végességi eredményt általánosított A feletti végességi eredményeket igazolva ezen egyenletekre. Egyebek között végességi eredményt igazolt A felett egységegyenletekre, Thue-egyenletekre, illetve görbék A-beli pontjaira. Ugyanakkor Lang eredményei ineffektívek voltak, azaz nem szolgáltattak még elvi eljárást sem a megoldások megkeresésére. Az első effektív végességi eredményeket végesen generált tartományok felett tekintett diofantikus egyenletekre vonatkozóan Győry Kálmán nyerte [34], [35] az 1980-as évek elején, amikoris kifejlesztett egy új effektív specializiciós eljárást. Ez lehetővé tette számára, hogy bizonyos speciális, nem csupán algebrai elemeket tartalmazó végesen generált tartományok felett effektív végességi eredményeket igazoljon különféle diofantikus egyenletekre és problémákra. Győry ilyen típusú eredményeket nyert egységegyenletekre, norma forma egyenletekre, index forma egyenletekre, diszkrimináns forma egyenletekre [34], valamint adott diszkriminánsú polinomokra és algebrai elemekre [35]. Később Brindza hasonló eredményeket publikált szuperelliptikus egyenletekre [19] és az általánosított Catalan egyenletre [20], míg Brindza és Pintér binér formák egyenlő értékeire [21], Végső [62] pedig a Schinzel-Tijdeman egyenletre nyert ilyen típusú eredményeket.

Evertse és Győry [27] 2013-ban Győry 1980-as évekbeli módszerét kombinálta Aschenbrenner [1] újabb eredményeivel, ezáltal úgy kiterjesztve a módszert, hogy az lehetővé tegye tetszőleges végesen generált tartományok feletti effektív végességi eredmények igazolását. Egyúttal a [27] dolgozatban effektív végességi eredményt igazoltak $ax + by = 1$, $x, y \in A^*$ alakú egységegyenletekre tetszőleges A végesen generált tartományok esetén.

Ebben a fejezetben egyrészt tetszőleges végesen generált tartomány feletti Thue-egyenletekre, szuperelliptikus egyenletekre és a Schinzel-Tijdeman egyenletre vonatkozó effektív eredményeket ismertetek, mely eredmények Jan-Hendrik Evertsevel és Győry Kálmánnal közös eredmények, és a [9] dolgozatban jelentek meg. Másrészt szintén ebben a fejezetben ismertetem végesen generált tartományok feletti görbék egységpontjaira és divízópontjaira vonatkozó effektív végességi eredményeimet, melyek a [7] és [6] egyszerzős cikkeimben kerültek publikálásra.

3.1. Végesen generált tartományok

Az eredmények megfogalmazása előtt néhány fogalmat és jelölést vezetünk be. Legyen $r > 0$ és $A := \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_r]$ egy nulla-karakterisztikájú végesen generált tartomány $\mathbb{Z}$ felett. Ekkor A tekinthető

$$A \cong \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_r]/\mathcal{I} \tag{3.1}$$

faktorgyűrűnek, ahol $\mathcal{I}$ az $R := \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_r]$ polinomgyűrű azon ideálja, amelyik az $f(z_1, \dots, z_r) = 0$ tulajdonságú $f \in R$ polinomokból áll. Tudjuk továbbá, hogy ekkor az $\mathcal{I}$ ideál végesen generált, azaz

$$\mathcal{I} = (f_1, \dots, f_t) \qquad \text{ahol} \quad f_1, \dots, f_t \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_r]. \tag{3.2}$$

Így $f_1, \dots, f_t$ lényegében rögzíti az A végesen generált tartomány egy reprezentációját. Emlékeztetünk, hogy A akkor és csakis akkor lesz 0 karakterisztikájú tartomány, ha $\mathcal{I}$ prímideál és $\mathcal{I} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Megadva az $\mathcal{I}$ ideál $f_1, \dots, f_t$ generátorait ez a tulajdonság effektív módon ellenőrizhető (ld. [1] és [38]).

Jelölje K az A hányadostestét. Azt mondjuk, hogy egy $f \in R$ *reprezentánsa* az $\alpha \in A$ elemnek, ha $f(z_1, \dots, z_r) = \alpha$. Továbbá azt mondjuk, hogy egy $(f, g) \in R^2$ pár *reprezentánsa* a $\beta \in K$ elemnek, ha $g \notin \mathcal{I}$ (azaz $g(z_1, \dots, z_r) \neq 0$) és $\frac{f(z_1,\dots,z_r)}{g(z_1,\dots,z_r)} = \beta$. Használni fogjuk azt az elnevezést is, hogy f *reprezentálja* az α elemet, illetve (f, g) *reprezentálja* a β elemet. Nyilván, minden $\alpha \in A$ elemnek végtelen sok reprezentánsa van, és minden $\beta \in K$ elemhez is végtelen sok reprezentáns pár tartozik. Ugyanakkor, mivel effektív módon eldönthető az, hogy R egy polinomja benne van-e R egy adott ideáljában vagy sem (ld. [1]), így az is effektív módon eldönthető, hogy két polinom az A tartomány ugyanazon elemét reprezentálja-e, illetve, hogy két polinompár ugyanannak a K-beli elemnek a reprezentáns párja-e. Valóban, két $f, f' \in R$ polinom akkor és csakis akkor reprezentálja ugyanazt az $\alpha \in A$ elemet, ha $f - f' \in \mathcal{I}$, és két $(f, g), (f', g') \in R^2$ polinompár akkor és csakis akkor reprezentálja ugyanazt a $\beta \in K$ elemet, ha $fg' - f'g \in \mathcal{I}$.

Az A elemeit reprezentánsaik segítségével fogjuk mérni. Egy $f \in R$ polinom esetén jelölje $\deg f$ az f teljes fokszámát és $h(f)$ az f abszolút logaritmikus magasságát, azaz együtthatói abszolút értékei maximumának logaritmusát. Definiáljuk továbbá egy nem-azonosan nulla f polinom méretét az alábbiak szerint:

$$s(f) := \max(1, \deg f, h(f)).$$

A konstans 0 polinom esetén legyen $s(0) := 1$.

A fejezet során az $O(\cdot)$ jelölést egy olyan mennyiség helyén használjuk, amelyik c-szer a zárójelben szereplő kifejezés, ahol c egy effektív módon kiszámítható abszolút konstans, mely az O-szimbólum minden megjelenése esetén különböző lehet. A fejezet során végig használni fogjuk a $\log^* a := \max(1, \log a)$ $(a > 0)$, és $\log^* 0 := 1$ jelölést is.

3.2. Effektív eredmények diofantikus egyenletekre végesen generált tartományok felett

Legyen A egy $\mathbb{Z}$-felett végesen generált tartomány, amint azt a 3.1 alfejezetben definiáltuk. Ebben az alfejezetben egyrészt Thue egyenletekkel, azaz $F(x, y) = \delta$, $x, y \in A$, alakú egyenletekkel foglalkozunk, ahol F egy binér forma A-beli együtthatókkal és ahol δ az A egy nem-nulla eleme. Másrészt, hiper- és szuperelliptikus egyenleteket, azaz $f(x) = \delta y^m$, $x, y \in A$, alakú egyenleteket vizsgálunk, ahol $f \in A[X]$, $\delta \in A \setminus \{0\}$ és ahol $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

A szükséges végességi feltételek mellett effektív felső korlátot adunk a megoldások méretére az m valamint az A, δ, F és f alkalmas reprezentációinak függvényében. Eredményeink elméleti eljárást adnak az összes megoldás megkeresésére. Vizsgáljuk továbbá a Schinzel-Tijdeman egyenletet, azaz az $f(x) = \delta y^m$ egyenletet az $x, y \in A$ és $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ismeretlenekben és effektív felső korlátot adunk az m értékére.

Mint már említettük, a korábbi effektív eredmények csak bizonyos speciális végesen generált tartományok feletti Thue egyenletekre, illetve hiper- és szuperelliptikus egyenletekre vonatkoztak, míg mi nem teszünk semmilyen megszorítást az A végesen generált tartományra. Az x, y és m megoldások méretére adott felső korlátaink pedig teljesen újak, a speciális végesen generált tartományok tekintetében is.

Bizonyításaink Thue, hiper- és szuperelliptikus egyenletekre vonatkozó korábbi, számtest és függvénytest esetbeli eredményeken és a Győry-féle specializációk fent említett finomításán múlnak.

3.2.1. Thue egyenletek

Legyen A egy Z-felett végesen generált tartomány, amint azt a 3.1 alfejezetben definiáltuk. Tekintsük az

$$F(x,y)=\delta \quad , \qquad x,y\in A \qquad \text{ismeretlenek} \tag{3.3}$$

Thue egyenletet, ahol

$$F(X,Y)=a_0X^n+a_1X^{n-1}Y+\cdots+a_nY^n\in A[X,Y]$$

egy binér forma, melynek fokszáma $n\geq 3$, diszkriminánsa $D_F\neq 0$, és ahol $\delta\in A\setminus\{0\}$. Rögzítsük az $a_0,a_1,\ldots,a_n,\delta$ elemek

$$\tilde{a_0},\tilde{a_1},\ldots,\tilde{a_n},\tilde{\delta}\in\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_r]$$

reprezentánsait. Annak érdekében, hogy a $\delta\neq 0$ és $D(F)\neq 0$ tulajdonságokat garantáljuk olyan reprezentánsokat kell választanunk, melyekre $\tilde{\delta}\notin\mathcal{I}$ és $D_{\tilde{F}}\notin\mathcal{I}$, ahol $D_{\tilde{F}}$ az $\tilde{F}:=\sum_{j=0}^{n}\tilde{a}_jX^{n-j}Y^j$ polinom diszkriminánsa. Ezeket a tulajdonságokat effektív módon ellenőrizhetjük (ld. például Aschenbrenner [1, Theorem A]). Tegyük fel, hogy

$$\begin{cases}\max(\deg f_1,\ldots,\deg f_t,\deg\tilde{a_0},\deg\tilde{a_1},\ldots,\deg\tilde{a_n},\deg\tilde{\delta})\leq d\\ \max(h(f_1),\ldots,h(f_t),h(\tilde{a_0}),h(\tilde{a_1}),\ldots,h(\tilde{a_n}),h(\tilde{\delta}))\leq h,\end{cases} \tag{3.4}$$

ahol $d\geq 1$, $h\geq 1$.

3.1. Tétel. (Bérczes, Evertse, Győry [9]) *A (3.3) minden x,y megoldásának létezik olyan $\tilde{x},\tilde{y}$ reprezentánsa, melyre*

$$s(\tilde{x}),s(\tilde{y})\leq\exp\left(n!(nd)^{\exp O(r)}(h+1)\right). \tag{3.5}$$

A korlát exponenciális függése az $n!$, d és h paraméterektől egy számtestek feletti Thue egyenletek megoldásaira adott Baker-típusú becslésből adódik, melyet a bizonyításban használnunk kellett. Az r paramétertől való többszörösen exponenciális függés a polinomgyűrkbeli effektív kommutatív algebrai számításokból adódik, ami a fent említett, Evertse és Győry nevéhez fűződő specializációs módszer hátterében áll.

Most megmutatjuk, hogy a fenti tétel alapján a (3.3) Thue-egyenlet effektív módon megoldható.

3.2. Következmény. (Bérczes, Evertse, Győry [9])
Legyenek $f_1, \ldots, f_t \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r]$ *adott polinomok, melyekre* A *egy* $\mathbb{Z}$ *felett végesen generált tartomány, és legyenek* $\tilde{a_0}, \ldots, \tilde{a_n}, \tilde{\delta} \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r]$ *a* $D_{\tilde{F}}, \tilde{\delta} \notin \mathcal{I}$ *tulajdonságokat teljesítő reprezentánsok. Ekkor létezik egy olyan eljárás, mellyel meghatározható egy polinompárokból álló véges lista, amelyik a (3.3) egyenlet minden* (x, y) *megoldásának pontosan egy reprezentánsát tartalmazza.*

Bizonyítás. Jelöljük C-vel a (3.5)-ben szereplő korlátot. Minden olyan $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r]$ polinompár esetén, melynek mérete legfeljebb C ellenőrizzük, hogy $\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{\delta} \in \mathcal{I}$ igaz-e. Ezután minden olyan $\tilde{x}, \tilde{y}$ pár esetén, melyre $\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{\delta} \in \mathcal{I}$ igaz, ellenőrizzük, hogy $\tilde{x}, \tilde{y}$ modulo $\mathcal{I}$ megegyezik-e valamelyik korábbi párral, és csak akkor tartjuk meg, ha modulo $\mathcal{I}$ különbözik minden korábban talált pártól. Így az egyenlet minden x, y megoldásához találtunk pontosan egy $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r]$ reprezentánst.

3.2.2. Hiper- és szuperelliptikus egyenletek

Most tekintsük az

$$F(x) = \delta y^m \quad , \qquad x, y \in A \qquad \text{ismeretlenek} \tag{3.6}$$

egyenletet, ahol

$$F(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \in A[X]$$

egy n fokszámú polinom, melynek diszkriminánsa $D_F \neq 0$, és ahol $\delta \in A \setminus \{0\}$. Tegyük fel, hogy vagy $m = 2$ és $n \geq 3$, vagy $m \geq 3$ és $n \geq 2$. Ha $m = 2$, akkor a (3.6) egyenletet *hiperelliptikus egyenletnek*, míg ha $m \geq 3$, akkor *szuperelliptikus egyenletnek* nevezzük. Rögzítsük most is az $a_0, a_1, \ldots, a_n, \delta$ valamely

$$\tilde{a_0}, \tilde{a_1}, \ldots, \tilde{a_n}, \tilde{\delta} \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r]$$

reprezentánsait. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $\delta \neq 0$ és $D_F \neq 0$ legyen az, hogy se $\tilde{\delta}$ se az $\tilde{F} := \sum_{j=0}^{n} \tilde{a}_j X^{n-j}$ polinom diszkriminánsa ne tartozzon az $\mathcal{I}$ ideálhoz. Tegyük fel továbbá, hogy

$$\begin{cases} \max(\deg f_1, \ldots, \deg f_t, \deg \tilde{a_0}, \deg \tilde{a_1}, \ldots, \deg \tilde{a_n}, \deg \tilde{\delta}) \leq d \\ \max(h(f_1), \ldots, h(f_t), h(\tilde{a_0}), h(\tilde{a_1}), \ldots, h(\tilde{a_n}), h(\tilde{\delta})) \leq h, \end{cases} \tag{3.7}$$

ahol $d \geq 1$, $h \geq 1$.

3.3. Tétel. (Bérczes, Evertse, Győry [9]) *A (3.6) egyenlet minden x, y megoldásának létezik olyan $\tilde{x}, \tilde{y}$ reprezentánsa, melyre*

$$s(\tilde{x}), s(\tilde{y}) \leq \exp\left(m^3 (nd)^{\exp O(r)} (h+1)\right). \tag{3.8}$$

A Thue egyenlet esetéhez teljesen hasonlóan effektív módon megadható egy polinompárokból álló véges lista, melyben a (3.6) minden (x, y) megoldásának pontosan egy reprezentánsa szerepel.

Következő eredményünk a Schinzel-Tijdeman egyenletre vonatkozik, ami szintén a (3.6) egyenlet, de három ismeretlenben, éspedig az $x, y \in A$ és $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ismeretlenekben.

3.4. Tétel. (Bérczes, Evertse, Győry [9]) *Tegyük fel, hogy a (3.6) egyenletben az F diszkriminánsa nem-nulla és $n \geq 2$. Legyen $x, y \in A$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ a (3.6) egyenlet egy megoldása. Ekkor*

$$m \leq \exp\left((nd)^{\exp O(r)} (h+1)\right) \tag{3.9}$$

$$\textit{ha } y \in \overline{\mathbb{Q}},\ y \neq 0,\ y \textit{ nem egységgyök,}$$

$$m \leq (nd)^{\exp O(r)} \quad \textit{ha } y \notin \overline{\mathbb{Q}}. \tag{3.10}$$

Megjegyezzük, hogy a (3.9) alatt található feltétel szükséges, ugyanis, ha y nulla vagy egységgyök, akkor m-re nem adható felső korlát.

3.3. Egységpontok görbéken végesen generált tartományok felett

Legyen A végesen generált tartomány, amint azt a 3.1 alfejezetben definiáltuk, legyen K az A hányadosteste és A^* az A egységcsoportja.

Legyen $F \in A[X, Y]$ egy nem-konstans polinom. Lang [39] egy 1960-as eredménye szerint az

$$F(x, y) = 0 \quad , \qquad x, y \in A^* \quad \text{ismeretlenek} \tag{3.11}$$

egyenletnek csak végesen sok megoldása van, feltéve, hogy F nem osztható egyetlen

$$X^m Y^n - \alpha \qquad \text{vagy} \qquad X^m - \alpha Y^n \tag{3.12}$$

alakú polinommal sem, ahol m, n nem-negatív egészek, melyek közül legalább az egyik nem-nulla, és ahol $\alpha \in A^*$. Lang bizonyítása ugyanakkor ineffektív. A Lang tételében megkövetelt feltételek, azaz hogy A végesen generált és F nem osztható egyelten (3.12) alakú polinommal sem, alapvetően szükségesek. Egyrészt, ha A nem végesen generált $\mathbb{Z}$ felett, akkor végesség már nem igazolható, másrészt minden olyan F polinom esetén, amely osztható valamely (3.12) alakú polinommal, megadható olyan A $\mathbb{Z}$ felett végesen generált tartomány, melyre a (3.11) egyenletnek végtelen sok megoldása van. Sőt, ha F osztható egy (3.12) alakú polinommal és α teljes d-edik hatvány A-ban, ahol d az m és n legnagyobb közös osztója, akkor a (3.11) egyenletnek végtelen sok megoldása van minden A $\mathbb{Z}$ felett végesen generált tartomány esetén. Bombieri és Gubler [16] (Theorem 5.4.5) Lang eredményére effektív bizonyítást adott abban a speciális esetben, amikor A egy számtest S-egészeinek a gyűrűje, majd ugyanebben az esetben Bérczes, Evertse, Győry és Pontreau [10] explicit effektív felső korlátot adtak az x, y megoldások magasságára.

Ebben az alfejezetben Lang fent említett nevezetes eredményének effektív verzióját ismertetem tetszőleges A végesen generált tartományok felett. Eredményem szerint az A tartomány és az F együtthatóinak egy-egy megfelelő reprezentációját rögzítve elméletileg meghatározható a (3.11) egyenlet minden megoldása a (3.12) feltételnél egy enyhén szigorúbb megszorítás mellett. Pontosabban a (3.12) feltételben $\alpha \in \overline{K}^*$ lehet az $\alpha \in A^*$ helyett. Lényegében ennek az eredménynek egy kvantitatív verzióját adom, explicit felső korlátot adva az x és y megoldások méretére. A bizonyítás hátterében itt is a Győry [34], [35] által kifejlesztett majd Evertse és Győry [27] által kiterjesztett módszer áll.

Legyen A egy (3.1) formában megadott végesen generált tartomány, ahol az $\mathcal{I}$ ideált generáló polinomok $f_1, \ldots, f_t \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r]$. Jelölje K az A hányadostestét és $\overline{K}$ annak algebrai lezártját.

Legyen $F(X, Y) = \sum_{(i,j)\in I} a_{ij} X^i Y^j \in A[X, Y]$ egy polinom melynek teljes fokszáma $N := \deg F$, és tegyük fel, hogy F teljesíti az alábbi feltételt:

$$\begin{aligned} &F \textbf{ nem osztható} \text{ egyetlen nem-konstans} \\ &\quad X^m Y^n - \alpha \quad \text{vagy} \quad X^m - \alpha Y^n, \\ &\quad \text{alakú polinommal sem, ahol } m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ és } \alpha \in \overline{K}^*. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Újra megjegyezzük, hogy minden olyan polinom esetén amely nem teljesíti a (3.13) feltételt, megadható egy olyan A $\mathbb{Z}$ felett végesen generált tartomány, melyre a (3.11) egyenletnek végtelen sok megoldása van. Tegyük fel továbbá, hogy rögzítettük az $a_{ij} \in A$ elemek egy-egy $\tilde{a}_{ij} \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r]$ reprezentánsát. Legyen $\tilde{F}(X, Y) := \sum_{(i,j)\in I} \tilde{a}_{ij} X^i Y^j$. Tegyük fel, hogy

$$\begin{cases} \deg f_1, \ldots, \deg f_t, \deg \tilde{a}_{ij} \leq d \;\; \text{minden} \;\; (i,j) \in I \text{ esetén} \\ h(f_1), \ldots, h(f_t), h(\tilde{a}_{ij}) \leq h \;\; \text{minden} \;\; (i,j) \in I \text{ esetén,} \end{cases} \tag{3.14}$$

ahol $d > 1$ és $h > 1$ valós számok. A disszertáció 8. fejezetében (ld. még [7]) igazoljuk, hogy a (3.13) effektív módon eldönthető adott $f_1, \ldots, f_t$ és $\tilde{a}_{ij}$ esetén.

3.5. Tétel. (Bérczes [7]) *Legyen A egy végesen generált tartomány, mint fent, és tegyük fel, hogy F teljesíti a (3.13) feltételt. Ekkor a*

$$\mathcal{C} := \{(x, y) \in (A^*)^2 | F(x, y) = 0\} \tag{3.15}$$

halmaz minden (x, y) eleme esetén léteznek az x, y, x^{-1} és y^{-1} elemeknek olyan $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{x}'$ és $\tilde{y}'$ reprezentációi, melyekre

$$s(\tilde{x}), s(\tilde{y}), s(\tilde{x}'), s(\tilde{y}') \leq \exp\left\{(2d)^{\exp O(r)}(2N)^{(\log^* N)\cdot \exp O(r)} \cdot (h+1)^3\right\}. \tag{3.16}$$

Megjegyezzük, hogy a fenti eredmény effektív abban az értelemben, hogy elméletileg eljárást biztosít a (3.15) halmaz összes elemének meghatározásához. Valóban, csak véges sok olyan $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r]$-beli polinom van, melynek mérete a (3.16) korlát alatt van, és ezek effektív módon felsorolhatók. Továbbá, $(x, y) \in \mathcal{C}$ akkor és csakis akkor teljesül, ha léteznek olyan $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}', \tilde{y}' \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r]$ polinomok, melyeknek mérete a (3.16) korlát alatt van, és amelyekre

$$\tilde{x} \cdot \tilde{x}' - 1, \ \tilde{y} \cdot \tilde{y}' - 1, \ \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{I}. \tag{3.17}$$

Tehát csak annyit kell tennünk, hogy felsoroljuk az összes olyan $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}', \tilde{y}')$ polinom négyest melyre $s(\tilde{x}), s(\tilde{y}), s(\tilde{x}'), s(\tilde{y}')$ kisebb a tételbeli korlátnál, és ellenőrizzük, hogy (3.17) teljesül-e. Végül csoportosítanunk kell az összes olyan négyest melyben $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ugyanazt az $(x, y) \in (A^*)^2$ párt reprezentálja és minden csoportból kiveszünk egy elemet. Így egy olyan listát kapunk, mely a (3.15) halmaz minden elemére pontosan egy reprezentációt tartalmaz.

3.4. Divíziópontok görbéken végesen generált tartományok felett

Legyen ismét $A := \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_r] \supset \mathbb{Z}$ egy végesen generált tartomány és jelölje K az A hányadostestét, K^* pedig K nem-nulla elemeinek multiplikatív csoportját. Jelölje $\overline{K}$ a K algebrai lezártját, és $\overline{K}^*$ a $\overline{K}$ egységcsoportját. Legyen Γ a K^* egy végesen generált részcsoportja és legyen $F(X, Y) \in A[X, Y]$ egy polinom. 1960-ban Lang [39] belátta, hogy az (3.11) egyenletnél általánosabb

$$F(x, y) = 0 \quad x, y \in \Gamma \quad \text{ismeretlenek} \tag{3.18}$$

egyenletnek csak véges sok megoldása van, feltéve, hogy F nem osztható egyetlen

$$X^m Y^n - \alpha \qquad \text{vagy} \qquad X^m - \alpha Y^n \tag{3.19}$$

alakú polinommal sem, ahol m, n nem-negatív egészek, melyek nem mindegyike nulla, és $\alpha \in \Gamma$. Lang bizonyítása ugyanakkor ineffektív volt. Bérczes [7] (ez egyben a jelen disszertáció 3.5. Tétele is) a teljesen általános esetben, végesen generált tartományok felett igazolta Lang eredményének egy effektív változatát. Megjegyezzük, hogy az effektív eredmények enyhén szigorúbb feltétel mellett kerültek igazolásra mint Lang eredménye. Nevezetesen a (3.19) feltételben az effektív esetben $\alpha \in \Gamma$ helyett $\alpha \in \overline{K}^*$ szerepel.

Jelölje $\overline{\Gamma}$ a Γ divíziócsoportját, azaz a

$$\overline{\Gamma} := \left\{ x \in \overline{K}^* \mid \exists\, m \in \mathbb{N},\ x^m \in \Gamma \right\}$$

által definiált csoportot. Lang ([41], [42], ld. még [43]) azt sejtette, hogy a fenti egyenletnek csak véges sok $x, y \in \overline{\Gamma}$ megoldása van ugyanazon (3.19) feltétel mellett, de most $\alpha \in \overline{\Gamma}$ értékeket megengedve. Liardet [46], [47] dolgozataiban igazolta Lang sejtését, de eredménye ineffektív volt.

A számtest esetben Liardet tételének egy effektív verzióját Bérczes, Evertse, Győry és Pontreau [10] bizonyították (ld. egyúttal jelen disszertáció 2.8. Tételét).

Ebben az alfejezetben Liardet tételének effektív változatát ismertetem a teljesen általános esetben. Ez Liardet tételének az első effektív változata ebben az általánosságban. Az eredmény a [6] egyszerzős dolgozatomban került bizonyításra.

Az eredményünk nem csak effektív, hanem kvantitatív is abban az értelemben, hogy explicit felső korlátot is ad az $x, y \in \overline{\Gamma}$ megoldások méretére. A bemutatott eredmény közös általánosítása Bombieri és Gubler [16, p. 147, Theorem 5.4.5], Bérczes, Evertse, Győry és Pontreau [10] (ld. jelen disszertáció 2.7. Tétele) valamint Bérczes [7] (ld. jelen disszertáció 3.5. Tétele) eredményeinek. Továbbá, az ismertetett eredmény szintén általánosítása Bérczes, Evertse és Győry [8] (ld. jelen disszertáció 2.3. Következménye) valamint Evertse és Győry [27] egységegyenletekre vonatkozó eredményeinek.

A bizonyítás fő eszköze Győry (ld. [34], [35]) egy az 1980-as években bevezetett effektív specializációs módszere, pontosabban annak Evertse és Győry [27] által 2013-ban finomított változata. A bizonyítás fő nehézsége, hogy egyrészt nem csak a megoldások magasságát, de a K feletti fokszámát is becsülnünk kell, másrészt $\overline{\Gamma}$ elemeire nem áll rendelkezésünkre semmilyen kézenfekvő reprezentáció. Kiemelendő még, hogy az irodalomban ez az első effektív végességi eredmény egy tetszőleges végesen generált csoport divíziócsoportja feletti diofantikus egyenlet megoldásaira.

Legyen $A := \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_r]$ egy végesen generált tartomány, amint azt a 3.1 alfejezetben definiáltuk, és jelölje K az A hányadostestét. Legyenek $\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in K^*$ a K test tetszőleges nem-nulla elemei, alkalmas $(g_1, h_1), \ldots, (g_s, h_s)$ reprezentáns párok segítségével megadva. Definiáljuk a

$$\Gamma := \left\{\gamma_1^{l_1} \ldots \gamma_s^{l_s} \mid l_1, \ldots, l_s \in \mathbb{Z}\right\} \tag{3.20}$$

végesen generált csoportot és annak

$$\overline{\Gamma} := \left\{\delta \in \overline{K} \mid \exists\ m \in \mathbb{Z}_{>0} :\ \delta^m \in \Gamma\right\} \tag{3.21}$$

divíziócsoportját.

Legyen $I \subset \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ egy nem-üres halmaz, és $F(X,Y) = \sum_{(i,j)\in I} a_{ij} X^i Y^j \in A[X,Y]$ egy polinom amelyik teljesíti az alábbi feltételt:

$$\begin{array}{l} F\ \textbf{nem osztható egyetlen} \\ X^mY^n - \alpha \quad \text{vagy} \quad X^m - \alpha Y^n \text{alakú nem-konstans polinommal sem} \\ \text{ahol } m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ és } \alpha \in \overline{K}^*. \end{array} \tag{3.22}$$

Megjegyezzük, hogy minden olyan polinom esetén amely nem teljesíti a (3.22) feltételt, megadható egy olyan Γ végesen generált csoport, melyre a (3.18) egyenletnek végtelen sok megoldása van. Megjegyezzük továbbá, hogy ez a tulajdonság effektív módon eldönthető, amint az szerepel a disszertáció 8. fejezetében (ld. még [7]). Legyen $N := \deg F$ az F teljes fokszáma, és tegyük fel, hogy F az a_{ij} $((i,j) \in I)$ együtthatóinak alkalmas $\tilde{a}_{ij}$ reprezentánsai által van megadva.

Tegyük fel továbbá, hogy

$$\begin{cases} \deg f_1, \ldots, \deg f_t, \deg g_1, \ldots, \deg g_s, \deg h_1, \ldots, \deg h_s, \deg \tilde{a}_{ij} \leq d \\ h(f_1), \ldots, h(f_t), h(g_1), \ldots, h(g_s), h(h_1), \ldots, h(h_s), h(\tilde{a}_{ij}) \leq h, \end{cases} \tag{3.23}$$

ahol $(i,j) \in I$ és $d > 1$, $h > 1$ valós számok.

3.6. Tétel. (Bérczes [6]) *Legyen A egy végesen generált tartomány mint fent, és $\overline{\Gamma}$ az imént definiált divíziócsoport. Legyen $F(X,Y) \in A[X,Y]$ egy polinom, amelyik teljesíti a (3.22) feltételt. Definiáljuk a*

$$\mathcal{C} := \{(x,y) \in (\overline{\Gamma})^2 | F(x,y) = 0\} \tag{3.24}$$

halmazt.

(i) *Ekkor létezik olyan m pozitív egész, melyre*

$$m \leq \exp\left\{N^6 (2d)^{\exp\{C_3(r+s)\}} (h+1)^{4s}\right\} \tag{3.25}$$

ahol C_3 *egy alkalmas, effektív módon kiszámítható konstans, úgy, hogy erre az* m *értékre*

$$x^m \in \Gamma \qquad \textit{és} \qquad y^m \in \Gamma, \qquad \textit{minden } (x,y) \in \mathcal{C} \textit{ esetén.}$$

(ii) *Pontosabban, létezik egy olyan* C_4 *effektív módon kiszámítható abszolút konstans, hogy minden* $(x,y) \in \mathcal{C}$ *esetén léteznek olyan* $t_{1,x}, \ldots, t_{s,x}, t_{1,y}, \ldots, t_{s,y}$ *egészek, melyekre*

$$t_{i,x}, t_{i,y} \leq \exp\left\{\exp\left\{N^{12}(2d)^{\exp\{C_4(r+s)\}}(h+1)^{8s}\right\}\right\} \tag{3.26}$$

minden $i = 1, \ldots, s$, *értékre, és*

$$x^m = \gamma_1^{t_{1,x}} \ldots \gamma_s^{t_{s,x}}, \qquad y^m = \gamma_1^{t_{1,y}} \ldots \gamma_s^{t_{s,y}}. \tag{3.27}$$

Irodalomjegyzék

[1] M. Aschenbrenner, Ideal membership in polynomial rings over the integers, *J. Amer. Math. Soc.*, **17** (2004), 407–442.

[2] A. Baker, Contributions to the theory of Diophantine equations I. On the representation of integers by binary forms, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **263** (1967/68), 173–191.

[3] A. Baker, Bounds for the solutions of the hyperelliptic equation, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **65** (1969), 439–444.

[4] A. Baker, *Transcendental number theory*, Cambridge University Press, London-New York, 1975.

[5] A. Baker and G. Wüstholz, *Logarithmic forms and Diophantine geometry*, vol. 9 of *New Mathematical Monographs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[6] A. Bérczes, Effective results for division points on curves in $\mathbb{G}_m^2$, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **27** (2015), 405–437.

[7] A. Bérczes, Effective results for unit points on curves over finitely generated domains, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **158** (2015), 331–353.

[8] A. Bérczes, J.-H. Evertse and K. Győry, Effective results for linear equations in two unknowns from a multiplicative division group, *Acta Arith.*, **136** (2009), 331–349.

[9] A. Bérczes, J.-H. Evertse and K. Győry, Effective results for Diophantine equations over finitely generated domains, *Acta Arith.*, **163** (2014), 71–100.

[10] A. Bérczes, J.-H. Evertse, K. Győry and C. Pontreau, Effective results for points on certain subvarieties of tori, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **147** (2009), 69–94.

[11] F. Beukers and H. P. Schlickewei, The equation $x+y=1$ in finitely generated groups, *Acta Arith.*, **78** (1996), 189–199.

[12] F. Beukers and D. Zagier, Lower bounds of heights of points on hypersurfaces, *Acta Arith.*, **79** (1997), 103–111.

[13] E. Bombieri, Effective Diophantine approximation on $\mathbf{G}_m$, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **20** (1993), 61–89.

[14] E. Bombieri and P. B. Cohen, Effective Diophantine approximation on $\mathbb{G}_M$. II, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **24** (1997), 205–225.

[15] E. Bombieri and P. B. Cohen, An elementary approach to effective Diophantine approximation on $\mathbb{G}_m$, in: *Number theory and algebraic geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, pp. 41–62.

[16] E. Bombieri and W. Gubler, *Heights in Diophantine geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[17] E. Bombieri and U. Zannier, Algebraic points on subvarieties of $\mathbf{G}_m^n$, *Internat. Math. Res. Notices*, (1995), 333–347.

[18] B. Brindza, On S-integral solutions of the equation $y^m = f(x)$, *Acta Math. Hungar.*, **44** (1984), 133–139.

[19] B. Brindza, On the equation $f(x) = y^m$ over finitely generated domains, *Acta Math. Hungar.*, **53** (1989), 377–383.

[20] B. Brindza, The Catalan equation over finitely generated integral domains, *Publ. Math. Debrecen*, **42** (1993), 193–198.

[21] B. Brindza and Á. Pintér, On equal values of binary forms over finitely generated fields, *Publ. Math. Debrecen*, **46** (1995), 339–347.

[22] Y. Bugeaud, Bornes effectives pour les solutions des équations en S-unités et des équations de Thue-Mahler, *J. Number Theory*, **71** (1998), 227–244.

[23] Y. Bugeaud and K. Győry, Bounds for the solutions of unit equations, *Acta Arith.*, **74** (1996), 67–80.

[24] J. Coates, An effective p-adic analogue of a theorem of Thue, *Acta Arith.*, **15** (1968/69), 279–305.

[25] J.-H. EVERTSE, Points on subvarieties of tori, in: *A panorama of number theory or the view from Baker's garden (Zürich, 1999)*, Cambridge Univ. Press, 2002, pp. 214–230.

[26] J.-H. EVERTSE and K. GYŐRY, Discriminant Equations in Diophantine Number Theory, Cambridge University Press, to appear.

[27] J.-H. EVERTSE and K. GYŐRY, Effective results for unit equations over finitely generated integral domains, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **154** (2013), 351–380.

[28] J.-H. EVERTSE and K. GYŐRY, *Unit Equation in Diophantine Number Theory*, Cambridge University Press, 2015.

[29] J.-H. EVERTSE, H. P. SCHLICKEWEI and W. M. SCHMIDT, Linear equations in variables which lie in a multiplicative group, *Ann. of Math. (2)*, **155** (2002), 807–836.

[30] K. GYŐRY, Sur l'irréductibilité d'une classe des polynômes. II, *Publ. Math. Debrecen*, **19** (1972), 293–326.

[31] K. GYŐRY, Sur les polynômes à coefficients entiers et de dicriminant donné II, *Publ. Math. Debrecen*, **21** (1974), 125–144.

[32] K. GYŐRY, On the number of solutions of linear equations in units of an algebraic number field, *Comment. Math. Helv.*, **54** (1979), 583–600.

[33] K. GYŐRY, Résultats effectifs sur la représentation des entiers par des formes décomposables, Queen's Papers in Pure and Applied Math., No. 56, Kingston, Canada, 1980.

[34] K. GYŐRY, Bounds for the solutions of norm form, discriminant form and index form equations in finitely generated integral domains, *Acta Math. Hungar.*, **42** (1983), 45–80.

[35] K. GYŐRY, Effective finiteness theorems for polynomials with given discriminant and integral elements with given discriminant over finitely generated domains, *J. Reine Angew. Math.*, **346** (1984), 54–100.

[36] K. GYŐRY, Discriminant form and index form equations, in: *Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis*, Walter de Gruyter, Berlin – New York, 2000, pp. 191–214.

[37] K. Győry and K. Yu, Bounds for the solutions of S-unit equations and decomposable form equations, *Acta Arith.*, **123** (2006), 9–41.

[38] G. Hermann, Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale, *Math. Ann.*, **95** (1926), 736–788.

[39] S. Lang, Integral points on curves, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (1960), 27–43.

[40] S. Lang, *Diophantine geometry*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 11, Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons), New York-London, 1962.

[41] S. Lang, Division points on curves, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **70** (1965), 229–234.

[42] S. Lang, Report on diophantine approximations, *Bull. Soc. Math. France*, **93** (1965), 177–192.

[43] S. Lang, *Fundamentals of Diophantine geometry*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[44] M. Laurent, Equations diophantiennes exponentielles, *Invent. Math.*, **78** (1984), 299–327.

[45] W. LeVeque, On the equation $y^m = f(x)$, *Acta Arith.*, **9** (1964), 209–219.

[46] P. Liardet, Sur une conjecture de Serge Lang, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **279** (1974), 435–437.

[47] P. Liardet, Sur une conjecture de Serge Lang, in: *Journées Arithmétiques de Bordeaux (Conf., Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1974)*, Soc. Math. France, Paris, 1975, pp. 187–210. Astérisque, Nos. 24–25.

[48] K. Mahler, Zur Approximation algebraischer Zahlen. I, *Math. Ann.*, **107** (1933), 691–730.

[49] R. C. Mason, *Diophantine equations over function fields*, Cambridge University Press, 1984.

[50] C. J. Parry, The $\mathfrak{p}$-adic generalisation of the Thue-Siegel theorem, *Acta Math.*, **83** (1950), 1–100.

[51] C. Pontreau, A Mordell-Lang plus Bogomolov type result for curves in $\mathbb{G}_m^2$, *Monatsh. Math.*, **157** (2009), 267–281.

[52] B. Poonen, Mordell-Lang plus Bogomolov, *Invent. Math.*, **137** (1999), 413–425.

[53] G. Rémond, Décompte dans une conjecture de Lang, *Invent. Math.*, **142** (2000), 513–545.

[54] G. Rémond, Sur les sous-variétés des tores, *Compositio Math.*, **134** (2002), 337–366.

[55] G. Rémond, Approximation diophantienne sur les variétés semi-abéliennes, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **36** (2003), 191–212.

[56] A. Schinzel and R. Tijdeman, On the equation $y^m = P(x)$, *Acta Arith.*, **31** (1976), 199–204.

[57] W. M. Schmidt, Heights of points on subvarieties of $\mathbf{G}_m^n$, in: *Number theory (Paris, 1993–1994)*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, vol. 235 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pp. 157–187.

[58] C. Siegel, Approximation algebraischer Zahlen, *Math. Z.*, **10** (1921), 173–213.

[59] V. G. Sprindžuk and S. V. Kotov, An effective analysis of the Thue-Mahler equation in relative fields (Russian), *Dokl. Akad. Nauk. BSSR*, **17** (1973), 393–395, 477.

[60] A. Thue, Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *J. Reine Angew. Math.*, **135** (1909), 284–305.

[61] L. A. Trelina, S-integral solutions of Diophantine equations of hyperbolic type (in Russian), *Dokl. Akad. Nauk. BSSR*, **22** (1978), 881–884;955.

[62] J. Végső, On superelliptic equations, *Publ. Math. Debrecen*, **44** (1994), 183–187.

[63] S. Zhang, Positive line bundles on arithmetic varieties, *J. Amer. Math. Soc.*, **8** (1995), 187–221.