

Bírálóí vélemény
Bolla Marianna

”Clustering graphs and contingency tables with spectral methods”
című akadémiai doktori értekezéséről

Az utóbbi évtizedek egyik leggyorsabban fejlődő matematikai ága a kombinatorika. Természetesen mindig lehet új eredményt elérni egy-egy szép ötlet kidolgozásával, azonban a jelentős eredmények a klasszikus matematika eszköztárát nem nélkülözhetik. Itt elsősorban a valószínűségszámítást, geometriát, algebrát és topológiát említhetjük. Ezekben belül a valószínűségszámítás kiemelten jelentős, különösen Magyarországon, ahol a valószínűségszámítás kombinatorikai alkalmazásait világhírű, úttörő kutatók képviselik. Itt elegendő talán Erdős Pál, Rényi Alfréd, Komlós János, Tusnády Gábor, és természetesen Lovász László nevét említeni.

Bolla Marianna ezen hazai iskola képviselője, első jelentős cikkeit Tusnády Gáborral közösen írta, számszerint ötöt, a legutolsó 1998-ban jelent meg. Ezen belül a kutatási területe a klaszteranalízis, aminek jelentősége a számítógépes adatkezelésben, a statisztikai adatok értékelésében, a mérhetetlenül hatalmas adathalmazok értelmezésében különösen fontos. Az már régóta ismert, hogy az egyik leghatékonyabb klaszterezési eljárás az adatmátrixok sajátértékeinek és sajátvektorainak, más szóval spektrumának, a kiszámításával történhet. Bolla Marianna tézisei ezen óriási kutatási területnek egyik kiemelkedő teljesítménye.

A témaválasztásnak és a téma fontosságának értékelése után most kiragadom a dolgozat három legszebb eredményét: (1.1.3 fejezet 4. Tétele a 17. lapon, 1.2.2 fejezet 10. Tétele a 28. lapon, és a 2.1.2 fejezet 18. Tétele az 52. lapon). A harmadik fejezetről külön nem írok, az abban foglalt legfontosabb sejtéseket a szerző azóta kidolgozta, ez az arXiv-on elérhető, és további alkalmazások is várhatóak. Igyekszem a technikai részleteket a minimumon tartani.

Bolla Marianna a dolgozat első harmadában az él és csúcssúlyozott gráfok optimális vágásainak általa Tusnády Gáborral kidolgozott modelljét, illetve annak általa 2013-ban továbbfejlesztett változatát ismerteti.

A 4. Tétel (mely Molnár-Sáska Gáborral, akkori doktoranduszával közös) arról szól, hogy a normalizált Laplace mátrix k legkisebb sajátértékei és sajátvektorai segítségével mennyire jól konstruálható egy k -elemű klaszter.

Ez tulajdonképpen egy felső becslés az élsúlyozott gráf minimális normált k -vágására a $(k - 1)$ -dimenziós reprezentánsok felhasználásával.

A 10. Tétel téglalaplalmátrixok alacsonydimenziós reprezentációjáról és annak a klaszterezéssel való kapcsolatáról szól. Igen figyelemreméltó a célfüggvény alkalmas, egyáltalán nem egyszerű definiálása, hogy a klaszterek közötti ritka vágásokat részesítse előnyben.

Számomra a legérdekesebb a 18. Tétel, amelynek egy speciális esete azt mondja ki, hogy az általánosított véletlen gráfok szomszédsági mátrixa jól közelíthető egy felfűjt blokkmátrix-szal. Ez tulajdonképpen a Szemerédi regularitás egy konstruktív megjelenítése. (Ezt az eredményt a szerző Friedl Katalinnal és Krámlí Andrással közösen a 23. Tételben továbbfejleszti nem négyzetes véletlen mátrixokra is.)

Összegezve, a disszertáció mind mélységében, mind hatásában messze-mennyően megfelel az akadémiai doktori fokozat követelményeinek. Ennek alapján a dolgozat nyilvános vitára tűzését és az MTA doktori cím odaítélését melegen javaslom.

2018. április 15.



Opponens:

Füredi Zoltán

az MTA rendes tagja

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutató Intézete kutató professzora