Válasz Kiss Tamás bírálatára

A bíráló a bevezető részben a dolgozatban szereplő diszkrét optimalizálási feladatok vizsgálatának lehetőségeit mutatja be. A következő részben a dolgozat felépítését tárgyalja, majd a dolgozat eredményeit mutatja be. Bár a direkt módon nem fogalmaz meg kérdéseket, a bírálatban van néhány megjegyzés, amelyre szeretnék reagálni.

1. "Érdekes lett volna megvizsgálni, hogy mi a kapcsolat a dolgozatban kapott képlet (2.3. Tételben a (13) formulába formálisan behelyettesítve a β_j, α_j, U_j paramétereket), és van Vliet 1992-es cikkében, a Theorem 4-ben kapott formula között."

Az azonosság intuitíve világos, hiszen a kapott alsó korlátok megegyeznek. Az ekvivalenciát formálisan az $r = 1$ esetre mutatjuk be.

Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen $m_1 = 2$, $m_j = m_{j-1}(m_{j-1} - 1) + 1$, ha $2 \leq j \leq k$. Legyen továbbá $m_j^{'} = m_j - 1$, ha $1 \leq j \leq k$. van Vliet a cikkében a következő rekurzív definíciókat vezette be:

$$f_2 = 1, \qquad f_j = \frac{(m_{j-2}^{'})^2}{m_{j-1}^{'}} f_{j-1} + \frac{1}{m_{j-1}^{'}}, \quad ha \quad j \geq 3.$$

$$g_2 = \frac{7}{12} \qquad g_j = \frac{(m_{j-2}^{'})^2}{m_{j-1}^{'}} g_{j-1} + \frac{1}{m_{j-1}^{'} + 1}, \quad ha \quad j \geq 3.$$

A cikkben – az $r = 1$ esetre szűkítve az általánosan kimondott tételt – van Vliet a következő állítást bizonyította be:

Tétel 1 *Bármely A online algoritmusra*

$$R_A^{\infty} \geq \lim_{k\to\infty} \frac{f_k + \frac{1}{m_k^{'} - m_{k-1}^{'}}}{g_k + \frac{1}{m_k^{'} - m_{k-1}^{'}}}$$

Az általunk bizonyított tételhez a következő jelöléseket kell még bevezetnünk. Legyen

$$U_j = \begin{cases} \frac{1}{m_{k-j+1} - 1} & , \text{ha } 1 \leq j \leq k-1, \\ 1 & , \text{ha } j = k, \end{cases}$$

és legyenek

$$\beta_j = \begin{cases} 1 & , \text{ha} \quad j = 1 \\ (m_{k-j+1} - 1)\beta_{j-1} & , \text{ha} \quad 2 \leq j \leq k-1, \\ \beta_{k-1} & , \text{ha} \quad j = k. \end{cases}$$

$$\alpha_j = \begin{cases} \beta_{j+1} & , \text{ha} \quad 1 \leq j \leq k-1, \\ \beta_k & , \text{ha} \quad j = k. \end{cases}$$

Mi a következő tételt bizonyítottuk be. (A tételt itt is csak az $r = 1$ esetre mondjuk ki.)

Tétel 2 *Bármely A online algoritmusra*

$$R_A^{\infty} \geq \lim_{k \to \infty} \frac{\sum_{j=1}^{k} c_j \beta_j}{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j U_j}. \tag{1}$$

Azt kell tehát belátni, hogy a fenti definíciók mellett

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f_k + \frac{1}{m_k^r - m_{k-1}^r}}{g_k + \frac{1}{m_k^r - m_{k-1}^r}} = \lim_{k \to \infty} \frac{\sum_{j=1}^{k} c_j \beta_j}{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j U_j}, \tag{2}$$

ahol az $r = 1$ esetre $c_i = 1$ $(1 \leq i \leq k)$. Az azonosságot a $k = 4$ esetre mutatjuk meg.

Induljunk ki a (2) kifejezés bal oldalából. A kifejezés számlálóján a következő átalakításokat végezhetjük el.

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{m_1^{r\,2}}{m_2^r} f_2 + \tfrac{1}{m_2^r} + \tfrac{1}{m_3^r - m_2^r} &&= \tfrac{(m_2-1)^2}{m_3-1} + \tfrac{1}{m_3-1} + \tfrac{1}{(m_4-1)-(m_3-1)} \\ &= \tfrac{m_2-1}{m_2} + \tfrac{1}{m_3-1} + \tfrac{1}{(m_3-1)^2} &&= \tfrac{(m_2-1)^2(m_3-1)+m_3}{(m_3-1)^2} \end{aligned} \tag{3}$$

A (3) kifejezés számlálója átírható a következő alakra.

$$(m_2 - 1)^2(m_3 - 1) + m_3 = (m_2 - 1)^2 m_2(m_2 - 1) + m_3.$$

Mivel az $r = 1$ esetre $m_2 - 1 = 2$ és $\beta_3 = \beta_4 = (m_2 - 1)^2 m_2$, továbbá $\beta_1 = 1$ és $\beta_2 = (m_3 - 1)$, ezért

$$(m_2 - 1)^2 m_2(m_2 - 1) + m_3 = \sum_{i=1}^{4} \beta_i c_i.$$

Vizsgáljuk most a (2) kifejezés bal oldalának nevezőjét.

$$D = \frac{(m_2 - 1)^2}{m_3 - 1}\left(\frac{1}{m_1 + 1} + \frac{(m_1 - 1)^2}{m_1^2}\right) + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{(m_3 - 1)^2}.$$

Ezért

$$(m_3 - 1)^2 D = (m_3 - 1)(m_2 - 1)^2\left(\frac{1}{m_1 + 1} + \frac{(m_1 - 1)^2}{m_1^2}\right) + \frac{(m_3 - 1)^2}{m_3} + 1.$$

Mivel $\alpha_1 U_1 = \frac{m_2(m_2-1)}{m_4-1} = \frac{1}{m_3}$ és $\alpha_3 U_3 = \frac{m_2(m_2-1)^2}{m_2-1} = m_2(m_2 - 1)$, ezért ebben a kifejezésben az utolsó két tag a következőképpen alakítható át.

$$\frac{(m_3 - 1)^2}{m_3} + 1 = \frac{m_3^2 - 2m_3 + 1 + m_3}{m_3} = m_2(m_2 - 1) + \frac{1}{m_3} = \alpha_1 U_1 + \alpha_3 U_3.$$

Vizsgáljuk most a kifejezés első tagját. Mivel $m_2 - 1 = m_1$ és $m_1 - 1 = 1$, ezért

$$\begin{aligned} (m_3 - 1) \quad & (m_2 - 1)^2\left(\tfrac{1}{m_1+1} + \tfrac{(m_1-1)^2}{m_1^2}\right) = (m_2 - 1)(m_2 - 1)^2 + (m_3 - 1)(m_1 - 1)^2 \\ &= (m_2 - 1)\left[(m_2 - 1)^2 + m_2\right] = (m2 - 1)(m_2^2 - m_2 + 1) \\ &= (m_2 - 1) + m_1^2 m_2 = \alpha_2 U_2 + \alpha_4 U4. \end{aligned}$$

Ezzel a két tétel állításának ekvivalanciáját a $k = 4$ esetre beláttuk. A fenti gondolatmenet mentén az általános eset némi számítás után belátható.

A 4. fejezetben a 4.3 tétel bizonyítása során a bíráló megjegyzi, hogy helyesebb lett volna a Theorem 2.3 helyett inkább a Theorem 2.2-re hívatkozni, de mivel itt az $r = 1$ – azaz a nem-parametrikus esetet vizsgáljuk – a Theorem 2.1-re történő hivatkozás lett volna a helytálló. Köszönöm a bíráló megjegyzését: valóban a helyes hivatkozás a Theorem 2.1 lett volna. (Mentségem, hogy a hivatkozott Theorem 2.3 is korrekt, de ha végigvittük volna a bizonyítást, akkor a Theorem 2.1 felhasználása egyszerűbbé tette volna formálisan a bizonyítást.)

A Theorem 5.3-hoz fűzött megjegyzést is köszönettel elfogadom. Itt egy elírás történt, hiszen a [43]-as cikk foglalkozik a Hybrid Next Fit algoritmus elemzésével, a [48]-as cikk egészen mást vizsgál. (Nevezetesen itt került bevezetésre a a pakolási minták elmélete.)

A 8. fejezetben a bíráló megemlíti, hogy P. Baptiste a [2]-ben publikált algoritmust továbbfejlesztette, és egy $O(\log n)$ időbonyolultságú algoritmust publikált. Valami miatt a kérdéses cikk elkerülte figyelmemet, de megjegyzés kapcsán elolvastam azt. A cikk az általunk kifejlesztett eljárásra épül, és annak mélyebb analízisének eredménye a gyorsabb algoritmus. Az elemzés alapját két definíció szolgáltatja: bevezeti a minták távolságának és a domináns útnak a fogalmát, majd megmutatja, hogy az optimális megoldások között mindig van domináns út, és egy optimális domináns út mindig egy speciális strukúrával rendelkezik. Végezetül azt látja be, hogy a domináns út meghatározható $O(\log n)$ lépésben. Ennek a szép eredménynek az a következménye, hogy a tézisek 15. oldalán tett azon megállapítás, amely szerint az általunk kifejlesztett algoritmus jelenleg is a leggyorsabb, már nem érvényes. Mivel a P. Baptiste által publikált algoritmus ugyanazt a gráf-modelt használja, amelyet mi publikáltunk, a bizonyításának egyik sarokköve a cikkünkben definiált minták vizsgálata, abban bízok, hogy a bíráló szerint sem csökkent sokat a dolgozatban bemutatott algoritmus értéke.

Köszönöm a bíráló gondos munkáját, konstruktív észrevételeit és a támogatását.

Szeged, 2017. május 22.

Galambos Gábor