# STRUKTURÁLT RENDSZEREK KVALITATÍV VIZSGÁLATA

**Dr. Molnár Sándor**

MTA

Doktori Értekezés Tézisei

Gödöllő

2016

# 1. A témaválasztás indoklása

A 80-as évek közepétől a rendszerelméleti kutatások egyik fókuszpontjában van az ún. hierarchikus rendszerek vizsgálata [17], [18], [21], [48].

A gazdasági, biológiai és műszaki rendszerek a munkamegosztás, a technológiai feltételek, geográfiai viszonyok, műszaki lehetőségek miatt, igen gyakran természetes módon strukturálódnak, hierarchizálódnak. Ezen felül a gazdasági rendszereket társadalmi, gazdaságpolitikai elvek, különféle egyéb okok miatt is tovább tagolhatjuk. Ezek leírására végül igen bonyolult, komplex gazdasági rendszert hozhatunk létre. Ebben az értelemben dinamikusan működő bonyolult rendszerek „egyszerű szerkezetűvé" való újjászervezésének, és az ennek során alkalmazott matematikai, rendszerelméleti módszereknek igen nagy jelentőségük van.

Egyszerű szerkezetűnek az ún. vertikum típusú modelleket tekintjük, melyeknek a közgazdaságtanban önmagában is nagy a fontossága, hiszen egy kitermelő-feldolgozó rendszer a technológiai lánc szerint természetesen szervezhető vertikum típusú gazdasági rendszerré [22], [37], [52]. Az utóbbi időben a vertikum típusú rendszerek széleskörű alkalmazását figyelhetjük meg a biológiai és környezetvédelmi rendszerek vizsgálatánál [56], [57], [67], [68], [72].

# 2. A kutatási feladat megfogalmazása, célkitűzések

Alapproblémánkat úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a paraméterváltozós irányítási rendszerekből kiindulva algebrai, illetve differenciálalgebrai eszközökkel hogyan jutunk el az általánosított vertikum típusú rendszer ún. Wei-Norman-féle reorganizációjához.

Az a kézen fekvő, hogy a bemeneteknek a deriváltjai is szerepelhetnek mind az állapottérben megfogalmazott irányítási differenciálegyenletekben, mind a kimenetekben. Ezzel természetes módon adódik a Kalman-féle kanonikus alakoknál is általánosabb, ún. Fliess-féle kanonikus alak [29] [54]. Beszélhetünk lineáris rendszerekről is, amikor az adott leíró egyenletek lineárisak az állapotváltozókban és a bemenetekben, ill. azok deriváltjaiban is. A fogalmak felhasználására mutatok egy érdekes eredményt, amely általánosítja a klasszikus Kalman-féle mátrix-rangfeltételt [6] és a Fliess-féle [29] kanonikus alakban megadott állandó együtthatós lineáris rendszereket is.

A vizsgált rendszer a (derivált Fliess-féle jelölésével)

$$
\begin{aligned}
dx &= Ax + \sum_{i=0}^{I} B_i d^i u \\
y &= Cx + \sum_{i=0}^{I} D_i d^i u.
\end{aligned}
$$

Ennek az elérhetőségét tekintve a

$$\operatorname{rang}\left[\sum_{i=0}^{I} A^i B_i, A\left(\sum_{i=0}^{I} A^i B_i\right), \dots, A^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{I} A^i B_i\right)\right] = n$$

feltétel szükséges és elégséges.

Ez a Kalman-féle rangfeltétel általánosítása.

A paraméterváltozós irányítási rendszerek közül számomra különösen fontos egy speciálisan strukturált rendszer, mely az ún. vertikum típusú hierachiával rendelkezik. Ezeket is leírtam a felhasznált differenciálalgebrai formalizmus keretében. Azt a fontos speciális esetet, amelyben a paraméter állapotfüggő, a parciális differenciálalgebrák körében megfogalmazott módszertan segítségével tárgyalhatom, amelyeket így szintén felsoroltam a használt fogalmaink között.

A teljesség kedvéért ugyan megadtam a differenciálalgebrák keretében a rendszermérnökök által sokat vizsgált megfigyelő és szabályozó fogalmát is, de a dolgozatban ezt nem használtam.

# 3. Új tudományos eredmények

A módszertani fejezetben ismertetett algebrai eszközök felhasználásával különböző, paraméterektől függő rendszerek ún. rendszertulajdonságait vizsgáltam.

Rendszertulajdonságokon a bemenet-kimenet rendszerek 0-ból való elérhetőségét, 0-ba irányíthatóságát, megfigyelhetőségét és rekonstruálhatóságát, valamint valamilyen típusú stabilitását értjük. Ez utóbbival nem foglalkoztam átfogóan, mert a klasszikus Ljapunov-féle módszerek, a Riccati-egyenletes jellemzések lényegében megoldják a problémát ebben a rendszerosztályban.

A klasszikus kanonikus alakú

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \tag{1}$$

időtől függő együtthatós rendszerekre R. Kalman minden alapkérdést megoldott. Bebizonyította, az általa definiált alapvető fogalmakat illetően az elérhetőség és megfigyelhetőség, illetve az irányíthatóság és rekonstruálhatóság közötti dualitást, valamint a folytonos idejű (1) alakú rendszerekre fennálló elérhetőség és irányíthatóság, valamint megfigyelhetőség és rekonstruálhatóság párok ekvivalenciáját. Ennek értelmében csak egyetlen rendszertulajdonsággal, az elérhetőséggel foglalkoztam.

**1. Tézis.** *Megmutattam, hogy lineáris időtől függő rendszerekre az általánosított Kalman-féle rangfeltétel kiegészítve az ún. gerjesztési feltételekkel szükséges és elégséges az ilyen típusú rendszerek elérhetőségére.*

**2.1. Tétel.** *Az általánosított időfüggő együtthatós lineáris rendszer a* $[0,T]$*-intervallumon teljesen elérhető akkor és csak akkor, ha a* $G_{Rea}[0,T]$ *Kalman-Gram-féle mátrix* [6] *invertálható, vagy ami ezzel ekvivalens, ha pozitív definit.*

Ezt kombinálva a differenciál-algebrákból ismert Diop-féle eliminációs eljárással [28], a következő, a (2.17) LTV-rendszerre vonatkozó 2.2. Tételt kapjuk.

**2.2. Tétel.** *Ha a* (2.17) *rendszerre teljesül az általánosított Kalman-féle feltétel, azaz* (2.9) *az egész* $\mathbb{R}^n$, *és teljesül a Diop-féle eljárással kapott* (2.14) *ún. gerjesztési feltétel, akkor* (2.17) *elérhető.*

A megfelelő (3.1) és a speciális (3.2) LPV rendszerekre a 2.2. Tétellel analóg eredményeket bizonyítottam a 3.1. és 3.2 Tételek összefoglalásaképpen.
Feltéve, hogy az

1. általánosított Kalman-féle feltétel, azaz (3.4) teljesül,
2. továbbá a $p_1(x), \ldots, p_I(x), q(x)$ együttható függvények alkalmas parciális differenciálegyenleteket nem elégítenek ki, akkor a (3.1) LPV rendszer elérhető lesz.

Ez az LTV rendszerre vonatkozó 2.2. Tétellel analóg eredmény úgy adódik, hogy nem alkalmazhattam a Diop-féle eliminációs algoritmust, mivel ilyen nem ismeretes a parciális differenciálalgebrában.

Ekkor egy nem sűrű szinguláris felületet kivéve, a rendszer lokális irányíthatóságának a feltétele a jól ismert

$$\operatorname{rank}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n$$

Kalman-féle feltétel lesz [31], [35], [34], [44], illetve az általánosított Kalman-féle feltétel lesz. A lokalitás ebben az esetben azt jelenti, hogy a szingularitási felület felbonthatja több nyílt komponensre az állapotteret, amelyek együttesen sűrű halmazt alkotnak ugyan, de nem feltétlenül lehet egyik komponensről a másikra irányítani a rendszert.

**2. Tézis.** *Buck-Boost* [71] *konverterből kiindulva egy nagyon általános approximációs problémát tekintettem és oldottam meg, mely megalapozza az ún. kapcsolási (switching) rendszerek további vizsgálatát, egybefogva nagyon különböző jellegű rendszerelméleti problémákat. A Buck-Boost konvertert tekintjük a „switching" rendszerek alapkövének, mely ezeknek a rendszereknek a nevét is adta.*

*Két approximációs tételt bizonyítottam LPV rendszerek közelítésére. Az első tételben az irányítási paraméterek $\mathcal{U}$ halmaza konvex poliéder, az $A(p,t)$ és a $B(p,t)$ struktúramátrixok pedig megszokott folytonossági feltételeket teljesítenek. Ekkor tetszőleges pontosságot előírva, lehet olyan, az $u : (0,t) \to \mathcal{U}$ kontrollt approximáló $v : (0,t) \to \mathcal{U}$ szakaszonként konstans kontrollt definiálni, amelynek az értékei az $\mathcal{U}$ csúcspontjaiból vannak, és olyan, a $p(t)$ paraméterfüggvény pontonként jól approximáló szakaszonként konstans $g(t)$ függvényt megadni, hogy a megfelelő trajektóriák az adott pontossággal közeliek maradnak az adott időintervallumban. Ez a tétel a Gamkrelidze-féle approximációs tétel általánosítása, amiből az eredeti tételt úgy kapjuk meg, hogy az $A(p,t)$ és a $B(p,t)$ konstansok a p-változóban. A 4.2. Approximációs tétel esetén feltételeztem, hogy az $A(p,t)$ és a $B(p,t)$ lineárisak a p paraméterfüggvényében, és a p paraméter egy adott $\mathcal{P}$ konvex poliéderből veszi az értékeit. Ekkor a $p : \mathbb{R} \to \mathcal{P}$, állapotváltozós paraméterhez található olyan szakaszonként konstans $q : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}$ állapotfüggő paraméterfüggvény, amely a $\mathcal{P}$ csúcspontjaiból veszi az értékeit. (Tehát a paraméterfüggvénynek sem kell pontonként jól approximálnia). A megfelelő trajektóriák mégis az egész időintervallumon az adott pontossággal közel maradnak egymáshoz. Egy példán bemutatom, hogy adott időintervallumhoz lehet olyan $[-M, M] \times [-M, M]$ négyzetet megadni, hogy Buck-Boost konverterre a* (4.3) *és*(4.5) *modell helyett olyan szakaszonként konstans modelleket is használhatunk, amelyben a bilineáris tagokban a tekercs $x_1$ áramerőssége helyett $\pm M$-et, a kondenzátor*

*$x_2$ feszültsége helyett is $\pm M$-et beírva, az*

$$
\begin{aligned}
L\dot{x}_1 &= x_2 + (E \pm M)u, \\
C\dot{x}_2 &= -x_1 - \frac{1}{R}x_2 \pm Mu.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

*közelítéssel tetszőleges pontosságot elérhetünk.*

*Ezzel áramkörrel nem realizált* (4.13) *modelleket kapcsolgatva meghatározhatok egy fizikailag realizálható áramkörnek tetszőleges pontosságú közelítését. Ez pedig már tisztán a digitális kontroll témaköre lehet, amely az utóbbi időben kimondottan fontos terület.*

**3. Tézis.** *Nehéz lenne a rendszerek objektumában topológiát bevezetve arról beszélni, hogy erre nézve az irányítható rendszer elég kis környezetében levő rendszerek is irányíthatók, ezért beszélünk az approximációs tétel szerinti közelség terminusában. Ennek a megjegyzésnek fokozottan nagy a jelentősége, amikor a 4.2 Approximációs tétel szerinti approximáló kapcsolási rendszerekről bizonyítjuk azok irányíthatóságát, ui. abban a* $\mathbf{p}$ *paraméterfüggvény approximációját szakaszonként konstans, csak egy konvex poliéder csúcsaiból vett értékekkel approximáljuk, ami pontonként nem approximálja jól a szakaszonként folytonos* $\mathbf{p}(t)$ *függvényt.*

*A Riccati-féle differenciálegyenlet segítségével elérhető irányíthatósági vizsgálatok és a Kalman-féle mátrixrang-feltételek kapcsolata az approximációs tételek tükrében nagyon természetesen vetődik fel. A mátrix Lie-algebrák elemeinek felhasználásával, a rendszertulajdonságok csupán a Wei-Norman-féle* [4] *exponenciális szorzat alkalmazásával is tárgyalhatók. Csupán lineáris algebrai eliminációval kaphatók az előző fejezetekben említett gerjesztési feltételek is. Nem lesz szükségünk a Diop-féle* [28] *differenciálalgebrai eliminációra. Ha a* (5.29) *irányítási rendszerre teljesül az*

$$
Im\,\{\ldots, A_1^{n_1}A_2^{n_2}\ldots A_K^{n_K}B_l, \ldots\} = \mathbb{R}^n
$$

*rangfeltétel, és az* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *időfüggő együtthatókra teljesül a*

$$
\mathcal{D}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots) \neq 0
$$

*gerjesztési feltétel, ahol* $\mathcal{D}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ldots, \mathbf{b}, \dot{\mathbf{b}}, \ldots)$ *a* (5.42)*-beli differenciálpolinom, akkor a* (5.29) *irányítható.*

*A p-ben lineáris $A(p)$ és $B(p)$ mátrixok segítségével adott LPV rendszerekre is elvégezhetők az állapotfüggés esetén is mindazok az elemi átalakítások, amelyeket az időváltozós paraméterek esetére elvégeztem. Az általánosított Kalman-féle rangfeltétel* [31], [32], [35], [34] *azonban csak szükségességet ad az irányíthatóságra, a lineáris algebrai eliminációból adódó „gerjesztési" feltétel is csak azt adja, hogy egy pontból elérhető pontok halmaza (elérhetőségi halmaz, amely általában nem altér) kifeszíti az egész teret, de nem lesz a rendszer irányítható. Ennek az oka az, hogy egy*

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{K} a_k(x) A_k x + \sum_{l=1}^{L} b_l(x) B_l u$$

*rendszer elérhetőségi halmaza nem lineáris altér, hanem valamely esetleg szingularitásokat is tartalmazó felület. Ezt egy példán is bemutatom.*

**4. Tézis.** *Általánosított Kalman-féle tételt bizonyítottam a vertikum típusú rendszerekre*

a) *megadtam, hogyan bontható az egész rendszer szétcsatolt rendszerekre (Wei-Norman-féle reorganizáció)*

*Azt is megmutattam, miként lehet az LPV rendszerekként interpretálni a vertikum típusú rendszereket. Azt fogalmaztam meg, hogy milyen paraméterek* $0, 1$ *értékeivel, hogyan lehet azt leírni, hogy adott részrendszerek be vannak kapcsolva, mások pedig nem. Ezzel elérhető, hogy egyes termékeket adott időszakban nem állítunk elő. Gazdasági érdekekből, vagy technikai feltételek teljesítése miatt elképzelhető egy, az időben lejátszódó, ideálisnak nevezett időfüggő paraméterrel leírható program, melyet azonban a konverteres bevezető példánkhoz hasonlóan, a részrendszerek ki-be kapcsolásával nem realizálhatunk. Ezért az ideális paraméterrel leírható viselkedést egy kapcsolási rendszer kapcsolási programjával közelítjük olyan pontossággal, hogy teljesüljenek a kívánt rendszertulajdonságok is.*

**5. Tézis.** *Mérnöki és populációökológiai alkalmazások.*

*A vertikum típusú rendszerek egyik fontos jelenlegi alkalmazása a populációökológia területén található. A populációk kölcsönhatása jellemzően nemlineáris, de* [67] *megmutattam, hogy egy tipikus, erőforrás – termelő – elsődleges felhasználó – másodlagos fogyasztó láncot lehet egy konkrét ökológiai kölcsönhatásrendszerben vertikum-típusú rendszerként azonosítani* [68], [72]. *Ezzel pedig az eredeti modell megfigyelhetőségét lokálisan egy lineáris rendszer megfigyelhetőségére redukálhatjuk.*

# Hivatkozások


[1] Earl A. Coddington, Norman Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations, New York: McGraw-Hill; New Delhi: Tata McGraw-Hill, p. 429, 1955.

[2] A. Seidenberg: An elimination theory for differential algebra, *University of California Press*, pp. 31-66, 1956. ASIN: B007F6ILXU

[3] Pontryagin, L.S., V.G. Boltyanskii, R.S. Gamkrelidze and E.F. Mischenko: Mathematical Theory of Optimal Processes, *Pergamon Press*, The Macmillan Co., New York, 1964.

[4] Wei, J. and E. Norman: " On Global Representation of the Solutions of Linear Differential Equations as a Product of Exponentials", *Proc. Amer. Math. Soc* 15(12), pp. 327-334, 1964.

[5] Fattorini, H. O.: On complete controllability of linear systems, J. Diff. Equations 3, pp. 391-402, 1967.

[6] R.E. Kalman, P.L. Falb and M.A. Arbib: Topics in Mathematical System Theory, *McGraw-Hill Book Company*, New York, San Francisco, St. Louis, Toronto, London, Sydney, p. 353, 1969.

[7] I. Kaplansky: An Introduction to differential algebra, *Hermann*, Paris, p. 62, 1976. ISBN-10: 2705612513, ISBN-13: 978-2705612511

[8] I.R. Shafarevich, Basic algebraic geometry, *Springer*, 1977. (Translated from Russian.)

[9] Gamkrelidze, R.: Principles of Optimal Control Theory, In: Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering, *Plenum Press*, New York and London, p. 175, 1978. ISBN-13: 978-1-4684-7400-8, e-ISBN-13: 978-1-4684-7398-8, DOI: 10.1007/978-1-4684-7398-8

[10] Kamen, E.W.: Lectures on algebraic system theory: Linear systems over rings, *NASA Contractor Report # 3016*, 1978.

[11] Fuhrmann, P. A., Linear Systems and Operators in Hilbert Space, McGraw-Hill, New York, 1981.

[12] Kamen, E.W. and P.P. Khargonekar: On the control of linear systems depending on parameters, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 29, pp. 25-33, 1984.

[13] Molnár S.: Néhány új eredmény a megfigyelési rendszerekkel kapcsolatban, *Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem, Matematikai és Számítástechnikai Intézet*, Budapest, 1984.

[14] A. Isidori: Nonlinear Control Systems: an introduction, Lecture notes in Control and Inform. Sciences 92, Springer, Berlin, p. 297, 1985.

[15] Molnár S.: Megfigyelési rendszerek vizsgálatáról, *Központi Bányászati Fejlesztési Intézet Közleményei*, 27., pp. 85-89, 1985.

[16] M. Fliess, A new approach to the structure at infinity of nonlinear systems, *Systems Control Letters* 7, pp. 419-421, 1986.

[17] Molnár S., Szidarovszky F.: A Stochastic Multiobjective Dynamic Programming Method with Application to Energy Modelling, Book Series: Lecture Notes in Control and Information Sciences, Book: System Modelling and Optimization, (Eds.: Molnár, S; Szidarovszky, F,) *Springer*, Vol. 84, pp. 601-609, Berlin/Heidelberg, 1986. ISBN: 978-3-540-16854-6, ISSN: 0170-8643, DOI: 10.1007/BFb0043885

[18] Molnár S.: Observability and Controllability of Decomposed Systems I., *Math. Anal. and System Theory*, Vol. 5., pp. 57-66, (Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem), 1988.

[19] Molnár S.: Observability and Controllability of Decomposed Systems II., *Math. Anal. and System Theory*, Vol. 5., pp. 67-72, (Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem), 1988.

[20] Molnár S.: Observability and Controllability of Decomposed Systems III., *Math. Anal. and System Theory* 5., pp. 73-80, (Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem), 1988.

[21] Molnár S.: Realization of Verticum-Type Systems, *Math. Anal. and System Theory*, Vol. 5., pp. 11-30, (Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem) 1988.

[22] Molnár S., Szidarovszky F., Okuguchi K.: On a General Scheme in the Theory of Conflicts, *Math. Anal. and System Theory*, Vol. 5., pp. 31-37, (Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem), 1988.

[23] A. Haddak: Differential algebra and Controllability, In. Proc. IFAC Symposium, on Nonlinear Control Systems Designs, June 14-16, 1989, Capri, Italy, *Pergamon Press*, pp. 434-437, 1989.

[24] Füst Antal, Gondozó György, Molnár Sándor, Szidarovszky Ferenc: Széleshomlokú fejtések teljeskörű geoinformációs rendszere, *BKL Bányászat*, Vol. 122., pp. 458-461, 1989.

[25] Molnár S.: A Special Decomposition of Linear Systems, *Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science*, Vol. 29. No. 4, pp. 1-19, 1989.

[26] Molnár S., Bahill T.A., Szidarovszky F.: On Stable Adaptive Control Systems, *Pure Math. and Appl.*, Ser. B., Vol. 1. No. 2-3, pp. 115-121., 1990.

[27] S.P. Novikov and A.T. Fomenko: Basic Elements of Differential Geometry and Topology, p. 500, 1990. ISBN: 0-7923-1009-8

[28] Diop, S.: Elimination in control theory, Mathematics of Control, Signals and Systems, Vol. 4 No. 1, pp. 17-32, 1991.

[29] Fliess, M.: Controllability Revisited in Mathematical System Theory: The influence of R.E. Kalman, A.C. Antoulas (Ed.) *Springer-Verlag* , Berlin, 1991.

[30] Fliess, M.: Controllability Revisited, In: The influence of R.E. Kalman, A.C. Antoulas (Ed.) *Springer*, pp. 463-474, 1991.

[31] Szigeti, F.: A differential-algebraic condition for controllability and observability of time varying linear systems, Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control, Tucson, Arizona, Vol 4., pp. 3088-3090, December 1992. ISBN: 0-7803-0872-7, DOI(Digital Object Identifier): 10.1109/CDC.1992.371050

[32] Szigeti, F.: " Kalman's Rank Conditions for Infinite Dimensional Time Dependent Linear Systems", *Proc. Conf. EQUADIFF*, pp. 927-931, Barcelona, Spain, 1992.

[33] Serre, J-P., Lie algebras and Lie groups. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, p. 168, 1992.

[34] Molnár S.: Kalman's Rank Conditions for Time Dependent Linear Systems, *Pure Mathematics and Applications*, Vol. 4. No. 3, pp. 353-361, 1993.

[35] Molnár S., Szigeti F., Carmen, E. Vera: Kalman-féle rangfeltételek az időtől függő lineáris rendszerekre, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 17. köt., 3-4. sz., 279-286. old., 1993.

[36] Molnár S.: Stabilization of verticum-type systems, *Pure Mathematics and Applications*, Vol. 4. No. 4, pp. 493-499, 1993.

[37] Molnár S., Szidarovszky F.: A dinamikus termelői-fogyasztói modell irányíthatóságáról, *SZIGMA*, Vol. 26. No. 1-2, pp. 49-54, 1994.

[38] Molnár S., Szidarovszky F.: A note on the coverability problem in input-output systems, *Pure Mathematics and Applications*, Vol. 5. No. 4, pp. 425-429, 1994.

[39] Molnár S., Szigeti F.: On time varying discrete-time linear systems: reachability, distinguishability and identifiability, *Pure Mathematics and Applications*, Vol. 5. No. 1, pp. 415-424, 1994.

[40] Molnár S., Szigeti F.: On "Verticum"-Type Linear Systems with Time-Dependent Linkage, *Applied Mathematics and Computation* , Vol. 60., pp. 89-102., 1994.

[41] Molnár S.: On the optimization of INPUT-OUTPUT systems cost functions, *Pure Mathematics and Applications*, Vol. 5. No. 4, pp. 403-414., 1994.

[42] Molnár S., Szidarovszky F.: A dinamikus oligopólium probléma irányíthatóságáról, *SZIGMA*, Vol. 25. No. 3, pp. 95-102, 1994.

[43] J.-F.. Pommaret: Partial Differential Equations and Group Theory: New Perspectives for Applications, *Kluwer Academic Publisher*, Dordrecht, Boston, London, p. 473, 1994.

[44] F. Szigeti, J. Bokor and A. Edelmayer: On the reachability subspaces of time varying linear systems, *Proceeding of 3rd European Control Conference*, Rome, Italy, September, 1995.

[45] Edelmayer, András and Szigeti, Ferenc and Varga, Z. (1995) Algebraic computation of the solution of first order linear partial differential equations in control with examples. In: ECC'95. Proceedings of the third European control conference. Roma, Vol. 4, 1995. (Part 1.)

[46] Molnár S., Szidarovszky, F., Yen, J.: On the Price-Trajectory Control of a Discrete Dynamic Producer - Consumer Market, *Appl. Math. and Com.*, Vol. 73, No. 2-3, pp. 249-256, 1995.

[47] Szigeti, F. and Vera, C.E.: *State elimination and reachability of infinite-dimensional time varying linear systems.* Eds.: JJ Gertler and JB[JR] Cruz and M Peshkin, In: Preprints of the 13th world congress of International Federation of Automatic Control. San Francisco, pp. 317-322, 1996.

[48] Molnár S.: Időtől függő vertikum-típusú lineáris rendszerekről, in MTA Közgyűlési előadások, 2000 május II. kötet, pp. 645-657, 2001, MTA. ISSN: 1585-1915

[49] Molnár S.: An algebraic condition to reachability of time varying discrete-time linear systems, Proc. of IEEE International Conference on Systems 2001, *Systems, Man, and Cybernetics*, Tucson, AZ, USA, Vol. 1, pp. 669-671, 2002. ISBN: 0-7803-7087-2

[50] Molnár S., Szigeti F.: Algebraic Conditions for Controllability and Reachability of Time-Varying Discrete-Time Linear Systems, In: "*Control Aplications of Optimisation 2003*", *a proceedings volume from the 12th IFAC Workshop*, Visegrad, Hungary, $30^{th}$ June - $2^{nd}$ July 2003, Edited by: R. Bars, E. Gyurkovics, Published for IFAC by Elsevier Ltd. 2003.

[51] Molnár S., Szigeti, F.: Controllability and Reachability of Dynamic Discrete-time Linear Systems, *Proceedings of the 4th International Conference on Control and Automation*, 2003, Montreal, Canada, pp. 350-354, ISBN: 0-7803-7777-X, Library of Congress: 10-12 June 2003.

[52] Molnár S., Szidarovszky, F., Molnár, M.: Controllability of Time-varying Oligopolies, *Proceedings of the 4th International Conference on Control and Automation*, 2003, Montreal, Canada, WA05-5, *IFAC-IEEE*, pp. 570-573. ISBN: 0-7803-7777-X, Library of Congress: 10-12 June 2003.

[53] Molnár S., Szigeti, F.: Controllability and Reachability of Dynamic Discrete-time Linear Systems, *Proceedings of the 4th International Conference on Control and Automation*, 2003, Montreal, Canada, pp. 350-354, ISBN: 0-7803-7777-X, Library of Congress: 10-12 June 2003.

[54] Hebertt Sira-Ramírez, Sunil K. Agrawal: Differentially Flat Systems (Automation and Control Engineering), *Marcel Dekker Inc.*, New York, Basel, p. 450, 2004. ISBN 10: 0824754700, ISBN 13: 9780824754709

[55] Edelmayer, A., Bokor J., Szabó Z., Molnár S.: Inversion-based residual generation for robust detection and isolation of faults by means of estimation of the inverse dynamics in linear dynamical systems, *Proc. Int. Workshop of Principles of Diagnosis*, DX'07, pp. 67-74. Nashville, TN., 2007.

[56] Molnár S., López I., Gámez M.: Observability and observers in a food web, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 20, Issue 8, August 2007, pp. 951-957, 2007.

[57] Molnár S., M. Gamez, I. Lopez: Monitoring Environmental Change in an Ecosystem, *Biosystems*, Vol. 93. No. 3, pp. 211-217, 2008. ISSN 0303-2647, Impact Factor: 1.08

[58] Molnár S., Szigeti F.: Generalized Fuhrmann's rank condition for Controllability and Reachability of Time-Varying Discrete-Time Linear Systems, *Pure Mathematics and Applications*, Vol. 19, No. 1, pp. 55-66, 2008.

[59] Molnár S., Szigeti Ferenc, Molnár Márk: A Rank Condition for Controllability and Reachability of Time-Varying Discrete-Time Linear Systems, *Mechanical Engineering Letters*, Vol. 3, pp. 8-16, Szent István University Faculty of Mechanical Engineering, Gödöllő, 2009.

[60] Miranda M., Edelmayer A., Molnár S.: Federated filtering: classical approaches in new approximations for distributed systems estimation, *Mechanical Engineering Letters*, (Szent István University, Gödöllő) Vol. 4, pp. 266-280, 2010.

[61] Molnár S., Alexandros Soumelidis, András Edelmayer, Ferenc Szigeti: On the qualitative properties of hierarchical systems, *Mechanical Engineering Letters*, (Szent István University, Gödöllő) Vol. 4, pp. 37-47, 2010.

[62] Molnár S., F. Szigeti: A generalisation of Fuhrmann's rank condition for discrete dynamic systems, *Int. J. System of Systems Engineering,* Vol. 2, No. 4, 2011.

[63] Alexandros Soumelidis, Molnár S., Ferenc Schipp: Identifying Harmonics in Mechanical Systems by Using Hyperbolic Wavelet Constructs, *Mechanical Engineering Letters*, Szent István University, Vol. 6, pp. 20-38, 2011.

[64] K. Tánczos, Molnár S., Á. Török, M. Molnár: Future trends in road transport systems in Hungary and in the EU, *Int. J. of Critical Infrastructures*, Vol. 7, No. 2, 2011.

[65] Molnár S., Miranda M, Molnár M., Soumelidis A.: Establishment of Optimal Realization-Independent Cost Functions, *Mechanical Engineering Letters*, Szent István University, Vol. 6, pp. 9-19, 2011.

[66] Miranda Moira, Edelmayer András, Molnár Sándor: Performance Verification of Advanced Filtering Alternatives for Robust Fault Tolerant State Estimation in Nonlinear Processes, *Mechanical Engineering Letters*, Szent István University, Vol. 6, pp. 234-255, 2011.

[67] Molnár S., M. Gámez and I. López: Observation of nonlinear verticum-type systems applied to ecological monitoring, *International Journal of Biomathematics*, Vol. 5, No. 6, pp. 1250051-1-1250051-15, 2012, DOI: 10.1142/S1793524512500519,

[68] Molnár S., M. Gámez, I. López, T. Cabello: Equilibrium control of nonlinear verticum-type systems, applied to integrated pest control, *BioSystems*, Vol. 113, pp. 72-80, 2013. DOI: 10.1016/j.biosystems.2013.05.005

[69] Molnár S.: On the properties of linear time varying systems, *Mechanical Engineering Letters*, Szent István University, Vol. 10, pp. 42-59, Gödöllő, 2013.

[70] Molnár S.: On the Reachability of Linear Time Varying Systems, *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 11, No. 3, pp. 201-217, 2014.

[71] Hebertt Sira-Ramírez: Sliding Mode Control, *Birkhäuser Verlag Gmbh*, p. 258, 2015.

[72] Molnár Sándor, Inmaculada López, Manuel Gámez, József Garay: A two-agent model applied to the biological control of the sugarcane borer (Diatraea saccharalis) by the egg parasitoid Trichogramma galloi and the larvae parasitoid Cotesia flavipes, *BioSystems*, Vol. 141, pp. 45-54, 2016. doi:10.1016/j.biosystems.2016.02.002

[73] Molnár S.: An alternative method in optimizing random outcomes, *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 13, No. 4, pp. 77-86, 2016. (ISSN: 1785-8860), DOI: 10.12700/APH.13.4.2016.4.5