Opponensi vélemény

Dósa György:
Tightness results for several variants of the First Fit bin packing algorithm
(with help of weighting functions)

c. MTA doktori értekezéséről

Az értekezés nyolc számozott fejezetet tartalmaz, terjedelme a függelékekkel együtt 147 számozott oldal, a kapcsolódó irodalomjegyzék 87 tételt tartalmaz, amelyből 23 a saját önállóan vagy társszerzőkkel írt dolgozat.

Az értekezés témaköre a kombinatorikus optimalizálás és ezen belül a ládapakolás problémaköréhez kapcsolódik, amelyet a következőképpen fogalmazhatunk meg:

Adott a valós $a_i \in (0,1]$ *számoknak (tárgyaknak) egy* $L = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *listája. Helyezzük ezeket minimális számú* 1 *kapacitású dobozba (ládába) úgy, hogy bármelyik dobozban az elemek összege nem több mint* 1.

A probléma közismerten NP-nehéz és csak közelítő algoritmusok ismertek a feladat "megoldására". A következő jelöléseket használjuk: Egy A algoritmus által generált ládapakolás hosszát (a dobozok számát) $A(L)$ (A) az L lista elhelyezéséhez szükséges minimális számú doboztpedig $OPT(L)$ (OPT) jelöli.

Az értekezés az FFD és az FF algoritmusokat vizsgálja. A dobozokat jelölje $D_1, D_2, \ldots$, és tegyük fel, hogy kiinduláskor mindegyik doboz (bin) üres. Az FF (First-fit) algoritmus $a_1, a_2, \ldots a_n$ tárgyakat sorrendben helyezi el a dobozokban úgy, hogy a_i-t berakja az első (a legkisebb j indexű) D_j dobozba, amelybe még befér. Az FFD (First-fit-decreasing) algoritmusban először átrendezzük az elemeket úgy, hogy az $L = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ lista az elemeket csökkenő nagyságrendben tartalmazza. Ezután alkalmazzuk az FF algoritmust.

Az 1. Fejezet az értekezés előszava, a 2. Bevezetés című fejezet a vizsgált problémakör legfontosabb előzményeit és az értekezés vázát foglalja össze.

A 3. Fejezet az FFD algoritmus legrosszabb eset bonyolultságát vizsgálja. A legrosszabb eset bonyolultságra a korábbi fontosabb eredmények a következők:

Johnson (1973): $FFD(L) \leq \frac{11}{9} OPT(L) + 4.$

Johnson, Demers, Ullman, Garey, Graham (1974): Ha $L \subset \left(0, \frac{1}{2}\right]$, akkor $FFD\,(L) \leq \frac{71}{60} OPT\,(L) + 5$.

Baker (1985): $FFD\,(L) \leq \frac{11}{9} OPT\,(L) + 3$.

Yue (1991): $FFD\,(L) \leq \frac{11}{9} OPT\,(L) + 1$.

Li, Yue (2000): $FFD\,(L) \leq \frac{11}{9} OPT\,(L) + \frac{7}{9}$.

Dósa 2007-ben igazolta[1], hogy

$$FFD\,(L) \leq \frac{11}{9} OPT\,(L) + \frac{6}{9} \quad \left(FFD\,(L) \leq \left\lfloor \frac{11}{9} OPT\,(L) + \frac{6}{9} \right\rfloor \right), \tag{1}$$

amelyről azt is megmutatta, hogy éles és tovább nem javítható. A publikált konferencia cikkben nyílvánvaló terjedelmi okokból csak egy *részleges bizonyítást* adott a tételre. Később 2013-ban neves társszerzőkkel (Li, Han és Tuza) egy újabb, az előzőtől eltérő bizonyítást is adott erre az eredményre, amely már teljes egészében publikálásra került[2]. A (1) korlát szerkezetét vagy élességét teljes mértékben jellemzi, amennyiben tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén megadja azt a legnagyobb $k \in \mathbb{N}$ számot, amelyre van olyan L lista, amelyre $OPT\,(L) = m$ és $FFD\,(L) = k$. Legyen L tetszőleges input, valamint legyen $OPT\,(L) = 9n + i$, ahol n egész és $2 \leq i \leq 10$. Ekkor

$$FFD\,(L) \leq \begin{cases} 11n + i + 1, & 2 \leq i \leq 5, \\ 11n + i + 2, & 6 \leq i \leq 10. \end{cases}$$

Az $i = 6$ és $i = 2$ esetek pontosságának igazolása egy konkrét lista megadásával történik (az értekezés 8. oldalán). A (1) eredmény igazolása mintegy 70 oldal terjedelmű, lényegében ez teszi ki a teljes harmadik fejezetet, valamint az A és B függelékeket. A tétel igazolása nehéz és bonyolult, az eredmény eléréséhez az irodalomból ismert technikák jelentős továbbfejlesztésére és sok egyedi ötletre volt szükség. Meg kell jegyezni, hogy Johnson eredeti eredményének bizonyítása kb. 70 oldal, Baker bizonyítása 20 oldalra tehető, Yue, Li és Yue bizonyításai pedig kb. 10 oldal terjedelműek.

Az értekezés 4. Fejezete, valamint a C függelék az FF algoritmus legrosszabb eset bonyolultságát vizsgálja és Jiri Sgallal elért közös eredményeket tartalmaz. Az FF algoritmus legrosszabb eset bonyolultságára a következő eredmények voltak korábban ismertek:

Ullman (1971): $FF\,(L) \leq 1.7 OPT\,(L) + 3$.

---

[1] [20] tétel az értekezés irodalomjegyzékében.

[2] [21] tétel az értekezés irodalomjegyzékében.

Johnson, Demers, Ullman, Garey, Graham (1974):

$$FF(L) \le 1.7OPT(L) + 2.$$

Garey, Graham, Johnson, Yao (1976): $FF(L) \le 1.7OPT(L) + \frac{9}{10}$, illetve $FF(L) \le \lceil 1.7OPT(L) \rceil$.

Xia, Tan (2010): $FF(L) \le \frac{17}{10}OPT(L) + \frac{7}{10}$.

Simchy-Levy (1994): $FF(L) \le \frac{7}{4}OPT(L)$.

Xia, Tan (2010)[3]*:* $FF(L) \le \frac{12}{7}OPT(L)$.

Boyar, Dósa, Epstein (2012)[4]*:* $FF(L) \le \frac{12}{7}OPT(L)$.

Németh (2011): $FF(L) \le \frac{101}{59}OPT(L)$.

A fejezetben Dósa a következő két fontos eredményt igazolja.

4.2.1 Tétel: *Tetszőleges L lista esetén $FF(L) \le 1.7OPT(L)$.*

4.3.1 Tétel: *Minden $k \ge 1$ és $0 \le i \le 9$ esetén van olyan L lista, hogy $OPT(L) = 10k + i$ és az alábbi táblázatban foglalt alsó korlát fennáll:*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$FF(L) \ge 17k+$	-1	1	3	4	6	8	10	11	13	15
$FF(L) \le \lfloor 17k + 1.7i \rfloor = 17k+$	0	1	3	5	6	8	10	11	13	15

Igaz továbbá, hogy $i = 1, \ldots, 9$ esetén léteznek L listák, hogy $OPT(L) = i$ és $FF(L) = \lfloor 1.7i \rfloor$.

Johnson, Demers, Ullman, Garey és Graham[5] (1974) megmutatta, hogy minden $OPT = k$ esetén van olyan L lista, hogy $OPT(L) = k$ és

$$FF(L) > 1.7OPT(L) - 8.$$

Egyszerű számolással verifikálható, hogy a 4.3.1 Tétel alsó becslései összefoglalhatók a

$$FF(L) \ge \begin{cases} 1.7OPT(L) - \frac{11}{10}, & i = 3 \\ 1.7OPT(L) - 1, & i = 0,1,2,4,5,6,7,8,9 \end{cases}$$

közös formában, ami egy lényegesen jobb alsó becslés.

[3] A kézirat leadási időpontja: 2009-07-07.

[4] A kézirat leadási időpontja: 2009-09-29.

[5] [55] (p. 306) tétel az értekezésben.

Megjegyzem, hogy van egy apró gépelési hiba a 4.2.1 Tétel értekezésbeli kimondásában. A most idézett két eredmény a tézisfüzetben összevonva úgy szerepel, hogy tetszőleges L input esetén

$$FF(L) \leq \lfloor 1.7OPT \rfloor ,$$

és teszőleges OPT értékre van olyan input, amikor a fenti egyenlőtlenségben egyenlőség szerepel, vagyis a becslés minden OPT esetén éles. Jó lett volna, ha a tézisfüzetben és az értekezésben is az eredmények azonos formában szerepelnének.

Az értekezés 5. Fejezete, amely a szerző önálló dolgozatán alapul[6], az FF algoritmust vizsgálja a bin-packing probléma paraméteres változatán (FF_d), amelyben a tárgyak méretére az $\frac{1}{d}$ felső korlát teljesül, ahol $d \geq 1$ egész szám.

A feladatra korábban ismert eredmények:

Garey, Graham, Ullman (1973): $FF_d(L) \leq \left(\frac{d+1}{d} + \varepsilon\right) OPT$ $(d > 1, \varepsilon > 0)$.

Johnson (1973): $R_{as}(FF_d) = \frac{d+1}{d}$ $(d > 1)$.

Johnson, Demers, Ullman, Garey, Graham (1974): $FF_d(L) \leq \frac{d+1}{d}OPT + 2$.

A fejezetben Dósa a következő eredményt igazolja:

5.0.3 Tétel: *(i) Ha* $OPT = kd + 1$, *akkor az* FF *által generált ládák maximális számára fennáll, hogy*

$$FF_d \leq \left\lfloor \frac{d+1}{d} OPT \right\rfloor = OPT + k;$$

(ii) *Egyénként pedig, ha* $OPT = kd + r$, ahol $2 \leq r \leq d$, *akkor az* FF *által generált ládák maximális számára fennáll, hogy*

$$FF_d \leq \left\lfloor \frac{d+1}{d} OPT \right\rfloor = OPT + k + 1$$

Ugyancsak megad egy ügyes konstrukciót, amellyel a fenti becslések élességét igazolja. Dósa felső becslése az (i) esetben a $\frac{2d+1}{d}$ értékkel, az (ii) esetben

[6] [25] tétel az értekezés irodalomjegyzékében.

pedig a $\frac{d+r}{r}$ mennyiséggel kisebb konstanst ad mint Johnson, Demers, Ullman, Garey és Graham idézett eredménye.

A 6. Fejezet és a D függelék, amely Dósa György és L. Epstein közös [27] dolgozatán alapul, szintén az FF algoritmust vizsgálja a bin-packing probléma elemszám korlátos változatában, ahol az egy ládába kerülő elemek száma legfeljebb k. Itt az aszimptotikus approximációs arány értékére ad alsó becslést a következő formában.

6.2.1 Tétel: *Az FF algoritmus aszimptotikus approximációs arányára a következők teljesülnek:*

- $k = 2, 3, 4$ *esetén legalább* $2.5 - \frac{2}{k}$.
- $4 \leq k \leq 10$ *esetén legalább* $\frac{8(k-1)}{3k} = \frac{8}{3} - \frac{8}{3k}$.
- $k \geq 10$ *esetén legalább* $2.7 - \frac{3}{k}$.

Korábban Krause, Shen és Schwetman[7] kimutatták, hogy az FF algoritmus aszimptotikus approximációs aránya legfeljebb $2.7 - \frac{2.4}{k}$. Dósa ezzel szemben igazolja (6.1.4 Tétel), hogy az FF algoritmus aszimptotikus approximációs aránya $k \geq 10$ esetén legfeljebb $2.7 - \frac{3}{k}$. Vagyis $k \geq 10$ esetén Dósa megadta a pontos aszimptotikus approximácós arányt.

Az értekezés 7. Fejezete és az E függelék, amely Dósa [22] dolgozatán alapul, az un. kötegelt ládapakolási problémát vizsgálja az FFD algoritmus esetén. Ez olyan módosítása az eredeti feladatnak, amelyben a tárgyak K egymásutáni csoportban (kötegben) érkeznek, az aktuálisan érkező csoport tárgyait a következő beérkezése előtt el kell rakni, a későbbi kötegek ismerete nélkül.

A szerző a $K = 2$ esetre javasol egy közelítő algoritmust, amelynek lényege az, hogy az FFD algoritmust alkalmazza külön-külön a két kötegre B_1-re és B_2-re és nem engedi a B_1 köteg elhelyezésére használt ládák felhasználását. Az algoritmus eredményét (az igénybevett ládák számát) $FFD\,(B_1, B_2)$ jelöli, amelyre triviálisan

$$FFD\,(B_1, B_2) = FFD\,(B_1) + FFD\,(B_2)$$

teljesül. Jelölje OPT az egyesített $B_1 \cup B_2$ lista optimális pakolásának dobozszámát. Igazolja a következő eredményt.

[7] [55] tétel az értkezés irodalomjegyzékében.

7.1.1 Tétel: *$FFD(B_1, B_2) \leq \frac{19}{12}OPT + 2$, és az aszimptotikus korlát éles.*

Itt vizsgálja még a kötegelt ládapakolási probléma azon változatát is, amely megengedi a B_1 köteg elhelyezésére használt ládák felhasználását, amennyiben B_2 valamelyik eleme belefér ezekbe. Jelölje $R_a(FFD)$ ennek az algoritmus változatnak az aszimptotikus approximációs rátáját, $R_d(FFD)$ pedig az előző verziónak. Igazolja, hogy $K = 2$ esetén $R_a(FFD) = R_d(FFD)$ (7.1.2 Következmény).

A fejezetben röviden megemlít még egy eredményt a gráf ládapakolási problémára is.

Összefoglaló értékelés

Az értekezésben Dósa György az FFD és FF algoritmusokkal foglalkozik. Megadja ezek legrosszabb eset bonyolultságának tovább már nem javítható felső becsléseit, amellyel ezeket a sok jeles szerző által vizsgált és nehéz problémákat lényegében megoldja. Ugyancsak éles felső becsléseket ad az FF algoritmus legrosszabb eset bonyolultságára a ládapakolási probléma paraméteres változatában. Ez szintén javítja neves szerzők korábbi eredményeit. Az FF algoritmus esetén megadja az elemszám korlátos ládapakolási probléma aszimptotikus approximációs arányát $k \geq 10$ esetén. Végül az FFD algoritmust vizsgálja a kötegelt ládapakolási probléma esetén. Két köteg esetén felső becslést ad a legrosszabb eset bonyolultságra, ill. megmutatja, hogy az aszimptotikus korlát éles.

Az elért eredmények jelentősek, ill. az utolsó probléma esetében pedig igen figyelemre méltóak. A fő eredmények igazolása nehéz, azokhoz a már ismert technikák jelentős egyedi ötleteket igénylő továbbfejlesztésére volt szükség.

A fentiek alapján javaslom az értekezés nyilvános vitára bocsájtását és az MTA doktori cím odaítélését.

Budapest, 2017. november 13.

Galántai Aurél
az MTA doktora