Borkovits Tamás

A fedési kettős és többes csillagrendszerek vizsgálatának járatlan útjain

Értekezés az MTA Doktora címért

Szegedi Tudományegyetem Bajai Obszervatóriuma,
Baja, 2016

dc_1364_16

Előszó

A modern asztrofizika XIX. századra datálható kezdetei óta a kettőscsillagok rendkívül fontos, mondhatni alapvető szerepet játszottak e tudományág történetében. A kettőscsillagok különféle típusai közül is ki kell emelni a fedési kettősöket, amelyek kombinált fotometriai és spektroszkópiai megfigyelése sokáig az egyedüli lehetőséget jelentette a csillagok olyan alapvető fontosságú állapothatározóinak, mint a tömegük, illetve a sugaruk nagy pontosságú meghatározására. Nem véletlenül jellemezték az elmúlt évszázad asztrofizikai kutatásainak olyan ikonikus alakjai, mint Henry Norris Russell, illetve Zdeněk Kopal a fedési kettőscsillagok kutatását mint „az asztrofizika királyi útját”. A fundamentális csillagparaméterek meghatározásán kívül a fedési kettőscsillagok még többet is nyújtottak, nyújtanak. Például a csillagok belső szerkezetére, tömegeloszlására vonatkozó első észlelési eredményeket is ezen égitestcsoport speciális képviselői, az excentrikus pályán keringő fedési kettőscsillagok mozgásának évtizedes megfigyeléséből sikerült leszűrni. A példákat hosszan lehetne tovább sorolni. Egy fedési kettőscsillag fénygörbéjének alakját az egyszerű fedési geometrián felül számtalan más jelenség is befolyásolja a pálya menti keringés dinamikájától a két csillaglégkör sugárzási viszonyait meghatározó fizikai folyamatokon keresztül a komponensek közti árapály- és egyéb kölcsönhatások következményeiig, és a fenti felsorolás egyáltalán nem kimerítő.

A fentiek alapján talán meglepő, hogy annak ellenére, hogy Magyarországon a változócsillagok bizonyos típusai vizsgálatának nagy hagyományai vannak, a fedési kettőscsillagok tanulmányozása korábban nem került az érdeklődés középpontjába, noha észlelés- és műszertechnikai, valamint adatfeldolgozási szempontból nincs lényegi különbség egy fedési és egy pulzáló vagy foltos változócsillag földfelszíni megfigyelése között. Ez természetesen nem azt jelenti, hogy magyar kutatók korábban egyáltalán nem foglalkoztak volna fedési kettőscsillagokkal. Az első magyar észlelések még a változócsillagászat hőskorában, a XIX. század végén, az Ógyallai Csillagvizsgálóban megszülettek. Az obszervatórium Budapestre települését követően pedig, a második világháborúig bezárólag elsősorban Lassovszky Károly (1938–43-ig az intézet igazgatója) foglalkozott fedési kettőscsillagok megfigyelésével.[1] A második világháborút követően viszont a változócsillagászat ezen ága sajnálatos módon kevésbé hangsúlyosan képviseltette csak magát a hazai kutatói programokban. A legutóbbi negyedszázadot tekintve név szerint talán csak Patkós Lászlót, illetve a fiatalabb generáció tagjai közül Csizmadia Szilárdot lehetne kiemelni, akik (a történeti hűség kedvéért) az MTA Csillagászati Kutatóintézete keretén belül a legutóbbi időkig elsődlegesen a fedési kettőscsillagok kutatása terén működtek.

Ily módon, Magyarországon legalábbis, a fedési kettőscsillagok vizsgálata inkább a csillagászat kevés vidéki fellegvárában (Szegeden és Baján) lett jellemző. A bajai csillagvizsgálóban a profilváltást az 1980-as évek közepén odakerült két fiatal kutató, Nuspl János

[1] Minderről Szeidl Béla ír a Detre László születésének centenáriuma kapcsán rendezett konferencián tartott áttekintő előadása nyomán (Szeidl, B., 1996, Commun. Konkoly Obs. N°. 104; http://www.konkoly.hu/Mitteilungen/Mitt104/szeidl.html)

és Hegedüs Tibor kezdeményezte. A fő hangsúly kezdetben a relativisztikus apszismozgást mutató fedési kettősök (mind elméleti, mind gyakorlati) vizsgálatán volt, amely az én érkezésem kapcsán (az 1990-es évek első felében) egészült ki a harmadik kísérőt tartalmazó fedési rendszerek szisztematikus keresésével, amelyhez a matematikai, illetve szoftveres apparátust is az évek során magam építettem fel. A kezdetektől fogva mindannyiunk számára nyilvánvaló volt, hogy ha egy ilyen kis, háttér nélküli vidéki intézményben működve többet akarunk elérni, mint egyszerűen jó iparos munkát végezni, akkor a behatárolt technikai lehetőségek miatt inkább az elméleti kutatások terén kell újszerű megoldásokra, eredményekre törekednünk. Már e törekvésnek a fényében született meg PhD-értekezésem, amelyben torzult komponenseket tartalmazó hierarchikus hármas rendszerek dinamikai viselkedését vizsgáltam az akkoriban elérhető kevés számú hasonló munkához képest új megközelítésben. E munka során fordult érdeklődésem a fedési kettőst tartalmazó kompakt hierarchikus hármas csillagrendszerekbeli rövid távú perturbációk okozta fedésiminimumidőpontváltozások (ETV) analitikus leírása és ezek észlelési kimutatásának irányába. Röviddel az ez irányú kutatásaim eredményeit bemutató harmadik tanulmányom publikálása után a *Kepler*-űrtávcső szinte futószalagon kezdte el szállítani az általam megjósolt viselkedést mutató kompakt hierarchikus hármas csillagrendszerjelölteket, amelyek alkalmat adtak elméleti kutatási eredményeim gyakorlati alkalmazására is. Ezt Saul A. Rappaport az MIT emeritus professzorának megkeresését követően magyar–amerikai együttműködés keretében végeztem el, a munka egyes fázisaiba ELTE-s doktorandusz hallgatóimat is bevonva. Az ezen a téren kifejtett munkásságom képezi a jelen doktori értekezés nagyobb részét.

A fedési kettőcsillagok vizsgálatának „legklasszikusabb" része a fedési fénygörbék analízise. Abban a megtiszteltetésben volt részem, hogy ennek a folyamatnak a csínját-bínját, illetve finom trükkjeit személyesen a fénygörbemodellezés doyenjétől, a mind a mai napig a legszéleskörűbben használt, már csaknem fél évszázada folyamatosan fejlesztett WD-kód megalkotójától Robert E. Wilson professzortól tanulhattam, hisz első tanulmányutam még 1996-ban, friss diplomásként a Floridai Egyetemre, hozzá vezetett. E tudásom igazi kamatoztatásának ideje szintén a közelmúltban jött el, hála a *Kepler*-űrtávcső példa nélkül álló folyamatos és ultraprecíz fotometriai méréseinek, amelyek különleges fedési kettős-, sőt triplán fedő hierarchikus hármascsillagok felfedezéséhez vezettek el. Ezek modellezése új, a modern kihívásoknak eleget tevő fénygörbeillesztő eljárások és kódok kifejlesztését tette szükségessé. Az egyik első ilyen kódot, Bob Wilson munkásságára alapozva, magam fejlesztettem ki, és az elmúlt években több (nem csak *Kepler*) fedési rendszerre is alkalmaztam. Ezek közül e dolgozatban a fénygörbevizsgálatot az új kóddal három, a *Kepler*-űrtávcső által megfigyelt fedési rendszerre mutatom be.

Az általam feldolgozott témák így, habár bírnak némi hazai előzménnyel, mégis inkább hiánypótlóknak tekinthetők a változócsillag-kutatás magyarországi palettáján, és úgy gondolom, túlzás nélkül állíthatom: annak nemzetközi viszonylatban is jelentős kiterjesztését képezik.

A doktori művet hét fejezetre és ezek tartalmához többletinformációkat nyújtó három függelékre tagoltam. Az 1. fejezet alapvetően bevezető jellegű: a kutatásaim célpontjait jelentő fedési kettőscsillagokkal, illetve hierarchikus hármas csillagrendszerekkel kapcsolatos főbb elméleti tudnivalókat, illetve vizsgálati módszereket foglalom össze, megjelölve azt is, hogy a továbbiakban ismertetésre kerülő kutatásaim és eredményeim hogyan illeszkednek e tudományterületek korpuszába. A 2. és 3. fejezetek elméleti jellegű, az égi mechanikai háromtest-probléma speciális asztrofizikai alkalmazásaival kapcsolatos kutatásaimat tartalmazza. A 4. fejezet a 2. (és kisebb részt a 3.) fejezetben felállított elméleti modell gyakorlati alkalmazását mutatja be a *Kepler*-űrtávcső által fotometriailag észlelt többes csillagrendszerek több százas mintájára. Az 5. és 6. fejezetek pedig egyedi, szintén a *Kepler*-űrtávcső által megfigyelt, különleges fedési rendszerek komplex analízisét mutatják be, amelyek elsődlegesen az általam kifejlesztett és szintén bemutatásra kerülő új vizsgálati módszerekre, illetve szoftverekre támaszkodnak. Végül a 7. fejezetben a kutatás további irányait kijelölő néhány záró gondolattal fejezem be az értekezést.

Noha az ismertetett kutatásaim kivétel nélkül többszerzős tanulmányokban jelentek meg (amelyek túlnyomó többségének első szerzője vagyok), az itt bemutatásra kerülő eredmények legnagyobb része alapvetően az én munkám. Ezt a dolgozatban igyekeztem egyes szám első személy használatával is kifejezni. Ahol a bemutatott egyes részeredményekhez más szerzőtársak is jelentős mértékben hozzájárultak, ezt lábjegyzetként mindig jeleztem a szövegben, illetve ilyenkor többes szám használatára tértem át. E logikától egyedül az elméleti jellegű 2., 3. fejezetekben tértem el, ahol a hosszas matematikai levezetésekkel kapcsolatos mondatok nagyon szerencsétlenül hangzottak volna egyes szám első személyben. Ezért itt királyi többes használata mellett döntöttem annak ellenére, hogy az elméleti vizsgálatokat gyakorlatilag teljesen egyedül végeztem.

Tartalomjegyzék

dc_1364_16

1. fejezet

Bevezetés

1783 tavaszán az ifjú John Goodricke baronet[1] a brit Királyi Társaságnak küldött jelentésében, miután beszámol a Medúza fejénél található fényes csillag, az Algol fényváltozásának szabályos, periodikus voltáról, az alábbi fejtegetésbe kezd:

„Úgy képzelem, hogy [az Algol fényének elhalványulása] aligha tulajdonítható másnak, mint vagy egy sötét, az Algol körül keringő test takarásának, vagy pedig annak, hogy maga az Algol mozog úgy, hogy a rajta lévő sötét foltok, vagy hasonszőrű dolgok periodikusan a Föld felé fordulnak." (Goodricke, 1783, idézi French, 2012.)

E kijelentés legalább háromszorosan is vizionárius. Először is, Goodricke az első lehetőséggel ténylegesen eltalálta az Algol teljesen szabályos időközönként bekövetkező fényváltozásainak eredetét, és ily módon e közlemény megjelenésének idejét tekinthetjük a fedésikettős-csillagászat születésnapjának. Másodszor, a csillagfelszínen található, a tengelyforgás miatt változó helyzetű sötét foltok okozta fényváltozás valóban megfigyelhető sok, kromoszferikusan aktív csillagon. Azt a változócsillag-típust, ahol ez a fényváltozás a domináns, ma forgási változónak nevezzük. Végül, amikor Goodricke egy sötét testről beszélt, ő minden bizonnyal bolygóra gondolt. Ebben tévedett ugyan, napjainkra azonban a Naprendszeren kívüli bolygók túlnyomó többségét már éppen ezen a módon, a központi csillaguk előtti átvonulásuk okozta fényességcsökkenésen keresztül fedezik fel. Ez a tény alapvetően érinti a jelen dolgozatot is, hisz a fedési kettőscsillagokkal kapcsolatos, ehelyütt ismertetésre kerülő kutatásaim elsősorban annak a *Kepler*-űrtávcsőnek a fotometrikus mérésein alapulnak, amelynek elsődleges küldetése ugyan tranzitáló exobolygók, sőt exobolygó-rendszerek felfedezése volt, azonban rendkívüli fotometriai pontosságának köszönhetően a fedési kettős sőt többes csillagok kutatásában is új forradalmat indított el.

E fejezetben azokat az alapokat tekintem át, amelyek elengedhetetlenek a fedési kettős és többes csillagokkal kapcsolatos új kutatási eredmények értelmezéséhez, illetve a tudományterület teljes kontextusába való behelyezéséhez.

1.1. Fedési kettősök – az asztrofizika királyi útja

1.1.1. A kettőscsillagok jelentősége és hagyományos csoportosítása

A gravitációsan kötött rendszert alkotó kettőscsillagokat hagyományosan az alábbi, a különféle észlelési módszereken alapuló csoportokba sorolják be:

[1] Aki ugyan egy gyermekkori betegség következtében megsüketült, viszont a közkeletű vélekedéssel szemben nem volt néma.

Vizuális kettősök

Ezek olyan rendszerek, amelyek esetében a két komponens optikai eszközökkel felbontható. Amennyiben az utolsó évtizedekben teret nyert interferometriai eszközöket nem számítjuk, akkor ez $\sim 0{,}1''$-es minimális szeparációt jelent, amiből megbecsülhető, hogy még egy viszonylag közeli ($\sim 100\,\mathrm{pc}$) távolságú, $2\,\mathrm{M}_\odot$ össztömegű kettőscsillag esetében is ez nagy valószínűséggel ~ 15 évesnél hosszabb keringési időt jelent. Tehát ily módon hagyományos eszközökkel csak a hosszú periódusú, lassan mozgó kettőscsillagok érhetők el, vagyis a keringési pálya megfelelő pontosságú meghatározásához sokszor évtizedes vagy még hosszabb megfigyelési intervallumra van szükség.

A múlt század hetvenes éveiben előbb a speckle-interferometria megjelenésével, majd az ezredfordulót követően a különböző hosszú bázisvonalú optikai interferométerek megépítésével sikerült nagyságrendekkel növelni az elérhető szögfelbontást, és így napjainkra már egyes milliívmásodperces (mas) látszó szeparációjú, akár $1-2$ napos periódusú kettőscsillagokat is sikerült felbontani. Például 2006. óta az emblematikus fedési kettőscsillag, az Algol már vizuális kettősnek is számít, miután egy magyar–amerikai kutatócsoport (amelynek magam is tagja voltam) a CHARA interferométerrel elsőként bontotta fel sikeresen optikai tartományban a fedési kettős két komponensét (Csizmadia és mktsai., 2009a).[2]

A vizuális kettősök másik végletét a *közössajátmozgás-párok* (Common Proper Motion Pairs – CPM) alkotják, ahol a viszonylag kis (de akár 1^{o}-ot is meghaladó) szögtávolságra levő csillagok egymáshoz viszonyított mozgását ugyan nem tudjuk kimutatni, de a hasonló irányú és nagyságú sajátmozgás (és esetleg radiális sebesség) miatt feltételezhetjük, hogy azok gravitációsan kötött, akár több ezer éves periódusú párt alkotnak.

Asztrometriai kettősök

Ha a másodkomponens relatív halványsága miatt csak az egyik csillagot tudjuk megfigyelni, de annak a keringés miatti elmozdulása a háttércsillagokhoz képest asztrometriai módszerekkel kimutatható, akkor asztrometriai kettősről beszélünk.

A fenti két kategóriához tartozó rendszerek esetében az egyes kettőscsillag-komponensek relatív, vagy pedig abszolút (a változatlan helyzetűnek tekinthető háttércsillagokhoz viszonyított) pályájának égboltra eső vetületét tudjuk kimérni, amelyből a P keringési perióduson kívül a pálya e excentricitása, ϖ pericentrum-hosszúsága, illetve i inklinációja egyértelműen, míg Ω csomóvonal-hosszúsága pedig 180^{o}-os kétértelműséggel határozható meg.[3] Mivel azonban az a fél nagytengely nem fizikai egységben, hanem csak szögmértékben adódik, ezért a pálya fizikai méretének (és így a csillagtömegeknek) a meghatározásához szükségünk van még a kettős távolságára. Amennyiben a relatív pálya ismert (vizuális kettősöknél ez határozható meg a legkönnyebben), akkor a megfigyelésekből közvetlenül csak a kettős össztömegét tudjuk meghatározni. Amennyiben asztrometriai módszerekkel mindkét abszolút pálya is kimérhető, a két tömeget külön-külön is megkapjuk. Ellenben, a klasszikus asztrometriai kettősöknél a tömegek helyett csak az úgynevezett asztrometriai tömegfüggvényt tudjuk meghatározni, amely a nem látszó komponens tömegére egy (egy valós gyökű) harmadfokú egyenletet eredményez, amelyben a megfigyelt csillag tömege szabad paraméterként szerepel. A fordított irányban viszont, amennyiben egy asztrometriai

[2] Érdekességként jegyzem meg, hogy a vizuális kettőscsillagok hivatalos katalógusában (Washington Double Star Catalog – WDS, Mason és mktsai., 2001) a legrégebben ismert fedési kettőscsillag, az Algol szoros kettős alrendszere ennek köszönhetően a 03082+4057CSI (mint Csizmadia) azonosítóval szerepel.

[3] Önmagában, csak asztrometriai megfigyelésekkel nem különböztethető meg a felszálló, illetve a leszálló csomó. Amennyiben viszont rendelkezésre állnak radiálissebesség-mérések is, vagy pedig fedési kettősről van szó, akkor ez a bizonytalanság feloldható.

kettős egyik komponensének ismerjük a tömegét (illetve vizuális kettős esetén a komponensek össztömegét), akkor az asztrometriai (illetve relatív) pálya ívmértékben megmért fél nagytengelyének ismeretében a kettős rendszer távolsága is meghatározható.

Spektroszkópiai kettősök

A spektroszkópiai kettőscsillagok esetében a színképvonalak keringés miatti Doppler-eltolódása árulja el alapvetően a kettősséget. Ha a kompozit spektrumban mindkét csillag, egymással természetesen ellentétes orbitális fázisban mozgó vonalai megfigyelhetők, akkor kétvonalas (SB2), ellenkező esetben pedig egyvonalas (SB1) spektroszkópiai kettősről beszélünk. Noha ismeretesek többéves keringési idejű spektroszkópiai kettősök is, többségük keringési ideje inkább a napos vagy hónapos kategóriába esik. A spektroszkópiai kettőscsillagok pályájának kilencedik katalógusa (SB9, Pourbaix és mktsai., 2004) 2016. augusztus 24-én 3531 objektumot tartalmazott, amelyek keringési ideje többségükben 50 nap alatti, noha a leghosszabb periódusú BD+42°401 SB2-rendszer (amely egyben vizuális kettős is) számított keringési ideje a 300 évet is meghaladja.

A spektroszkópiai kettősök színképéből egyrészt általában mindazok a kvalitatív, illetve kvantitatív spektroszkópiai jellemzők meghatározhatók, amelyek egy magányos mezőcsillagéból is. A kettősséggel kapcsolatos többletinformációkat elsősorban[4] az egyes komponensekhez tartozó színképvonalaknak a szoros kettős tömegközéppontja körüli keringés miatt fellépő Doppler-eltolódása kimérésével előállítható radiálissebesség-görbék hordozzák. A radiálissebesség-görbéből P, e, illetve ω (a pericentrum argumentuma), valamint a megfigyelhető komponensek számától függően, az abszolút pályák fél nagytengelyeinek látóirányú vetületei ($a_{1,2} \sin i$) határozhatók meg, s ezek aránya SB2 rendszerek esetében egyben megadja a két csillag (spektroszkópiai) tömegarányát is. Mivel a vetített pályaméretek fizikai egységekben adódnak, amennyiben SB2 rendszerről van szó, a két csillag tömegét közvetlenül fizikai egységekben kapjuk, azonban az ismeretlen i inklinációparaméter függvényében. Ha csak az egyik komponens színképvonalai látszanak, a tömegek, illetve a tömegarány helyett csak a spektroszkópiai tömegfüggvényt tudjuk meghatározni.[5] Amennyiben az inklinációt ismerjük, mert a spektroszkópiai kettősünk egyben vizuális, asztrometriai vagy pedig fedési kettős is, akkor természetesen a csillagok tényleges tömegét is meghatározhatjuk. Fedési kettős esetében egy jó felbontású radiálissebesség-görbe felhasználásával ideális esetben további információként még akár a csillagok forgástengelyeinek pályasíkhoz viszonyított helyzetét is meghatározhatjuk spektroszkópiai úton.

Fedési kettőscsillagok

Amennyiben egy kettőscsillag pályahajlása elegendően nagy ahhoz, hogy a két csillag égboltra vetített korongja időszakosan legalább részben átfedje egymást, valamint a két csillag szögtávolsága általában alatta marad az észlelésre használt optikai eszközök szögfelbontásának, akkor fedési kettőscsillagról beszélünk. Körpályán keringő, gömbszimmetrikus csillagok esetében a fedések bekövetkeztének feltétele:

$$a|\cos i| \leq R_1 + R_2, \tag{1.1}$$

míg teljes fedés akkor következik be, ha

$$a|\cos i| \leq |R_1 - R_2|, \tag{1.2}$$

[4]Elsősorban, de nem kizárólagosan, hiszen a csillagok luminozitásaránya közvetlenül a spektrumból számolható (Petrie, 1939).

[5]Ez a mennyiség analóg a rövidesen, az (1.22) kifejezés alatt bevezetésre kerülő, és a dolgozat 4. fejezetében széleskörűen használt, a fényidőeffektus kapcsán hármas rendszerekre definiált tömegfüggvénnyel.

1.1. táblázat. Fedési fénygörbéből és radiálissebesség-görbé(k)ből meghatározható rendszerparaméterek

	1	2	3	4	5
$a_1 \sin i$ vagy $a_2 \sin i$		$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$a \sin i$, $a_{1,2} \sin i$, $M_{1,2} \sin^3 i$			$\surd$	$\surd$	
a, $a_{1,2}$, $M_{1,2}$, $R_{1,2}$, $\mathcal{L}_{1,2}$, d				$(\surd)$	$\surd$
e, ω, P	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
γ		$\surd$	$\surd$		$\surd$
$q_{\rm sp}$			$\surd$		$\surd$
$q_{\rm ph}$	$(\surd)$			$(\surd)$	$(\surd)$
i, $R_{1,2}/a$, L_2/L_1, $\beta_{1,2}$, $A_{1,2}$, $F_{1,2}$, $x_{1,2}$, l_3	$\surd$			$\surd$	$\surd$
T_2	$\surd$	(?)	(?)	$\surd$	$\surd$

1 = legalább egy fotometriai fénygörbe;
2 = egy radiálissebesség-görbe (SB1);
3 = mindkét radiálissebesség-görbe (SB2);
4 = legalább egy fotometriai fénygörbe és egy radiálissebesség-görbe (SB1);
5 = legalább egy fotometriai fénygörbe és mindkét radiálissebesség-görbe (SB2);

ahol a a relatív pálya fél nagytengelye, R_1, R_2 pedig a két csillag sugara. Ellipszispálya, illetve torzult komponensek esetében a formulák ugyan valamivel bonyolultabbak, de a lényeg nem változik, miszerint a fedési geometriát elsősorban a pályahajlás és a csillagok fél nagytengelyhez (vagy pontosabban az egymástól való távolságukhoz) viszonyított fajlagos sugara határozza meg. Ebből egyenesen következik, hogy a fedési kettőscsillagok túlnyomó többsége a legszorosabb, rövid periódusú kettősök közül kerül ki.[6] A jelenleg ismert legrövidebb periódusú fedési kettőscsillag az AM Canum Venaticorum típusú (azaz egy He-befogási koronggal körülvett fehér törpét és egy kis tömegű, szintén elfejlődött donor csillagot tartalmazó) SDSS J0926+3624, ahol a mellékkomponens 28,3 percenként mintegy egy percre elfedi a fehér törpét (Copperwheat és mktsai., 2011). A leghosszabb periódusú ismert fedési kettőscsillag a TYC 2505-672-1, ahol a forró, elfejlődött sdB szubtörpe csillagot körülvevő átlátszatlan korong 69,1 évente csaknem 3 és fél évre elfedi az M típusú vörös óriás főcsillagot (Rodriguez és mktsai., 2016).

Az ismert fedési kettőscsillagok túlnyomó többsége azonban két fősorozati, vagy a fősorozatról csak kismértékben elfejlődött csillagot tartalmaz. E rendszerek periódusa általában ~ 5 órától több száz napig terjed, azonban elsöprő többségben vannak köztük a néhány órás, illetve alig 1–2 napos keringési idejű rendszerek. Ennek a fentebb már említetten kívül egy gyakorlati oka is van. Az egy-egy égterületet hosszabb időn át folyamatosan megfigyelő modern kori fotometriai égboltfelmérő programokat megelőző időkben természetszerűleg sokkal kisebb esély volt egy ötven-száz naponta néhány órára (vagy akár 1–2 napra) elhalványodó, de egyébként állandó fényességű fedési kettős felfedezésére, mint egy néhány óránként vagy naponként fedéseket mutató rendszerére. Ily módon az utóbbi évtizedben jelentősen megnőtt az ismert, hosszabb periódusú fedési kettőscsillagok száma is. Ennek jelentőségére rövidesen visszatérek.

[6] Egyszerű számolással meggyőződhetünk arról, hogy két Naphoz hasonló, egymás körül 1 CSE sugarú körpályán keringő csillag esetében fedések csak $i \gtrsim 89\overset{\circ}{.}47$ pályahajlás esetében következnek be. Ugyancsak e példánál maradva ahhoz, hogy a Föld Nap előtti átvonulását távoli csillagászok meg tudják figyelni, a csillagászok lakta távoli bolygó ekliptikai szélességének $\beta \lesssim \pm 0\overset{\circ}{.}266$ alatt kell maradnia.

Ahhoz, hogy a fedési kettőscsillagoknak a klasszikus asztrofizikában kiemelkedő jelentőségét megérthessük, a Kallrath és Milone (2009) tankönyvéből átvett 1.1. táblázatban összefoglalom, hogy milyen információk nyerhetők ki egy fedési kettőscsillag fénygörbéjéből önmagában, illetve akkor, ha a rendszer egyben spektroszkópiai kettős is. Ami jól látható, hogy egy fedési fénygörbe önmagában elsősorban dimenziótlan, relatív mennyiségeket szolgáltat (fajlagos sugarak – $R_{1,2}/a$; a komponensek luminozitásaránya – L_1/L_2; egyes speciális esetekben a komponensek tömegaránya – $q_{\rm ph}$; a hőmérsékletek aránya T_2/T_1; a fedési kettős fényességéhez hozzámért harmadik fény relatív mennyisége – l_3). Ezenfelül a fénygörbe alakját számos további, máshonnan nem meghatározható (legfeljebb elméleti modellek alapján számolható), a csillaglégkörök fizikájában fontos szerepet játszó paraméter is alakítja (bolometrikus albedó – $A_{1,2}$; különféle monokromatikus, illetve bolometrikus szélsötétedési együtthatók – $x_{1,2}$; gravitációs kifényesedési exponens – $\beta_{1,2}$). Ezenkívül a fénygörbe a csillagok alakján és fényességeloszlásán keresztül közvetve a felszíni, lokális gravitációs gyorsulásra, illetve a tengelyforgási sebesség és a keringési sebesség arányára – $F_{1,2}$) vonatkozó információkat is hordoz. Ami pedig az e, ω pályaelemeket, illetve a kettős P keringési idejét illeti, ezek noha mind a fotometriai fénygörbéből, mind a radiálissebesség-görbéből meghatározhatók, de fotometriai úton sokkal pontosabban kaphatók meg.

Egy további pályaelem, ami viszont a radiálissebesség-görbéből nem határozható meg, a fotometriai fénygörbéből viszont igen, az az i inklináció.[7] Márpedig, ha egy fedési kettőscsillag egyben kétvonalas spektroszkópiai kettős is, akkor ily módon meghatározható a két csillag tömege, illetve a komponensek fizikai mérete is. Ha ezenfelül a csillagok effektív hőmérséklete is meghatározható (akár spektroszkópiai, akár többszín-fotometriai úton), akkor megkapható a csillagok fizikai egységben kifejezett luminozitása ($\mathcal{L}_{1,2}$) is. Ezen összefüggés egyik legrégibb és tudománytörténetileg legfontosabb alkalmazása, hogy a tömeg-fényesség reláció felismerése és első publikálása során Eddington (1924) 13 akkor ismert SB2 fedési kettőscsillagot is felhasznált a reláció ellenőrzésére, illetve kalibrálására. Ezenfelül, amint a csillagok tényleges luminozitása ismert, látszó fényességük felhasználásával kiszámolható a kettős távolsága (d) is.

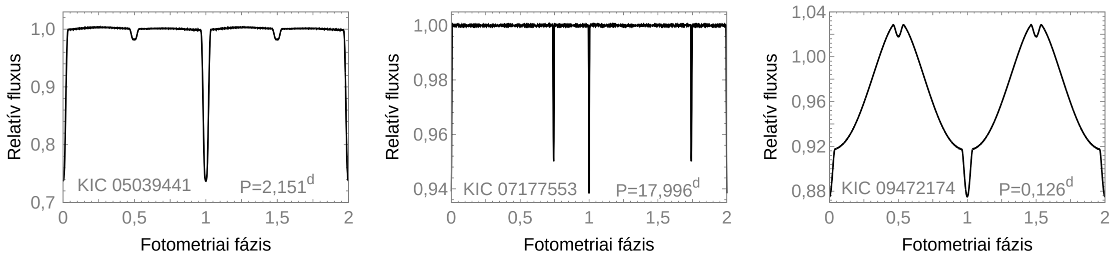
Ez idáig a fedési kettőscsillagokról mint egy homogén változócsillag-típusról beszéltem. Valójában azonban a fedési kettősök több, egymástól hol erősebben, hol kevésbé elkülönülő csoportra bomlanak mind (fénygörbe-)fenomenológiai, mind morfológiai vonatkozásban.

1.1.2. A fedésikettős-fénygörbék fenomenológiai osztályozása

A fénygörbék történeti, klasszikus felosztása fénygörbéjük jellegzetes alakján alapszik, függetlenül attól, hogy a kettős milyen tényleges geometriai, illetve fizikai jellemzői eredményezik az adott fénygörbealakot. E felosztásban a fedési események egymáshoz viszonyított mélységén, illetve a keringési (pontosabban: fedési) periódushoz viszonyított hosszúságán felül a fénygörbe fedéseken kívüli viselkedése is szerepet játszik. A fedéseken kívüli esetleges fényváltozás három fő, a kettőséggel szoros kapcsolatban álló forrása az *ellipszoidális változás*, a *visszasugárzási effektus*[8], valamint a relativisztikus *Doppler-nyalábolás*, amelyek egyben további, a fedési kettősökkel rokon, fotometriai változásokat mutató kettőscsillag-csoportok névadói is. A fedési kettősök fénygörbetípusainak most következő tágyalása után

[7] Egy közönséges fedési fénygörbe azonban invariáns $\cos i$ előjelére, azaz két, például $i = 85^{\rm o}$, illetve $i = 95^{\rm o}$ inklinációjú, de minden egyébben teljesen megegyező kettőscsillag fotometriai fénygörbéje (és természetesen radiálissebesség-görbéje is) tökéletesen egyforma. Mindaddig, amíg egy ilyen kettőscsillag nem egy hármas vagy többes rendszer része, ennek a térbeli tájolásbeli kétértelműségnek semmilyen elvi vagy gyakorlati jelentősége sincs, ezért konvencionálisan az $i \leq 90^{\rm o}$ értéket használják.

[8] Az angol nyelvű szakirodalomban általában a „reflection effect” kifejezést használják, bár egyes szerzők meg szokták jegyezni, hogy az „irradiation effect” lenne a helyesebb megnevezés. A magam részéről úgy érzem, hogy a „visszasugárzás” szó használatával e kérdésben átvágtam a gordiuszi csomót.



1.1. ábra. Példák Algol típusú fénygörbékre. *Balra:* A KIC 05039441 fedési kettőscsillag klasszikus Algol típusú fénygörbéje. *Középen:* Az excentrikus KIC 07177553 fénygörbéjén a mellékminimum jelentősen eltolódott, s mélysége közelíti a főminimumét. *Jobbra:* Az elfejlődött, forró B típusú szubtörpe és halvány, kis tömegű M törpe kísérője alkotta KIC 09472174 fénygörbéjének legszembeszökőbb vonása az erőteljes visszasugárzási effektus. (Az e bevezető fejezetben bemutatott típuspéldák többségét a 4. fejezetben vizsgált, *Kepler*-mezőbeli kettősök fénygörbéi közül válogattam.)

ez utóbbi változócsillag-típusokra is kitérek, és ennek keretében röviden bemutatom e három jelenséget is.

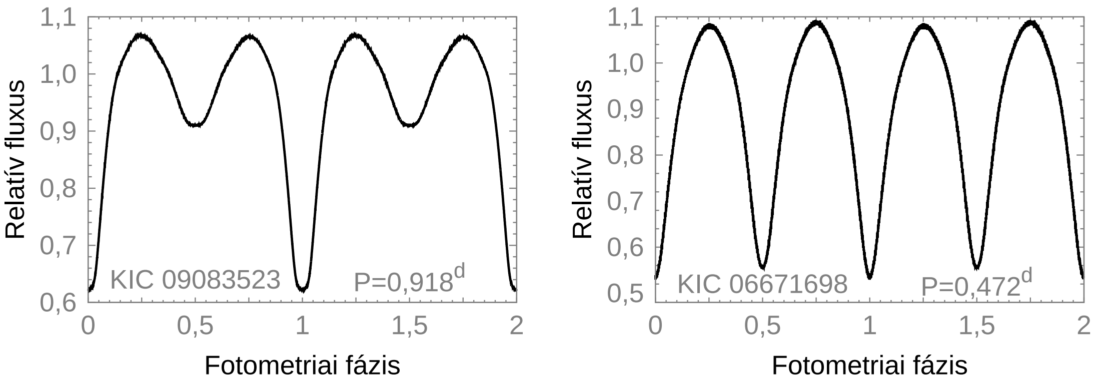
A klasszikus, fenomenológiai osztályozás a fedési kettősök fénygörbéit az alábbi három típusba sorolja:

Algol típusú fénygörbék (EA)

Az EA fénygörbék fedéseken kívüli szakasza általában lapos, azaz a fénygörbék kis tartományára szorítkozó fedési események közötti időben a rendszer összfényessége csaknem állandó. Emellett a klasszikus definícióhoz az is hozzátartozik, hogy a főminimum sokkal mélyebb, mint a mellékminimum (1.1. ábra bal oldalán), amely utóbbi akár a detektálási határ alatt is maradhat. Az a tény, hogy a fedéseken kívüli szakaszokon az összfényesség csaknem állandó, első ránézésre arra látszik utalni, hogy a két csillag közötti kölcsönhatás elhanyagolható, és azok gömb alakúak. Ez azonban nem feltétlenül van így. Például a névadó Algol esetében a kettős összfényességének túlnyomó részét adó főkomponens valóban közel gömb alakú, azonban a jóval halványabb mellékkomponens, amely kitölti a teljes Roche-térfogatát, már korántsem az, csak éppen az árapály-kölcsönhatás miatti torzult alakjából származó ellipszoidális fényváltozás csaknem teljesen beleveszik a főkomponens egyenletes sugárzásába. Egyre vörösebb hullámhosszakon azonban, ahol a mellékkomponens járuléka az összfényességhez egyre jelentősebb, a fénygörbe egyre inkább az alább ismertetendő β Lyrae típus jellegzetességeit mutatja.

Manapság a klasszikus definíció második felét, amely a fő- és mellékminimum mélységének nagyfokú különbözőségére utal, már nem értjük bele az Algol típusú fénygörbék meghatározásába. Ily módon ebbe a kategóriába sorolunk minden olyan fedési kettőst, ahol a kis tartományra lokalizálódó fedési fényváltozás tartományán kívüli szakaszon a fénygörbe csaknem konstans fényességről árulkodik, a kétféle minimum fényességarányától teljesen függetlenül. Amennyiben egy közel azonos mélységű fő- és mellékminimumot mutató Algol típusú fénygörbét figyelünk meg, szinte teljesen bizonyosak lehetünk abban, hogy a két csillag valóban gömbszimmetrikus, hiszen ebben az esetben jó okunk van feltételezni, hogy a két csillag közel azonos mértékben járul hozzá a fénygörbéhez, s így az egyik csillag esetleges állandó fényessége nem tudná elfedni a másik komponens ellipszoidális fényváltozását.[9] Egy ilyen fénygörbe tehát arra utal, hogy a két komponens elég messze

[9] Ha egészen szigorúan vizsgáljuk a problémát, akkor azonban szem előtt kell tartani, hogy a fedésmély-



1.2. ábra. Példák β Lyrae, illetve W Ursae Majoris típusú fénygörbékre. *Balra:* A KIC 09083523 fedési kettőscsillag β Lyr típusú fénygörbéje. A kiválasztott rendszer teljes fedéseket mutat, amelyből a mellékminimum, mivel lapos, okkultáció, míg a főminimum a kisebb és a jelen esetben egyben alacsonyabb felületi fényességű csillag társa előtti átvonulása. *Jobbra:* A KIC 06671698 jellegzetes W UMa típusú fényváltozása. (Vegyük észre, hogy a két maximumfényesség kis mértékben különbözik!)

van egymástól, hogy az árapály-kölcsönhatás ne torzítsa el számottevő mértékben a csillagok alakját. Ennek egyenes következménye, hogy minél hosszabb periódusú egy fedési kettős, annál valószínűbb, hogy ilyen fénygörbét fog mutatni.

Az Algol típusú fénygörbék egy jelentős részének további jellegzetessége, hogy a mellékminimum nem két főminimum között félidőben következik be, s ezzel együtt a két minimum időtartama is különbözhet (sőt, egyikük hiányozhat is). Ez a viselkedés arra utal, hogy a kettős két tagja ellipszispályán kering (1.1. ábra középső paneljén).

Végezetül, az Algol típusú fénygörbék közé szokták besorolni azokat a fényváltozásokat is, ahol a minimumok közti fénygörbeszakaszt az ellipszoidális változás helyett a visszasugárzási effektus uralja. Bizonyos kettős rendszerek esetében ez a fényváltozás extrém nagy lehet, akár még a főminimum amplitúdóját is meghaladhatja, amint az 1.1. ábra jobb oldalán látható.

β Lyrae típusú fénygörbék (EB)

Ezt a kategóriát az jellemzi, hogy a rendszer fényessége a fedéseken kívül is folyamatosan változik, és a fedések fázishossza jóval nagyobb is lehet, mint az algolok esetében (az 1.2. ábra bal oldalán), amely arra utal, hogy a csillagok fajlagos (azaz a szeparációjukhoz viszonyított) sugara jócskán meghalad(hat)ja az előző kategóriához tartozó rendszerekét. A kettőscsillagnak általában két fényességmaximuma van, mégpedig a fedési minimumok közti félidő környékén. A fedéseken kívüli fényváltozás elsődleges oka az ellipszoidális változás, amely annak a következménye, hogy az árapály-kölcsönhatás, illetve ezzel összefüggésben a gyors tengelyforgás miatt ellipszoidálissá torzult csillagfelszínnek hol kisebb, hol nagyobb területű (és fényességű) része fordul az észlelő felé. Mivel az árapály-kölcsönhatás nagysága erősen függ a fajlagos sugártól, a fázisban hosszabb fedések és az erősebb ellipszoidális változás ugyanarra az eredetre vezethető vissza. E rendszerekben a nagyobb közelség miatt

ségek aránya (legalábbis körpálya esetében) kizárólag a felületi fényességek arányától függ, míg az, hogy az állandó fényességű csillag sugárzása mennyire csökkenti a kísérő ellipszoidális változásának amplitúdóját, a két csillag luminozitásarányának a függvénye. Nehéz azonban olyan asztrofizikailag reális szituációt elképzelni, amikor két hasonló felületi fényességű csillag közül a kisebb méretű (és így kisebb fényességű) lenne a jelentősen torzultabb.

gyakran zajlik tömegátadás amely, mivel általában anyagbefogási korong kialakulásával jár, kisebb-nagyobb mértékben eltorzíthatja a fénygörbét.

W Ursae Majoris típusú fénygörbék (EW)

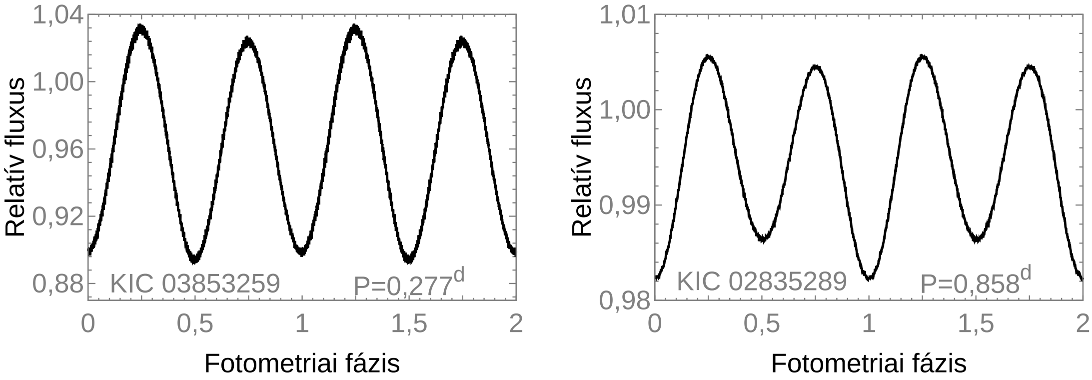
A W UMa típusú fénygörbe folyamatos, szinuszoidális jellegű fényváltozást mutat olyannyira, hogy gyakran ránézésre nem is lehet elkülöníteni, hogy hol kezdődik és végződik maga egy fedési esemény. Ezenfelül a két fényességminimum általában csaknem egyforma mélységű, ami arra utal, hogy a csillagok felületi fényessége és így hőmérséklete csak kis mértékben tér el egymástól (lásd az 1.2. ábra jobb oldalán). E fedési kettősök túlnyomó többsége FGK színképtípusú fősorozati törpe, tipikusan egynaposnál rövidebb periódussal. Kivételesen azonban korai színképtípusú kettősök között is előfordul ez a fénygörbetípus, ebben az esetben a periódus számottevően hosszabb. Általában két alcsoportjukat különböztetik meg: az A altípus esetében a nagyobb csillag egyben a forróbb is, míg a W altípus esetében a kisebb méretű komponens a forróbb (Binnendijk, 1965). A későbbiekben szükségessé vált a B alosztály bevezetése is a viszonylag nagyobb hőmérséklet-különbséget mutató komponenseket tartalmazó (és ezért fokozottabban eltérő fedésmélységű fő- és mellékminimumot produkáló) W UMa-rendszerek besorolásához (Lucy és Wilson, 1979). Végezetül Csizmadia és Klagyivik (2004) bevezették az előbbiekkel átfedő H típust a $q > 0{,}72$ tömegarányú W UMa-k esetére, ugyanis azt találták, hogy ezek tulajdonságai sok szempontból jelentősen eltérnek kisebb tömegarányú társaiktól.

Tekintettel arra, hogy ezek a csillagok kis távolságuk miatt erőteljes kölcsönhatásban állnak egymással, és általában, kései csillagokról lévén szó, jelentős vastagságú konvektív burokkal is rendelkeznek, amely különösképpen kedvez a mágnesesség hajtotta kromoszferikus és fotoszferikus aktivitásnak, a W UMa-rendszerek fénygörbéit e jelenségek gyakran eltorzítják, illetve aszimmetrikussá teszik. Így például a fényességmaximumok között akár 0,1 magnitúdós eltérések is lehetnek (O'Connell-effektus – O'Connell, 1951; Milone, 1968), valamint ennek gyakori kísérője az is, hogy a fő- és mellékminimumok mélysége időről időre felcserélődik.

Amennyiben a kettőscsillag inklinációja egyre kisebb, a fedésmélységek és -hosszak egyre csökkennek, majd amikor a kettős pályahajlása az (1.1). egyenlettel definiált határ alá csökken, többé nem látunk fedéseket. (Itt kell megjegyezni, hogy a W UMa típusú kettősök esetében ez $i \lesssim 34^{\circ}$-ot jelent, tehát nem feltétlenül igaz, hogy csak majdnem éléről látszó kettőscsillagpályák esetében figyelhetők meg fedések.) Azonban a fentebb ismertetett egyéb, a kettősség tényéből származó fényváltozások, azaz az ellipszoidális és visszasugárzási effektusok, illetve a Doppler-nyalábolás esetleges észlelése ilyenkor is lehetővé teszik egyes kettőscsillagok fotometriai úton való felismerését, megfigyelését. Mivel e rendszerek fizikai tulajdonságai semmiben sem különböznek a fedési kettősökétől, valamint fénygörbéjük a fedési kettőrök fedéseken kívüli szakaszaihoz teljesen hasonló módon írható le és modellezhető, szokás őket csaknem egy kalap alá venni a fedési kettősökkel, és én is ezt fogom követni a 4. fejezetben. E kettősöket az uralkodó fényváltozás alapján soroljuk az alábbi kategóriákba:

Ellipszoidális változók (ELV)

Ebben a fotometriai változást mutató kettőscsillagcsoportban a fényváltozás döntően az ellipszoidális effektus következménye. E jelenség akkor lép fel, ha a csillagok alakja az árapály-kölcsönhatás következtében jelentősen eltér a gömbtől. Ekkor egy keringés folyamán a Földről megfigyelhető csillagfelület nagysága változik. Ráadásul nem gömbszimmetrikus csillagfelszín esetében von Zeipel törvénye értelmében (Von Zeipel, 1924) a csillag-



1.3. ábra. Példák ellipszoidális változócsillagokra (ELV). *Balra:* A KIC 03853259 több mint 10%-os fényváltozása, illetve bő hat és fél órás periódusa okán nagyobb pályahajlás esetén valószínűleg egy EW típusú fedési kettős lenne. *Jobbra:* A KIC 02835289 fényváltozása egy nagyságrenddel kisebb, alig 3%. Ez a kettős rendszer fedési változóként EA, esetleg EB típusú fénygörbét mutatna. (A rendszerben van egy fényesebb harmadik komponens is, amely valamelyest csökkenti az ellipszoidális változás amplitúdóját, és nem mellékesen extra fedéseket is elszenved.)

felszín felületi fényességében is a helyi nehézségi gyorsulástól függő eltérések lépnek fel. E két hatás eredőjeként tehát az ellipszoidálissá torzult csillagot, csillagokat tartalmazó kettősök fénygörbéje a fedéseken kívül sem marad állandó. Amennyiben a szélsötétedés és más, nem geometriai jelenségek hatása elhanyagolható, akkor az ellipszoidális effektus okozta fluxusváltozás egyszerűen a

$$\frac{\delta F}{F} \sim \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 \left[1 - 3\sin^2 i \sin^2(v + \omega)\right] \tag{1.3}$$

kifejezéssel közelíthető (ahol ρ a két csillag pillanatnyi távolsága, v pedig a kettős valódi anomáliája). Figyelembe véve, hogy a fedési minimumok közepén

$$v + \omega = \pm 90^{\mathrm{o}}, \tag{1.4}$$

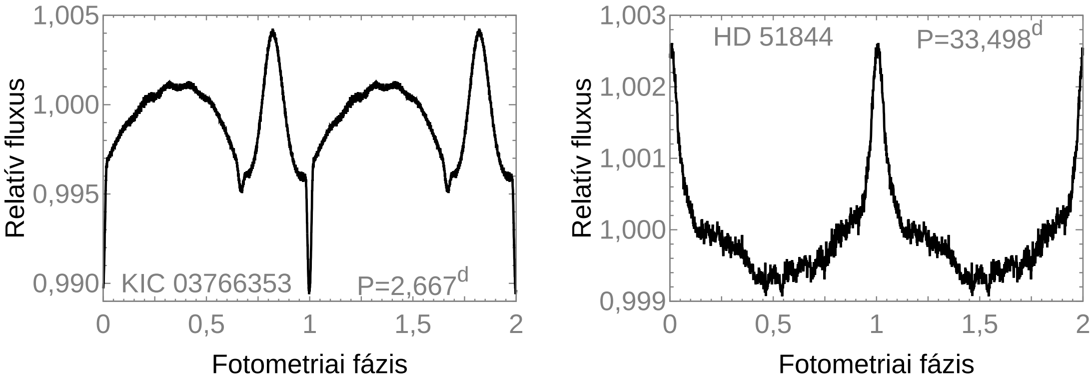
könnyen belátható, hogy amennyiben a kettős körpályán kering, az ellipszoidális fényváltozást egy egyszerű szinuszfüggvény írja le, amelynek periódusa a fedési periódus fele, és maximumát a fedések közti félidőben (a kvadratúrapontokban) veszi fel, minimumát pedig a fedések közepén.

E változók és az EW fedési kettősök között az átmenet gyakorlatilag folytonos (1.3. ábra bal oldala), de csökkenő inklinációval az EB alosztály képviselői is ellipszoidális változókba mennek át. Ráadásul a nagy pontosságú űrfotometria korában már olyan, csak egész kissé torzult csillagok alkotta kettősök ellipszoidális fényváltozását is meg tudjuk figyelni, amely kettősöket, amennyiben fedéseket is mutatnának, egyértelműen az EA típusba sorolnánk (ld. az 1.3. ábra jobb oldalán). Ugyanakkor, ahogy azt majd a 4. fejezetben tárgyalom, ez a változócsillag-típus könnyen összetéveszthető a pulzáló változók bizonyos csoportjával. (A 4.4. alfejezetben majd ismertetni fogok egy olyan, általam kidolgozott eljárást, amely segítséget nyújt e két változócsillag-típus elkülönítéséhez.)

A frissen felfedezett

Szívdobbantó kettősök (HB – Heartbeat binaries)

voltaképpen az ELV-k egy alosztályát alkotják, azonban mivel mind a fénygörbe megjelenésében, mind a jelenség mögött álló fizikában is jelentősen különböznek a szokványos ELV-ktől, ezért szokás őket különálló változócsillag-típusként kezelni. E kettősök erősen lapult pályán keringenek[10], amelynek következtében a periasztron-átmenet környékén a gyorsan változó árapályerők hatására a csillagfelszín alakja, illetve hőmérséklete jelentősen megváltozik. E változások pedig a rálátás függvényében különböző alakú (gyakran kifejezetten EKG-szerű – innen a név) felfényesedést (illetve elhalványodást) okoznak. A „szívdobbantó” kettős elnevezést elsőként Thompson és mktsai. (2012) használták. Ugyanebben a tanulmányban, ahol a szerzők a *Kepler*-űrtávcső által felfedezett első 18 HB csillagot vizsgálták, megmutatták azt is, hogy a központi fénygörbedudor alakját általában jól leírja az egyensúlyi árapálymodell alapján levezetett (1.3) kifejezés, azonban az, hogy további, orbitálisfázis-csatolt oszcillációk is megjelennek a fénygörbéken, arra utal, hogy e viselkedés teljes megértéséhez mindenképpen a jóval bonyolultabb dinamikai árapálymodellek alkalmazására és továbbfejlesztésére van szükség.



1.4. ábra. „Szívdobbantó” kettősök fénygörbéi. *Balra:* A KIC 03766353 fénygörbéjén sekély fedések is megfigyelhetők, így voltaképpen EA típusú fedési kettősként klasszifikálható, de a fénygörbe legjellegzetesebb struktúrája a periasztron-átmenet környékén bekövetkező gyors, erőteljes kifényesedés. Jól látható, hogy ennél a kettősnél a periasztron-átmenet a két fedés közt félidőben következik be, azaz a kettősre a pálya kistengelye irányából látunk rá. Ugyanakkor a laposabb és hosszabb, fő- és mellékminimum közti szakaszon jól láthatók a dinamikai árapály-oszcillációk okozta fényváltozások. *Jobbra:* Egyetlen kakukktojásként a HD 51844 CoRoT-űrtávcső által megfigyelt, fázisátlagolt fényváltozása. E kettőst két Am típusú csillag alkotja, amelyek egyike egyben δ Scuti típusú oszcillációkat is mutat. Az orbitális fázisra átlagolt fénygörbét a HB-szerű ellipszoidális, illetve a visszasugárzási effektus eredője alakítja ki (Hareter és mktsai., 2014). (Vegyük észre azt is, hogy a fényváltozás teljes amplitúdója 0,04% alatt marad, amihez képest még a bal oldali ábra bő 1%-a is hatalmas!)

Természetesen semmi nem zárja ki, hogy egy HB rendszer egyben fedési kettős is legyen (ld. a 1.4. ábra bal oldalán). Ilyen esetekben EA/HB rendszerekről beszélünk. Ugyanakkor, amennyiben a kettős excentricitása megfelelően nagy, akkor a fényváltozást elsősorban a csillagok periasztron-átmenet körül bekövetkező gyors, tényleges alakváltozása, nem pedig

[10] Az elsőként felfedezett KOI-54 esetében például a két csillag üstökösszerű, $e = 0{,}83$ excentricitású, a Földről csaknem lapjáról látszó ($i = 5{,}^\circ 5$) pályán, 41,8 naponta kerüli meg egymást (Welsh és mktsai., 2011).

a kettős összfelületének orbitálisfázis-függő látszólagos növekedése és csökkenése okozza, és ily módon a klasszikus ELV-kkel szemben, a HB kettősök fényváltozása akár lapjáról látszó keringési pálya esetén is kimutatható lehet.[11] A HB kettősök nagy hányadában a visszasugárzási effektus szintén jelentős járulékot ad az eredő fénygörbéhez, amire ehelyütt az 1.4. ábra jobb oldalán bemutatott nem fedési HB csillag, a HD 51844 (=CoRoT 1043) szolgáltat példát.

Visszasugárzási kettősök (RB – Reflection binaries)

E kettősök fénygörbéjének uralkodó jellegzetessége a visszasugárzási effektusból származó fényváltozás. A visszasugárzási effektus elsősorban akkor jelentős, ha a két csillag hőmérséklete jelentősen különbözik. Ekkor, amennyiben a két csillag elég közel van egymáshoz, előfordulhat, hogy a forróbb csillag jelentősen felhevíti hideg kísérője atmoszférájának felé néző oldalát, amely energiatöbbletet a kísérő (atmoszférája tulajdonságainak függvényében) részben lokálisan, részben globálisan sugároz vissza. E fényváltozás periódusa tipikusan megegyezik a keringési (fedési) periódussal, körpályán mozgó kettős esetében maximumát elvben a mellékminimum, minimumát pedig a főminimum közepén veszi fel (ld. az 1.1. ábra jobb oldali képén). Egyes extrém esetekben a visszasugárzási fényváltozás az 1 magnitúdót is meghaladhatja. A csúcstartó sokáig a HZ Herculis (Her X-1) volt $1\overset{\mathrm{m}}{,}5$-s amplitúdóval (ld. pl. Wilson, 1973), azonban Mitrofanova és mktsai. (2016) egy friss tanulmányban kimutatták, hogy a PN G068.1+11.0 fiatal pre-kataklizmikus változó visszasugárzási effektusból származó fényváltozása kis mértékben ezt is meghaladja.

Nyalábolási kettősök (BB – Beaming binaries)

A relativisztikus *Doppler-nyalábolás* figyelembevételére a nagy pontosságú űrfotometriai megfigyelések előtti időkben nem volt szükség, ezért például a tudományos közösség által hagyományosan használt fedésifénygörbe-illesztő, feldolgozó programcsomagok egészen a közelmúltig figyelmen kívül hagyták ezt a jelenséget. Elsőként Loeb és Gaudi (2003) hívták fel a figyelmet arra, hogy a CoRoT- és *Kepler*-űrtávcsövek várható mikromagnitúdós fotometriai pontossága mellett (Auvergne és mktsai., 2009; Borucki és mktsai., 2010) már számolni kell ezzel a jelenséggel. A „beaming binaries” kifejezést mint egy új kettőscsillag-kategória elnevezését elsőként Zucker és mktsai. (2007) használták, a jelenséget pedig egy konkrét *Kepler*-kettős fénygörbe-analízisénél először Van Kerkwijk és mktsai. (2010) vették figyelembe.

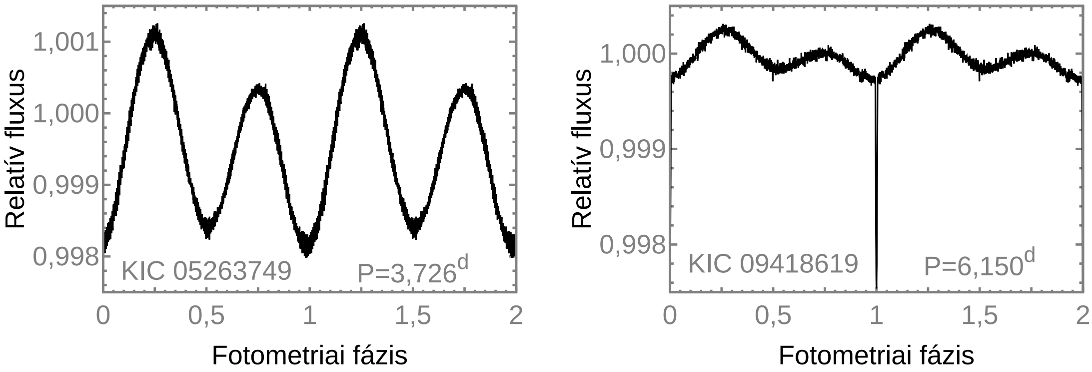
A speciális relativitáselmélet értelmében egy mozgó fényforrás által kibocsátott sugárzás mozgásirányba eső fluxusa, illetve spektrális eloszlása több tényező következtében is eltér a nyugalmi helyzetben kibocsátott hasonló sugárzástól (ld. pl. Rybicki és Lightman, 1979). Fénysebességnél sokkal kisebb sebességek esetében egy ν frekvencia körüli fotometriai sávban a fluxusváltozás jól közelíthető az egyszerű

$$F_\nu = F_{\nu 0}\left[1-(3-\alpha)\frac{v_{\mathrm{rad}}}{c}\right] \tag{1.5}$$

kifejezéssel, ahol F_ν és $F_{\nu 0}$ az észlelt, illetve a kibocsátott fluxussűrűség, míg

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\log F_\nu}{\mathrm{d}\log \nu} \tag{1.6}$$

[11] Ld. az előző lábjegyzetet!



1.5. ábra. Nyalábolási kettősök. *Balra:* A KIC 05263749 fénygörbéjén az uralkodó fényváltozás az ellipszoidális csillagalakoktól származik, azonban a szembeszökő aszimmetriáért már elsősorban a relativisztikus Doppler-nyalábolás a felelős. *Jobbra:* A KIC 09418619 fénygörbéjén a fent említett fényváltozásokon felül súroló fedés vagy fedések nyomai is látszanak, úgyhogy voltaképpen ez egy EA típusú fedési kettőscsillag, alig 0,2%-os fedésmélységgel.

az átlagos spektrális index a megfigyelési frekvencia környezetében, amely feketetest-sugárzást feltéve az

$$\alpha(\nu) = 3 - \frac{e^x}{e^x - 1}x \tag{1.7}$$

alakot veszi fel, ahol $x = h\nu/kT_{\rm eff}$ (ld. pl. Zucker és mktsai., 2007). Ily módon a fedési kettős Doppler-nyalábolás miatti fluxusváltozása egy bizonyos fotometriai sávban:

$$\frac{\delta F}{F} = \frac{1}{c}\frac{K_1[3-\alpha_1(\nu)]F_{\nu,1} - K_2[3-\alpha_2(\nu)]F_{\nu,2}}{F_{\nu,1}+F_{\nu,2}}[\cos(v+\omega) + e\cos\omega], \tag{1.8}$$

ahol $K_{1,2}$ a két radiálissebesség-görbe amplitúdója. Formailag ez egy olyan többlet fényváltozást jelent, amely úgy néz ki, mintha a két csillag fluxusokkal súlyozott és normált radiálissebesség-görbéjének összegét hozzáadnánk a fénygörbéhez. Ennek leglátványosabb megnyilvánulása pedig (körpálya esetén) a két kvadratúrabeli (általában maximális) fényesség eltérő volta. Amint azt Zucker és mktsai. (2007) megmutatták, Nap-típusú, illetve későbbi színképtípusú csillagok alkotta fedési kettősök esetében $P \sim 10$ d keringési periódus felett a Doppler-nyalábolás okozta fényváltozás egyre nagyobb mértékben meghalad(hat)ja mind az ellipszoidális, mind a visszasugárzási effektus hatását.[12] Elvben tehát előfordulhat, hogy egy hónapos vagy hosszabb periódusú kettősnek a kettősségből származó legnagyobb amplitúdójú fényváltozása a relativisztikus Doppler-nyalábolásból származik, azonban a ténylegesen ismert rendszerek között egyelőre nincsen ilyen vegytiszta nyalábolási kettős, és gyakorlati okokból nem is várható ilyen rendszer felfedezése. Ezért inkább azokat a fedési, illetve ellipszoidális kettősöket szokás nyalábolási kettősöknek nevezni, ahol a relativisztikus Doppler-nyalábolás jelensége feltűnő módon megnyilvánul a fedéseken kívüli fénygörbeszakaszok eltérő fényességmenetében (1.5. ábra). A szakirodalomban ezekre a kettősökre használják még a BEER-kettős (a fényváltozás eredetére utaló „*B*eaming”, „*E*llipsoidal” és „*R*eflection” szavak nyomán) elnevezést is (ld. pl. Faigler és mktsai., 2012).

[12] Sőt amint e szerzők felhívták rá a figyelmet, a *Kepler*-, illetve CoRoT-űrtávcsövek orbitális mozgása következtében fellépő relativisztikus Doppler-nyalábolás szintén a pontossági küszöb fölötti fényváltozást eredményez, tehát ezt az adatok feldolgozása során figyelembe kell venni.

Fontos elvi érdekesség, hogy egy fedési kettőscsillag fotometriai változásai során ez az egyetlen olyan jelenség, ahol fizikai dimenziójú mennyiség jelenik meg a fénygörbén, azaz megszünteti annak átskálázással szembeni invarianciáját, s így – elvben – alkalmas lenne arra, hogy radiálissebesség-görbe nélkül is fizikai tömegeket és méreteket tudjunk meghatározni. Amint azt majd az 5. és 6. fejezetekben részletesen is tárgyalom, az elsők között fejlesztettem ki olyan fénygörbe-szintetizáló kódot, amely a relativisztikus Doppler-nyalábolás jelenségét is magában foglalja.

1.1.3. A (fedési) kettőscsillagok morfológiai osztályozása

A fent röviden bemutatott klasszikus három fedésifénygörbe-típus (EA, EB, EW) modellezésére, és így fizikai értelmezésére való törekvések vezettek el a kettőscsillagok morfológiai osztályainak a felfedezéséhez. Az ellipszoidáis fényváltozás, illetve a fedési geometria kielégítő modellezéséhez ugyanis szükség van a látszó csillagfelszínek pontos alakjának az ismeretére. A fénygörbe-modellezés első fél évszázadának szerzői elsősorban különféle geometriai és algebrai eljárásokkal kísérleteztek, hogy az ellipszoidális csillagokat tartalmazó, vagy éppen excentrikus pályán keringő fedési kettősök produkálta fénygörbéket különböző transzformációkkal visszavezessék adott paraméterekkel bíró, körpályán keringő, gömbalakú csillagok alkotta fedési kettősök fénygörbéire. E „fénygörbe-rektifikációs modellek” közül Henry Norriss Russell 1912-től fokozatosan fejlesztett modellje bizonyult a legsikeresebbnek, amelyet végső, legkiforrottab alakja nyomán szokás Russell–Merrill-módszerként is említeni (Russell és Merrill, 1952). A fedésikettős-csillagászat múlt századi, másik ikonikus alakja, Zdeněk Kopal egyebek között még egy a Fourier-térben érvényes fénygörbeillesztési eljárást is kidolgozott (ld. pl. Kopal, 1979, 5., 6. fejezet).

A rektifikációs eljáráson alapuló fénygörbemodellek egy későbbi besorolás szerint voltaképpen geometriai fénygörbemodellek. E modellek jellemzője, hogy a csillagfelszínt általában két- vagy háromtengelyű ellipszoiddal közelítik, amelyek tengelyei szabad paraméterek. A később elterjedő fizikai modellek viszont abból indulnak ki, hogy a csillagok felszíne gravitációs ekvipotenciális felület, amely a csillag tengelyforgása és a kísérő árapályhatása miatt nem lesz többé gömbszimmetrikus. Amint az ismeretes, ezek az ekvipotenciális felületek általában gömbfelületi függvények sorával írhatók le. A kettőscsillagok esetében klasszikusan alkalmazott eljárás, az ún. Chandrasekhar-modell (Chandrasekhar, 1933) részletes tárgyalása Kopal (1978) monográfiája alapján magyar nyelven PhD-értekezésem 2. fejezetében olvasható (Borkovits, 2002). Amennyiben viszont figyelembe vesszük azt a tényt, hogy a nemdegenerált csillagok tömegeloszlása erőteljes centrális kondenzációt mutat, áttérhetünk a körkorlátozott háromtest-probléma formalizmusára. Ekkor a két csillagot pontszerűnek tekintjük, felszínüket pedig tömeg nélküli próbatestek sokaságaként fogjuk fel. A körkorlátozott háromtest-problémát együttforgó koordináta-rendszerben felírva a próbatest mozgását leíró egyenleteknek létezik egy további első integrálja, az úgynevezett Jacobi-integrál, amely egy csak a két tömegponttól való relatív távolságtól, illetve a tömegpontok tömegarányától függő potenciálfüggvényt definiál. E potenciálfüggvény konstans értékei szintfelületeket határoznak meg, amelyek elválasztják a mozgás számára lehetséges és tiltott tartományokat.[13] A csillagok felszínét ebben, vagyis a Roche-modellben egy ilyen szintfelület írja le, ahol is a fent említett potenciál értéke, valamint a csillag szeparációra normált, irányfüggő r sugara és a tömegarány között az alábbi kapcsolat van:

$$\Omega = r^{-1} + q\left[(1-2\lambda r + r^2)^{-1/2} - \lambda r\right] + \frac{1}{2}(q+1)r^2(1-\nu^2), \tag{1.9}$$

[13] E kérdéskör részletes magyar nyelvű bemutatása Érdi Bálint egyetemi tankönyvében található (Érdi, 1989a, 176. oldaltól), így ehelyütt csak a kettőscsillagokkal kapcsolatos alkalmazás vázlatos ismertetésére szorítkozom.

ahol $q = m_2/m_1$ a kettőscsillag tömegaránya, míg λ a csillagfelszín adott pontjához vezető sugár és a csillagok tömegközéppontjait összekötő szakasz egyenese által bezárt szög iránykoszinusza, míg ν pedig a mozgás síkjának normálisával bezárt szög iránykoszinusza. Ugyan a fenti formulából a csillag különböző irányokban mérhető r fajlagos sugara csak iterációval kapható meg, azonban a módszer gyorsan konvergál még erősen torzult konfigurációkra is, és így minden esetben jól alkalmazható.

E tárgyalásmódnak azonban a könnyű gyakorlati alkalmazhatóságon túlmutató elvi jelentősége is van. A körkorlátozott háromtest-probléma elméletéből ugyanis ismeretes, hogy a Roche-potenciál, illetve a Jacobi-konstans egyértelmű kapcsolatban van a fázistér topológiájával. Amennyiben a Roche-potenciál értéke nagyobb, mint egy csak a két tömegpont tömegaránya által meghatározott C_1 konstans, a mozgás számára három lehetséges tartomány van, mégpedig egy-egy a két tömegpont közvetlen környezetében, míg a harmadik mindkét tömegponttól elegendően nagy távolságra. (Minél nagyobb a potenciál értéke, a két belső tartomány a két tömegpont körül annál kisebb térrészre koncentrálódik, és a tartományok alakja annál kevésbé tér el a gömbtől). Ha a potenciál értéke lecsökken e C_1 értékre, a két belső tartomány a két tömegpontot összekötő szakaszon, az azok tömegaránya által egyértelműen meghatározott L_1 Lagrange-pontban összeér. Amennyiben a potenciál értékét tovább csökkentjük, a két belső tartomány az L_1 pont környezetében egyre táguló befűződést formázva, egyetlen tartománnyá egyesül. Ekkor tehát az eredetileg az egyik tömegpont körül keringő próbatest elvileg szabadon átjuthat a másik tömegpont közelébe, azonban a két tömegpont környezetét továbbra sem hagyhatja el. Nyilvánvaló tehát, hogy a C_1 értékhez tartozó ekvipotenciális felületeknek a rendszer stabilitása szempontjából alapvető jelentősége van. Az L_1 pontban érintkező ekvipotenciális felületek által körülhatárolt két térrészt az egyes tömegpontokhoz tartozó Roche-üregeknek vagy Roche-lebenyeknek nevezzük Édouard Roche francia csillagász nyomán, aki először tanulmányozta ezt a problémát.[14] Ugyanakkor, amennyiben a kérdést abban a kontextusban szemléljük, hogy az egyik tömegpont (például a Föld) körül keringő, jóval kisebb tömegű kísérő (a Hold) milyen feltételek mellett szökhet meg (vagy fordítva: marad kötött) egy, az első tömegponttal gravitációsan kötött kettős rendszert alkotó távolabbi, második tömegpont (például a Nap) jelenléte esetén, akkor az L_1 pontban érintkező ekvipotenciális felületek által határolt térrészeket Hill-szféráknak nevezzük, a Föld – Hold rendszer stabilitását elsőként vizsgáló Hill (1878a,b,c) nyomán.

Amennyiben a potenciál egyenlő egy további, $C_2 \leq C_1$ értékkel, a külső és a belső tartomány határa a kisebb tömegű pont „mögötti” L_2 Lagrange-pontban találkozik. Ennél kisebb pontenciálértékekre a szabad mozgás régiója egyetlen összefüggő tartományt alkot, azaz az eredetileg a két tömegpont közelében elhelyezkedő próbatest elvileg tetszőleges távolságra (azaz végleg) elhagyhatja a két tömegpont környezetét. A potenciál értékének további csökkenésével a mozgás számára engedélyezett tartomány egyre nő, mígnem amint a potenciál az L_3 ponthoz tartozó C_3 érték alá csökken, a tiltott tartomány két, egyre inkább az L_4 és L_5 pontokra összehúzódó, egymástól elválasztott területre esik szét. Amennyiben pedig a potenciálfüggvény értéke (tömegaránytól függetlenül) 1,5 alá csökken, a mozgás bárhol engedélyezett.

A kettőscsillagok morfológiai osztályozása a fentiek figyelembevételével a Roche-üregek komponensek általi kitöltöttségén alapul. Azt ugyanis már az elmúlt század negyvenes éveire észrevették, hogy a legrövidebb periódusú és legnagyobb ellipszoidális effektusokat mutató kettőscsillagok egyrészt nem követik a fősorozati csillagokra érvényes tömeg-fényesség

[14] A Roche-üreg nem keverendő össze a Roche-határral, amely azt a távolságot adja meg, ahol egy, csak a saját gravitációja által összetartott, kiterjedt testet egy másik test közelsége miatt fellépő árapályerők széttépnek.

relációt, másrészt fénygörbéjük a geometriai modellekkel csak kezdetben értelmetlennek tűnő, a Roche-üregnél nagyobb méretű ellipszoidokkal volt modellezhető. Elsőként Kuiper (1941) vetette fel, hogy a β Lyrae tulajdonságai a Roche-üregükön túlnyúló, közös burkot alkotó két csillaggal lenne magyarázható. E szerző új elképzelését már a Roche-modell asztrofizikai implikációit figyelembe véve tárgyalta. A kettőscsillagoknak a fedési kettősök tanulmányozásából levezetett, ma is használatos morfológiai osztályozását viszont valamivel később Kopal (1955) vezette be. Ezek az osztályok a következők:

Különálló kettősök (detached binaries)

A különálló kettősök egyik komponense sem tölti ki a Roche-üregét, ily módon a két csillag között tömegátadás (az esetleges csillagszéltől eltekintve) nem történhet. Amennyiben a komponensek a múltban sem töltötték ki Roche-üregüket, akkor a két csillag korábbi evolúciója nukleáris időskálán alapvetően nem különbözik hasonló tömegű és fémtartalmú magányos társaiktól. Ebből következik, hogy a fősorozati különálló fedési kettősök elsődleges asztrofizikai jelentősége napjainkban abban áll, hogy mivel pontos és gondos fotometriai, valamint spektroszkópiai megfigyeléseik kombinálásával szerencsés esetben lehetséges komponenseik tömegét és sugarát akár 1%-nál kisebb hibával meghatározni, nagyban hozzásegíthetnek az elméleti csillagfejlődési modellek kalibrálásához és finomhangoláshoz (ld. pl. Torres és mktsai., 2010).

A különálló kettősök egy jelentős része excentrikus pályán mozog, sőt az utóbbi években egyre több rendszerben sikerült azt is kimutatni, hogy a komponensek forgástengelye nem merőleges a keringés síkjára. Mindez az e kettősökben a nagyobb szeparációk (azaz kisebb fajlagos sugarak) miatt kevésbé hatékony árapály-fékeződés számlájára írható. Ily módon az excentrikus, illetve nem kötött keringésű, különálló fedési (illetve spektroszkópiai) kettősök statisztikai vizsgálata felhasználható az árapály-fékeződést (és így végső soron a csillagokban lejátszódó hidrodinamikai folyamatokat) leíró különböző elméletek teszteléséhez, finomításához (ld. pl. Mazeh, 2008).

Az excentrikus fedési kettőscsillagokban fellépő apszismozgás könnyen kimérhető a fedésiminimum-időpontok változásainak megfigyelésével (ld. az 1.2.3. szakaszban), és az így nyert információk felhasználhatók egyrészt a csillagok belső tömegeloszlásának a meghatározásán keresztül a különböző csillagmodellek tesztelésére, másrészt az általános relativitáselmélet igazolására (vagy akár cáfolatára) is. Mindezekre a kérdésekre a későbbiekben visszatérek a 3. fejezetben.

Ezen a ponton a szigorú tárgyalásmód kedvéért annyit azonban hozzá kell tenni, hogy a Roche-potenciál eredeti formájában excentrikus pálya és nem kötött tengelyforgás esetén nem használható. Nem szinkronizált keringés esetén a Coriolis-erők fellépte okoz problémát. Excentrikus pálya esetén pedig, mivel az erőtér időfüggő, és ily módon nem-konzervatív, a potenciál szigorúan véve nem is létezik. Azonban, amennyiben azt tesszük fel, hogy a csillagok tömegeloszlása gyorsan hozzáigazodik a megváltozott erőtérhez, akkor a pálya minden egyes pontjához horrárendelhetünk egy effektív potenciált. A kérdés különösebb diszkussziójának ismertetése nélkül itt csak annyit említek meg, hogy Avni (1976) munkája nyomán a mértékadó WD-kód 1979-es változata (Wilson, 1979) tartalmazza először azt az általánosított Roche-potenciált, amelynek használata azóta az excentrikus, illetve nem szinkron keringésű fedési kettősök fénygörbe-modellezésénél általánossá vált. (Tegyük hozzá, hogy ez a kérdés a morfológiai osztályozás szempontjából amúgy sem lényeges.)

A különálló kettősöket tartalmazó fedési rendszerek EA, azaz Algol típusú fénygörbét produkálnak, azonban fordítva ez már koránt sincs feltétlenül így, azaz nem minden EA típusú fedési kettős különálló rendszer. A dolog pikantériája, hogy maga az Algol sem az, hanem a rövidesen tárgyalásra kerülő félig érintkező kettősök közé tartozik.

A jelen dolgozatban említésre kerülő fedési válozók nagyon kevés kivétellel mind különálló kettősök.

Félig érintkező kettősök (semi-detached binaries)

Amennyiben a kettőscsillag egyik komponense kitölti a Roche-üregét, félig érintkező kettősről[15] beszélünk. Ebben az esetben a Roche-üregét kitöltő csillagról az L_1 Lagrange-ponton keresztül anyag áramolhat át a másik komponensre. Ezáltal a két csillag tömege jelentősen megváltozhat, a tömegarány gyakran meg is fordul. Mindez azzal jár, hogy a két csillag fejlődése, és akár végállapota alapvetően különbözni fog a hasonló kezdeti tömegű és fémtartalmú magányos csillagok evolúciós útjától. A kettőscsillagokban különböző evolúciós fázisokban megvalósuló tömegátadási folyamatok jellemzőit, illetve ezek folyományaként a lehetséges fejlődési utakat magyar nyelven Patkós (1981), illetve Csizmadia (2009) foglalta össze, így ezek ismertetésétől eltekintek. Ehelyütt csak néhány, egy félig érintkező rendszer pillanatnyi állapotával kapcsolatos megjegyzése szorítkozom. Egyrészt, mivel a Roche-üreget határoló felülethez tartozó potenciált a kettős tömegaránya egyértelműen meghatározza, egy a Roche-üregét kitöltő csillag fajlagos sugarát a kettős tömegaránya úgyszintén egyértelműen megadja. E tény a félig érintkező fedési kettősök fénygörbe-modellezésénél egy nagyon erős megkötést (és egyben könnyítést) jelent. Ugyanakkor, mivel e rendszerekben tömegátadás zajlik, a tömegátadás típusától (ld. pl. Patkós, 1981), és így hevességétől függően különféle tulajdonságú anyagbefogási korongot is várhatunk az anyagot elszívó komponens körül, amely jelentősen befolyásolhatja a fénygörbe alakját is. Példának okáért a korábban már többször is említett β Lyr, amelyet Kuiper fentebb tárgyalt úttörő munkájában (Kuiper, 1941) érintkező kettősnek vélt, valójában egy félig érintkező rendszer, ahol viszont a fénygörbe kialakításában az anyagbefogási korong is fontos szerepet játszik. A félig érintkező kettősök körpályán keringenek egymás körül, hisz az árapályerők itt elég jelentősek, a kettős pedig elég idős ahhoz, hogy mire a félig érintkező fázis kialakul a pálya bekörösödjön. Azonban, ha ez esetleg nem történne meg, maga az anyagátadás jelensége nagyon gyorsan körpályát állítana elő. Az átáramló anyag szállította impulzusmomentumnak egy további hatása az is, hogy egyes esetekben felpörgeti az anyagot elnyelő csillagot. Így jön létre a gyorsan forgó algolok nem túl népes alosztálya (ld. pl. Wilson és mktsai., 1985; Wilson és Mukherjee, 1988). Egy ilyen, gyorsan forgó főcsillaggal rendelkező fedési kettőst (a DL Cygni-t) egyik korai munkánkban mi is azonosítottunk (Borkovits és Bíró, 1999). Végezetül érdemes megjegyezni, hogy az éppen zajló tömegátadás az anyagbefogási korong, vagy pedig a gyors tengelyforgás kimutatásán felül a fedésiminimum-időpontok kvadratikus változásán keresztül is kimutatható (ld. alább az 1.2.2. szakaszban).

A félig érintkező fedési kettősök nem túlságosan eltérő összfényességű komponensek esetén EB-típusú fénygörbét, míg halvány érintkező másodkomponens esetén klasszikus EA-típusú fénygörbét produkálnak.

Érintkező kettősök ([over]-contact binaries)

Az érintkező kettőscsillagok mindkét komponense kitölti Roche-üregét, sőt túl is terjed rajta, így a két csillag atmoszférájának felső rétegei egyetlen közös burkot alkotnak. Az e morfológiai osztályhoz tartozó kettősök hozzák létre az EW (W UMa típusú) fénygörbéket. Azonban az, hogy ilyen kettőscsillagok létezhetnek, csak hosszú évtizedek alatt vált elfogadottá a szakemberek körében. Azt ugyan már Kuiper (1941, 1948) felvetette, hogy annak az ellentmondásnak a feloldását, miszerint a W UMa típusú fedési kettősöket kevés

[15] A magyar nyelvű szakirodalomban nem példa nélkül álló az angol eredeti megnevezéssel jobban összhangban lévő „félig különálló kettős" elnevezés sem.

kivétellel fősorozati csillagok alkotják, ám mégsem követik a fősorozati tömeg-fényesség relációt, egy a két csillagot körülvevő közös burok létében, és az abban lejátszódó termodinamikai folyamatokban kellene keresni, és ezt az értelmezést a morfológiai osztályok megalkotása kapcsán Kopal (1955) is magáévá tette, ám az asztrofizikusok nagy többsége egészen az 1960-as évek végéig idegenkedett ettől a feltételezéstől. Ekkor azonban Lucy (1967, 1968a,b) munkái egyértelművé tették, hogy amennyiben a két csillag konvektív burkának adiabatikus része érintkezik egymással, a két csillagatmoszféra termális kontaktusba kerül, azaz hőmérsékletük többé-kevésbé kiegyenlítődik, ami kielégítően magyarázza a kisebb tömegű másodkomponenseknek a W UMa típusú rendszerekben megfigyelt, gyakran tekintélyes mértékű többletfényességét a hasonló tömegű, egyedülálló fősorozati csillagokhoz képest.[16]

Ez a fedési kettősök fénygörbéinek értelmezése kapcsán felfedezett új égitesttípus jelentősen előrelendítette a kettőscsillagok belső szerkezetére, illetve fejlődésmenetére irányuló kutatásokat is. Mai ismereteink szerint gyakorlatilag az összes olyan kettőscsillag, amelynek komponensei elegendően közel vannak egymáshoz ahhoz, hogy még legalább a kezdetben nagyobb tömegű komponens fősorozati élete során beinduljon az anyagátadás (A típusú tömegátadás), fejlődése során legalább egyszer átmegy a közösburok-fázison (lásd újfent Csizmadia, 2009 magyar nyelvű áttekintő írását).

Ugyanakkor, amint azt Csizmadia és Klagyivik (2004), valamint Klagyivik és Csizmadia (2004) megmutatták, az érintkező fedési kettősök sugárzási, dinamikai és geometriai sajátosságai közti összefüggések lehetővé teszik egy W UMa-kettősökön alapuló távolságmeghatározási eljárás alkalmazását is. Sajnálatos módon azonban ennek a metódusnak a szabatos kidolgozása egyelőre várat magára.

Végezetül röviden ki kell térni a szakirodalomban elterjedt kétféle elnevezésre. Az *overcontact* megnevezés elsősorban azon alapul, hogy e kettősök felszínét leíró ekvipotenciális felület nem egyetlen pontban, az L_1 pontban érintkezik, hanem egy összefüggő, folytonos felületet alkotva, ténylegesen körülfolyja a két csillag Roche-üregét. Ebben az esetben a *contact* elnevezést szigorúan arra a konfigurációra tartják fent, amikor a csillagok pontosan kitöltik a Roche-üregüket, de nem terjednek túl rajta. Más szerzők azonban nem feltétlenül ragaszkodnak ehhez a megkülönböztetéshez, és egyszerűen a *contact* melléknevet használják.[17] Általában azok a kutatók, akiknek a fedési kettősök kutatása a szűkebb szakterülete az *overcontact* kifejezést használják. Ennek a konvención felül további értelmet ad a Wilson (1979) által bevezetett negyedik morfológiai kategória is.

Duplán érintkező kettősök (double contact binaries)

Wilson (1979) a Roche-potenciál nem kötött keringésre, illetve excentrikus pályára való általánosítása kapcsán felismerte, hogy amennyiben egy félig érintkező kettőscsillag Roche-üregét nem kitöltő komponense a társáról behulló anyaggal érkező többlet-impulzusmomentum miatt a keringési szögsebességnél sokkal nagyobb szögsebességű tengelyforgásra pörög fel, akkor a jelentősen megnövekedett centrifugális erő következményeként az e csillaghoz tartozó Roche-üreg mérete összehúzódik. Ekkor kellően gyors tengelyforgás esetén a csillag összehúzódott Roche-ürege úgymond rászűkülhet a csillag felszínére, azaz előállhat egy olyan helyzet, amikor mindkét komponens kitölti a maga Roche-üregét, bár e két üreg nem érintkezik egymással, s így a csillagok légköre között nincs fizikai kontaktus. Ezen

[16] A téma részletesebb áttekintését ld. Wilson (1994) összefoglaló cikkében.

[17] Itt érdemes hozzátenni azt is, hogy nem ismeretes olyan fizikai folyamat, amely kitüntetné a szűkebb értelemben vett *contact* konfigurációt. Ráadásul egy ilyen helyzet asztrofizikai értelemben nyilván nem is maradna stabil, hiszen a fejlődési effektusok következtében a csillagok sugara, illetve tömege voltaképpen folyamatosan változik.

új osztály feltehetően első képviselője az RZ Scuti (Wilson és mktsai., 1985), s az elmúlt három évtizedben közel fél tucat további képviselővel bővült ez a ritka (hiszen a tengelyforgást gyorsan szinkronizáló árapályerők miatt rövid életű), de evolúciós szempontból fontos morfológiai osztály.

E kettősök, mivel a félig érintkező rendszerekből alakulnak ki, azokhoz hasonlóan alapvetően EB vagy EA típusú fénygörbét mutatnak, azonban a kvantitatív analízis során a gyors forgás miatti lentikuláris csillagalak, és az ennek következményeként sötét egyenlítői területek figyelembevétele nélkül nem nyerhető fizikailag reális fénygörbemegoldás.

1.2. A fedési kettőscsillagok periódusváltozásai

A fentiekben a fedési kettőscsillagok fotometriai megfigyeléséből megszerezhető és megszerzett ismereteinket csak a fénygörbék vonatkozásában tárgyaltam. Ugyanakkor eddig kevés szó esett arról, hogy a fedési kettősök fényváltozása egyáltalán nem statikus jelenség, a fénygörbe alakja, és egyéb jellemzői gyakran időben is változnak, és ezek a változások lényeges többletinformációkat hordozhatnak a megfigyelt rendszer fizikai, geometriai, evolúciós és egyéb állapotáról. Ezen időbeli változások bekövetkezhetnek a fedési periódusnál akár rövidebb, akár hosszabb karakterisztikus időskálákon is. Egyes esetekben e további fényváltozások periódusa összemérhető a fedési periódussal, ami a kettősséggel kapcsolatban álló háttérokokra utalhat. Ehelyütt viszont azt a speciális esetet tárgyalom, amikor maga a fedési fényváltozás legfontosabb időfüggő paramétere, azaz annak periódusa maga változik meg. Mivel a fedési kettőscsillagok periódusváltozásainak vizsgálata végigkísérte egész eddigi tudományos pályafutásomat, és ebben a dolgozatban is alapvető szerepet játszik, a következőkben e jelenségcsoportot részletesebben is bemutatom.

A newtoni mechanika törvényei szerint két tömegpont, ha rájuk egymás kölcsönös gravitációs vonzásán kívül semmilyen más erő sem hat, akkor valamely kúpszeletnek megfelelő pályán fog mozogni. Ez a minket érdeklő esetben zárt görbét, tehát kört, illetve ellipszist jelent. Mivel a kettőscsillagok nagy többsége egyfelől jól közelíthető két tömegpont alkotta rendszerként[18], másfelől pedig, amíg a kettős komponensei nem elfajultak, addig a relativisztikus effektusok is elhanyagolhatók, ezért azt várhatjuk, hogy a fedési kettőscsillagok alapvetően zárt, és a földi megfigyelőhöz viszonyítva a térben is rögzített helyzetű pályán, állandó keringési periódussal fognak mozogni. Ebben az esetben az általunk megfigyelt fedési minimumok szigorú periodicitással követnék egymást. A valóságban nem ez a helyzet, hanem azt tapasztaljuk, hogy az ismert fedési kettősök túlnyomó többsége kisebb-nagyobb mértékű periódusváltozásokat mutat, sőt azt is jó okkal feltételezhetjük, hogy a periódusváltozások detektálásának legfeljebb csak a műszereink fénymérési pontossága, a mintavételezési sűrűség, illetve a megfigyelési intervallumok hossza szab határt. A periódusváltozások hátterében természetesen a fentebb vázolt alapvető egyszerűsítések nem mindenben kielégítő volta bújik meg. Azt azonban hangsúlyozni kell, hogy a fedési periódus egy keringés, azaz egy periódus alatti megváltozása minden esetben nagyon kis érték, azaz

$$\frac{\Delta P}{P} = \dot{P} \ll 1, \tag{1.10}$$

ami lehetővé teszi, hogy a periódusváltozások mind kvalitatív, mind kvantitatív értelmezésénél mégiscsak a newtoni kéttest-problémát használjuk kiindulási alapul.

[18] Például ha két, a mi Napunkkal megegyező paraméterű csillag egy alig tíz napos keringési idejű kettőst alkotna, a relatív pálya fél nagytengelye a csillagok sugarának körülbelül huszonötszöröse lenne.

1.2.1. Az O–C diagram

Az alábbiakban röviden összefoglalom a fedési kettőscsillagok esetében megfigyelhető különféle periódusváltozások fajtáit. E periódusváltozások fedési kettőscsillag esetében a legkönnyebben természetesen a fedések között eltelt időközök változásából mérhetők ki. Ezért a különféle típusú periódusváltozások ismertetését célszerű összekapcsolni a periódusváltozások detektálásában és vizsgálatában kulcsszerepet játszó matematikai eszköz, az $O-C$ (observed minus calculated) diagram bevezetésével, annál is inkább, mert az e diagrammal kapcsolatos kutatásaim képezik a jelen doktori értekezés egy jelentős részét.

Egy fedési kettőscsillag két komponensének egymás körüli keringése során általában két fedési esemény következik be. Ezekre a továbbiakban fő- és mellékminimumként fogok hivatkozni. Ha ismerjük egy fedési kettőscsillag állandónak tekintett (P) fedési periódusát, illetve egy adott fedési esemény bekövetkezésének (T_0) középidejét, ebből egy tetszőleges későbbi (illetve korábbi) fedés bekövetkezési idejét a következő módon számolhatjuk ki:

$$C = T(E) = T_0 + EP, \tag{1.11}$$

ahol E a ciklusszám, vagy epocha. Főminimumok esetében az E egész szám, mellékminimumok esetében pedig megállapodás szerint fél-egész. Az $O-C$ diagramot úgy képezzük, hogy egy fedési esemény megfigyelt (O – observed) időpontjából kivonjuk a fenti (1.11) alapján számolt (C – calculated) értéket, s az így kapott eltérést az E ciklusszám függvényében ábrázoljuk. Nyilvánvaló, hogy állandó periódus esetén a (diszkrét) $O-C$ értékekre egy egyenes illeszthető, amelynek meredeksége a számoláshoz használt P periódus hibáját, az y-tengellyel való metszete pedig a T_0 referencia-időpont szükséges korrekcióját adja meg.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért, ezt a diszkrét pontokon értelmezett $O-C$ függvényt egy folytonos függvénnyel helyettesítjük. Ehhez definiáljuk a

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(E), \tag{1.12}$$

pillanatnyi periódust, amely az ezúttal már folytonosnak felfogott ciklusszám változó folytonos függvénye. Tegyük fel, hogy a fedési kettős egy főminimuma $t = t_i$-kor következik be. A soron következő fedési főminimum középidőpontja pedig legyen $t = t_{i+1}$-kor. Ekkor a $\overline{P}_i$ fedési periódus nyilván

$$\overline{P}_i = t_{i+1} - t_i. \tag{1.13}$$

Könnyen belátható, hogy ekkor az i-edik fedési periódus hossza:

$$\overline{P}_i = \int_i^{i+1} \mathcal{P} \mathrm{d}E. \tag{1.14}$$

A minimumok E egész értékeinél következnek be, így mint eddig, E egész értékei azt adják meg, hogy hányadik fedési minimum zajlik le a kezdő időpont óta. Ezek szerint a $\overline{P}$ fedési periódus a pillanatnyi periódus egy fordulatra vett átlagának tekinthető. Ekkor egy t_0 epocha utáni N-edik főminimum bekövetkeztének ideje így írható:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \overline{P}_k = \int_0^N \mathcal{P} \mathrm{d}E. \tag{1.15}$$

Ez egyben azt is megmutatja, hogy a folytonosnak felfogott $O-C$ függvény egy adott ponthoz tartozó érintőjének meredeksége a fedési kettős pillanatnyi periódusát adja meg.

A fentebb leírtakból nyilvánvaló, hogy amennyiben ez a meredekség nem marad állandó, azaz az $O-C$-nek görbülete van, akkor ez azt jelenti, hogy a fedési kettős periódusa nem állandó. A fedési kettőscsillagok periódusváltozásainak vizsgálata így elsősorban azon alapszik, hogy az $O-C$ görbe matematikai alakja, illetve a különböző fajta periódusváltozások, s így közvetve, az ezek mögött álló fizikai effektusok között szoros kvalitatív és kvantitatív kapcsolat van. Azaz, a fedési periódus változásának vizsgálatát visszavezetjük a fedésiminimum-időpontok tényleges és előre jelzett időpontja közti különbség változásának vizsgálatára. Ez magyarul igencsak körülményesen hangzik, de az angol nyelvű szakirodalom sokkal frappánsabban fejezi ki mindezt az *eclipse timing variation* (rövidítve ETV) terminussal. A továbbiakban, ennek mintájára, noha nem egészen szabatos, a fedésiminimumidőpont-változás kifejezést fogom használni.

1.2.2. Fizikai periódusváltozások

Fedésiminimumidőpont-változások számos különféle okból és változatos időskálákon léphetnek fel. Amikor ennek hátterében a keringési periódus tényleges megváltozása áll, akkor fizikai, ellenkező esetben látszólagos változásokról beszélünk. A hosszú időskálájú, fizikai fedésiminimumidőpont-változások általában csillagfejlődési okokból következnek be. Ilyen okok lehetnek a csillagok közti tömegátadás, a kettős tömegvesztése (például intenzív csillagszél következtében), mágneses fékeződés, árapály-disszipáció vagy akár a gravitációs sugárzás. E jelenségek közös jellemzője, hogy általában sokkal hosszabb időskálán játszódnak le, mint az a néhány évtized, vagy maximum másfél évszázad, amely időtartam óta fedésiminimum-időpontok egyáltalán a rendelkezésünkre állnak. Ily módon, ezekben az esetekben a teljes jelenségnek gyakorlatilag csak egy pillanatfelvételét látjuk, és így e jelenségek csupán egy lassú, állandó mértékűnek tekinthető periódusváltozásban nyilvánulnak meg.[19] Amint az könnyen belátható, amennyiben a fedési periódus két egymást követő főminimum között eltelt idő alatti megváltozása állandó, azaz

$$\Delta P = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}E} = P\dot{P} = const, \tag{1.16}$$

akkor az $O-C$ görbe alakja egy másodfokú polinom lesz.[20] Ebből kifolyólag a szakirodalomban gyakran a parabolikus $O-C$ kifejezés szerepel az ilyen esetekre. Amennyiben e periódusváltozás a két komponens közti konzervatív tömegátadás következménye, akkor könnyen belátható, hogy az $O-C$ diagramból meghatározható periódusváltozás és az egy keringésre jutó tömegátadási ráta között az egyszerű

$$\frac{\Delta M}{M} = -\frac{q}{1-q^2}\frac{\Delta P}{3P} \tag{1.17}$$

összefüggés áll fenn, ahol M a fedési kettős össztömege, $q = m_2/m_1$ pedig a tömegarány. (A fenti kifejezés akkor előjelhelyes, ha ΔM alatt a másodkomponens tömegváltozását értjük.)

Számos fedési kettősben rövidebb (általában éves vagy évtizedes) időskálájú fizikai fedésiminimumidőpont-változások is megfigyelhetők. Ezek hátterében akár a csillagok mágneses aktivitási ciklusai, akár egy viszonylag közelebbi harmadik komponens gravitációs

[19] A fent felsorolt jelenségek okozta fedésiminimumidőpont-változások pontos analitikus leírását Nanouris és mktsai. (2011, 2015) tárgyalják.

[20] A szabatosság kedvéért meg kell jegyezni, hogy ha viszont a periódusváltozás nem két fedés között, hanem az időben állandó (vagyis $\dot{P} = const$), az $O-C$ görbe alakját szigorúan véve egy exponenciális függvény írja le. E függvény Taylor-sorának lineáris és kvadratikus tagja azonban megegyezik a fenti parabolikus $O-C$-vel. Az eltérés csak a gyakorlati esetekben elhanyagolható köbös tagban jelenik meg. Valószínűleg ez lehet az oka, hogy a szakirodalomban általában nagyvonalúan hiányzik e két eset elkülönítése.

perturbációi (Söderhjelm, 1975) is állhatnak. Mivel a második esettel a jelen dolgozat 2–4. fejezeteiben részletesen foglalkozom, ehelyütt csak az első, a mágneses aktivitási ciklusok okozta esetleges periódusváltozásokat tárgyalom röviden.

A mágneses aktivitás azt jelzi, hogy a kettős rendszer egyik vagy mindkét komponensében erős mágneses tér van jelen, amelynek a csillag(ok) plazma állapotú anyagával való kölcsönhatása során megváltozhat az adott komponens(ek) tehetetlenségi tenzora. Ez a változás, az össz-impulzusmomentum megmaradása miatt változást idéz(het) elő a kettős keringési periódusában. E jelenség, az úgynevezett Applegate-mechanizmus (Applegate, 1992; Lanza és Rodonò, 2002), amelynek elméletileg várt időskálája néhány évtől 1–2 évtizedig terjedhet, és akár $\sim 0\overset{\mathrm{d}}{.}006$ amplitúdójú, kvázi-szinuszos fedésiminimumidőpont-változást is eredményezhet. Itt kell megjegyezni, hogy már röviddel Applegate (1992) tanulmánya előtt, Hall (1989) hozzávetőleg 100 algol-rendszer periódusváltozásait vizsgálva arra jutott, hogy az F5-nél későbbi színképtípusú rendszerek jellemzően évtizedes időskálájú ciklikus változásokat mutatnak. Ugyanakkor, noha a W UMa típusú csillagok többsége szintén F5-nél későbbi színképtípusú, és így e kettőscsillagok komponenseinek kiterjedt, ráadásul egymással erősen kölcsönható konvektív burkuk, és így várhatóan mágneses mezejük is van, e rendszerekben sokáig nem sikerült egyértelműen nyomára bukkanni a jelenségnek. Végül, röviddel azután, hogy Awadalla és mktsai. (2004) az F8 típusú W UMa-kettős AK Herculis esetében elsőként nyomára bukkantak ennek az effektusnak, egy öt érintkező kettős 50–100 éves hosszúságú fedésiminimumidőpont-változásait elemző munkánk során, a négy késői színképtípusú rendszer esetében (AB And, OO Aql, V566 Oph és U Peg) más, egyéb eredetű periódusváltozások azonosításán felül, kimutattunk olyan 18–20 éves kvázi periodikus fedésiminimumidőpont-változásokat is, amelyek mind kvalitatív, mind kvantitatív szempontból olyan jellegzetességeket mutattak, mint amilyeneket az adott rendszerek ismert fizikai tulajdonságai alapján az Applegate-mechanizmus működése esetén vártunk (Borkovits és mktsai., 2005a).

1.2.3. Látszólagos periódusváltozások

A látszólagos periódusváltozást előidéző két klasszikus jelenség egyrészt a harmadik komponens okozta fényidőeffektus (az angol nyelvű irodalomban *light-time effect – LITE; vagy light-travel time effect – LTTE*), illetve az apszismozgás (*apsidal motion effect – AME*), amely utóbbi excentrikus pályán keringő fedési kettősök esetén lép fel.

A fényidőeffektus

A fényidőeffektust szigorúan meg kell különböztetni a fentebb futólag már említett, a harmadik komponens gravitációs perturbációi által okozott fedésiminimumidőpont-változástól. Míg a gravitációs perturbációk esetében ténylegesen, fizikailag változik a fedési kettős keringési pályája, illetve a pálya menti mozgás sebessége, s így fizikai periódusváltozásról beszélünk, a most tárgyalásra kerülő esetben pusztán a fény véges terjedési sebessége miatt fellépő Rømer-effektus van a háttérben. Ilyenkor a fedési kettős pálya menti mozgásában, s így keringési periódusában nincsen tényleges, fizikai változás, csak a rendszer Földtől való távolsága változik a hármas rendszer tömegközéppontja körüli keringésből kifolyólag. Amint azt a további fejezetekben látni fogjuk, az ismert, fedési kettőst tartalmazó hierarchikus hármas csillagrendszerek legtöbbjében a távolabbi, harmadik komponens gravitációs perturbáló hatása rövid (évtizedes, akár évszázados) skálán elhanyagolható. Következésképpen a fedési kettős tömegközéppontja és a távolabbi, harmadik komponens egymás körüli keringése perturbálatlan kéttest-mozgásnak tekinthető, és így a fedési minimumok bekövetkezésének fényidőeffektus okozta időbeli változása közvetlenül felírható a kéttest-probléma

1.2. táblázat. Az értekezésben használt leggyakoribb jelölések összefoglalása

Paraméter	jelölés	magyarázat
tömeg		
CB komponensek	$m_{\mathrm{A,B}}$	
a CB össztömege	m_{AB}	$m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}$
harmadik test tömege	m_{C}	
hármas össztömege	m_{ABC}	$m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{C}}$
tömegarány	$q_{1,2}$	$m_{\mathrm{B}}/m_{\mathrm{A}}$, $m_{\mathrm{C}}/m_{\mathrm{AB}}$
tömegparaméter	$\mu_{1,2}$	Gm_{AB}, Gm_{ABC}
periódus		
sziderikus	$P_{\mathrm{s}1,2}$	
anomalisztikus	$P_{\mathrm{a}1,2}$	
fél nagytengely		
relatív pálya	$a_{1,2}$	
a CB abszolút pályája	a_{AB}	$m_{\mathrm{C}}/m_{\mathrm{ABC}}\cdot a_2$
excentricitás	$e_{1,2}$	
anomália		
valódi anomália	$v_{1,2}$	
excentrikus anomália	$\mathcal{E}_{1,2}$	$\mathcal{E}=2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{v}{2}\right)$
középanomália	$l_{1,2}$	$l=\mathcal{E}-e\sin\mathcal{E}$
valódi pálya menti hosszúság		lásd 2.1. ábra, A. függelék
az észlelői krsz-ben	$u_{1,2}$	$v_{1,2}+\omega_{1,2}$
a dinamikai krsz-ben	$w_{1,2}$	$v_{1,2}+g_{1,2}$
		$u_{1,2}-n_{1,2}+(0,1)\times\pi$
pericentrum argumentuma		lásd 2.1. ábra, A. függelék
az észlelői krsz-ben	$\omega_{1,2}$	
a dinamikai krsz-ben	$g_{1,2}$	$\omega_{1,2}-n_{1,2}+(0,1)\times\pi$
pericentrum-átmenet időpontja	τ	$l=\frac{2\pi}{P_{\mathrm{a}}}(t-\tau)$
inklináció		lásd 2.1. ábra, A. függelék
az észlelői krsz-ben	$i_{1,2}$	
a dinamikai krsz-ben	$j_{1,2}$	
kölcsönös (relatív)	i_{m}	j_1+j_2
	I	$\cos i_{\mathrm{m}}$
invariábilis síké az észlelői krsz-ben	i_0	
felszálló csomó		lásd 2.1. ábra, A. függelék
az észlelői krsz-ben	$\Omega_{1,2}$	
	$\Delta\Omega$	$\Omega_2-\Omega_1$
a dinamikai krsz-ben	h	
égbolt síkja – invariábilis sík ívtávolsága	$n_{1,2}$	
	α	n_2-n_1
	β	n_2+n_1
fénysebesség	c	
gravitációs állandó	G	

A fentiekben a CB rövidítés a szoros vagy belső kettősre (*close binary* – *CB*) utal.

megoldásából. Eszerint

$$\Delta_{\mathrm{LTTE}} = -\frac{a_{\mathrm{AB}}\sin i_2}{c}\frac{(1-e_2^2)\sin(v_2+\omega_2)}{1+e_2\cos v_2}, \tag{1.18}$$

illetve, az excentrikus anomáliára áttérve

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{LTTE}} &= -\frac{a_{\mathrm{AB}}\sin i_2}{c}\left[\sqrt{1-e_2^2}\sin\mathcal{E}_2\cos\omega_2 + (\cos\mathcal{E}_2 - e_2)\sin\omega_2\right] \\ &= -\frac{a_{\mathrm{AB}}\sin i_2}{c}\left[\sqrt{1-e_2^2\cos^2\omega_2}\sin(\mathcal{E}_2+\phi) - e_2\sin\omega_2\right],\end{aligned} \tag{1.19}$$

amelyből az is jól látható, hogy a fényidőeffektus amplitúdója

$$\mathcal{A}_{\mathrm{LTTE}} = \frac{a_{\mathrm{AB}}\sin i_2}{c}\sqrt{1-e_2^2\cos^2\omega_2}, \tag{1.20}$$

míg a görbe fázisa:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\omega_2}{\sqrt{1-e_2^2}\cos\omega_2}\right). \tag{1.21}$$

Kepler III. törvényét felhasználva bevezethetjük az

$$f(m_{\mathrm{C}}) = \frac{m_{\mathrm{C}}^3\sin^3 i_2}{m_{\mathrm{ABC}}^2} = \frac{4\pi^2 a_{\mathrm{AB}}^3\sin^3 i_2}{GP_2^2} \tag{1.22}$$

tömegfüggvényt, amelynek segítségével az amplitúdó az alábbi alakba írható:

$$\mathcal{A}_{\mathrm{LTTE}} \approx 1^{\mathrm{d}}\!\!,1\times 10^{-4} f(m_{\mathrm{C}})^{1/3} P_2^{2/3}\sqrt{1-e_2^2\cos^2\omega_2}, \tag{1.23}$$

amely kifejezésben a numerikus konstans akkor ad helyes értéket, ha a tömegeket naptömegben, a periódust pedig napban fejezzük ki, és így magát az amplitúdót is napban kapjuk meg. (Az egyes szimbólumok jelentését az 1.2 táblázatban foglalom össze.)

A fentiekből jól látható, hogy egy harmadik komponens keltette fényidőeffektus szigorúan periodikus jelenség, és ilyen esetekben az $O-C$ görbe pontosan ugyanazokat az információkat tartalmazza, mint amelyeket egy egyvonalas spektroszkópiai kettőscsillag radiálissebesség-görbéje. Így egy fényidőpálya-megoldásból a tág pálya[21] alábbi paraméterei kaphatók meg: P_2, e_2, ω_2, τ_2 (vagy ezek ekvivalensei), illetve $a_{\mathrm{AB}}\sin i_2$, azaz a fedési kettősnek a hármas rendszer tömegközéppontja körüli pályája fél nagytengelyének a látóirányra eső vetülete, vagy pedig az ezzel ekvivalens $f(m_{\mathrm{C}})$ tömegfüggvény, amelyből a szoros kettős össztömegének ismeretében a harmadik komponens tömegének alsó határa is megkapható.

A fényidőeffektust, mint egy fedési kettőscsillag (konkrétan az Algol) több évtizedes időskálán megfigyelt periódusváltozásának lehetséges magyarázatát elsőként Chandler (1892) vetette fel. A fényidőpálya matematikai alakját, illetve az ehhez kapcsolódó geometriai megoldást elsőként Woltjer (1922) írta fel. Azonban az irodalomban nem ez, hanem Irwin (1952, 1959) grafikus módszere terjedt el, amely a számítógépek térnyerésével természetesen átadta helyét a numerikus illesztőeljárásoknak.

A fényidőeffektus vizsgálata végigkísérte gyakorlatilag eddigi teljes pályafutásomat, így a későbbiekben, kutatási eredményeim ismertetésénél e jelenség vizsgálatára még majd visszatérek.

[21] A hierarchikus háromtest-probléma itt követett nevezéktanával kapcsolatban ld. az 1.3.2. szakaszt.

Apszismozgás

Amíg egy szoros kettőscsillag két komponense körpályán kering egymás körül, a két fedési minimum szabályosan, fél periódusonként követi egymást, és a fedések időbeli hossza is egyforma. Amennyiben a pálya excentrikus, ez a továbbiakban már nem igaz. Egyszerű geometriai megfontolásokból belátható (ld. pl. Giménez és Garcia-Pelayo, 1983), hogy a fedési minimumok maximális fázisa pillanatában

$$u = \pm\frac{\pi}{2} + \delta. \tag{1.24}$$

Körpálya ($e = 0$), illetve pontosan az éléről látszó pályasík ($i = 90^\mathrm{o}$) esetén $\delta \equiv 0$. Minden más, a gyakorlatban eddig megfigyelt esetben $\delta \ll 1$, így a továbbiakban (a 4.2. alfejezet kivételével) e mennyiséget elhanyagolhatjuk. Ebben az esetben a Kepler-egyenlet analitikus megoldásából közvetlenül adódik a fedési események bekövetkezési ideje, illetve az ellipszispálya alakja és látszó helyzete közötti kapcsolat, miszerint

$$\Delta_\mathrm{apse} = \frac{P_1}{2\pi}\left[\arctan\left(\frac{\pm e_1\cos\omega_1}{1+\sqrt{1-e_1^2}\mp e_1\sin\omega_1}\right) \pm \sqrt{1-e_1^2}\frac{e_1\cos\omega_1}{1\mp e_1\sin\omega_1}\right], \tag{1.25}$$

ahol (és a továbbiakban mindig) a felső előjel a fő-, az alsó pedig a mellékminimum esetére vonatkozik. A szakirodalomban gyakran a fenti zárt alakú kifejezés helyett annak alábbi, Taylor-sor formájában felírt közelítése szerepel:

$$\begin{aligned}\Delta_\mathrm{apse} \quad &\approx \quad \frac{P_1}{2\pi}\left[\pm 2e_1\cos\omega_1 + \left(\frac{3}{4}e_1^2+\frac{1}{8}e_1^4\right)\sin 2\omega_1 \mp \left(\frac{1}{3}e_1^3+\frac{1}{8}e_1^5\right)\cos 3\omega_1\right. \\ &\left. -\frac{5}{32}e_1^4\sin 4\omega_1 \pm \frac{3}{40}e_1^5\cos 5\omega_1\right] + \mathcal{O}\left(e_1^6\right).\end{aligned} \tag{1.26}$$

A mellékminimumra és főminimumra felírt Δ_apse kifejezés különbsége közvetlenül megadja, hogy egy mellékminimum és az azt megelőző főminimum között eltelt idő mennyivel tér el a keringési periódus felétől. Bizonyos esetekben, például amennyiben az apszismozgási periódus jelentősen meghaladja a teljes észlelési intervallum hosszát, gyakran közvetlenül ezt a különbségét használják az apszismozgás vizsgálatára. Ennek egyik előnye (amint az a Taylor-soros [1.26] alakból közvetlenül kiolvasható), hogy ebben az esetben minden második, az e_1-ben páros rendű komponens kiesik. Ennél is fontosabb azonban, hogy így kiszűrhető az összes olyan egyéb eredetű periódusváltozás, mint például a fényidőeffektus, amely azonos módon befolyásolja mind a fő- mind a mellékminimum időpontjainak változását. Ebből a megfontolásból röviden megadom e különbségfüggvényt is mind zárt alakban, mind sorfejtés formájában:

$$\begin{aligned} D \quad &= \quad -\frac{P_1}{\pi}\left[\arctan\frac{e_1\cos\omega_1}{\sqrt{1-e_1^2}} + \sqrt{1-e_1^2}\frac{e_1\cos\omega_1}{1-e_1^2\sin^2\omega_1}\right], && (1.27) \\ &= \quad -\frac{P_1}{\pi}\left[2e_1\cos\omega_1 - \left(\frac{1}{3}e_1^3+\frac{1}{8}e_1^5\right)\cos 3\omega_1 + \frac{3}{40}e_1^5\cos 5\omega_1\right] + \mathcal{O}\left(e_1^7\right). && (1.28)\end{aligned}$$

Amennyiben a pericentrum argumentuma változik, azaz fellép az apszismozgás vagy apszisvándorlás jelensége, a fenti kifejezés többé nem marad állandó, és így az apszismozgás fedésiminimumidőpont-változásként detektálható. Amennyiben állandó apszismozgási rátát teszünk fel,[22] a pericentrum argumentumát egyszerűen az alábbi formában írhatjuk fel:

$$\omega_1(E) = \omega_1(0) + \Delta\omega_1 E, \tag{1.29}$$

[22] Az állandó szögsebességű mozgás mind a (rövidesen említésre kerülő) relativisztikus, mind a klasszikus árapályerők keltette apszismozgás esetén igen jó közelítés.

ahol $\Delta\omega_1$ az egy orbitális (illetve egészen pontosan fedési) periódusra vonatkozó, konstans apszismozgási ráta. Az (1.29) kifejezést behelyettesítve az (1.25,1.26) egyenletekbe, a fényidőeffektushoz hasonlóan megint csak periodikus $O-C$ görbét kapunk, viszont azzal a lényeges különbséggel, hogy míg az előző esetben a fő- és mellékminimumokra felrajzolt $O-C$ görbék amplitúdója és fázisa megegyezik, addig ez utóbbi esetben a két görbe ellentétes fázisban változik.

Nem degenerált komponensek alkotta fedési kettőscsillagok esetében az apszismozgás elsődleges forrása a csillagok közti árapály-kölcsönhatás, illetve a gyors tengelyforgás következtében fellépő gömbszimmetrikustól eltérő tömegeloszlás. Ily módon, amint arra elsőként Cowling (1938) és Sterne (1939) rámutattak, az apszismozgási rátának az (1.26) kifejezésen alapuló meghatározása közvetlen információkat hordoz az adott csillagok belső tömegeloszlására vonatkozóan. Amennyiben az $O-C$ diagramból $\Delta\omega_1$ ismert, akkor a

$$\Delta\omega_{\mathrm{GR}} = 5{,}45\times10^{-4}\frac{1}{1-e_1^2}\left(\frac{m_{\mathrm{AB}}}{P_1}\right)^{2/3} \tag{1.30}$$

relativisztikus járulék levonását követően visszamaradó klasszikus, árapály-eredetű apszismozgási szögsebességből ($\Delta\omega_{\mathrm{cl}}$) a kettős rendszerre vonatkozó „átlagos” $k_{2,\mathrm{obs}}$ belsőszerkezeti állandó az egyszerű

$$k_{2,\mathrm{obs}} = \frac{1}{c_{21}+c_{22}}\frac{\Delta\omega_{\mathrm{cl}}}{2\pi} \tag{1.31}$$

kifejezéssel kapható meg (ld. pl. Giménez, 1985). A c_{21}, c_{22} függvények az excentricitás, a tömegarány és a relatív csillagsugarak, valamint rotációs ráták függvényei, amelyek könnyen levezethetők a későbbi 3. fejezet elején felsorolásra kerülő kifejezésekből.[23]

Elmondhatjuk tehát, hogy az aszteroszeizmológia térnyerését megelőzően az excentrikus fedési kettőscsillagok minimumidőpont-változásainak megfigyelése nyújtotta az egyetlen lehetőséget az elméleti csillagszerkezeti modellek gyakorlati (észlelési) ellenőrzésére. E megfigyelések nyomán derült ki, hogy a korábban elfogadott politrop csillagmodellek nem írják le jól a csillagok belső szerkezetét, a nem degenerált csillagok tömegeloszlása legalább egy nagyságrenddel erősebb centrális koncentrációt mutat (lásd pl. Kopal, 1978). Az 1980-as évektől fejlesztett numerikus csillagmodellek már visszaadják a csillagok belső tömegeloszlásának ezt a jellegzetességét. Mivel ez a jelenség a klasszikus newtoni fizika keretein belül is fellép, és általában kvantitatívan is annak formalizmusával írjuk le, a továbbiakban ezt a fajta apszismozgást egyszerűen klasszikus apszismozgásnak fogom nevezzni. A probléma szabatos matematikai tárgyalása megtalálható Kopal (1978) monográfiájának 2. fejezetében, magyar nyelven pedig ennek bővebb kivonata PhD-értekezésemben olvasható (Borkovits, 2002, 2. fejezet).

Az apszismozgás egy további forrása az általános relativitáselmélet által leírt effektus. Ez utóbbi, relativisztikus járulék a degenerált objektumok által alkotott szoros kettősök esetében igazán jelentős. A közönséges csillagok alkotta, körülbelül 2000 jelenleg ismert, excentrikus pályán mozgó fedési kettős közül alig néhány tucat olyan rendszer akad, ahol a relativisztikus járulék nem hanyagolható el a klasszikus mellett. Ennek ellenére ezek a kettőscsillagok különösen fontos szerepet játszottak az elmúlt évtizedek asztrofizikai kutatásaiban, különösen annak köszönhetően, hogy az 1980-as évektől kezdődően több jelentős relativisztikus apszismozgási járulékot mutató kettősről is kiderült, hogy a megfigyelt

[23]Itt jegyzem meg, hogy a korábban Lacy és mktsai. (2003) nyomán anomális apszismozgásúnak tartott BP Vulpeculae $O-C$ diagramjának vizsgálata során éppen a fent említett algoritmust követve határoztam meg a helyes apszismozgási rátát, és mutattam meg, hogy az ebből számolható belsőszerkezeti állandó összhangban van a csillagszerkezeti modellekből várttal (Csizmadia és mktsai., 2009b).

apszismozgási ráta jelentősen elmarad az elméletileg várttól. A kérdéskör részletes tárgyalása Claret (1998) átfogó tanulmányában, magyar nyelven pedig Hegedüs (1996) doktori disszertációjában olvasható. E problémának a klasszikus mechanika keretein belül maradó feloldására tett erőfeszítéseimet a 3. fejezetben ismertetem.

Amint fentebb már említettem, a relativisztikus effektus időben állandó sebességű apszismozgást jósol. Ha eltekintünk a rövid távon elhanyagolható árapály-disszipációtól, a csillagok forgástengelyének esetleges precessziójától, illetve az esetleges, általában kis amplitúdójú, árapályhatás gerjesztette oszcillációktól, akkor a klasszikus effektus hasonló jellegű apszismozgásra vezet. Az apszismozgás ugyanakkor származhat egy közeli harmadik komponens gravitációs perturbációiból is. Ebben az esetben a pericentrum-argumentum szögsebessége nem marad állandó. Továbbá, a pálya excentricitása, amely a klasszikus illetve a relativisztikus apszismozgás esetében konstans, szintén változik. Ily módon ebben az esetben a fedésiminimum-időpontok modellezése egy sokkal komplexebb feladattá válik. Ezt a feladatot az elmúlt 12 évben, négy egymásra épülő tanulmányban én végeztem el. E tanulmányokat, majd az e munkák révén lehetségessé vált gyakorlati alkalmazásokat a következő fejezetekben ismertetem.

Végezetül meg kell jegyezni, hogy a fedési kettőscsillagok fénygörbéjén megjelenő bizonyos torzulásoknak is lehet olyan hatása, hogy a torzult fénygörbéről kimért fedésiminimum-időpontokban hamis periodikus, vagy legalábbis kvázi periodikus változások jelennek meg. E hamis jelek forrása leginkább a csillagok fotoszferikus aktivitásában (Kalimeris és mktsai., 2002; Tran és mktsai., 2013) vagy pedig egyes csillagok oszcillációiban (Borkovits és mktsai., 2014) keresendő. E hamis jelek azonosítására és kiszűrésére más kutatókkal együttműködve magam is tettem erőfeszítéseket, amelyeket a dolgozat későbbi részeiben (4.4. alfejezet) ismertetek.

1.3. Hierarchikus hármas csillagrendszerek

1.3.1. A többes csillagrendszerek gyakorisága és asztrofizikai jelentősége

Az ebben a dolgozatban említésre kerülő fedési kettőscsillagok legnagyobb része többes csillagrendszer tagja. Ez, azon túl, hogy már a dolgozat címe alapján sem okoz meglepetést az Olvasónak, már csak azért sem lehet váratlan, mert a gravitációsan kötött, kettőnél több (de tíznél kevesebb) csillagot tartalmazó rendszerek egyáltalán nem ritkák még viszonylagos kozmikus szomszédságunkban sem. Példának okaként Eggleton és Tokovinin (2008) vizsgálatai alapján az égboltunkon megfigyelhető 6,00 (Hipparcos-) magnitúdónál fényesebb 4559 csillagrendszerben[24] található 1 841 kettőscsillag közül legalább 404, azaz a kettősök hozzávetőleg 22%-a tartalmaz legalább még egy további csillagot. Ugyanakkor a 4,00 magnitúdónál fényesebb csillagok szűkebb mintáját 213 magányos csillag mellett már 265 legalább két csillagból álló rendszer alkotja, amelyek közül 86, azaz csaknem egyharmaduk három vagy több csillagot tartalmazó rendszer. (Ez utóbbi eredmény nyilvánvalóan sugallja, hogy még a legfényesebb és így viszonylag a legjobban tanulmányozott csillagok alkotta többes csillagrendszerek mintája sem teljes, azaz még ezen, többségükben galaktikus szomszédságunkban lévő csoportosulások esetében is számíthatunk velük gravitációsan kötött rendszert alkotó további, halvány csillagkomponensek felfedezésére.) Még szembeszökőbb e munkának az a megállapítása, hogy a mintában található 95 három napnál rövidebb keringési idejű kettősből 60 tartalmaz még legalább egy további komponenst. A rövid periódusú kettősök egy másik csoportját vizsgálva Tokovinin és mktsai. (2006) a többes rendszerek még kiugróbb gyakoriságát állapították meg. E szerzők 165 olyan spekt-

[24]Ebben az esetben az egyszerűség kedvéért a magányos csillagokat is „csillagrendszernek” nevezve.

roszkópiai kettőscsillagot tanulmányoztak, amelyeket Nap típusú csillagok alkotnak. Azt találták, hogy a 165 kettős nagy része többes csillagrendszer tagja. Statisztikai módszerekkel megbecsülve az esetlegesen még nem felfedezett további komponensek részarányát arra jutottak, hogy a vizsgált spektroszkópiai kettősök $63 \pm 5\%$-ának van további kísérője, azonban a $2\overset{d}{.}9$ napnál rövidebb keringési idejű kettősök esetében ez az arány $96 \pm 7\%$, míg a 13–30 napos periódusintervallumban már csak $34 \pm 6\%$.

A hármas és többes csillagrendszerek léte azonban nemcsak nagy számuk miatt érdekes, hanem elsősorban azért, mert jelenlegi ismereteink szerint, ha egy kettőscsillagnak további csillagtömegű kísérője van, az jelentős befolyással bírhat mind magának a kettősnek, mind az azt alkotó csillagoknak az evolúciójára. Ez analógiába állítható azzal a fentebb már említett, jól ismert ténnyel, hogy egy (elegendően szoros) kettőscsillag két komponensének késői fejlődési útja és evolúciós végállapota alapvetően eltér egy hasonló tömegű csillag fősorozat utáni életútjától. Ráadásul a harmadik csillag jelenléte még változatosabb és extrémebb csillagfejlődési utakat tesz lehetővé, és így magyarázatot nyújthat egyes másként nehezen értelmezhető jelenségek, illetve égitesttípusok kialakulására. Például, amint azt egy friss tanulmányban Naoz és mktsai. (2016) kimutatták, a fekete lyukat tartalmazó kis tömegű röntgenkettősök (black hole - low-mass X-ray binaries – BH-LMXB) kialakulása egy távolabbi, harmadik kísérő dinamikai perturbációinak hatására az LMXB-k létrejöttéről általánosan elfogadott modellekben kulcsszerepet játszó közös burok képződése nélkül is végbemehet. Ez az eredmény feloldja azt az egyebek között Podsiadlowski és mktsai. (2003) által kimutatott problémát, miszerint a BH-LMXB-k esetén nem ismeretes olyan kialakulási mechanizmus, amely számot adna ezek megfigyelt gyakoriságáról. (A közepes vagy nagy tömegű mellékkomponenssel rendelkező, fekete lyukat tartalmazó röntgenkettősök esetében ez a probléma nem merül fel, ott az elméleti evolúciós modellek összhangban vannak az észlelési eredményekkel.) Hasonlóképpen, Shappee és Thompson (2013) azt találták, hogy a degenerált csillagokból (neutroncsillagok, illetve fehér törpék) álló szoros kettősök létrejötte szintén megmagyarázható egy harmadik komponens perturbációival anélkül, hogy egy közös burok kialakulását kellene feltételeznünk. Ugyanakkor a harmadik komponens jelenléte annak az esélyét is megnöveli, hogy egy kettős rendszerben bekövetkező szupernóva-robbanás ne vezessen a kettős felbomlásához (ld. pl. Tauris és van den Heuvel, 2014).

Mindez természetesen vezet tovább a klasszikus Ia típusú szupernóvák kérdéséhez. Ebben az esetben az alapmodell szerint a szupernóva-robbanás akkor következik be, amikor a fősorozatról elfejlődött mellékkomponensről a fehér törpére hulló anyag következtében ennek tömege meghalad egy kritikus (a Chandrasekhar-tömeghez nagyon közeli) tömeghatárt, amikor is a fehér törpe magjában robbanásszerűen beinduló termonukleáris reakció szétveti az egész objektumot. A robbanó fehér törpék azonos tömege (és kémiai összetétele) következtében e modell hasonló luminozitást jósol minden így bekövetkező SN Ia eseményre, és ez adja e jelenségek közismert kozmológiai jelentőségét. Ugyanakkor Ia típusú szupernóva-robbanás bekövetkezhet két fehér törpe összeolvadásakor is. Ebben az esetben a robbanás energiája eseményről eseményre eltérő lehet. A kétféle jelenség elkülönítése emiatt a kozmológiai kutatások szempontjából rendkívül fontos. A mi szempontunkból az utóbbi szupernóva-robbanások azért érdekesek, mert egy további, harmadik komponens okozta perturbációk nemcsak a fehér törpék alkotta szoros kettősök kialakulásához, hanem magához a fehértörpe-csillagok összeolvadásához is elvezethetnek. Márpedig, amint a tudományterület legfrissebb eredményeit összegző munkájukban Maoz és mktsai. (2014) fogalmaznak: [A legfrissebb kutatások tükrében] „úgy tűnik, hogy a sokáig félvállról vett DD [duplán degenerált] csillagelődök állhatnak számos, ha nem az összes SN Ia mögött."[25]

[25] Itt kell azonban megjegyeznem, hogy ez utóbbi kijelentésnek ellentmond az az egészen friss, magyar

Harmadik komponens okozta dinamikai perturbációk azonban nemcsak fehér törpék összeolvadását eredményezhetik, hanem akár a blue straggler (magyarul kék vándor vagy kék tévelygő) csillagok létrejöttére is magyarázatot adhatnak (Peretz és Fabrycky, 2009; Naoz és Fabrycky, 2014).

A fentiekben olyan példákat láttunk, ahol a harmadik komponens a kettőscsillag életének egy viszonylag késői fázisában fejtett ki látványos hatást. Azonban egy harmadik (vagy akár további) gravitációsan kötött komponens már a kettős életének korai szakaszában is jelentős változásokat hozhat, amelynek azután a csillagok egész hátralévő fejlődési útjára meghatározó szerepe lehet. Ezek közül talán a legfontosabb, hogy jelenlegi ismereteink szerint a szoros (néhány napos keringési idejű) csak fősorozati vagy annál fiatalabb csillagok alkotta különálló kettőscsillagok létrejötte legjobban egy távolabbi, harmadik csillag perturbációival magyarázható. Mivel ez a kérdéskör szorosan kapcsolódik a jelen dolgozatban ismertetendő kutatásaimhoz, az alábbiakban részletesebb áttekintést adok a problémáról.

1.3.2. Hierarchikus hármas csillagrendszerek szekuláris dinamikája – a Kozai – Lidov-mechanizmus

Az égi mechanikai kutatásokból ismeretes, hogy nagyságrendileg azonos tömegű tömegpontok alkotta kis elemszámú n-test rendszerek[26], ha a komponensek közt kizárólag a newtoni gravitációs erő hat, csak hierarchikus elrendeződésben alkotnak gravitációsan stabil konfigurációt. A hierarchikus elrendeződés azt jelenti, hogy kiválasztva az adott n-test rendszer tetszőleges három tagját, a három tag közül az egyik minden időben sokkal nagyobb[27] távolságra lesz a másik kettőtől, mint azok egymástól. E definíció a hierarchikus többes rendszerek definícióját voltaképpen a legkisebb elemszámú ilyen elrendeződés, a hierarchikus hármas rendszer meghatározására vezeti vissza, hiszen jól látható, hogy egy hierarchikus többes rendszer bármely három véletlenszerűen kiragadott tagja mindig hierarchikus hármast alkot. A jelen dolgozatban előforduló többes rendszerek legnagyobb része hierarchikus hármas, azonban egy-két hierarchikus négyes rendszer is elő fog kerülni. Ezért érdemes megemlíteni, hogy a hierarchikus hármas rendszerrel szemben egy hierarchikus négyes már két jelentősen különböző konfigurációt alkothat. Az egyik esetben a négy csillag három hierarchiaszintet alkot: egy legbelső, szoros kettőst, amely két csillagtól a harmadik komponens a két csillag szeparációjánál jelentősen távolabb helyezkedik el (középső hierarchiaszint), illetve egy negyedik, gravitációsan szintén kötött komponens az előbbi három csillag mindegyikétől a középső hierarchiaszinthez tartozó szeparációtól is jelentősen nagyobb távolságra helyezkedik el (külső hierarchiaszint). A másik lehetőség viszont, hogy a négyest két egymáshoz gravitációsan kötött kettőscsillag alkotja, ahol a két kettőscsillag (tömegközéppontjainak) távolsága jelentősen meghaladja a mindkét kettős pályaméretét. Ez utóbbi elrendeződés tehát elvben csak két hierarchiaszintet alkot, bár szigorúan véve nem szükséges, hogy a két kettős pályamérete külön-külön egymáshoz hasonló legyen, hanem akár nagyságrendi különbség is lehet köztük.

A hierarchikus hármas rendszerek mozgásának dinamikai leírásával kapcsolatos alapvető kutatási eredmények rövid összefoglalását PhD-dolgozatom (Borkovits, 2002) első fejezetében megadtam, így ehelyütt csak a legalapvetőbb tudnivalókra, illetve az elmúlt 14 évnyi kutatások legfontosabb és a jelen dolgozat szempontjából releváns eredményeire térek ki.

közreműködéssel született eredmény, miszerint az SN 2012cg jelű, Ia típusú szupernóva fénygörbéjében sikerült azonosítani egy nem degenerált kísérőre utaló nyomokat (Marion és mktsai., 2014).

[26] Az előző alfejezetben említett statisztikai vizsgálatokban figyelembe vett legnagyobb elemszámú két rendszer hét csillagot tartalmaz.

[27] Arra, hogy mennyi ez a „sokkal nagyobb”, a későbbiekben majd visszatérek.

Egy hierarchikus hármas csillagrendszer úgy fogható fel, mintha két kettőscsilllagból állna. Az egyik kettős, amelyet a továbbiakban szoros vagy belső kettősnek fogunk nevezni, a két egymáshoz közelebbi csillagból áll, míg a másikat, a tág vagy külső kettőst, a távolabbi, harmadik komponens és a szoros kettős tömegközéppontja alkotja. Bevezetve a szoros kettős egyik komponensétől a másikhoz mutató ($\boldsymbol{\rho}_1$), illetve a szoros kettős tömegközéppontjától a harmadik komponenshez mutató ($\boldsymbol{\rho}_2$) rádiuszvektorokat, az első két úgynevezett Jacobi-vektort (ld. pl. Érdi, 1989a, 1. fejezet), az ezekre felírt mozgásegyenletek megoldása megmutatja azt a tisztán szemlélet útján is belátható tényt, hogy ebben az esetben a két kettős perturbált kéttest-mozgást végez, ahol a perturbáció nagyságrendjét a pillanatnyi szeparációk aránya, azaz a ρ_1/ρ_2 kis paraméter határozza meg. Perturbált kepleri mozgásról lévén szó, a szűk és a tág kettős mozgásának leírására definiálhatjuk a szokásos pályaelemeket, és a mozgás lefolyását e kétszer hat pályaelem értékével, illetve időbeli változásával írhatjuk le. A pályaelemek és a Jacobi-vektorok pillanatnyi koordinátái között pedig kölcsönösen egyértelmű megfelelések állnak fent.

Az úgynevezett „sztelláris háromtest-problémát”, vagyis gyakorlatilag egy hierarchikus hármas rendszert alkotó, három összemérhető tömegű tömegpont alkotta dinamikai rendszer mozgását elsőként Harrington (1968, 1969) vizsgálta. E szerző a rendszer Hamilton-függvényét a fél nagytengelyek aránya mint kis paraméter szerint sorba fejtve adta meg, és a másodrendű (vagyis a kvadrupól) közelítés keretein belül, a von Zeipel-féle átlagolási technika alkalmazásával az egyes pályaelemekre vonatkozó perturbációs egyenleteket is felírta. Itt kell megjegyezni, hogy a hierarchikus rendszerek mozgásegyenlete és perturbációs egyenletei és a klasszikus planetáris perturbációelmélet között több jelentős különbség is van. Mint ismeretes, ez utóbbi esetben a perturbációs függvény sorfejtése az $m_{\mathrm{bolygo}'}/m_{\mathrm{Nap}}$ tömegarány mint kis paraméter szerint történik, míg ellenben a bolygók szeparációi összemérhetőek lévén, ezek aránya nem eredményez numerikusan jól viselkedő kis paramétert. Ennek folyománya az is, hogy a perturbációknak az időskálákon és amplitúdókon alapuló osztályozása is különbözik a hierarchikus, illetve a klasszikus, planetáris elméletben. A továbbiakban tehát e dolgozatban a hierarchikus rendszerekre jellemző nevezéktant fogom alkalmazni, amely Brown (1936) holdelméletén alapul. E szerző a következő három kategóriát különbözteti meg:

– *Rövid periódusú perturbációk:* A perturbáció periódusa a szoros kettős P_1 keringési periódusának nagyságrendjébe esik, amplitúdója pedig $(P_1/P_2)^2$-tel arányos.

– *Hosszú periódusú perturbációk:* Ezek karakterisztikus periódusa P_2, amplitúdója pedig P_1/P_2-vel arányos.

– *„Apszis-csomóvonali” perturbációk:* E leghosszabb periódusú perturbációk időskálája P_2^2/P_1-gyel arányos, a perturbációk amplitúdója pedig akár egységnyi is lehet.

(Ismeretes, hogy a klasszikus, planetáris elméletben a fentebbi rövid és hosszú periódusú perturbációkat közösen *rövid periódusú*aknak nevezik, míg az „apszis-csomóvonali” tagokra használják a *hosszú periódusú* megjelelölést.)

Míg a jelen dolgozatban ismertetendő kutatásaim többnyire (de nem kizárólagosan) a hosszú periódusú perturbációk vizsgálatára összpontosítanak, addig a hierarchikus hármas csillagrendszerekkel foglalkozó kutatások túlnyomó többsége az égi mechanikai sztelláris háromtest-probléma eredményeit elsősorban evolúciós megfontolásokkal kapcsolatban vette tekintetbe, így a vizsgálatok túlnyomórészt csak a többnyire évszázados, évezredes vagy még hosszabb időskálájú „apszis-csomóvonali” (vagy szekuláris) perturbációkra korlátozódtak. Kétségtelen, hogy a sztelláris háromtest-probléma leglátványosabb és asztrofizikai szempontból legfontosabb eredménye valóban az „apszis-csomóvonali” vagy szekuláris perturbációk vizsgálatával felismert Kozai – Lidov (továbbiakban: KL) mechanizmus, amelyet

Lidov szovjet-orosz és Kozai japán kutatók (egymástól függetlenül) mesterséges holdak (Lidov, 1962), illetve főövbeli kisbolygók (Kozai, 1962) perturbációinak vizsgálata során fedezték fel. A fent említett szerzők a hierarchikus háromtest-probléma szekuláris perturbációs egyenleteit (a Hamilton-függvény perturbációs részének legalacsonyabb rendű tagjának figyelembevételével) analitikusan megoldva kimutatták, hogy amennyiben a perturbáló harmadik komponens keringési síkjának a szoros kettős keringési síkjához viszonyított relatív pályahajlása (az úgynevezett köztes inklináció) meghalad egy kritikus határértéket, a szoros kettős pályájának lapultsága (e_1 excentricitása), illetve a hármas rendszer invariábilis síkjához viszonyított pályahajlása (a j_1 dinamikai inklináció) nagymértékű, periodikus változásokat szenvedhet el. Amennyiben a hármas rendszer erősen hierarchikus, azaz a rendszer orbitális össz-impulzusmomentuma túlnyomórészt a tág pályában koncentrálódik (vagy másképp: a belső, illetve a külső pályákban tárolt impulzusmomentumok aránya kis érték, illetve aszimptotikusan nulla), akkor az e_1 excentricitás maximális értéke csaknem független annak minimális értékétől, és csak a minimális e_1 excentricitáshoz tartozó köztes inklinációtól függ. Ennek legfontosabb gyakorlati folyománya, hogy amennyiben egy szoros kettősnek egy, a kettős pályasíkjára csaknem merőlegesen keringő harmadik kísérője van, a szoros kettős pályahajlása időszakosan $e_1 = 1$-hez nagyon közeli értékeket is felvehet, tehát a két csillag rendkívül szorosan megközelítheti egymást, vagy akár össze is ütközhet.[28]

Érdekesség, hogy e manapság oly divatos jelenség tehát már hat évvel Harrington (1968, 1969) a „sztelláris háromtest-probléma" területén úttörő munkáinak megjelenése előtt is ismert volt. Ez utóbbi szerző, noha Kozai (1962) eredményeit megemlíti, különösebb hangsúlyt nem helyezett rájuk, csakúgy, mint kevés kivételtől eltekintve, a következő három évtized más asztrofizikus kutatói sem.[29] Az asztrofizikai köztudatba a jelenség azt követően került be, hogy Holman és mktsai. (1997) a 16 Cygni B körül frissen felfedezett, akkoriban egyedülállóan lapult ($e = 0{,}67$) pályán keringő exobolygó extrém excentricitását a KL-mechanizmussal magyarázták, valamint ezzel gyakorlatilag egy időben Beust és mktsai. (1997) megmutatták, hogy a TY Coronae Australis fedési kettős különös dinamikai jellemzői szintén visszavezethetők a röviddel azelőtt felfedezett harmadik komponens KL-mechanizmuson keresztül megnyilvánuló perturbációra. Végezetül, talán a legfontosabb publikáció, amely az érdeklődés homlokterébe állította a KL-jelenséget Kiseleva és mktsai. (1998) tanulmánya, amelyben a szerzők először vetették fel, hogy az árapály-fékeződéssel kombinált KL-mechanizmus (Kozai Cycles with Tidal Friction – KCTF) megmagyarázhatná mind a szoros kettősök, mind esetleg a forró jupiterek létrejöttét.

[28]Itt kell megemlíteni, hogy amint arra Naoz és mktsai. (2013) felhívták a figyelmet, az eredeti szerzők egyenleteik megoldása közben, a „csomóvonalak eliminálásként" ismert transzformáció elvégzése közben egy olyan elvi hibát vétettek, amelynek következtében analitikus megoldásuk szigorúan véve csak az aszimptotikus esetben érvényes, vagyis akkor, amikor a szoros kettős másodkomponensének tömege és így a belső pályában tárolt impulzusmomentum is nulla. Noha a problémának egy, a lényeget nem érintő közelítés alkalmazása után a nem-aszimptotikus esetben is létezik analitikus megoldása, amelyet már Söderhjelm (1982) is megadott és részletesen diszkutált is, mindez gyakorlatilag Naoz és mktsai. (2013) munkájáig feledésbe merült. A témáról szóló áttekintő cikk: Naoz (2016).

[29]Tanulságos, ha megnézzük az idézések időbeli eloszlását. Eszerint 2016. február 10-én a NASA Astrophysical Data System (ADS) szolgáltatása az eredeti Kozai (1962) tanulmány 857 idézéséről tudott, amelyből azonban 788, azaz 92%, az elmúlt 19 évre datálódik. Továbbá, a tanulmány publikálását követő 35 évben megjelent hivatkozások elsöprő többsége a naprendszerbeli kis égitestekkel, vagy általános, elméleti égi mechanikai vizsgálatokkal kapcsolatos, hármas csillagrendszerekkel kapcsolatban Harrington (1968, 1969) munkáit követően az első konkrét idézésre Söderhjelm (1982) dolgozatáig kellett várni.

1.3.3. Szoros kettősök kialakulása hierarchikus hármas rendszerekben – a KCTF-jelenség

A témával foglalkozó szakemberek körében régóta közismert, hogy sem a forró jupiterek, sem az egészen szoros, azaz alig 1–2 napos keringési idejű, nem elfejlődött komponenseket tartalmazó kettőscsillagok nem keletkezhettek jelenlegi pályájukon. Például az elfogadott evolúciós modellek szerint egy Naphoz hasonló csillag maximális sugara a protocsillag fázisban $R \simeq 6\mathrm{R}_\odot$ (D'Antona és Mazzitelli, 1994), s ebből kifolyólag, két naptömegű protocsillag alkotta kettős minimális lehetséges keringési periódusa $P = 3\overset{\mathrm{d}}{.}4$ nap. Ezzel szemben ismerünk ennél jóval rövidebb periódusú, Nap típusú, fősorozati csillagok alkotta kettőscsillagokat is.[30] Következésképp bizonyosak lehetünk abban, hogy e kettősök eredetileg tágabb pályán alakultak ki, és a későbbiekben, valamilyen pályaméret-csökkentő mechanizmus hatására alakult ki jelenlegi pályájuk. Az elmúlt évtizedekben különféle szerzők által felvetett lehetséges mechanizmusok összefoglalása megtalálható például Tokovinin és mktsai. (2006), illetve Fabrycky és Tremaine (2007) munkáiban. Manapság ugyan a forró jupiterek létrejöttét elsősorban a protoplanetáris korongokon belüli migrációs effektusokkal magyarázzák (lásd például Regály és mktsai., 2013), azonban a valamivel nagyobb perihélium-távolságú meleg jupiterek esetében a KCTF-mechanizmus szerepe valószínűleg mégis jelentős (Petrovich és Tremaine, 2016). Ugyanakkor a szoros kettőscsillagok kialakulására továbbra is a leginkább elfogadott magyarázat a KCTF-jelenség.

Ebben az esetben az eredetileg több száz vagy akár több ezer napos keringési idejű kettőscsillag két komponensének pályája egy még távolabbi, a kettős pályasíkjához viszonyítva nagy hajlásszögű síkban keringő harmadik égitest hatására a KL-mechanizmusnak köszönhetően jelentős perturbációkat szenved el. Amennyiben a két pályasík egymáshoz viszonyított kezdeti hajlásszöge elegendően megközelíti az $i_\mathrm{m} = 90^\mathrm{o}$-ot, akkor a KL-ciklus során a maximális excentricitás oly mértékben megnőhet, hogy a pericentrum-átmenetek környékén a belső kettőscsillag két tagja annyira megközelíti egymást, hogy a komponensek közti árapály-fékeződés képes lehet elég hatékonyan csökkenteni a kettőscsillag mechanikai energiáját, amely a pálya méretének csökkenését eredményezi. Ugyanakkor, csökkenő pályaméret mellett az árapály-kölcsönhatás egyre hatékonyabb lesz, és végül akár egy, akár több KL-ciklus alatt az árapályerők eredő hatása megakadályozza a KL-mechanizmus további működését.[31] Ennek következtében a KL-mechanizmus leállása után nagyságrendileg $P_1 \sim 10$ nap körüli periódusú erősen excentrikus pályán keringő kettőscsillagok maradnak vissza, amelyek pályamérete, illetve excentricitása ezt követően az árapálysúrlódásnak köszönhetően tovább csökken. A folyamat végeredményeként pedig létrejönnek a megfigyelt, rövid periódusú, körpályán mozgó szoros, különálló kettőscsillagok.

A KCTF-mechanizmus hatékonyságának és esetleges észlelési következményeinek kiterjedt numerikus integráláson alapuló vizsgálatát Fabrycky és Tremaine (2007) végezte el. E szerzők azt találták, hogy a 0,1 és 10 nap közti keringési idejű szoros kettősök valóban hatékony módon jöhetnek létre eredetileg jóval tágabb ($10-10\,000$ napos keringési idejű) kettősökből egy még távolabbi, harmadik kísérő keltette KCTF-effektus következményeként. Ezen felül sikerült két észlelések útján ellenőrizhető előrejelzést is tenniük. Eszerint: (1) A 3 és 10 nap közti periódustartományba eső kettőscsillagok esetében a szoros (vagy belső) és a harmadik komponenssel alkotott tág (vagy külső) pályák egymással bezárt haj-

[30] A „fősorozati" megkötésre azért van szükség, mert elfejlődött csillagok esetében az esetleges múltbeli tömegátadás rendkívül hatékonyan képes csökkenteni a pályaméretet, így ekkor a fenti ellentmondás már könnyen feloldható.

[31] Az árapály-kölcsönhatás okozta viszonylag gyors apszismozgásnak a KL-mechanizmusra kifejtett blokkoló hatását először Söderhjelm (1984) mutatta ki. A jelen dolgozat 3. fejezetében részletesebben kitérek erre a kérdésre.

lásszögének eloszlásában éles maximumot várhatunk az $i_{\mathrm{m}} \sim 40^{\circ}$, illetve $i_{\mathrm{m}} \sim 140^{\circ}$ értékek körül. (2) Tág kettőscsillagok valamely komponense körül keringő extraszoláris bolygók esetében, amennyiben a KCTF-mechanizmus forró jupiter típusú elrendeződés kialakulásához vezet, akkor nagy valószínűséggel a kérdéses exobolygó egyenlítői síkja jelentősen eltér a pályasíktól.

A KCTF-mechamizmus kísérleti igazolása – a köztes inklináció meghatározása

A jelen dolgozat szempontjából a szerzők első, a köztes inklinációk nem egyenletes eloszlására vonatkozó megállapításának van jelentősége. Amennyiben ugyanis sikerülne igazolni, hogy a szoros kettősök nagy hányada nem csak egyszerűen hierarchikus hármas rendszer része, de ezen felül a pályasíkok köztes inklinációja is a fent említett előrejelzett eloszlást követi, mindez rendkívül erős bizonyíték lenne a KCTF mechanizmus működése mellett. A köztes inklináció meghatározása azonban közel sem triviális feladat. E mennyiség közvetlenül nem mérhető. Közvetett meghatározása, kiszámítása három különböző elvi úton lehetséges. Ezek a következők:

(i.) *Az asztrometriai módszer* azon az egyszerű gömbháromszögtani összefüggésen alapul, hogy amennyiben külön-külön ismerjük a szoros és a tág pálya síkjának az égbolt síkjával bezárt szögét (i_1, i_2, illetve a felszálló csomóik hosszát (Ω_1, Ω_2), akkor az i_{m} köztes inklináció az alábbi gömbi koszinusz-tétel alapján kapható:

$$\cos i_{\mathrm{m}} = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos(\Omega_2 - \Omega_1). \tag{1.32}$$

Ekkor tehát a köztes inklináció meghatározását a két pálya szögpályaelemeinek a meghatározására vezetjük vissza. Mint közismert (lásd pl. Batten, 1973), egy kettőscsillag pályájának felszálló csomója csak asztrometriai úton határozható meg,[32] azonban, amint korábban az 1.1.1. szakaszban már említettem, egy 180°-os bizonytalanság ekkor is megmarad. Ami az inklinációt illeti, korábban láttuk, amennyiben a kettős fedéseket mutat, akkor az a fénygörbemegoldásból is meghatározható (bár ebben az esetben fennáll az i, $180^{\circ} - i$ kétértelműség), más esetekben viszont ez is csak az asztrometriai pálya meghatározásával kapható meg. Ily módon a geometriai módszer külön-külön a szűk, illetve a tág rendszer asztrometriai pályameghatározását igényli. Ebből adódik éppen a gyakorlati nehézség. Amennyiben a szoros kettőst tekintjük, mivel esetünkben a tíz napnál rövidebb keringési idejű rendszerek az érdekesek, könnyen belátható, hogy ekkor a két komponens szeparációja többnyire a milliívmásodperces tartományba esik. Ezért e szoros kettősök asztrometriai pályájának kimérése csak a legnagyobb felbontású optikai, illetve rádióinterferométerekkel lehetséges, amely egyrészt e berendezések ilyen célra hasznosítható igencsak korlátozott kapacitása miatt limitálja erősen a megfigyelhető objektumok számát, másrészt pedig, technikai okokból, csak a fényesebb kettősök pályájának kimérését teszi lehetővé. Ezért nem meglepő, hogy Lestrade és mktsai. (1992) első ilyen jellegű mérésétől napjainkig (Lane és mktsai., 2014) alig több mint egy tucat szoros kettős asztrometriai pályáját mérték ki hosszú bázisvonalú interferometriai módszerekkel, s így még ennél is kevesebb azon hierarchikus hármas rendszerek száma, ahol ilyen, közvetlen asztrometriai módszerrel meghatározták a hármas rendszer köztes inklinációját. Itt újfent megjegyzem, hogy magam is részt vettem egy olyan nemzetközi kutatásban, amelynek során elsőként végeztünk csaknem szimultán nagy bázisvonalú rádió-,

[32] Bizonyos nagyon speciális esetekben elvben polarimetriai észleléssel is meghatározható e mennyiség, azonban az így nyerhető adatok jóval kevésbé megbízhatóak, így nem is meglepő, hogy csupán egy-két ilyen próbálkozás található a szakirodalomban.

illetve optikai interferometriai asztrometriai észlelést egy hármas rendszerről, nevezetesen magáról az Algolról (Csizmadia és mktsai., 2009a). E kutatás inspirációja (legalábbis részemről) éppen a korábban bizonyosan pontatlanul ismert köztes inklináció reménybeli pontosítása volt, amit sikerült is elérnünk.

(ii.) *A dinamikai módszer* legrészletesebb kidolgozása, illetve kompakt hármas rendszerekre való első alkalmazása az én nevemhez fűződik. Mivel e dolgozat érdemi részében nagy terjedelemben foglalkozom az eljárás elméletével, illetve gyakorlati alkalmazásával, itt csak röviden térek ki a módszerre. Amennyiben a szoros és a tág pálya fél nagytengelyének (vagy gyakorlatilag a keringési periódusoknak) az aránya nem túl nagy, vagyis a hármas csak gyengén hierarchikus,[33] akkor a harmadik komponensnek a szoros kettős mozgására kifejtett perturbációinak kimérésével meghatározhatók a rendszer dinamikai paraméterei, és így a köztes inklináció is. Ez abban az esetben tehető meg a legkönnyebben, ha a szoros kettős fedéseket mutat, ugyanis ebben az esetben egyszerűen a fedésiminimumidőpont-változások analitikus modellezéséből állapítható meg a hármas rendszer köztes inklinációja. A módszer elméletét a 2. fejezetben, gyakorlati alkalmazásait pedig a 4. fejezetben ismertetem.

(iii.) *A fotometriai módszer* olyan hármas rendszerekre alkalmazható, ahol mind a szoros kettős, mind a tág kettős fedéseket mutat. Ekkor a fedési fénygörbéből, különösképpen a tág rendszerben bekövetkező fedések le- és felszálló ágának finomszerkezetéből elvben nagy pontossággal megállapítható a köztes inklináció értéke (illetve egyéb orbitális és fizikai paraméterek is), bár a pontos modellezés meglehetősen nagy kihívást jelent. Az eljárás legnagyobb korlátja, hogy alig több mint egy tucat fedési hármas rendszert ismerünk. Érdemes megjegyezni, hogy az első két fedési hármas csillag felfedezését a *Kepler*-űrtávcső észlelései nyomán majdnem egy időben jelentette be egy amerikai (Carter és mktsai., 2011, KOI–126), illetve egy magyar (Derekas és mktsai., 2011, HD 181068) vezetésű kutatócsoport. E második kutatócsoportnak magam is tagja voltam, s a későbbiekben e hármas fedési rendszer részletes analízisét, és így benne a köztes inklináció fotometriai meghatározását is, a kutatócsoport tagjai immár az én vezetésemmel végezték el. Ezt a munkát az 5. fejezetben ismertetem.

Természetesen ebben a bevezető fejezetben nem vállalkozhattam arra, hogy a kettős és többes csillagrendszerek évszázados kutatása során felhalmozott óriási tudásanyag minden részletre kiterjedő bemutatását nyújtsam, inkább csak a kutatásaimmal szorosabban összefüggő részterületek alapinformációit igyekeztem felvillantani. Annak érdekében viszont, hogy az Olvasó képes legyen minél pontosabban a megfelelő kontextusba helyezni ismertetésre kerülő kutatásaimat, a konkrét eredményeimet tárgyaló következő fejezeteket is igyekszem egy-egy olyan bevezető alfejezettel kezdeni, amelyek megadják az adott részben ismertetendő munkáim közvetlen előzményeit, összefüggéseit.

[33] Az ilyen, gyengén hierarchikus hármas rendszerekre a továbbiakban a kompakt hármas kifejezést fogom használni.

2. fejezet

Fedésiminimumidőpont-változások analitikus vizsgálata hierarchikus hármas rendszerekben

I. Rövid és hosszú időskálájú perturbációk a tömegponti közelítés keretén belül

2.1. Előzmények

Egy fedési kettőst is tartalmazó hierarchikus hármas rendszerben a Bevezetésben bemutatott fényidőeffektus mellett a harmadik komponens gravitációs perturbációi további fedésiminimumidőpont-változásokat eredményezhetnek. Míg azonban a fényidőeffektus vizsgálata és alkalmazása évszázados múltra tekint vissza, ez utóbbi, dinamikai jelenség az elmúlt egy évtizedet leszámítva csaknem teljesen kívül maradt a tudományos közösség látókörén. Ennek az érdektelenségnek az oka valószínűleg elsősorban abban keresendő, hogy ez a jelenség a *Kepler*-űrtávcső repülése előtt, az elmúlt másfél évszázad során felfedezett több ezernyi fedési kettőscsillag egyikénél sem volt egyértelműen kimutatható. Ezzel szemben a *Kepler*-űrtávcső megfigyelései több tucat fedési kettős esetében mutattak ki dinamikai eredetű fedésiminimumidőpont-változást, és számuk a későbbi űrszondás misszióknak, illetve a modern, földfelszíni megfigyelő hálózatoknak és égboltfelmérő programoknak köszönhetően a jövőben várhatóan jelentősen növekedni fog. Ily módon e jelenség leírása és vizsgálata az elmúlt fél évtizedben vált különösen aktuálissa.

A jelenség matematikai leírását az égi mechanika analitikus perturbációszámítási módszerei felhasználásával négy egymásra épülő tanulmányban publikáltam (Borkovits és mktsai., 2003, 2007, 2011, 2015).[1] Eredményeimet más magyar, illetve amerikai kollégákkal együttműködve sikeresen alkalmaztuk is számos, a *Kepler*-űrtávcső által felfedezett rendszerre (Rappaport és mktsai., 2013; Borkovits és mktsai., 2015, 2016). Ebben a fejezetben az elméleti vizsgálatokat fogom ismertetni, míg a gyakorlati alkalmazásokat a 4. fejezetben mutatom be.

Amint az 1.3.2. szakaszban már említettem, hierarchikus hármas csillagrendszerekkel foglalkozó kutatások túlnyomó többsége az égi mechanikai sztelláris háromtest-probléma eredményeit csupán evolúciós megfontolásokkal kapcsolatban vette tekintetbe, így a vizsgá-

[1] Noha e munkák mindegyike többszerzős, az ebben, illetve a következő fejezetben ismertetésre kerülő, tisztán elméleti vizsgálatokat minden esetben egyedül én végeztem.

latok túlnyomórészt csak a többnyire évszázados, évezredes vagy még hosszabb időskálájú „apszis-csomóvonali" perturbációkra korlátozódtak. Söderhjelm (1975, 1982) volt az első szerző, aki a Harrington (1968, 1969) által felírt formalizmus alapján elsőként megadta a pályaelemek időfüggését a hosszú periódusú perturbációk figyelembevételével, és elsőként felvetette, hogy a középmozgásbeli perturbációk fedési kettőscsillagok esetében a minimumidőpontok változásából kimutathatók lennének. E dolgozatok alapján Mayer (1990), illetve Drechsel és mktsai (1994), majd Özdemir és mktsai. (2003) kiszámították ugyan három fedési kettős esetére e „dinamikai" fényidő tagot, azonban e járulékok megbízható kimérése a földi megfigyelésekből gyakorlatilag lehetetlennek bizonyult. Ráadásul, amint azt a témával foglalkozó első tanulmányomban (Borkovits és mktsai., 2003) kimutattam, a számításokba sajnálatos hiba is csúszott.

2.2. Alapegyenletek

Amint azt az 1.2.3 fejezetben tárgyaltam, egy fedési esemény során a maximális elhalványodás pillanatában a szélességi argumentum az

$$u = \pm\frac{\pi}{2} + \delta \tag{2.1}$$

értéket veszi fel, ahol $\delta(i, e, \omega) \ll 1$, és minden gyakorlati esetben elhanyagolható. A szélességi argumentum időbeli változása így kulcsszerepet játszik a harmadiktest-perturbációk okozta fedésiminimumidőpont-változások (dinamikai $O-C$) matematikai leírásában. Ezért célszerű független változóként az idő helyett a szoros, fedési kettős u_1 szélességi argumentumát bevezetni. A (perturbált) kéttest-probléma mozgáselméletéből ismeretes, hogy a szélességi argumentum időfüggése:

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= \frac{c_1}{\rho_1^2} - \dot{\Omega}_1 \cos i_1, \\ &= \frac{\mu_1^{1/2}}{a_1^{3/2}} \frac{(1 + e_1 \cos v_1)^2}{\left(1 - e_1^2\right)^{3/2}} - \dot{\Omega}_1 \cos i_1.\end{aligned} \tag{2.2}$$

A fenti egyenletben c_1 a szoros kettős fajlagos impulzusmomentuma, ρ_1 pedig a szoros kettős főkomponensét a mellékkomponenssel összekötő rádiuszvektor hossza. A megoldás során a változók szétválasztásával egy, a Kepler-egyenlettel analóg formulát kapunk.[2] Így például az egy bizonyos t_0 időpont utáni N-edik főminimum középidőpontja az alábbiak szerint kapható meg:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_N} \mathrm{d}t &= \int_{-\pi/2}^{2N\pi-\pi/2} \frac{a_1^{3/2}}{\mu_1^{1/2}} \frac{\left(1 - e_1^2\right)^{3/2}}{[1 + e_1 \cos(u_1 - \omega_1)]^2} \frac{\mathrm{d}u}{1 - \frac{\rho_1^2}{c_1}\dot{\Omega}_1 \cos i_1}, \\ &\approx \int_{-\pi/2}^{2N\pi-\pi/2} \frac{a_1^{3/2}}{\mu_1^{1/2}} \frac{\left(1 - e_1^2\right)^{3/2}}{[1 + e_1 \cos(u_1 - \omega_1)]^2} \left(1 + \frac{\rho_1^2}{c_1}\dot{\Omega}_1 \cos i_1\right) \mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{2.3}$$

E kifejezést összevetve az (1.15) egyenlettel látható, hogy ez esetben a korábban bevezetett pillanatnyi periódus

$$\mathcal{P} = \frac{2\pi}{\dot{u}_1}, \tag{2.4}$$

[2] A későbbiekben látni fogjuk, hogy a jobb oldali második tagban megjelenő $\dot{\Omega}_1$ időderivált az általam használt közelítésben kifejezhető az u_1 szélességi argumentummal.

míg az E epocha folytonos függvényként az u_1 szélességi argumentummal definiálható, miszerint

$$E = \frac{u_1 - (u_1)_0}{2\pi}, \tag{2.5}$$

ahol az

$$(u_1)_0 = -\frac{\pi}{2} \tag{2.6}$$

választással elérhető, hogy E ténylegesen egész értékeket vegyen fel a főminimumok, illetve fél-egészeket a mellékminimumok esetére. Ezt kihasználva, az egyszerűség kedvéért a (2.3) egyenlet jobb oldalát alkotó két kifejezésre bevezetjük a

$$\mathcal{P}_1 = 2\pi\frac{\rho_1^2}{c_1}, \tag{2.7}$$

$$\mathcal{P}_2 = 2\pi\frac{\rho_1^4}{c_1^2}\dot{\Omega}_1\cos i_1 \tag{2.8}$$

jelöléseket.

Időben állandó pályaelemek esetén (perturbálatlan kéttest-probléma) a fenti kifejezés ekvivalens a Kepler-egyenlettel, és zárt alakú megoldása

$$\overline{P} = \frac{P_{\mathrm{a}1}}{2\pi}\left[u_1 + 2\arctan\left(\frac{e_1\sin v_1}{1+\sqrt{1-e_1^2}+e_1\cos v_1}\right) + \sqrt{1-e_1^2}\frac{e_1\sin v_1}{1+e_1\cos v_1}\right]_{u_1=-\pi/2}^{u_1=2\pi N-\pi/2}. \tag{2.9}$$

(Vegyük észre, hogy míg a Kepler-egyenletben a v_1 valódi anomália szerint integrálunk, itt az $u_1 = v_1 + \omega_1$ szélességi argumentum a független változó, s ezért a jobb oldali első tagban u_1 áll v_1 helyett.) Egy harmadik, távolabbi komponens jelenléte esetében azonban, annak gravitációs perturbáló hatása következtében a (2.3) egyenlet jobb oldalán szereplő pályaelemek többé nem maradnak állandók. Feladatunk tehát a jobb oldalon szereplő mennyiségek perturbációinak kiszámítása az u_1 szélességi argumentum függvényében.

Az orbitális dinamikában az ilyen klasszikus analitikus perturbációszámítási feladatokat leggyakrabban a rendszer Hamilton-függvényén alapuló kanonikus perturbációs egyenletekkel oldják meg. A hierarchikus probléma keretében jól alkalmazható a von Zeipel-féle átlagolási technika, amely révén első lépésben kanonikus transzformációk alkalmazásával kitranszformálják a gyors szögváltozókat (a szoros, illetve tág kettős középmozgását tartalmazó tagokat). Ennélfogva először az így átlagolt egyenletekből (a mi terminológiánkban) az „apszis-csomóvonali" tagokra átlagolt pályaelemek időfüggését kapják meg, majd újabb, általában igen bonyolult visszatranszformációkkal a következő iterációs lépésekben előbb a hosszú, majd a rövid periódusú perturbációkat is kiszámítják.

Kutatásaim során én egy ettől különböző, ritkábban használt, de végeredményben a fentebb vázolttal ekvivalens eljárást alkalmaztam, miszerint a Hamilton-függvény helyett a perturbációs egyenleteket közvetlenül a perturbáló erő komponenseiből kiindulva írtam fel. Ennek a választásnak több elvi és gyakorlati oka is volt. A perturbáló erő komponenseivel kifejezett perturbációs egyenletek használata, amint azt rövidesen látni fogjuk, lehetővé tette, hogy egyrészt *(i)* rendkívül kényelmesen áttérhessek a szélességi argumentum mint független változó használatára; *(ii)* az egyes pályaelemekre vonatkozó perturbációs egyenletek kiszámítása helyett közvetlenül a (2.3) kifejezés jobb oldalára is felírhassam az analitikus perturbációs egyenleteket; *(iii)* illetve, hogy a dinamikai és az észlelési koordináta-rendszerben definiált szögváltozókban fellépő perturbációkat egységes keretek között vizsgálhassam. Ezen felül azt is látni fogjuk, hogy *(iv)* az ily módon felírt perturbációs egyenletek esetében, kihasználva a háromféle perturbációosztály jelentősen eltérő időskáláját, lehetővé vált olyan közelítő eljárások alkalmazása amelyek révén a bonyolult kanonikus transzformációs függvények kiszámítása nélkül és egymástól elkülönítve tudtam kezelni a különböző időskálájú perturbációkat.[3] Végezetül, egy pusztán gyakorlati aspektus is vezetett ebben a választásban. Analitikus kutatásaimmal párhuzamosan numerikusan is modelleztem a hierarchikus hármas csillagrendszerek mozgását, amely kutatáshoz még PhD-disszertációm keretében fejlesztettem ki egy, a csillagok közt ható árapályerőket, és a csillagok esetleges ferde rotációját is figyelembe vevő numerikus integrátort (Borkovits, 2002; Borkovits és mktsai., 2002, 2004). Minthogy ez az integrátor minden egyes időlépésnél kiszámítja a perturbáló erő derékszögű komponenseit (mégpedig az észlelési koordináta-rendszerben), ily módon lehetséges volt nem csak az analitikus formulák által kapott és a numerikus végeredmények összevetése, hanem a számítás minden egyes lépésének, és minden egyes komponensnek a numerikus integrálással való összehasonlítása is, amely nagymértékben megkönnyítette és felgyorsította a hibakeresést, illetve egyes rejtett összefüggések meglátását.

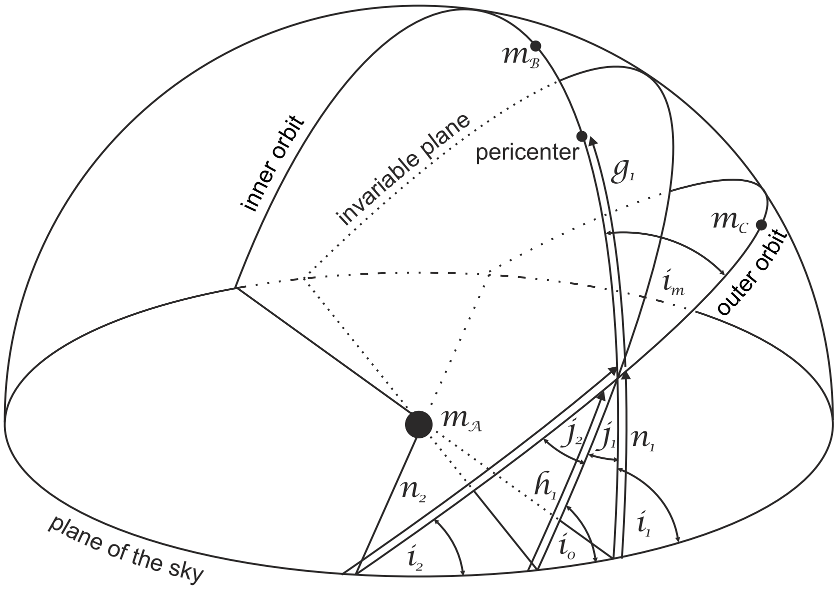
A fentebb felsorolt *(iii)* pont további magyarázatot igényel. Nyilvánvaló, hogy egy hierarchikus hármas csillagrendszerben az egyes pályaelemekben jelentkező dinamikai perturbációk csak az égitestek egymáshoz viszonyított elhelyezkedésétől függenek. Ezért a perturbációs egyenleteket célszerű egy a hármas rendszerhez kötött dinamikai koordinátarendszerben felírni. E koordináta-rendszer alapsíkja az invariábilis sík, amelyet a hármas rendszer állandó impulzusmomentum vektora jelöl ki. Ugyanakkor én a fedésiminimumidőpontokban bekövetkező változásokra voltam kíváncsi. A fedések bekövetkezését viszont alapvetően az egymást elfedő két objektumnak az észlelőhöz viszonyított helyzete határozza meg. Így maga az általam független változóként használt u_1 szélességi argumentum is az észlelőhöz viszonyított koordináta-rendszerben értelmezett. Ennek, a továbbiakban észlelésinek nevezett koordináta-rendszernek az alapsíkját a fedési kettős látóiránya mint normális jelöli ki. Ily módon a pályaelemek időfüggését leíró, tisztán dinamikai perturbációs egyenletekben szereplő szögpályaelemek, azaz az inklináció (j), a pericentrum argumentuma (g) és a felszálló csomó hossza (h) a dinamikai koordináta-rendszerben értelmezett mennyiségek, míg a fedésiminimumidőpont-változást közvetlenül leíró (2.3) egyenletben, illetve ennek különféle variánsaiban ezeknek a szögeknek az észlelési koordináta-rendszerben értelmezett megfelelői (i, ω és Ω) jelennek meg. E koordináta-rendszereket, és a megfelelő szögpályaelemek egymáshoz való viszonyát részletesen az A. függelékben tárgyalom, illetve a 2.1 ábrán szemléltetem.

Az egyes pályaelemekre vonatkozó, a perturbáló erő komponenseivel kifejezett perturbációs egyenletek megtalálhatók az égi mechanikai tankönyvekben (magyar nyelven ld. pl. Érdi, 1989b, 3. fejezet), ezért csupán a jelen problémában kulcsszerepet játszó pályaelemekre vonatkozó egyenletek felsorolására szorítkozom. Ezek az alábbiak:

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t} = \frac{2a_1^{3/2}}{\sqrt{\mu_1\left(1-e_1^2\right)}}[f_\mathrm{r}e_1\sin v_1 + f_\mathrm{t}(1+e\cos v_1)], \tag{2.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t} = \frac{a_1^{1/2}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}}{\mu_1^{1/2}}\left[f_\mathrm{r}\sin v_1 + f_\mathrm{t}\frac{\cos v_1(2+e_1\cos v_1)+e_1}{1+e_1\cos v_1}\right], \tag{2.11}$$

[3]Egészen pontosan, az „apszis-csomóvonali” perturbációk kiszámítása nélkül is fel tudtam írni a pályaelemek, illetve a fedésiminimum-időpontok hosszú periódusú perturbációit.



2.1. ábra. A különféle koordináta-rendszerek és szögpályaelemek szemléltetése

$$e_1\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t}=\frac{a_1^{1/2}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}}{\mu_1^{1/2}}\left[-f_\mathrm{r}\cos v_1+f_\mathrm{t}\frac{\sin v_1(2+e_1\cos v_1)}{1+e_1\cos v_1}\right]-e_1\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t}\cos i_1, \qquad (2.12)$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t}=\frac{a_1^{1/2}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}}{\mu_1^{1/2}}f_\mathrm{n}\frac{e_1\sin u_1}{\sin i_1(1+e_1\cos v_1)}, \qquad (2.13)$$

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=\frac{a_1^{1/2}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}}{\mu_1^{1/2}}f_\mathrm{n}\frac{\cos u_1}{1+e_1\cos v_1}, \qquad (2.14)$$

$$e_1\frac{\mathrm{d}(l_0)_1}{\mathrm{d}t}=\frac{a_1^{1/2}\left(1-e_1^2\right)}{\mu_1^{1/2}}\left[f_\mathrm{r}\left(\cos v_1-\frac{2e_1}{1+e_1\cos v_1}\right)-f_\mathrm{t}\frac{\sin v_1(2+e_1\cos v_1)}{1+e_1\cos v_1}\right], \qquad (2.15)$$

illetve a dinamikai koordinátarendszerben értelmezett szögváltozókra:

$$\frac{\mathrm{d}j_1}{\mathrm{d}t}=\frac{a_1^{1/2}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}}{\mu_1^{1/2}}f_\mathrm{n}\frac{\cos w_1}{1+e_1\cos v_1}, \qquad (2.16)$$

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}=\frac{a_1^{1/2}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}}{\mu_1^{1/2}}f_\mathrm{n}\frac{e_1\sin w_1}{\sin j_1(1+e_1\cos v_1)}, \qquad (2.17)$$

$$\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t}\cos i_1-\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}\cos j_1. \qquad (2.18)$$

A fenti egyenletekben f_r, f_t, illetve f_n rendre a perturbáló erő pályasíkbeli radiális és transzverzális, illetve a pályasíkra merőleges normális irányú komponensét jelöli.

2.3. Hierarchikus hármas rendszerek perturbációi – a tömegponti közelítés

A szoros kettősre ható perturbáló erő egyrészt a harmadik komponens gravitációs vonzásából származik, másrészt, amennyiben meghaladjuk a tömegponti közelítést, a két csillag közti árapály-kölcsönhatás, illetve a gyors tengelyforgás miatt fellépő forgási torzultság hatása további perturbáló erő komponensek bevezetésével vehető tekintetbe. A harmadik testtől származó (tömegponti) perturbáló erő

$$\boldsymbol{f} = \frac{Gm_3}{\rho_2^3}\left\{\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{AB}}}\right)^n\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n P_n(\lambda)\right]^3 \boldsymbol{r}_{\mathrm{BC}} - \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{AB}}}\right)^n\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n P_n(\lambda)\right]^3 \boldsymbol{r}_{\mathrm{AB}}\right\}, \tag{2.19}$$

ahol $\boldsymbol{r}_{\mathrm{AC}}$ és $\boldsymbol{r}_{\mathrm{BC}}$ a szoros kettős (A és B komponensek) tömegközéppontját a távolabbi C komponenssel összekötő rádiuszvektorokat jelölik, továbbá ρ_1 és ρ_2 az első két Jacobi-vektor hossza (lásd pl. Érdi, 1989a), P_n az n-edik Legendre-polinom, valamint λ a két Jacobi-vektor által bezárt szög koszinusza. Az erőkomponensekkel kifejezett perturbációs egyenletekben, mint láttuk, a perturbációs erő pályasíkbeli radiális, transzverzális, illetve az e síkra merőleges normális irányú komponenseire van szükség. Ezek a ρ_1/ρ_2 kis paraméter másodrendjéig a következők:

$$f_{\mathrm{r}} = \frac{Gm_{\mathrm{C}}}{\rho_2^2}\left\{2\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)P_2(\lambda) + 3\frac{m_{\mathrm{A}}-m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 P_3(\lambda)\right\}, \tag{2.20}$$

$$f_{\mathrm{t}} = \frac{Gm_{\mathrm{C}}}{\rho_2^2}\left\{3\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\lambda + 3\frac{m_{\mathrm{A}}-m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\left[\frac{5}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\right]\right\}\mu, \tag{2.21}$$

$$f_{\mathrm{n}} = \frac{Gm_{\mathrm{C}}}{\rho_2^2}\left\{3\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\lambda + 3\frac{m_{\mathrm{A}}-m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\left[\frac{5}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\right]\right\}\nu, \tag{2.22}$$

ahol az iránykoszinuszok:

$$\lambda = \cos w_1 \cos w_2 + \sin w_1 \sin w_2 \cos i_{\mathrm{m}}, \tag{2.23}$$

$$\mu = -\sin w_1 \cos w_2 + \cos w_1 \sin w_2 \cos i_{\mathrm{m}}, \tag{2.24}$$

$$\nu = \sin w_2 \sin i_{\mathrm{m}}. \tag{2.25}$$

Ez utóbbiak figyelembevételével

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{r}} = {} & \frac{3}{8}\frac{Gm_{\mathrm{C}}}{\rho_2^2}\left\{\frac{\rho_1}{\rho_2}\left[(1+I)^2\cos(2w_2-2w_1) + (1-I)^2\cos(2w_2+2w_1)\right.\right. \\ & \left. +2(1-I^2)(\cos 2w_1 + \cos 2w_2) + 2\left(I^2 - \frac{1}{3}\right)\right] \\ & +\frac{5}{8}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\frac{m_{\mathrm{A}}-m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}\left\{(1+I)^3\cos(3w_2-3w_1) + (1-I)^3\cos(3w_2+3w_1)\right. \\ & +3\left(1-I^2\right)\left\{(1+I)\left[\cos(3w_2-w_1)+\cos(w_2-3w_1)\right]\right. \\ & \left. +(1-I)\left[\cos(3w_2+w_1)+\cos(w_2+3w_1)\right]\right\} \\ & -\frac{3}{5}\left(1+11I-5I^2-15I^3\right)\cos(w_2-w_1) \\ & \left.\left. -\frac{3}{5}\left(1-11I-5I^2+15I^3\right)\cos(w_2+w_1)\right\}\right\}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{t}} = {} & \frac{3}{8}\frac{Gm_{\mathrm{C}}}{\rho_2^2}\left\{\frac{\rho_1}{\rho_2}\left[(1+I)^2\sin(2w_2-2w_1) - (1-I)^2\sin(2w_2+2w_1)\right.\right. \\ & \left. -2\left(1-I^2\right)\sin 2w_1\right] \\ & +\frac{5}{8}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\frac{m_{\mathrm{A}}-m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}}\left\{(1+I)^3\sin(3w_2-3w_1) - (1-I)^3\sin(3w_2+3w_1)\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(1-I^2\right)\{(1+I)\left[\sin(3w_2-w_1)+3\sin(w_2-3w_1)\right]\\
&-(1-I)\left[\sin(3w_2+w_1)+3\sin(w_2+3w_1)\right]\}\\
&-\frac{1}{5}\left(1+11I-5I^2-15I^3\right)\sin(w_2-w_1)\\
&\left.\left.+\frac{1}{5}\left(1-11I-5I^2+15I^3\right)\sin(w_2+w_1)\right\}\right\}, \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_\mathrm{n} &= \frac{3}{4}\frac{Gm_\mathrm{C}}{\rho_2^2}\sin i_\mathrm{m}\left\{\frac{\rho_1}{\rho_2}\left[2\cos w_1\sin 2w_2+2I(1-\cos 2w_2)\sin w_1\right]\right.\\
&+\frac{5}{8}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\frac{m_\mathrm{A}-m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}}\left[(1+I)^2\sin(3w_2-2w_1)+(1-I)^2\sin(3w_2+2w_1)\right.\\
&+2\left(1-I^2\right)\sin 3w_2+\left(1-2I-3I^2\right)\sin(w_2-2w_1)\\
&\left.\left.+\left(1+2I-3I^2\right)\sin(w_2+2w_1)-\frac{6}{5}\left(1-5I^2\right)\sin w_2\right]\right\}. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Első három, a témakörrel foglalkozó munkámban (Borkovits és mktsai., 2003, 2007, 2011) a fenti erőkomponenseknek csak a kvadrupól (ρ_1/ρ_2-vel arányos) járulékát[4] vettem figyelembe. A magasabb rendű, oktupól járulékot csupán legutóbbi dolgozatomban (Borkovits és mktsai., 2015) vontam be a vizsgálatok körébe. Korábban, tudomásom szerint, e magasabb rendű járulékból származó, hosszú periódusú perturbációkat a sztelláris háromtest-probléma keretén belül még egyetlen szerző sem tanulmányozta, a magasabb rendű perturbációkkal foglalkozó művek mind az „apszis-csomóvonali" perturbációkra koncentráltak.[5]

A továbbiakban a (2.2) kifejezés felhasználásával áttérünk az u_1 szélességi argumentum szerinti deriválásra. Amint majd látni fogjuk, ez utóbbi kifejezés jobb oldalának második tagja elhanyagolható, és ily módon jó közelítéssel feltehetjük, hogy

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u_1}\simeq\frac{\rho_1^2}{c_1}. \qquad (2.29)$$

Ez utóbbit például a (2.30) egyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}u_1}\approx\frac{2a_1^3}{\mu_1}\frac{1-e^2}{(1+e_1\cos v_1)^2}[f_\mathrm{r}\sin v_1+f_\mathrm{t}(1+e_1\cos v_1)], \qquad (2.30)$$

és hasonló módon térhetünk át a szélességi argumentum szerinti deriválásra a többi pályaelemre vonatkozó differenciálegyenletnél is. A következő lépésben a tömegek, pályaelemek és a valódi anomáliák függvényében kifejezett perturbáló erőkomponenseket (lásd alább) behelyettesítjük e differenciálegyenletekbe. A behelyettesítést, illetve ahol szükséges, a jobb oldalak egyes komponenseinek e_1-szerinti hatványsorokba fejtését követően a perturbációs egyenletekben

$$
\begin{aligned}
&A(q_2,P_1,P_2)\mathcal{I}_j(e_1,e_2,I), \qquad (2.31)\\
&A(q_2,P_1,P_2)\mathcal{I}_j(e_1,e_2,I)\sin(ku_1+nv_2+l_ic_i),\\
&A(q_2,P_1,P_2)\mathcal{I}_j(e_1,e_2,I)\cos(ku_1+nv_2+l_ic_i) \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

[4]Itt kell megjegyezni, hogy mivel a szoros kettős két komponense közt ható, a perturbálatlan kéttestmozgást előidéző erő ρ_1^{-2}-tel arányos, e perturbáló erő kvadrupól járuléka ehhez viszonyítva $(\rho_1/\rho_2)^3$ nagyságrendű. A hamiltoni tárgyalásmódban pedig a perturbációs függvényben ugyanez a kvadrupól járulékot leíró tag az a_1/a_2 kis paraméterben másodrendűként jelenik meg. Ezért az égi mechanikai szakirodalomban a kvadrupól közelítést szokás másodrendűnek nevezni (az oktupólt pedig harmadrendűnek és így tovább). Ezért a továbbiakban én is másod-, illetve harmadrendű közelítésként hivatkozom a perturbáló erő kvadrupól, illetve oktupól járulékának figyelembevételével nyert perturbációs egyenletekre.

[5]Ugyanakkor meg kell jegyezni, hogy az elöljáróban tárgyalt elnevezésbeli kétértelműség miatt ezek a dolgozatok gyakran hosszú periódusú pertrubációkat említenek, azonban minden esetben az e dolgozatban „apszis-csomóvonali" tagoknak nevezett perturbációosztályt vizsgálják.

alakú kifejezések jelennek meg. Amíg a kvadrupól közelítésre hagyatkozunk, az A amplitúdó, amely eredetileg a három tömegnek, illetve a két pálya (a_1 és a_2) fél nagytengelyének a függvénye, Kepler III. törvényének alkalmazásával olyan alakba írható, hogy abban csak a perturbáló harmadik test szoros kettőshöz viszonyított tömege (a q_2 tömegarány), valamint a P_1 és P_2 anomalisztikus periódusok jelennek meg. Ez a karakterisztikus amplitúdó közös a szoros kettős összes pályaelemére vonatkozó minden perturbációs tagban, míg az $\mathcal{I}_j$-vel jelölt szorzótényező, amelyben az excentricitások, illetve a köztes inklináció koszinuszának hatványai jelennek meg, már komponensről komponensre változó, de extrém esetektől eltekintve összességében nem befolyásolja alapvető módon az adott perturbáció tényleges amplitúdóját. A trigonometrikus tagok argumentumában c_i-vel az „apszis-csomóvonali" időskálájú, lassú változást mutató szögpályaelemeket jelöltem. Először foglalkozzunk a periodikus perturbációkat eredményező (2.32) komponensekkel! Az egyes szögváltozók közti időskálák figyelembevételével felírhatjuk a következő, erősen közelítő összefüggéseket:

$$v_2 \approx \frac{P_1}{P_2}u_1, \tag{2.33}$$

$$c_i \approx \frac{P_1}{U_i}u_1, \tag{2.34}$$

ahol U az apszismozgási periódus hagyományos jelölése. Ennek figyelembevételével az u_1-szerinti integrálás után olyan periodikus tagokat kapunk, amelyek amplitúdója

$$\frac{1}{k+n\frac{P_1}{P_2}+l_i\frac{P_1}{U_i}}A(q_2,P_1,P_2)\mathcal{I}_j(e_1,e_2,I). \tag{2.35}$$

Először tekintsük a $k\neq 0$ esetet! Ekkor beszélünk rövid periódusú (P_1 időskálájú) perturbációkról. Hierarchikus rendszerekről lévén szó, feltettük, hogy $P_1 \ll P_2$, továbbá $P_1 \lll U_i$, amennyiben $k\neq 0$ a nevezőbeli második és harmadik komponens elhanyagolható az elsőhöz képest (a gyakorlati esetekben k, n és l_i-k is kis egész számok), tehát az integrálást formálisan úgy végezhetjük, mintha u_1 kivételével a többi szögváltozót konstansnak tekintenénk. Amennyiben $k=0$, de $n\neq 0$ a perturbáció hosszú periódusú (P_2 időskálájú), az amplitúdó pedig (2.35) alapján a rövid periódusú perturbációk amplitúdójához képest P_2/P_1-gyel szorzódik. Ugyanakkor, mivel $P_2 \ll U_i$ e komponensek esetén a v_2-re mint független változóra történő áttérés után az integrálás formálisan ez esetben is úgy végezhető, mintha c_i-k a jobb oldalon állandók lennének. Amikor pedig $k=n=0$, de legalább egy $l_i\neq 0$, „apszis-csomóvonali" időskálájú periodikus perturbációt kapunk, amelynek karakterisztikus periódusa U_i, amplitúdója pedig a rövid periódusú perturbációk U_i/P_1-szerese (illetve a hosszú periódusúak U_i/P_2-szerese). Végezetül tekintsük a (2.31) konstans tagokat, amelyek, legalábbis a kezdeti közelítésben, szekuláris perturbációkat eredményeznek. A továbbiakban látni fogjuk, hogy ezek a konstans tagok az apszis- és csomóvonali szögpályaelemekben jelennek meg, s ily módon éppen az apszisvonalak, illetve a csomóvonalak cirkulációs (illetve bizonyos esetekben librációs) időskáláit, a fentebb U_i-vel jelölt mennyiségeket adják meg. Eszerint

$$\frac{U_i}{P_1} \propto A^{-1}. \tag{2.36}$$

A (2.35) és (2.36) kifejezések összevetéséből ezek után az is könnyen látható, hogy az „apszis-csomóvonali" időskálájú periodikus perturbációk amplitúdója egységnyi, azaz egy periódus alatt az adott pályaelem relatív változása meghaladhatja a 100%-ot is, vagyis a rendszer konfigurációja teljes mértékben megváltozhat. Ugyanakkor a legrövidebb periódusú perturbációk amplitúdója nagyságrendileg $P_1/U \lll 1$, és ezek így a gyakorlati alkalmazások tekintetében a legtöbb esetben biztonsággal elhanyagolhatók.

2.3.1. Hosszú periódusú perturbációk

A továbbiakban először a hosszú periódusú perturbációk vizsgálatára koncentrálok. A fentebb tárgyaltak figyelembevételével átlagoljuk a perturbációs egyenleteket egy belső periódusra, a következő módon:

$$\overline{\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}u_1}} \simeq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2a_1^3}{\mu_1}\frac{1-e^2}{(1+e_1\cos v_1)^2}[f_\mathrm{r}\sin v_1+f_\mathrm{t}(1+e_1\cos v_1)]\mathrm{d}u', \tag{2.37}$$

Az ily módon kapott, a rövid időskálára átlagolt perturbációs egyenletek immáron nem tartalmaznak rövid periódusú trigonometrikus komponenseket. Ugyanakkor azt is szem előtt kell tartani, hogy ebben az esetben az egyenletekben már nem az eredeti pályaelemek szerepelnek, hanem átlagolt megfelelőik. A hosszú periódusú perturbációk kiszámítása ezt követően az átlagolt perturbációs egyenletek integrálásával lehetséges. Az integráláshoz a

$$\frac{\mathrm{d}\overline{u}_1}{\mathrm{d}\overline{v}_2} \simeq \frac{P_2}{P_1}\frac{\left(1-e_2^2\right)^{3/2}}{(1+e_2\cos\overline{v}_2)^2} \tag{2.38}$$

transzformációval áttérünk az átlagolt $\overline{v}_2$ valódi anomália szerinti integrálásra. (A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a felülvonást elhagyom, de szem előtt kell tartanunk a pályaelemek megváltozott jelentését.)

A másodrendű (kvadrupól) közelítés

Ekkor, egyelőre a perturbáló erő másodrendű (kvadrupól) tagjára szorítkozva, az alábbi perturbációs egyenletekhez jutunk:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}v_2} &= 0, && (2.39)\\
\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}v_2} &= A_\mathrm{L}(1-e_1^2)^{1/2}e_1(1+e_2\cos v_2)\left[\left(1-I^2\right)\sin 2g_1\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}(1+I)^2\sin(2v_2+2g_2-2g_1)+\frac{1}{2}(1-I)^2\sin(2v_2+2g_2+2g_1)\right], && (2.40)\\
\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}v_2} &= A_\mathrm{L}(1-e_1^2)^{1/2}(1+e_2\cos v_2)\left\{\frac{3}{5}\left(I^2-\frac{1}{3}\right)\right.\\
&+\left(1-I^2\right)\left[\cos 2g_1+\frac{3}{5}\cos(2v_2+2g_2)\right]\\
&+\frac{1}{2}(1+I)^2\cos(2v_2+2g_2-2g_1)\\
&\left.+\frac{1}{2}(1-I)^2\cos(2v_2+2g_2+2g_1)\right\}-\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}v_2}\cos j_1, && (2.41)\\
\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}v_2} &= -A_\mathrm{L}(1-e_1^2)^{-1/2}\frac{\sin i_\mathrm{m}}{\sin j_1}(1+e_2\cos v_2)\left[\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)I\right.\\
&-e_1^2 I\cos 2g_1-\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)I\cos(2v_2+2g_2)\\
&\left.+\frac{1}{2}e_1^2(1+I)\cos(2v_2+2g_2-2g_1)-\frac{1}{2}e_1^2(1-I)\cos(2v_2+2g_2+2g_1)\right], && (2.42)\\
\frac{\mathrm{d}j_1}{\mathrm{d}v_2} &= -A_\mathrm{L}(1-e_1^2)^{-1/2}\sin i_\mathrm{m}(1+e_2\cos v_2)
\end{aligned}$$

$$\times\left[\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)\sin(2v_2+2g_2)+e_1^2I\sin 2g_1\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}e_1^2(1+I)\sin(2v_2+2g_2-2g_1)+\frac{1}{2}e_1^2(1-I)\sin(2v_2+2g_2+2g_1)\right], \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}v_2} &= A_\mathrm{L}(1-e_1^2)^{1/2}(1+e_2\cos v_2)\left\{\frac{3}{5}\left[\left(I^2-\frac{1}{3}\right)+\left(1-I^2\right)\cos(2v_2+2g_2)\right]\right.\\
&\quad+\left(1-I^2\right)\cos 2g_1+\frac{1}{2}(1+I)^2\cos(2v_2+2g_2-2g_1)\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}(1-I)^2\cos(2v_2+2g_2+2g_1)\right\}-\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}v_2}\cos i_1,
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}v_2} &= A_\mathrm{L}(1-e_1^2)^{-1/2}\frac{\sin i_\mathrm{m}}{\sin i_1}(1+e_2\cos v_2)\left[\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)I\cos(\omega_1-g_1)\right.\\
&\quad+\frac{1}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)(1-I)\cos(2v_2+2g_2-\omega_1+g_1)\\
&\quad-\frac{1}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)(1+I)\cos(2v_2+2g_2+\omega_1-g_1)-e_1^2I\cos(\omega_1+g_1)\\
&\quad+\frac{1}{2}e_1^2(1+I)\cos(2v_2+2g_2-\omega_1-g_1)\\
&\quad\left.-\frac{1}{2}e_1^2(1-I)\cos(2v_2+2g_2+\omega_1+g_1)\right],
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}v_2} &= A_\mathrm{L}(1-e_1^2)^{-1/2}\sin i_\mathrm{m}(1+e_2\cos v_2)\left[-\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)I\sin(\omega_1-g_1)\right.\\
&\quad+\frac{1}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)(1-I)\sin(2v_2+2g_2-\omega_1+g_1)\\
&\quad+\frac{1}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)(1+I)\sin(2v_2+2g_2+\omega_1-g_1)+e_1^2I\sin(\omega_1+g_1)\\
&\quad-\frac{1}{2}e_1^2(1+I)\sin(2v_2+2g_2-\omega_1-g_1)\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}e_1^2(1-I)\sin(2v_2+2g_2+\omega_1+g_1)\right],
\end{aligned} \tag{2.46}$$

ahol a perturbációk amplitúdójában az

$$A_\mathrm{L}=\frac{15}{8}\frac{m_\mathrm{C}}{m_\mathrm{ABC}}\frac{P_1}{P_2}(1-e_2^2)^{-3/2} \tag{2.47}$$

kifejezés jelenik meg.

A fenti egyenletekben jól láthatóan, az argumentumukban a v_2 valódi anomáliát tartalmazó, azaz ténylegesen P_2 időskálájú, hosszú periódusú perturbációkat leíró komponensek mellett megjelennek a tág kettős pálya menti keringésétől független tagok is. Ezek, mint azt majd későbbiekben látni fogjuk, azok a perturbációkomponensek, amelyek az „apszis-csomóvonali" időskálájú periodikus, illetve a szekuláris perturbációkat adják meg. E perturbációk vizsgálatára később még visszatérek, ezen a ponton csupán arra hívom fel a figyelmet, hogy a (2.39) egyenlet értelmében a jelen közelítés keretein belül a szoros kettős fél nagytengelyében nincsenek sem hosszú, illetve „apszis-csomóvonali" periódusú periodikus, sem pedig szekuláris perturbációk. Amint majd látni fogjuk, a perturbációs erő harmadrendű (oktupól) tagjának figyelembevétele ugyanerre az eredményre vezet. Ennek elsősorban a hierarchikus hármas rendszerek stabilitása vonatkozásában van jelentősége.

A fentiek figyelembevételével az $O-C$ analitikus alakját megadó (2.3) egyenlet jobb oldali második (a pályasík precessziója következtében fellépő) tagja könnyedén kiszámítható, hiszen a (2.13) perturbációs egyenlet behelyettesítését követően a fentebb tárgyalt lépésekhez hasonlóan, a rövid periódusú komponensek eliminálása után azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi}\mathcal{P}_2\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}v_2}=\frac{a_1^{3/2}}{\mu^{1/2}}\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}v_2}\cos i_1+..., \tag{2.48}$$

ahol a kipontozott helyen álló tagokat azért nem írom ki, mert ezek ellentétes előjellel megjelennek az alább tárgyalandó, $\mathcal{P}_1$-re vonatkozó egyenletben is, és ily módon kiesnek.

Foglalkozzunk most a fedésiminimumidőpont-változásokbeli domináns perturbációkat leíró $\mathcal{P}_1$ függvénnyel. Könnyen belátható, hogy $\mathcal{P}_1$ az alábbi trigonometrikus sorba fejthető:

$$\frac{1}{2\pi}\mathcal{P}_1=\frac{a_1^{3/2}}{\mu^{1/2}}\sum_{n=0}^{\infty}f_n(e_1^n)\left(\cos n\omega_1\cos nu_1+\sin n\omega_1\sin nu_1\right). \tag{2.49}$$

Bevezetve a

$$C_n = a_1^{3/2}f_n(e_1^n)\cos n\omega_1, \tag{2.50}$$

$$S_n = a_1^{3/2}f_n(e_1^n)\sin n\omega_1, \tag{2.51}$$

függvényeket, ezeknek az u_1 szélességi argumentumtól való függése úgy is felírható, miszerint

$$C_n = (C_n)_0+\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}C_n}{\mathrm{d}u'}\mathrm{d}u', \tag{2.52}$$

$$S_n = (S_n)_0+\int_{u_0}^{u}\frac{\mathrm{d}S_n}{\mathrm{d}u'}\mathrm{d}u', \tag{2.53}$$

ahol

$$\frac{\mathrm{d}C_n}{\mathrm{d}u'} = \frac{3}{2}\frac{C_n}{a_1}\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}u'}+a_1^{3/2}\frac{\mathrm{d}f_n(e_1^n)}{\mathrm{d}e_1}\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}u'}\cos n\omega_1-a_1^{3/2}nf_n(e_1^n)\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}u'}\sin n\omega_1, \tag{2.54}$$

$$\frac{\mathrm{d}S_n}{\mathrm{d}u'} = \frac{3}{2}\frac{S_n}{a_1}\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}u'}+a_1^{3/2}\frac{\mathrm{d}f_n(e_1^n)}{\mathrm{d}e_1}\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}u'}\sin n\omega_1+a_1^{3/2}nf_n(e_1^n)\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}u'}\cos n\omega_1. \tag{2.55}$$

Először tekintsük a pályaelemekre vonatkozó (2.10–2.18) differenciálegyenletek rövid periódusú, azaz a trigonometikus tagok amplitúdójában u_1-et is tartalmazó tagjait. Ezek (2.55) egyenletekbe helyettesítése, és a (2.53) kifejezésekben jelzett integrálások elvégzése után olyan rövid periódusú és kis amplitúdójú perturbációkat adnak, amelyek argumentumában továbbra is szerepel az u_1 szélességi argumentum. Azonban a C_n, S_n kifejezések eme rövid periódusú tagjait visszahelyettesítve a $\mathcal{P}_1$ pillanatnyi periódus (2.49) alatti kifejezésébe, ebben ezek megszorzódnak $\cos nu_1$ vagy $\sin nu_1$-gyel, aminek következtében e rövid periódusú tagok némelyikének argumentumából eltűnhet az u_1 szögváltozó. Ily módon ezek az egyes pályaelemekben még rövid periódusú perturbációt leíró tagok $\mathcal{P}_1$-ben már hosszú periódusú vagy „apszis-csomóvonali” időskálájú periodikus, vagy akár szekuláris perturbációt fognak eredményezni. Végezetül, meggondolva, hogy mivel a jelen esetben csak a pályaelemek deriváltjainak rövid periódusú tagjait vesszük figyelembe, ezért a C_n, S_n kifejezésekben szereplő $\cos n\omega_1$, $\sin n\omega_1$ kifejezések nem befolyásolják a (2.53) integrálások eredményét, és így kivihetők az integráljel elé. Ebből írhatjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}(\mathcal{P}_1)_\mathrm{s} &= \frac{a_1^{3/2}}{\mu_1^{1/2}}\frac{\left(1-e_1^2\right)^{3/2}}{(1+e_1\cos v_1)^2}\left[\frac{1}{a_1}\int\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}u'}\mathrm{d}u'\right.\\
&\left.-\frac{\left(2+e_1^2\right)\cos v_1+3e_1}{\left(1-e_1^2\right)(1+e_1\cos v_1)}\int\left(\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}u'}\right)_\mathrm{s}\mathrm{d}u'-2\frac{e_1\sin v_1}{1+e_1\cos v_1}\int\left(\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}u'}\right)_\mathrm{s}\mathrm{d}u'\right],
\end{aligned} \tag{2.56}
$$

ahol az ’s’ index arra utal, hogy csak a rövid periódusú tagokat kell figyelembe venni. (Mivel a fél nagytengely esetében csak rövid periódusú perturbációk vannak, ott ezt nem jelöltem külön.) A számolást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}(\mathcal{P}_1)_\mathrm{s}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}v_2} &= \frac{a_1^{3/2}}{\mu_1^{1/2}}A_\mathrm{L}(1-e_1^2)^{1/2}(1+e_2\cos v_2)\\
&\times\left\{\frac{4}{5}f_1(e_1)\left[\left(I^2-\frac{1}{3}\right)+\left(1-I^2\right)\cos(2v_2+2g_2)\right]\right.\\
&+\frac{51}{20}e_1^2f_2(e_1)\left[\left(1-I^2\right)\cos 2g_1+\frac{1}{2}(1+I)^2\cos(2v_2+2g_2-2g_1)\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{2}(1-I)^2\cos(2v_2+2g_2+2g_1)\right]\right\}-...,
\end{aligned} \tag{2.57}
$$

és

$$
f_1(e_1) = 1+\frac{25}{8}e_1^2+\frac{15}{8}e_1^4+\frac{95}{64}e_1^6+\mathcal{O}\left(e_1^8\right), \tag{2.58}
$$

$$
f_2(e_1) = 1+\frac{31}{51}e_1^2+\frac{23}{48}e_1^4+\mathcal{O}\left(e_1^6\right). \tag{2.59}
$$

A (2.57) összefüggés végén a pontozással jelölt, ki nem írt tagok azok, amelyek a megelőzően levezetett (2.48) egyenletben ellentétes előjellel jelennek meg, és így végül kiejtik egymást.

Az e_1 és ω_1 pályaelemekbeli egyéb, nem rövid periódusú perturbációk esetében a kiintegrált $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{S}_n$ komponensek u_1 valamely trigonometrikus függvényével való szorzata ugyanakkor $\mathcal{P}_1$-ben immáron olyan rövid periódusú komponenst eredményez, amelynek amplitúdóját az határozza meg, hogy az adott komponens a pályaelemek milyen osztályú perturbációjából származik. Amikor az $O-C$ kiszámításához $\mathcal{P}_1$-et még egyszer integráljuk u_1-szerint, ezek a komponensek már rövid periódusúakként integrálódnak, viszont amplitúdójukban megőrzik az eredeti pályaelemekbeli perturbációk amplitúdóját. Ezért, ezek a komponensek úgy is kiszámíthatók, hogy felírjuk a perturbálatlan eset (2.9) megoldását, majd ebbe behelyettesítjük az e_1, ω_1-re vonatkozó, a (2.40, 2.44) egyenletek kiintegrálásával kapott perturbációs egyenleteket.

A számításokat elvégezve egy hierarchikus hármas rendszerben keringő fedési kettős fedésiminimumidőpont-változásainak hosszú periódusú perturbációira, a szeparációk ρ_1/ρ_2

arányában másodrendig, a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{L1}} &= \frac{P_1}{2\pi}A_{\mathrm{L}}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}\left\{\left[\frac{4}{5}f_1+\frac{6}{5}K_1\right]\left[\left(I^2-\frac{1}{3}\right)\mathcal{M}+\frac{1}{2}\left(1-I^2\right)\mathcal{S}(2v_2+2g_2)\right]\right.\\
&\quad+\left[\frac{51}{20}e_1^2f_2\cos 2g_1+2K_2+\frac{1}{8}e_1^2K_4\right]\left[\left(1-I^2\right)\mathcal{M}+\frac{1}{2}\left(1+I^2\right)\mathcal{S}(2v_2+2g_2)\right]\\
&\quad\left.-\frac{1}{2}\left[\frac{51}{20}e_1^2f_2\sin 2g_1+2K_3+\frac{1}{8}e_1^2K_5\right]2I\mathcal{C}(2v_2+2g_2)\right\}\\
&\quad+\frac{P_1}{2\pi}A_{\mathrm{L}}\frac{\sin i_{\mathrm{m}}\cot i_1}{\left(1-e_1^2\right)^{1/2}}(1-2K_1)\\
&\quad\times\left\{\left[\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)\cos n_1-e_1^2\cos(2g_1+n_1)\right]I\left[\mathcal{M}-\frac{1}{2}\mathcal{S}(2v_2+2g_2)\right]\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)\sin n_1+e_1^2\sin(2g_1+n_1)\right]\mathcal{C}(2v_2+2g_2)\right\},
\end{aligned}\tag{2.60}$$

ahol

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= v_2-l_2+e_2\sin v_2,\\
&= 3e_2\sin v_2-\frac{3}{4}e_2^2\sin 2v_2+\frac{1}{3}e_2^3\sin 3v_2+\mathcal{O}(e_2^4)\\
\mathcal{S}(x) &= \sin x+e_2\left[\sin(x-v_2)+\frac{1}{3}\sin(x+v_2)\right],\\
\mathcal{C}(x) &= \cos x+e_2\left[\cos(x-v_2)+\frac{1}{3}\cos(x+v_2)\right],
\end{aligned}\tag{2.61}$$

továbbá,

$$\begin{aligned}
K_1(e_1,\omega_1) &= \mp e_1\sin\omega_1+\left(\frac{3}{4}e_1^2+\frac{1}{8}e_1^4+\frac{3}{64}e_1^6\right)\cos 2\omega_1\pm\left(\frac{1}{2}e_1^3+\frac{3}{16}e_1^5\right)\sin 3\omega_1\\
&\quad-\left(\frac{5}{16}e_1^4+\frac{3}{16}e_1^5\right)\cos 4\omega_1\mp\frac{3}{16}e_1^5\sin 5\omega_1+\frac{7}{64}e_1^6\cos 6\omega_1+\mathcal{O}(e_1^7),\\
K_2(e_1,\omega_1,g_1) &= \mp e_1\sin(\omega_1-2g_1)+\left(\frac{3}{4}e_1^2+\frac{3}{16}e_1^4+\frac{3}{32}e_1^6\right)\cos(2\omega_1-2g_1)\\
&\quad\pm\left(\frac{1}{2}e_1^3+\frac{1}{4}e_1^5\right)\sin(3\omega_1-2g_1)-\left(\frac{5}{16}e_1^4+\frac{15}{64}e_1^6\right)\cos(4\omega_1-2g_1)\\
&\quad\mp\frac{3}{16}e_1^5\sin(5\omega_1-2g_1)+\frac{7}{64}e_1^6\cos(6\omega_1-2g_1)+\mathcal{O}(e_1^7),\\
K_3(e_1,\omega_1,g_1) &= \mp e_1\cos(\omega_1-2g_1)-\left(\frac{3}{4}e_1^2+\frac{3}{16}e_1^4+\frac{3}{32}e_1^6\right)\sin(2\omega_1-2g_1)\\
&\quad\pm\left(\frac{1}{2}e_1^3+\frac{1}{4}e_1^5\right)\cos(3\omega_1-2g_1)+\left(\frac{5}{16}e_1^4+\frac{15}{64}e_1^6\right)\sin(4\omega_1-2g_1)\\
&\quad\mp\frac{3}{16}e_1^5\cos(5\omega_1-2g_1)-\frac{7}{64}e_1^6\sin(6\omega_1-2g_1)+\mathcal{O}(e_1^7),\\
K_4(e_1,\omega_1,g_1) &= -\left(e_1^2+\frac{3}{4}e_1^4\right)\cos(2\omega_1+2g_1)\mp e_1^3\sin(3\omega_1+2g_1)\\
&\quad+\frac{3}{4}e_1^4\cos(4\omega_1+2g_1)+\mathcal{O}(e_1^5),\\
K_5(e_1,\omega_1,g_1) &= -\left(e_1^2+\frac{3}{4}e_1^4\right)\sin(2\omega_1+2g_1)\pm e_1^3\cos(3\omega_1+2g_1)
\end{aligned}$$

$$+\frac{3}{4}e_1^4\sin(4\omega_1+2g_1)+\mathcal{O}(e_1^5). \tag{2.62}$$

A fenti, elsőként általam levezetett és publikált (2.60) kifejezés (Borkovits és mktsai., 2011, B.15 egyenlet) a szoros kettős $m_\mathrm{C}/m_\mathrm{ABC}$ tömegarányán felül közvetve vagy közvetlenül a szoros és a tág pálya összes dinamikai és észlelési koordináta-rendszerbeli paraméteréről és pályaeleméről információkat hordoz. Nem csak P_1, e_1, ω_1, g_1, P_2, e_2, ω_2, g_2, τ_2, illetve i_m, valamint (az n_1 és n_2 csomóvonalhossz jellegű szögparamétereken keresztül) $\Delta\Omega$, h_1, h_2, határozható meg a dinamikai $O-C$ illesztéséből hanem, legalábbis elméletben, a szoros és a tág pálya pályahajlása is mind az égbolt síkjához (i_1, i_2), mind pedig a rendszer fundamentális (vagy invariábilis) síkjához (j_1, j_2) viszonyítva. Végül, ily módon az invariábilis síknak az égbolt síkjával bezárt szöge (i_0) szintén kiszámolható. Fontos megjegyezni, hogy a különböző vonatkoztatási rendszerekhez tartozó szögpályaelemek közötti szférikus geometriai összefüggések annak a három, az éggömbre vetített gömbháromszögnek a figyelembevételével vezethetők le, amelyek közül a másik kettőt is tartalmazó, legnagyobb területű gömbháromszöget az égbolt síkja és a két pályasík határolja, míg az ennek részét képező másik két háromszögben az egyik vagy a másik pályasík helyettesítendő az invariábilis síkkal (2.1. ábra). Az e háromszögek segítségével levezetett összefüggéseket, és ezek részletes diszkusszióját az A. függelékben tárgyalom.

A dinamikai fedésiminimumidőpont-változások (2.60) alakban való leírása, noha szemléletesen illusztrálja, hogy mely komponensek fakadnak közvetlenül a dinamikai perturbációkból, illetve melyek a pályaellipszisek földi megfigyelőhöz viszonyított helyzetéből, a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából nem a legmegfelelőbbek. Ennek az az oka, hogy amennyiben a perturbáló harmadik test körpályán kering ($e_2=0$), illetve ha a két pályasík egybeesik ($\sin i_\mathrm{m}=0$), a (2.60)-ben használt pályaelemek némelyike elveszti a jelentését. Ezt kiküszöbölendő, a gyakorlati alkalmazásokra súlyt fektető (illetve a formulákat jelentősen kibővítő) későbbi munkámban (Borkovits és mktsai., 2015) ugyanezt a kifejezést új változók bevezetésével, az alábbi, a (2.60) kifejezéssel ekvivalens, de attól eltérő alakban írtam fel:

$$\begin{aligned}
\Delta_\mathrm{L1} = {} & \frac{P_1}{2\pi}A_\mathrm{L}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}\left\{\left[\frac{8}{15}f_1+\frac{4}{5}K_1\right]\mathcal{M}\right.\\
& +(1+I)\left[K_{11}\mathcal{S}(2u_2-2\alpha)-K_{12}\mathcal{C}(2u_2-2\alpha)\right]\\
& +(1-I)\left[K_{11}\mathcal{S}(2u_2-2\beta)+K_{12}\mathcal{C}(2u_2-2\beta)\right]\\
& +\sin^2 i_\mathrm{m}\left(K_{11}\cos 2n_1+K_{12}\sin 2n_1\right.\\
& \left.\left.-\frac{2}{5}f_1-\frac{3}{5}K_1\right)\left[2\mathcal{M}-\mathcal{S}(2u_2-2n_2)\right]\right\}\\
& +\frac{P_1}{2\pi}A_\mathrm{L}\left(1-e_1^2\right)^{-1/2}\sin i_\mathrm{m}\cot i_1(1-2K_1)\\
& \times\left\{\left[\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)\cos n_1-e_1^2\cos(2\omega_1-n_1)\right]\cos i_\mathrm{m}\right.\\
& \times\left[\mathcal{M}-\frac{1}{2}\mathcal{S}(2u_2-2n_2)\right]\\
& \left.-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)\sin n_1+e_1^2\sin(2\omega_1-n_1)\right]\mathcal{C}(2u_2-2n_2)\right\},
\end{aligned} \tag{2.63}$$

ahol

$$K_{11}(e_1,\omega_1) = \frac{3}{4}e_1^2+\frac{3}{16}e_1^4+\frac{3}{32}e_1^6\pm\left(e_1+\frac{1}{2}e_1^3+\frac{1}{4}e_1^5\right)\sin\omega_1$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{51}{40}e_1^2+\frac{37}{80}e_1^4+\frac{241}{640}e_1^6\right)\cos 2\omega_1 \mp \frac{3}{16}e_1^3\sin 3\omega_1\\
&-\left(\frac{1}{16}e_1^4-\frac{1}{16}e_1^6\right)\cos 4\omega_1 \mp \frac{1}{16}e_1^5\sin 5\omega_1+\frac{3}{64}e_1^6\cos 6\omega_1+\mathcal{O}(e_1^7),\\
K_{12}(e_1,\omega_1) \;=\; &\mp\left(e_1-\frac{1}{2}e_1^3-\frac{1}{4}e_1^5\right)\cos\omega_1+\left(\frac{51}{40}e_1^2+\frac{37}{80}e_1^4+\frac{541}{640}e_1^6\right)\sin 2\omega_1\\
&\mp\frac{3}{16}e_1^3\cos 3\omega_1-\left(\frac{1}{16}e_1^4+\frac{5}{32}e_1^6\right)\sin 4\omega_1\\
&\pm\frac{1}{16}e_1^5\cos 5\omega_1+\frac{3}{64}e_1^6\sin 6\omega_1+\mathcal{O}(e_1^7), \qquad (2.64)
\end{aligned}
$$

továbbá

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(2u_2) &= \sin 2u_2+e_2\left[\sin(u_2+\omega_2)+\frac{1}{3}\sin(3u_2-\omega_2)\right],\\
\mathcal{C}(2u_2) &= \cos 2u_2+e_2\left[\cos(u_2+\omega_2)+\frac{1}{3}\cos(3u_2-\omega_2)\right]. \qquad (2.65)
\end{aligned}
$$

Az ehelyütt alkalmazott változók előnye, hogy a (2.63) kifejezés változatlan formában használható akkor is, ha a perturbáló harmadik test körpályán kering ($e_2=0$), illetve a két pálya egy síkba esik ($\sin i_\mathrm{m}=0$). Az első esetben v_2 és g_2 ugyan elveszti jelentését, azonban $v_2+g_2=u_2-n_2$, illetve önmagában mind u_2 és n_2 is jelentéssel bírnak. Az egysíkú esetben pedig a dinamikai pericentrum-argumentumok, azaz g_1 és g_2 nem értelmezhetők, azonban az észlelési rendszerbeli megfelelőik, azaz ω_1 és ω_2 igen. Ugyanakkor hozzá kell tenni, hogy egysíkú esetben n_1 és n_2 is értelmezhető jelentés nélküli, azonban a fenti formulában a kritikus $i_\mathrm{m}\to 0^\mathrm{o}$ esetben a nem nulla tagokban e két szögparaméternek csak az $\alpha=n_2-n_1$ különbsége jelenik meg, amelyről könnyen belátható, hogy ilyenkor $\alpha\to 0^\mathrm{o}$. Hasonlóan, a retrográd egysíkú konfiguráció közelében ($i_\mathrm{m}\to 180^\mathrm{o}$) csak a $\beta=n_2+n_1$ összegüket tartalmazó komponensek maradnak meg, s ekkor $\beta\to 180^\mathrm{o}$, úgyhogy (2.63) ezekben az esetekben is ténylegesen megőrzi jól definiált jelentését.

Összességében elmondható, hogy az elsőként általam levezetett formula, illetve annak alkalmazása lehetőséget nyújt szoros hierarchikus hármas csillagrendszerek teljes térbeli elrendeződésének a meghatározására, ami azért is jelentős, mert, amint azt látni fogjuk, a jelenlegi konfiguráció fontos dinamikai információkat is hordoz a rendszer múltjával és jövőjével kapcsolatban. Mielőtt rátérnénk az inverz probléma gyakorlati alkalmazására, érdemes megvizsgálni a (2.63) kifejezés néhány tulajdonságát. Először tekintsük azt az esetet, amikor a szoros kettős körpályán kering, azaz $e_1=0$. Ebben az esetben $f_1(e_1)=1$, míg $K_{1,11,12}=0$, s ily módon (2.63) a

$$
\begin{aligned}
\Delta_\mathrm{L10} \;=\; &\frac{P_1}{2\pi}\frac{m_\mathrm{C}}{m_\mathrm{ABC}}\frac{P_1}{P_2}\left(1-e_2^2\right)^{-3/2}\left\{\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i_\mathrm{m}\right)\mathcal{M}+\frac{3}{4}\sin^2 i_\mathrm{m}\mathcal{S}\right]\right.\\
&\left.+\cot i_1\sin i_\mathrm{m}\left[\frac{3}{4}\cos i_\mathrm{m}\cos n_1\left(\mathcal{M}-\frac{1}{2}\mathcal{S}\right)-\frac{3}{8}\sin n_1\mathcal{C}\right]\right\} \qquad (2.66)
\end{aligned}
$$

kifejezésre egyszerűsödik, ahol a tömörség kedvéért az

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &\equiv \mathcal{S}(2u_2-2n_2)=\mathcal{S}(2v_2+2g_2)\\
\mathcal{C} &\equiv \mathcal{C}(2u_2-2n_2)=\mathcal{C}(2v_2+2g_2) \qquad (2.67)
\end{aligned}
$$

rövid jelöléseket alkalmaztam. Mivel az ismert fedési kettőscsillagok túlnyomó többsége körpályán, vagy nagyon kis excentricitású pályán kering, a gyakorlati alkalmazások során ez az egyszerű formula (amelyet elsőként helyesen PhD-értekezésem keretében vezettem le, lásd Borkovits, 2002; Borkovits és mktsai., 2003) gyakran önmagában is kielégítő eredményt nyújt. Könnyen látható, hogy (2.66) jobb oldalának első sora kizárólag a csillagok egymáshoz viszonyított helyzetétől (a dinamikai rendszerbeli paraméterektől) függ, és csupán a második sorban, a fedési kettős pályasíkjának a harmadik komponens okozta precessziójával kapcsolatos, $\cot i_1$-gyel szorzott kifejezésekben jelennek meg megfigyelőspecifikus mennyiségek. Itt érdemes megemlíteni azt is, hogy mivel fedési kettőscsillagokról beszélünk, $\cot i_1$ általában kicsi (pl. $i_1 = 80^{\circ}$ esetén $\cot i_1 \simeq 0{,}1763$), ennélfogva ez utóbbi, precessziós járulék a gyakorlatban többnyire elhanyagolható.

Ha mind a szoros kettős, mind a harmadik komponens körpályán kering, akkor (2.66) tovább egyszerűsödik a

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{L10}}^{e_2=0} &= \frac{P_1}{2\pi}\frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{ABC}}}\frac{P_1}{P_2}\left\{\frac{3}{4}\sin^2 i_{\mathrm{m}}\sin(2u_2-2n_2)\right.\\ &\left.-\frac{3}{8}\cot i_1\sin i_{\mathrm{m}}\left[\cos i_{\mathrm{m}}\cos n_1\sin(2u_2-2n_2)+\sin n_1\cos(2u_2-2n_2)\right]\right\}\end{aligned} \tag{2.68}$$

alakra, míg ha a tág pálya elliptikus, de a két pályasík egybeesik, akkor a

$$\Delta_{\mathrm{L10}}^{\mathrm{copl}} = \frac{P_1}{2\pi}\frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{ABC}}}\frac{P_1}{P_2}\left(1-e_2^2\right)^{-3/2}\left(3e_2\sin v_2-\frac{3}{4}e_2^2\sin 2v_2+\frac{1}{3}e_2^3\sin 3v_2\right)+\mathcal{O}(e_2^4) \tag{2.69}$$

kifejezést kapjuk. Lényeges különbség a fenti két eset között, hogy míg a két körpályát tartalmazó konfiguráció esetében a minimumidőpont-változás periódusa a tág pálya keringési idejének a fele, addig az egysíkú helyzetben a periódus a tág pálya keringési idejével egyezik meg. Végezetül jól látható, hogy két egysíkú ($\sin i_{\mathrm{m}} = 0$) körpálya ($e_1 = e_2 = 0$) esetén a jelen közelítésben

$$\Delta_{\mathrm{L10}}^{e_2=0,\mathrm{copl}} = 0, \tag{2.70}$$

azaz a fedésiminimumidőpont-változásokban nem lépnek fel hosszú periódusú dinamikai perturbációk. Ez a helyzet valósul meg a későbbiekben vizsgálandó, triplán fedő HD 181068 (=KIC 5952403) hierarchikus hármas csillagrendszer esetében (ld. az 5. fejezetben).

Ezzel szemben a tetszőleges e_1 excentricitásra általánosított (2.60,2.63) formula jelentős eltéréseket mutat. Tekintsük például azt az esetet, amikor a két pályasík egybeesik, azaz $i_{\mathrm{m}} = 0^{\circ}$ (direkt) vagy $i_{\mathrm{m}} = 180^{\circ}$ (retrográd keringés). Ekkor

$$\begin{aligned}\Delta_{L1}^{\mathrm{dir}} &= \frac{P_1}{2\pi}\frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{ABC}}}\frac{P_1}{P_2}\frac{\left(1-e_1^2\right)^{1/2}}{\left(1-e_2^2\right)^{3/2}}\left[\left(1+\frac{25}{8}e_1^2\mp\frac{3}{2}e_1\sin\omega_1+\frac{9}{8}e_1^2\cos 2\omega_1\right)\mathcal{M}\right.\\ &\left.+\frac{45}{16}e_1^2\mathcal{S}(2u_2)\pm\frac{15}{4}e_1\mathcal{C}(2u_2-\omega_1)+\frac{153}{32}e_1^2\mathcal{S}(2u_2-2\omega_1)\right]+\mathcal{O}(e_1^3),\\ \Delta_{L1}^{\mathrm{ret}} &= \frac{P_1}{2\pi}\frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{ABC}}}\frac{P_1}{P_2}\frac{\left(1-e_1^2\right)^{1/2}}{\left(1-e_2^2\right)^{3/2}}\left[\left(1+\frac{25}{8}e_1^2\mp\frac{3}{2}e_1\sin\omega_1+\frac{9}{8}e_1^2\cos 2\omega_1\right)\mathcal{M}\right.\\ &\left.+\frac{45}{16}e_1^2\mathcal{S}(2u_2)\mp\frac{15}{4}e_1\mathcal{C}(2u_2+\omega_1)+\frac{153}{32}e_1^2\mathcal{S}(2u_2+2\omega_1)\right]+\mathcal{O}(e_1^3).\end{aligned} \tag{2.71}$$

Ez esetben a legszembetűnőbb különbség az, hogy a dinamikai perturbációk az $e_2 = 0$ esetben is megmaradnak. További jelentős újdonság az $e_1 = 0$ esethez képest, hogy excentrikus belső pálya esetében a fedésiminimumidőpont-változások nagysága és időbeli lefutása már nem csak a három test fizikai paramétereitől és kölcsönös helyzetétől függ, hanem megjelennek megfigyelőspecifikus pályaelemek is, mégpedig a pályaellipsziseknek az égbolt síkjához viszonyított helyzetét megadó ω_1, ω_2 (észlelési) pericentrum-argumentumok.

Végezetül még egy speciális konfigurációt, az egymásra merőleges pályasíkok esetét is megvizsgáljuk[6]. Ekkor

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{L1}}^{\mathrm{perp}} &= \frac{P_1}{2\pi}A_{\mathrm{L}}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}\left[2\left(-\frac{2}{15}f_1-\frac{1}{5}K_1+K_{11}\cos 2n_1+K_{12}\sin 2n_1\right)\mathcal{M}\right.\\
&\left.+\left(\frac{2}{5}f_1+\frac{3}{5}K_1-K_{11}\cos 2n_1-K_{12}\sin 2n_1\right)\mathcal{S}(2u_2-2n_2)\right]\\
&-\frac{P_1}{4\pi}A_{\mathrm{L}}\left(1-e_1^2\right)^{-1/2}\cot i_1(1-2K_1)\\
&\times\left[\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)\sin n_1+e_1^2\sin(2\omega_1-n_1)\right]\mathcal{C}(2u_2-2n_2)
\end{aligned}\tag{2.72}$$

adódik, ha mindkét pálya excentrikus. Amennyiben viszont $e_1=0$, a fenti formula az egyszerűbb

$$\Delta_{\mathrm{L10}}^{\mathrm{perp}}=\frac{P_1}{4\pi}\frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{ABC}}}\frac{P_1}{P_2}\left(1-e_2^2\right)^{-3/2}\left[\frac{3}{2}\mathcal{S}(2u_2-2n_2)-\mathcal{M}-\frac{3}{4}\cot i_1\sin n_1\mathcal{C}(2u_2-2n_2)\right],\tag{2.73}$$

míg két körpályára a

$$\Delta_{\mathrm{L10}}^{e_2=0,\mathrm{perp}}=\frac{3P_1}{8\pi}\frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{ABC}}}\frac{P_1}{P_2}\left[\sin(2u_2-2n_2)-\frac{1}{2}\cot i_1\sin n_1\cos(2u_2-2n_2)\right]\tag{2.74}$$

alakot veszi fel.

A harmadrendű (oktupól) közelítés

A *Kepler*-űrtávcső által felfedezett excentrikus hierarchikus hármas csillagok fedésiminimumidőpont-változásainak később ismertetendő analízise során azt találtam, hogy a viszonylag tág ($P_1>10^{\mathrm{d}}$), de kompakt (P_2/P_1 megfelelően kicsi) rendszerek esetében az ETV görbék kielégítő modellezéséhez szükség van a perturbáló erő harmadrendű komponenséből származó járulékok figyelembevételére is. Ezek analitikus alakjának kiszámításánál ugyanazt az eljárást követtem, amit az alacsonyabb rendű közelítés esetében, így ennek ismertetésétől eltekintek, s ehelyütt csak a végeredményt közlöm, amely a következő:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{L2}} &= \frac{P_1}{2\pi}A_{\mathrm{L2}}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}\left\{2(1+I)\left\{K_{21}\mathcal{C}_{21}(u_2-\alpha)+K_{22}\mathcal{S}_{21}(u_2-\alpha)\right.\right.\\
&\left.-\frac{1}{3}\left[K_{23}\mathcal{C}_{23}(3u_2-3\alpha)+K_{24}\mathcal{S}_{23}(3u_2-3\alpha)\right]\right\}\\
&+2(1-I)\left\{-K_{21}\mathcal{C}_{21}(u_2-\beta)+K_{22}\mathcal{S}_{21}(u_2-\beta)\right.\\
&\left.-\frac{1}{3}\left[-K_{23}\mathcal{C}_{23}(3u_2-3\beta)+K_{24}\mathcal{S}_{23}(3u_2-3\beta)\right]\right\}\\
&+\sin^2 i_{\mathrm{m}}\left\{5(1+I)\left\{-K_{21}\mathcal{C}_{21}(u_2-\alpha)-K_{22}\mathcal{S}_{21}(u_2-\alpha)\right.\right.\\
&+\frac{1}{2}\left[-K_{21}\mathcal{C}_{21}(u_2-\beta)+K_{22}\mathcal{S}_{21}(u_2-\beta)\right]\\
&-\frac{1}{10}\left[K_{23}\mathcal{C}_{21}(u_2-2\alpha+\beta)+K_{24}\mathcal{S}_{21}(u_2-2\alpha+\beta)\right]
\end{aligned}$$

[6]Lestrade és mktsai. (1992) úttörő munkája óta tudjuk, hogy a mind a fedési kettősök, mind a hierarchikus hármasok emblematikus képviselőjének tekinthető Algol (β Persei) esetében a két pályasík valóban csaknem merőleges egymásra.

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\left[K_{21}\mathcal{C}_{23}(3u_2-2\alpha-\beta)+K_{22}\mathcal{S}_{23}(3u_2-2\alpha-\beta)\right] \\
&+\frac{1}{15}\left[K_{23}\mathcal{C}_{23}(3u_2-3\alpha)+K_{24}\mathcal{S}_{23}(3u_2-3\alpha)\right] \\
&+\frac{1}{30}\left[-K_{23}\mathcal{C}_{23}(3u_2-3\beta)+K_{24}\mathcal{S}_{23}(3u_2-3\beta)\right]\Big\} \\
&+5(1-I)\Big\{K_{21}\mathcal{C}_{21}(u_2-\beta)-K_{22}\mathcal{S}_{21}(u_2-\beta) \\
&+\frac{1}{2}\left[K_{21}\mathcal{C}_{21}(u_2-\alpha)+K_{22}\mathcal{S}_{21}(u_2-\alpha)\right] \\
&+\frac{1}{10}\left[K_{23}\mathcal{C}_{21}(u_2-2\beta+\alpha)-K_{24}\mathcal{S}_{21}(u_2-2\beta+\alpha)\right] \\
&-\frac{1}{2}\left[K_{21}\mathcal{C}_{23}(3u_2-2\beta-\alpha)-K_{22}\mathcal{S}_{23}(3u_2-2\beta-\alpha)\right] \\
&+\frac{1}{15}\left[-K_{23}\mathcal{C}_{23}(3u_2-3\beta)+K_{24}\mathcal{S}_{23}(3u_2-3\beta)\right] \\
&+\frac{1}{30}\left[K_{23}\mathcal{C}_{23}(3u_2-3\alpha)+K_{24}\mathcal{S}_{23}(3u_2-3\alpha)\right]\Big\}\Big\}\Big\} \\
&+\Delta^*_{\mathrm{L2}}(\sin i_{\mathrm{m}}\cot i_1). \qquad (2.75)
\end{aligned}
$$

A harmadrendű járulék amplitúdója

$$
\begin{aligned}
A_{\mathrm{L2}} &= \frac{m_{\mathrm{A}}-m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{AB}}}\left(\frac{m_{\mathrm{AB}}}{m_{\mathrm{ABC}}}\right)^{1/3}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{2/3}\frac{A_{\mathrm{L1}}}{1-e_2^2} \\
&= \frac{15}{8}\frac{1-q_1}{1+q_1}\left(1-\frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{ABC}}}\right)^{1/3}\frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{ABC}}}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{5/3}\left(1-e_2^2\right)^{-5/2}, \qquad (2.76)
\end{aligned}
$$

míg a tág kettős pálya menti mozgásával kapcsolatos trigonometrikus függvények integráljai a következők:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{21}(u_2) &= \left(1+\frac{1}{2}e_2^2\right)\sin u_2+\frac{1}{2}e_2\sin(2u_2-\omega_2)+\frac{1}{4}e_2^2\sin(u_2-2\omega_2) \\
&\quad +\frac{1}{12}e_2^2\sin(3u_2-2\omega_2)+e_2\cos\omega_2(v_2-l_2), \\
\mathcal{C}_{21}(u_2) &= \left(1+\frac{1}{2}e_2^2\right)\cos u_2+\frac{1}{2}e_2\cos(2u_2-\omega_2)-\frac{1}{4}e_2^2\cos(u_2-2\omega_2) \\
&\quad +\frac{1}{12}e_2^2\cos(3u_2-2\omega_2)-e_2\sin\omega_2(v_2-l_2), \\
\mathcal{S}_{23}(3u_2) &= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}e_2^2\right)\sin 3u_2+\frac{1}{2}e_2\sin(2u_2+\omega_2)+\frac{1}{4}e_2\sin(4u_2-\omega_2) \\
&\quad +\frac{1}{4}e_2^2\sin(u_2+2\omega_2)+\frac{1}{20}e_2^2\sin(5u_2-2\omega_2) \\
\mathcal{C}_{23}(3u_2) &= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}e_2^2\right)\cos 3u_2+\frac{1}{2}e_2\cos(2u_2+\omega_2)+\frac{1}{4}e_2\cos(4u_2-\omega_2) \\
&\quad +\frac{1}{4}e_2^2\cos(u_2+2\omega_2)+\frac{1}{20}e_2^2\cos(5u_2-2\omega_2). \qquad (2.77)
\end{aligned}
$$

Továbbá,

$$\begin{aligned}
K_{21} &= \mp\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{16}e_1^2\right)+\frac{57}{80}e_1\sin\omega_1 \pm \frac{5}{16}e_1^2\cos 2\omega_1+\frac{1}{16}e_1\sin 3\omega_1 \\
&\quad \mp\frac{1}{16}e_1^2\cos 4\omega_1+\mathcal{O}(e_1^3), \\
K_{22} &= -\frac{77}{80}e_1\cos\omega_1 \pm \frac{3}{16}e_1^2\sin 2\omega_1-\frac{1}{16}e_1\cos 3\omega_1 \mp \frac{1}{16}e_1^2\sin 4\omega_1+\mathcal{O}(e_1^3), \\
K_{23} &= \pm\frac{105}{16}e_1^2\cos 2\omega_1+\mathcal{O}(e_1^3), \\
K_{24} &= \pm\frac{105}{16}e_1^2\sin 2\omega_1+\mathcal{O}(e_1^3), \qquad (2.78)
\end{aligned}$$

ahol, amint korábban is, a felső előjel a fő- az alsó pedig a mellékminimumra érvényes. Végezetül, a $\Delta^*_{\mathrm{L2}}(\sin i_\mathrm{m}\cot i_1)$ szimbólum a pályasík precessziójából származó járulék. Fentebb már említettem, hogy a harmadrendű perturbációkomponens csak olyan hármas rendszerekre ad jelentős járulékot, ahol a belső, fedési kettős pályája elegendően tág. A nagyobb szeparáció miatt azonban ezek a kettőscsillagok általában csak 90°-hoz közeli pályahajlások mellett mutatnak fedéseket és ezért, a $\cot i_1 \simeq 0$ szorzónak köszönhetően ez a (különben meglehetősen bonyolult) kifejezés nagy biztonsággal elhanyagolható. Ezért kiírásától a (2.75) egyenletben eltekintettem, a továbbiakban pedig ezt a komponenst mellőzni fogom.

A harmadrendű közelítés használata esetén az egyenletek amplitúdójában (2.76) megjelenik egy további paraméter, mégpedig a belső (fedési) kettős q_1 tömegaránya. Látható, hogy ha a belső kettőst hasonló csillagok alkotják (azaz q_1 egyhez közeli értéket vesz fel) az oktupól perturbációk (illetve minden páratlan rendű perturbáció) amplitúdója jelentősen lecsökken. Ellenben, amikor a szoros kettős egyik komponense jóval nagyobb tömegű a másiknál – például egy csillag és a körülötte keringő (tranzitáló) exobolygó alkotta belső kettős estében – a (2.76) amplitúdóban megjelenő extra tömegparaméter gyakorlatilag egységnyi, azaz az egyébként egyforma pályaelrendeződésű és keringési idejű hierarchikus hármas rendszerek közül ebben az esetben a legnagyobb az oktupól közelítésnek az alacsonyabb rendű, kvadrupól közelítéshez viszonyított járuléka. Ugyanakkor, visszatérve a hármas csillagok esetére, annak ellenére, hogy az oktupól tagok minden esetben jóval kisebb járulékot adnak hozzá a fedésiminimumidőpont-változásokhoz mint az alacsonyabb rendű kvadrupól tagok, gyakorlati alkalmazásaink (lásd 4. fejezet) azt mutatják, hogy az $O-C$ analízisekből kapott tömegarányok a legtöbb esetben viszonylag jó egyezést mutatnak az esetlegesen más (spektroszkópiai vagy fotometriai) módszerekkel nyert tömegarányokkal.

Lényeges elvi eltérés a másodrendű közelítéshez képest, hogy, amint az K_{21} (2.78) alatti kifejezéséből egyből látható, a fő- illetve a mellékminimum fedésiminimumidőpont-változása a harmadrendű közelítésben még körpályán ($e_1=0$) keringő fedési kettős esetében is különbözik egymástól. Ebben az esetben (2.75) a következő, egyszerűbb alakot veszi fel:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{L20}} &= \mp\frac{P_1}{8\pi}A_{\mathrm{L2}}\Bigg\{2(1+I)\mathcal{C}_{21}(u_2-\alpha)-2(1-I)\mathcal{C}_{21}(u_2-\beta) \\
&\quad +\frac{5}{2}\sin^2 i_\mathrm{m}\Big[-(1+3I)\mathcal{C}_{21}(u_2-\alpha)+(1-3I)\mathcal{C}_{21}(u_2-\beta) \\
&\quad +(1+I)\mathcal{C}_{23}(3u_2-2\alpha-\beta)-(1-I)\mathcal{C}_{23}(3u_2-2\beta-\alpha)\Big]\Bigg\}. \qquad (2.79)
\end{aligned}$$

Amennyiben viszont a két pályasík egybeesik, a harmadrendű közelítés szerinti minimumidőpont-változás a következő lesz:

$$\Delta_{\rm L2}^{\rm copl} = \frac{2P_1}{\pi}A_{\rm L2}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}\left\{K_{21}\mathcal{C}_{21}(u_2)+IK_{22}\mathcal{S}_{21}(u_2) -\frac{1}{3}\left[K_{23}\mathcal{C}_{23}(3u_2)+IK_{24}\mathcal{S}_{23}(3u_2)\right]\right\}. \tag{2.80}$$

Ellentétben a másodrendű közelítéssel, e harmadrendű komponens két egysíkú körpálya esetén is nullától különböző járulékot ad:

$$\Delta_{\rm L20}^{\rm e_2=0,copl} = \mp\frac{P_1}{2\pi}A_{\rm L2}\cos u_2. \tag{2.81}$$

E járulék tehát ellentétes előjelet vesz el a fő- és másodminimumok esetén, viszont nem függ attól, hogy a két pálya menti mozgás direkt vagy retrográd irányú-e.

A merőleges konfiguráció esetében pedig a következő formulákra jutunk:

$$\begin{aligned}\Delta_{\rm L2}^{\rm perp} = {}& \frac{P_1}{2\pi}A_{\rm L2}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}\left\{\left[K_{21}\sin n_1 - K_{22}\cos n_1\right.\right. \\ & \left. +K_{23}\sin 3n_1 - K_{24}\cos 3n_1\right]\mathcal{S}_{21}(u_2-n_2) \\ & +\left[-5\left(K_{21}\sin n_1 - K_{22}\cos n_1\right)\right. \\ & \left.\left. +\frac{1}{3}\left(K_{23}\sin 3n_1 - K_{24}\cos 3n_1\right)\right]\mathcal{S}_{23}(3u_2-3n_2)\right\},\end{aligned} \tag{2.82}$$

$$\Delta_{\rm L20}^{\rm perp} = \mp\frac{P_1}{8\pi}A_{\rm L2}\sin n_1\left[\mathcal{S}_{21}(u_2-n_2)-5\mathcal{S}_{23}(3u_2-3n_2)\right]. \tag{2.83}$$

2.3.2. Rövid periódusú perturbációk

A *Kepler*-űrtávcső által felfedezett kompakt, excentrikus hierarchikus hármasok fedésiminimumidőpont-változásainak modellezése a hosszú periódusú, harmadrendű perturbációk kiszámítása mellett szükségessé tette a rövid periódusú perturbációk bizonyos szintű figyelembevételét is. Ez első pillantásra meglepőnek tűnhet, mivel e perturbációk periódusa megegyezik a szoros kettős, és így a (fedési) mintavételezésünk periódusával, ezért azt várhatnánk, hogy ezek a perturbációk kiátlagolódnak, és nem befolyásolják a fedésiminimumidőpont-változások lefutását. Azonban ha a hierarchikus hármas elegendően kompakt, azaz (mondjuk) $P_2/P_1 < 50$, akkor a tág rendszer konfigurációja a szoros, fedési kettős egy keringése alatt oly mértékben változik meg, hogy a rövid periódusú perturbációk többé nem fognak kiátlagolódni. Ily módon további, a mintavételezés miatt P_2 időskálájú perturbációs komponenseket kapunk, amelyek azonban a rövid periódusú perturbációkból származnak.

E perturbációk kiszámításához visszanyúlunk a (2.30) perturbációs egyenletekhez, s ezúttal átlagolás helyett ezeket közvetlenül u_1 szerint integráljuk. Az integráláshoz feltesszük, hogy a perturbációs egyenletek jobb oldalán a szoros, illetve a tág pálya v_1 és v_2 valódi argumentumától eltekintve konstans mennyiségek szerepelnek. Ezzel a feltevéssel élve az integrálandó kifejezések a konstans amplitúdóktól eltekintve a $\sin(ku_1+nv_2+\mathrm{const})(1+e_2\cos v_2)^3$, $\cos(ku_1+nv_2+\mathrm{const})(1+e_2\cos v_2)^3$ alakot veszik fel, ahol k nem nulla egész, míg $n=0$ vagy 2. E kifejezések integrálásához v_2-t még ki kell fejeznünk u_1-gyel (vagy v_1-gyel). Ehhez először a tág pálya l_2 középmozgását kifejezzük a szoros kettős l_1 középmozgásával, miszerint

$$l_2 = \frac{P_1}{P_2}l_1 + (l_2)_0, \tag{2.84}$$

majd a Kepler-egyenlet két egymást követő alkalmazásával:

$$v_2 = l_2 + 2e_2\left(1 - \frac{e_2^2}{8}\right)\sin l_2 + \frac{1}{2}e_2^2\sin 2l_2 + \frac{3}{8}e_2^3\sin 3l_2 + \mathcal{O}(e_2^4), \tag{2.85}$$

illetve

$$l_1 = v_1 - 2e_1\sin v_1 + \frac{3}{4}e_1^2\sin 2v_1 - \frac{1}{3}e_1^3\sin 3v_1 + \mathcal{O}\left(e_1^4\right) \tag{2.86}$$

könnyen felírhatjuk v_2 megfelelő trigonometrikus függvényeit. Az ily módon v_1, illetve u_1 függvényeként felírt perturbációs egyenleteket ezt követően formálisan integrálhatjuk az u_1 szélességi argumentum szerint. Az integrálási határok $u_1 = (u_1)_0$, illetve $u_1 = (u_1)_0 + 2\pi N$, ahol az N egész szám lényegileg a ciklusszám, míg $(u_1)_0 = \mp\pi$ a fő-, illetve a mellékminimumokra. A számításokat elvégezve a következő, meglehetősen bonyolult kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned}
\Delta_\mathrm{S} = \frac{P_1}{2\pi}A_\mathrm{S}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}\Bigg\{ & \pm 2e_1\mathcal{C}_0^1(-\omega_1) - \frac{5}{3}e_1^2\mathcal{S}_0^2(-2\omega_1) \\
& + (1+I)\left[\frac{11}{15}\left(1-\frac{7}{22}e_1^2\right)\mathcal{S}_2^{-2}(2u_2-2\alpha) \mp \frac{4}{5}e_1\mathcal{C}_2^{-1}(2u_2-2\alpha-\omega_1)\right. \\
& \left.\mp\frac{8}{5}e_1\mathcal{C}_2^{-3}(2u_2-2\alpha+\omega_1) - \frac{13}{6}e_1^2\mathcal{S}_2^{-4}(2u_2-2\alpha+2\omega_1)\right] \\
& + (1-I)\left[\frac{11}{15}\left(1-\frac{7}{22}e_1^2\right)\mathcal{S}_2^{2}(2u_2-2\beta) \pm \frac{4}{5}e_1\mathcal{C}_2^{1}(2u_2-2\beta+\omega_1)\right. \\
& \left.\pm\frac{8}{5}e_1\mathcal{C}_2^{3}(2u_2-2\beta-\omega_1) - \frac{13}{6}e_1^2\mathcal{S}_2^{4}(2u_2-2\beta-2\omega_1)\right] \\
& + \sin^2 i_\mathrm{m}\left[\mp 3e_1\mathcal{C}_0^1(-\omega_1) + \frac{5}{2}e_1^2\mathcal{S}_0^2(-2\omega_1)\right. \\
& + \frac{11}{15}\left(1-\frac{7}{22}e_1^2\right)\mathcal{S}_0^2(-2n_1) \pm \frac{4}{5}e_1\mathcal{C}_0^1(\omega_1-2n_1) \\
& \pm \frac{8}{5}e_1\mathcal{C}_0^3(-\omega_1-2n_1) - \frac{13}{6}e_1^2\mathcal{S}_0^4(-2\omega_1-2n_1) \\
& \pm \frac{3}{2}e_1\mathcal{C}_2^1(2u_2-2n_2-\omega_1) \mp \frac{3}{2}e_1\mathcal{C}_2^{-1}(2u_2-2n_2+\omega_1) \\
& - \frac{5}{4}e_1^2\mathcal{S}_2^2(2u_2-2n_2-2\omega_1) - \frac{5}{4}e_1^2\mathcal{S}_2^{-2}(2u_2-2n_2+2\omega_1) \\
& - \frac{11}{30}\left(1-\frac{7}{22}e_1^2\right)\mathcal{S}_2^{-2}(2u_2-2\alpha) \pm \frac{2}{5}e_1\mathcal{C}_2^{-1}(2u_2-2\alpha-\omega_1) \\
& \pm \frac{4}{5}e_1\mathcal{C}_2^{-3}(2u_2-2\alpha+\omega_1) + \frac{13}{12}e_1^2\mathcal{S}_2^{-4}(2u_2-2\alpha+2\omega_1) \\
& - \frac{11}{30}\left(1-\frac{7}{22}e_1^2\right)\mathcal{S}_2^{2}(2u_2-2\beta) \mp \frac{2}{5}e_1\mathcal{C}_2^{1}(2u_2-2\beta+\omega_1) \\
& \left.\left.\mp\frac{4}{5}e_1\mathcal{C}_2^{3}(2u_2-2\beta-\omega_1) + \frac{13}{12}e_1^2\mathcal{S}_2^{4}(2u_2-2\beta-2\omega_1)\right]\right\},
\end{aligned} \tag{2.87}$$

ahol

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0^n &= -\frac{\nu}{n^2}\left[\left(3e_2+9e_2^3\right)\sin v_2 + 6e_2^2\sin 2v_2 + \frac{9}{2}e_2^3\sin 3v_2\right] + \mathcal{O}(\nu^2), \\
\mathcal{C}_0^n &= \frac{1}{n}\left(1+e_2\cos v_2\right)^3 + \mathcal{O}(\nu^2),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_2^n &= \frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{3}{2}e_2^2\right)\sin 2u_2+\frac{3}{2}e_2\left(1+\frac{1}{4}e_2^2\right)[\sin(u_2+\omega_2)+\sin(3u_2-\omega_2)]\right.\\
&\left.+\frac{3}{4}e_2^2[\sin 2\omega_2+\sin(4u_2-2\omega_2)]-\frac{1}{8}e_2^3[\sin(u_2-3\omega_2)-\sin(5u_2-3\omega_2)]\right\}\\
&+\mathcal{O}(\nu).\\
\mathcal{C}_2^n &= \frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{3}{2}e_2^2\right)\cos 2u_2+\frac{3}{2}e_2\left(1+\frac{1}{4}e_2^2\right)[\cos(u_2+\omega_2)+\cos(3u_2-\omega_2)]\right.\\
&\left.+\frac{3}{4}e_2^2[\cos 2\omega_2+\cos(4u_2-2\omega_2)]+\frac{1}{8}e_2^3[\cos(u_2-3\omega_2)+\cos(5u_2-3\omega_2)]\right\}\\
&+\mathcal{O}(\nu), \qquad (2.88)
\end{aligned}
$$

valamint bevezettük a

$$
\nu=\frac{P_1}{P_2}, \qquad (2.89)
$$

illetve a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_0^1(-\omega_1) &= \mathcal{C}_0^1\cos\omega_1+\mathcal{S}_0^1\sin\omega_1,\\
\mathcal{S}_2^2(2u_2-2\beta) &= \mathcal{S}_2^2\cos 2\beta-\mathcal{C}_2^2\sin 2\beta. \qquad (2.90)
\end{aligned}
$$

formális jelöléseket. A dimenziótlan amplitúdó pedig

$$
A_\mathrm{S}=\frac{P_1}{P_2}\frac{A_\mathrm{L1}}{\left(1-e_2^2\right)^{3/2}}. \qquad (2.91)
$$

A speciális elrendeződéseket tekintve, egysíkú pályák esetén

$$
\begin{aligned}
\Delta_\mathrm{S}^\mathrm{pro} &= \frac{P_1}{\pi}A_\mathrm{S}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}(1+e_2\cos v_2)^3\left\{-\frac{11}{30}\sin 2u_2\right.\\
&\left.\pm e_1\left[\cos\omega_1+\frac{4}{5}\cos(2u_2-\omega_1)+\frac{8}{15}\cos(2u_2-\omega_1)\right]\right\}+\mathcal{O}\left(e_1^2,\nu^3\right),\\
\Delta_\mathrm{S}^\mathrm{ret} &= \frac{P_1}{\pi}A_\mathrm{S}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}(1+e_2\cos v_2)^3\left\{\frac{11}{30}\sin 2u_2\right.\\
&\left.\pm e_1\left[\cos\omega_1+\frac{4}{5}\cos(2u_2-\omega_1)+\frac{8}{15}\cos(2u_2-\omega_1)\right]\right\}+\mathcal{O}\left(e_1^2,\nu^3\right), \qquad (2.92)
\end{aligned}
$$

míg két körpályán megvalósuló keringés esetén

$$
\begin{aligned}
\Delta_\mathrm{S0}^{e_2=0} &= \frac{11P_1}{32\pi}\frac{m_\mathrm{C}}{m_\mathrm{ABC}}\frac{P_1^2}{P_2^2}\left\{-(1+I)\sin(2u_2-2\alpha)+(1-I)\sin(2u_2-2\beta)\right.\\
&\left.-\sin^2 i_\mathrm{m}\sin 2n_1\left[1+\cos(2u_2-2n_2)\right]\right\}+\mathcal{O}\left(\nu^3\right). \qquad (2.93)
\end{aligned}
$$

eredményre jutunk. Látható, tehát, hogy a kvadrupól közelítés rövid periódusú perturbációinak egy fedési periódusra vett átlagából származtatott, P_2 időskálájú perturbációk, az oktupól közelítés hosszú periódusú perturbációihoz hasonlóan, még két egysíkú körpálya esetén is nullától különböző járulékot adnak.

2.3.3. Az eredmények diszkussziója

Az e fejezetben eddig tárgyalt fedésiminimumidőpont-változások mindegyikének frekvenciája vagy megegyezik a távolabbi kísérő keringési frekvenciájával, vagy annak kis egész számú többszöröse. Más szavakkal, a fedésiminimumidőpont-változásokat leíró $O-C$ görbe a harmadik komponens keringési periódusával ismétli önmagát. Ugyanez igaz az 1.2.3. fejezetben tárgyalt fényidőeffektusra is, amelynek periódusa szintén a tág pálya P_2 periódusával egyezik meg, így a dinamikai perturbációk és a geometriai fényidőeffektus, legalábbis elvben, gyakran együtt alakítja ki a P_2 időskálájú $O-C$ mintázatot, ezért a két jelenség tulajdonságait célszerű egyszerre foglalkozni.

Először a két effektus „abszolút”, illetve egymáshoz viszonyított nagyságával foglalkozom. Ehhez a kétféle fedésiminimumidőpont-változás amplitúdóját az egyszerűség kedvéért a legkönnyebben mérhető mennyiség, a két keringési idő (P_1 és P_2) függvényeként írom fel. Amint azt a 1.2.3. fejezetben megmutattam, a fényidőeffektusnak könnyen kiszámolható, egyértelmű amplitúdója van, amelyet most a könnyebb olvashatóság érdekében, kicsit más alakokban, megismétlek:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathrm{LTTE}} &= \frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{ABC}}}\left(\frac{Gm_{\mathrm{ABC}}}{4\pi}\right)^{1/3}\frac{\sin i_2}{c}P_2^{2/3}\left(1-e_2^2\cos^2\omega_2\right)^{1/2} \\ &\simeq 1{,}^{\mathrm{d}}1\times10^{-4}\,\frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{ABC}}}^{2/3}\sin i_2 P_2^{2/3}\sqrt{1-e_2^2\cos^2\omega_2}. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Amennyiben egyelőre a sztelláris háromtest-probléma keretén belül maradunk, azaz olyan hármasokkal foglalkozunk, ahol a rendszert alkotó minden komponens közönséges csillag, feltehetjük, hogy az összes tömeg-jellegű mennyiség hasonló (egységnyi) nagyságrendű, s így a most következő gondolatmenetben figyelmen kívül hagyható. Ebben az esetben a (2.94) kifejezésekből jól látható, hogy a fényidőeffektus amplitúdója a tág pálya P_2 keringési idejével nő, tehát általában minél távolabbi a harmadik komponens, annál jelentősebb ez a jelenség. Nem függ azonban az amplitúdó a fedési kettős P_1 periódusától (sőt össztömegén kívül semmilyen más paraméterétől sem).

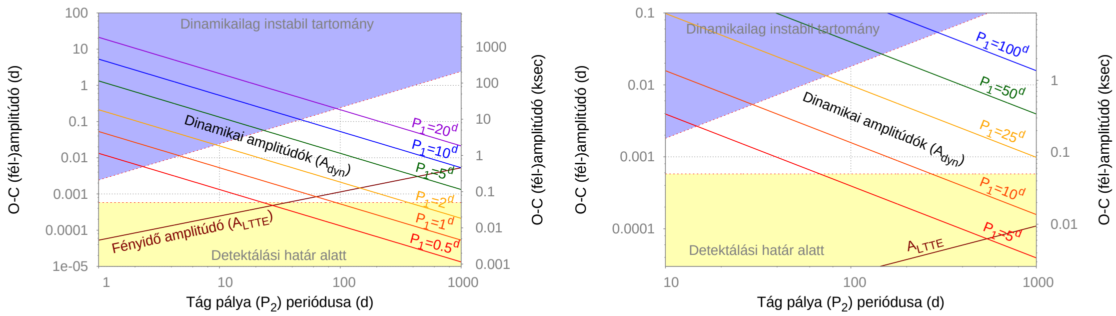
A dinamikai perturbációk esetében az egyenletek összetettsége és a túl sok paraméter miatt nem adható meg ilyen egyértelmű amplitúdó. Azonban, amint azt majd a későbbiekben látni fogjuk, a legtöbb általunk vizsgált esetben az effektus nagysága legalább nagyságrendileg jól közelíthető az

$$\mathcal{A}_{\mathrm{dyn}} = \frac{1}{2\pi}\frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{ABC}}}\frac{P_1^2}{P_2}\left(1-e_2^2\right)^{-3/2} \tag{2.95}$$

formulával. Eszerint a dinamikai fedésiminimumidőpont-változás nagysága, és így detektálhatósága a dinamikai perturbációknak a fedési kettős P_1 fedési periódusával skálázott nagyságától függ. Azaz, a rendszer kompaktságára, és így a dinamikai perturbációk erősségére utaló P_1/P_2 arány még megszorzódik P_1-gyel, vagyis a hosszabb fedési periódusú fedési kettősök esetében ugyanolyan nagyságú perturbációk nagyobb amplitúdójú fedésiminimumidőpont-változást eredményeznek.

A 2.2 ábra szemlélteti a kétféle mechanizmus okozta fedésiminimumidőpont-változás egymáshoz viszonyított nagyságát, valamint azt is, hogy milyen pálya periódusok mellett számíthatunk egyáltalán egyik vagy másik jelenség, és így egyáltalán egy távolabbi harmadik komponens felfedezésére. Az ábra bal oldali paneljén három Nap típusú csillag alkotta hierarchikus hármas esetére, a jobb oldali panelen pedig egy Nap típusú csillag körül keringő 1, illetve 10 Jupiter-tömegű óriásbolygók alkotta hierarchikus hármasra számoltam ki az amplitúdókat. (Az egyszerűség kedvéért körpályákat feltételeztem.)

Tekintsük elsőként a hierarchikus hármas csillagokra érvényes bal oldali panelt. Látható, hogy egy $P_1 = 10$ nap keringési idejű fedési kettős esetében $P_2 > 1000$ nap külső periódus fölött már a fényidőeffektus dominál. Márpedig az ismert több tízezernyi fedési kettőscsillag



2.2. ábra. A fényidőeffektusból, illetve a dinamikai perturbációkból származó fedésiminimumidőpont-változások nagyságrendi viszonyai, amennyiben mind a szoros, mind a tág kettős körpályán kering. *Bal panel:* $m_\mathrm{A} = m_\mathrm{B} = m_\mathrm{C} = 1\mathrm{M}_\odot$; *jobb panel:* $m_\mathrm{A} = 1\mathrm{M}_\odot$, $m_\mathrm{B} = 10^{-3}\mathrm{M}_\odot \approx 1\mathrm{m}_\mathrm{Jup}$, $m_\mathrm{C} = 10^{-2}\mathrm{M}_\odot \approx 10\mathrm{m}_\mathrm{Jup}$. Az amplitúdókat a (2.94), illetve a (2.95) képletek alapján számoltam. Az instabilitási tartomány (kék) határát Mardling és Aarseth (2001) később ismertetendő közelítő formulája alapján adtam meg. A biztos detektálás alsó küszöbét némileg önkényesen, 50 s-nál húztam meg. (Szem előtt kell tartani, hogy ez elsősorban a *Kepler*-űrtávcső mérési pontossága mellett reális határ, a földi észlelések esetében inkább egy nagyságrenddel nagyobb érték lenne életszerű.)

elsöprő többsége 10 napnál rövidebb fedési periódusú.[7] Ugyanakkor, amint azt majd látni fogjuk, a $P_2 < 200$ nap külső periódusú hierarchikus hármasok szinte teljesen hiányoznak. Mindez együttvéve azt jelenti, hogy az ismert, rövid periódusú fedési kettőscsillagok túlnyomó többségében, és különösen a földi, kistávcsöves észlelésekkel elérhető fedési kettősök esetében a fényidőeffektus mellett a dinamikai perturbációk csak elenyésző, és gyakorlatilag nem kimutatható mértékben befolyásolják a fedésiminimumidőpont-változásokat. A dinamikai perturbációk kimutatására inkább csak a legkompaktabb ($P_2/P_1 < 50 - 100$), de viszonylag hosszabb belső keringési idejű ($P_1 \geq 10^\mathrm{d}$) hierarchikus hármasok esetében van esély, amelyek, éppen a hosszú fedési periódus miatt egyelőre inkább csak a *Kepler*-űrtávcsővel voltak folyamatosan nyomon követhetők.

Természetesen a fentebb levezetett formulák nemcsak fedési kettőst tartalmazó hierarchikus hármas csillagokra érvényesek, hanem változatban formában használhatók akkor is, ha a komponensek bármelyike, vagy akár mindhármuk bolygó méretű, feltéve, hogy hierarchikus geometriájú rendszert alkotnak. A fejezet hátralevő részében azt az esetet vizsgálom, amikor egy központi csillag körül két bolygó kering hierarchikus konfigurációban, mégpedig úgy, hogy a belső bolygó tranzitokat mutat. A dinamikai fedésiminimumidőpont-változás (2.60) alatti képletét eredetileg ebben a kontextusban vezettem le (Borkovits és mktsai., 2011), és ezért, a továbbiakban, ezt a munkát követve, az egyenlet diszkusszióját is ebből

[7]Ebben a kettőscsillagok tényleges periódus eloszlásán fölül elsősorban geometriai, illetve észleléstechnikai kiválasztási effektusok játszanak szerepet. A geometriai kiválasztási effektus abban nyilvánul meg, hogy minél nagyobb egy szoros kettős szeparációja (vagy még szabatosabban: minél kisebb a csillagok fajlagos sugara, azaz a csillag sugarának és a kettős relatív pályája fél nagytengelyének a hányadosa) annál szűkebb pályahajlástartományban fog a Földről nézve fedést vagy fedéseket mutatni, ezért az adott periódusidejű kettősöknek egyre kisebb hányada lesz fedési kettős. Az észlelési kiválasztási effektus pedig elsősorban ahhoz kapcsolódik, hogy amíg a fedési kettősöket jobbára véletlenszerűen fedezték fel, nyilvánvalóan nagyobb esély volt egy váratlan elhalványodás megfigyelésére, ha az időben gyakrabban következett be. (Ez utóbbi, észlelési kiválasztási effektus nem lép fel a hosszú időtartamú, folyamatos megfigyelési programok, így például a *Kepler*-misszió esetében. Ennek ellenére, a *Kepler* fedési kettős katalógusa (http://keplerebs.villanova.edu/) által 2015. október 27-én tartalmazott 2878 rendszer közül 2061-nek, vagyis 71,6%-uknak volt 10 napnál rövidebb fedési periódusa.)

a szempontból tárgyalom.

Ennek szellemében a 2.2 ábra jobb oldalán olyan hármas rendszert tekintünk, ahol egy központi csillag körül, herarchikus konfiguráció alkotva, két óriásbolygó kering. Látható, hogy ez esetben a fényidőeffektus gyakorlatilag egyáltalán nem jön szóba, vagy legfeljebb csak évtizedes időskálákon. Ugyanakkor, hacsak a csillaghoz közelebbi, tranzitáló bolygó nem extrém rövid periódusú (azaz forró jupiter), egy 1–2 éves keringési idejű óriásbolygó már jelentős, akár több órás amplitúdójú, dinamikai eredetű tranzitidőpont-változást tud okozni. Továbbá, vegyük észre, hogy a belső bolygó m_B tömege a formulákban a csillag m_A tömegéhez képest elhanyagolható, azaz a belső, tranzitáló bolygó akár Föld-tömegű is lehet, a nagyságrendi viszonyokon ez mit sem fog változtatni! Ezt felismerve definiáltam az

$$\mathcal{A}^* = \frac{1}{2\pi}\frac{P_1^2}{m_*} \tag{2.96}$$

mennyiséget, amely bármely ismert tranzitáló exobolygóra kiszámítható (már amennyiben a központi csillag m_* tömegét ismerjük), és ezt felhasználva a (2.95) egyenlet az alábbi speciális alakban írható:

$$\mathcal{A}_\mathrm{dyn}^\mathrm{planet} \sim \mathcal{A}^*\frac{m_\mathrm{p2}}{P_2} \tag{2.97}$$

E mennyiség segítségével tehát bármely ismert tranzitáló exobolygó esetén megbecsülhető, hogy milyen amplitúdójú tranzitidőpont-változás várható különböző tömegű és periódusú további bolygó tömegű komponens jelenléte esetén. A CoRoT-9b esetére például:

$$\mathcal{A}^* \simeq 1459\,\mathrm{d}^2\mathrm{M}_\odot^{-1} \simeq 1{,}39\,\mathrm{d}^2\mathrm{m}_\mathrm{Jup}^{-1}, \tag{2.98}$$

vagyis egy fél Jupiter-tömegű, a Mars távolságában keringő további kísérő $0\overset{\mathrm{d}}{,}001$ félamplitúdójú tranzitidőpont-változást okozhatna.

A továbbiakban vizsgáljuk meg a dinamikai fedésiminimumidőpont-változások függését a két pálya paramétereitől, illetve egymáshoz viszonyított helyzetétől! Az egyszerűség kedvéért csak az általában legjelentősebb, kvadrupól komponenssel foglalkozunk, elhagyva abból is a többnyire elhanyagolható ($\cot i_1$-gyel szorzott) precessziós járulékot. Ehhez induljunk ki a (2.60) alakból, amelyen jól látható, hogy nemcsak a fizikai és geometriai változók, hanem a szoros kettős, illetve a tág kettős pályájára vonatkozó mennyiségek is könnyen elkülöníthetők. Ehhez vezessük be az alábbi mennyiségeket:

$$\begin{aligned}
\alpha(e_1,\omega_1,g_1,I) &= \left(1-e_1^2\right)^{1/2}\left\{\frac{2}{5}f_1+\frac{3}{5}K_1+\frac{51}{40}e_1^2f_2\cos 2g_1+K_2+\frac{1}{16}e_1^2K_4\right.\\
&\quad\left.-I^2\left[\frac{2}{5}f_1+\frac{3}{5}K_1-\frac{51}{40}e_1^2f_2\cos 2g_1-K_2-\frac{1}{16}e_1^2K_4\right]\right\}\\
\beta(e_1,\omega_1,g_1,I) &= -\left(1-e_1^2\right)^{1/2}I\left[\frac{51}{20}e_1^2f_2\sin 2g_1+2K_3+\frac{1}{8}e_1^2K_5\right],\\
\gamma(e_1,\omega_1,g_1,I) &= \left(1-e_1^2\right)^{1/2}\left\{-\frac{4}{15}f_1-\frac{2}{5}K_1+\frac{51}{20}e_1^2f_2\cos 2g_1+2K_2+\frac{1}{8}e_1^2K_4\right.\\
&\quad\left.+I^2\left[\frac{4}{5}f_1+\frac{6}{5}K_1-\frac{51}{20}e_1^2f_2\cos 2g_1-2K_2-\frac{1}{8}e_1^2K_4\right]\right\},
\end{aligned} \tag{2.99}$$

amelyek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\Delta_1 = \frac{P_1}{2\pi}A_\mathrm{L1}\left[\gamma\mathcal{M}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\mathcal{S}(2v_2+\phi)\right] \tag{2.100}$$

ahol

$$\phi = 2g_2 + \arctan\frac{\beta}{\alpha}. \tag{2.101}$$

További lehetőség, hogy Δ_1-et tisztán trigonometrikus alakban írjuk fel, miszerint

$$\Delta_1 = \frac{P_1}{2\pi}A_{\mathrm{L1}}^{*}\sum_n A_n\sin(nv_2+\phi_n), \tag{2.102}$$

ahol a trigonometrikus együtthatók (e_2-ben harmadrendig)

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left(1-e_2^2\right)^{-3/2}e_2\sqrt{A_{\mathcal{S}}^2+A_{\mathcal{M}}^2+2A_{\mathcal{S}}A_{\mathcal{M}}\cos\phi},\\
A_2 &= \left(1-e_2^2\right)^{-3/2}\sqrt{A_{\mathcal{S}}^2+\frac{1}{16}e_2^4A_{\mathcal{M}}^2+\frac{1}{2}e_2^2A_{\mathcal{S}}A_{\mathcal{M}}\cos\phi},\\
A_3 &= \left(1-e_2^2\right)^{-3/2}\frac{1}{3}e_2\sqrt{A_{\mathcal{S}}^2+\frac{1}{9}e_2^4A_{\mathcal{M}}^2+\frac{2}{3}e_2^2A_{\mathcal{S}}A_{\mathcal{M}}\cos\phi},
\end{aligned} \tag{2.103}$$

a fázisok pedig

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \arctan\frac{\sin\phi}{\cos\phi+\frac{A_{\mathcal{M}}}{A_{\mathcal{S}}}},\\
\phi_2 &= \arctan\frac{\sin\phi}{\cos\phi+\frac{1}{4}e_2^2\frac{A_{\mathcal{M}}}{A_{\mathcal{S}}}},\\
\phi_3 &= \arctan\frac{\sin\phi}{\cos\phi+\frac{1}{9}e_2^2\frac{A_{\mathcal{M}}}{A_{\mathcal{S}}}},
\end{aligned} \tag{2.104}$$

továbbá

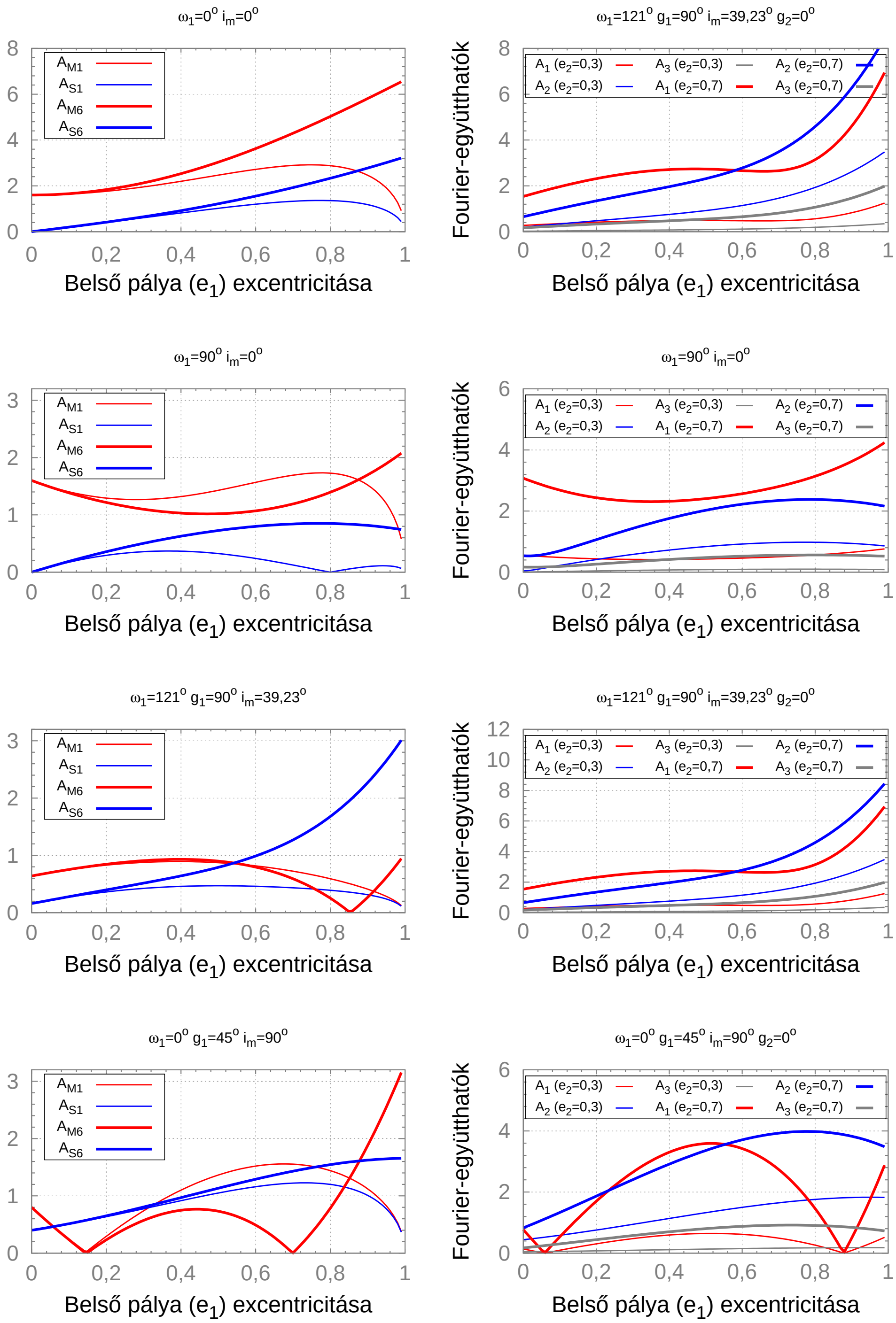
$$\begin{aligned}
A_{\mathcal{S}} &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2},\\
A_{\mathcal{M}} &= 3\gamma,
\end{aligned} \tag{2.105}$$

végezetül

$$A_{\mathrm{L1}}^{*} = A_{\mathrm{L1}}\left(1-e_2^2\right)^{3/2}. \tag{2.106}$$

Könnyen látható, hogy mind az $A_{\mathcal{M},\mathcal{S}}$, mind az A_n együtthatók függetlenek az adott hármas rendszer fizikai paramétereitől (a tömegektől, valamint a fizikai méretektől). Ezen felül a külső pálya egyes paraméterei (pl. e_2, g_2) csak az A_n Fourier-együtthatókban jelennek meg, míg az $A_{\mathcal{M},\mathcal{S}}$ együtthatók a köztes inklinációtól eltekintve valóban csak a szoros kettős pályaelemeitől függenek. Mindez azt jelenti, hogy a tömegek, illetve pontosabban a tömegarányok, illetve a keringési idők, és ezek aránya (azaz közvetve a rendszer fizikai dimenziói) csak skálázási paraméterként jelennek meg. Következésképp, a fentebb definiált együtthatók vizsgálatával általános megállapításokat tehetünk a hosszú időskálájú dinamikai minimumidőpont-változások alakja, lefutása, viszonylagos nagysága és a rendszer geometriai konfigurációja közti összefüggésekre.

Az alábbiakban, a teljesség igénye nélkül, megvizsgáljuk az A_n, illetve $A_{\mathcal{M},\mathcal{S}}$ együtthatók (és így a dinamikai fedésiminimumidőpont-változás) és az egyes pályaelemek kapcsolatát. Mivel a (2.60) formula (Borkovits és mktsai., 2011) lényegi újdonsága a szakirodalomban korábban elérhető legteljesebb modellhez (Borkovits és mktsai., 2003) képest a szoros kettős körpályájára vonatkozó megkötés elhagyása volt, célszerű először az együtthatóknak az e_1 excentricitástól való függését vizsgálni. A 2.3. ábra az $A_{\mathrm{M,S}}$ (bal oldal),



2.3. ábra. *Bal panelek:* A hosszú periódusú, dinamikai fedésiminimumidőpont-változásokat leíró $\mathcal{M}$ és $\mathcal{S}$ függvények dimenziótlan $A_{\mathcal{M},\mathcal{S}}$ amplitúdóinak a szoros, fedési kettős (e_1) excentricitásától való függése a szögpályaelemek különböző speciális helyzeteire. (Az $\mathcal{M}$ és $\mathcal{S}$ járulékok összehasonlításához vegyük figyelembe, hogy $A_\mathcal{M}$ még szorzandó e_2-vel.) A vékony vonalak az e_1 excentricitásban a másod-, a vastag vonalak a hatodrendű tagokig számolt amplitúdókra utalnak. *Jobb panelek:* A dinamikai minimumidőpont-változások (2.102) egyenlet alatti trigonometrikus alakjában megjelenő $A_{1,2,3}$ amplitúdók két különböző külső excentricitás ($e_2 = 0{,}3$ és $e_2 = 0{,}7$) esetére.

2.1. táblázat. A CoRoT–9 és HD 80606 csillagokból és a körülöttük keringő tranzitáló exobolygókból álló kettős rendszerek főbb tulajdonságai. (Az adatok forrása Deeg és mktsai., 2010, illetve Pont és mktsai., 2009 munkája.)

Exobolygó	m_*	m_p	P_1	e_1	ω_1	i_1
CoRoT–9b	0,99M$_\odot$	0,0008M$_\odot$	$95\overset{\mathrm{d}}{,}2738$	0,11	217$^\mathrm{o}$	$89\overset{\mathrm{o}}{,}99$
HD 80606b	0,97M$_\odot$	0,0038M$_\odot$	$111\overset{\mathrm{d}}{,}4357$	0,93	121$^\mathrm{o}$	$89\overset{\mathrm{o}}{,}32$

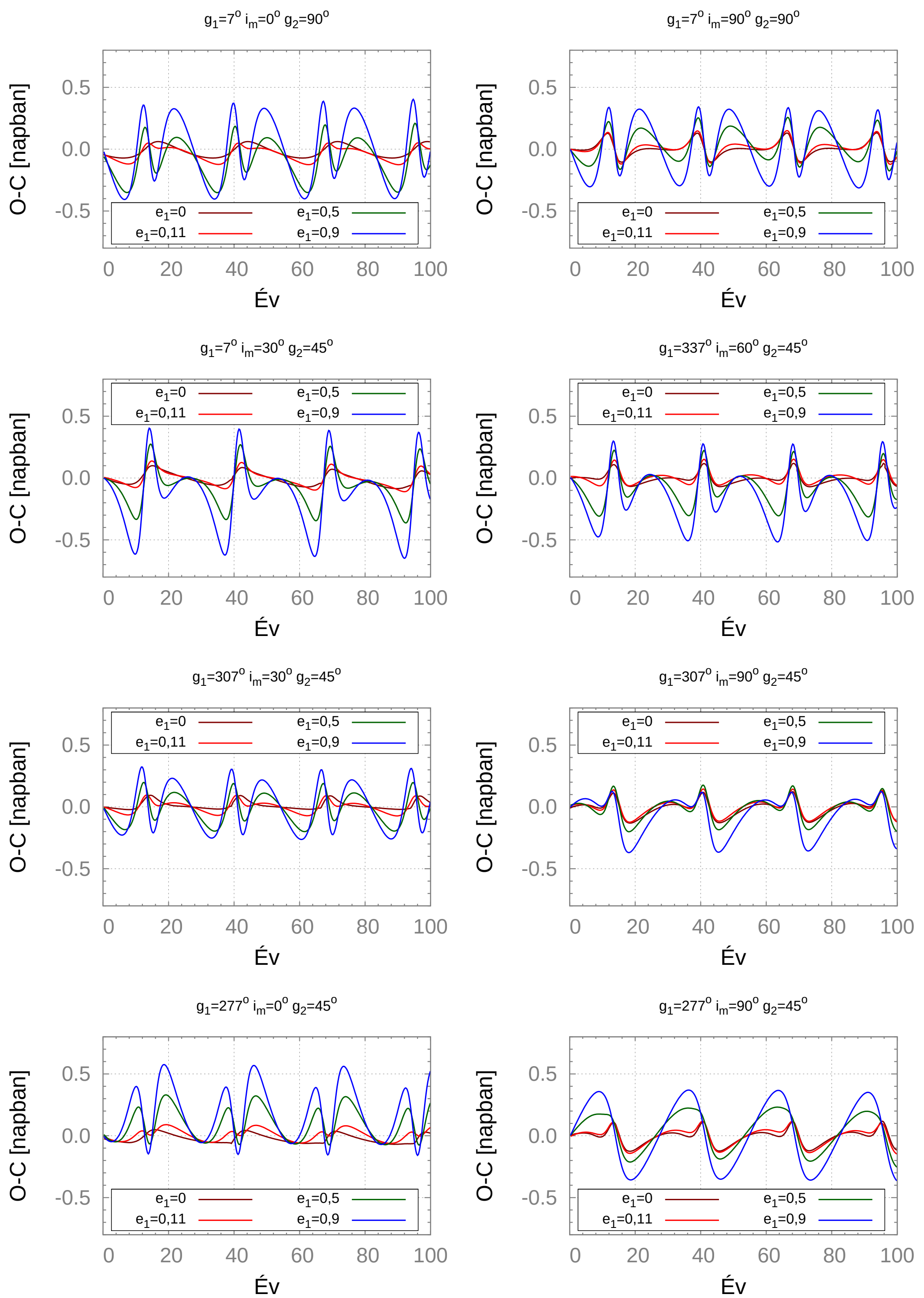
illetve az $A_{1,2,3}$ együtthatók belső excentricitástól való függését mutatja a többi paraméter bizonyos specifikus értékeire. Amint látható, általában az együtthatók, és így a fedésiminimumidőpont-változás nagysága nő az e_1 excentricitás növekedésével, azonban a különböző e_1 excentricitáshoz tartozó együtthatók nagysága többnyire egy nagyságrenden belül marad. Azaz, miközben az egyes esetekhez tartozó $O-C$ diagramok alakja nagy változatosságot mutathat, a görbék tényleges amplitúdója általában csak szűk határok között változik. A 2.3. ábra az i_m köztes inklináció és a görbe periodicitása közti kapcsolatról is hordoz információkat. Amint az jól látható, a síkbeli ($i_\mathrm{m}=0^\mathrm{o}$) eseteknél (első két sor) a P_2 periódusú (folytonos pirossal jelzett) $A_\mathcal{M}$, illetve A_1 komponens a domináns, míg köztes relatív pályahajlású, illetve egymásra merőleges pályasíkok esetében (alsó két sor) az $\frac{1}{2}P_2$ periódusú (szaggatott kék) A_S, illetve A_2 komponensek akár felül is múlhatják az előbbieket. Ugyanakkor jól látható, hogy – legalábbis az ábrán feltüntetett esetekben – az $O-C$ nagysága a köztes inklinációtól is csak gyengén függ. A 2.4. ábrán mutatott, numerikusan generált fedésiminimumidőpont-változások általában, a nagyságrendi viszonyokat illetően, alátámasztják az iménti megállapításokat, azonban azt is megmutatják, hogy elegendően nagy belső (e_1) excentricitás esetén tetszőleges i_m köztes inklináció mellett találhatunk akár P_2, akár $\frac{1}{2}P_2$ dominanciájú $O-C$ görbéket[8] is.

A folytatásban a dinamikai perturbációk okozta fedésiminimumidőpont-változások egyéb tulajdonságait, illetve az ilyen változások detektálhatóságával kapcsolatos kérdéseket esettanulmányként két ismert, akkoriban (2010-ben) a leghosszabb keringési idejű tranzitáló exobolygók közé tartozó planéta, a csaknem körpályán keringő CoRoT–9b, illetve az elnyúlt, üstökösszerű pályán mozgó HD 80606b példáján fogom továbbvizsgálni. E két exobolygó fontosabb fizikai és pályaparamétereit a 2.1 táblázatban adom meg.

Először tekintsük a csillagától körülbelül a Merkúr-távolságában keringő CoRoT–9b-t. Mivel az e_1 excentricitás és az ω_1 pericentrum argumentumok a spektroszkópiai észlelésekből, illetve a tranzitfénygörbe-illesztésből ismertek, az $A_{\mathcal{M},\mathcal{S}}$ együtthatók így már csak két paramétertől, a g_1 dinamikai periasztron-argumentumtól, illetve az i_m köztes inklinációtól függnek. A 2.5. ábra bal oldali oszlopában az $A_{\mathcal{M},\mathcal{S}}$ együtthatók (abszolút értékének) nagyságát rajzoltam fel az i_m köztes inklináció függvényében $g_1=69^\mathrm{o}$ és $g_1=158^\mathrm{o}$ esetére. Az együtthatók ugyanis tetszőleges i_m köztes inklináció esetén e periasztron-értékek körül érik el extrémumaikat, vagyis másként fogalmazva, az $A_{\mathcal{M},\mathcal{S}}$ együtthatók bármely g_1 értékre a megfelelő görbék által határolt területen belülre esnek.[9] Ezek az ábrák általánosságban megerősítik a nagyságrendi viszonyokra, illetve a P_2 és $\frac{1}{2}P_2$ periódusú komponensek

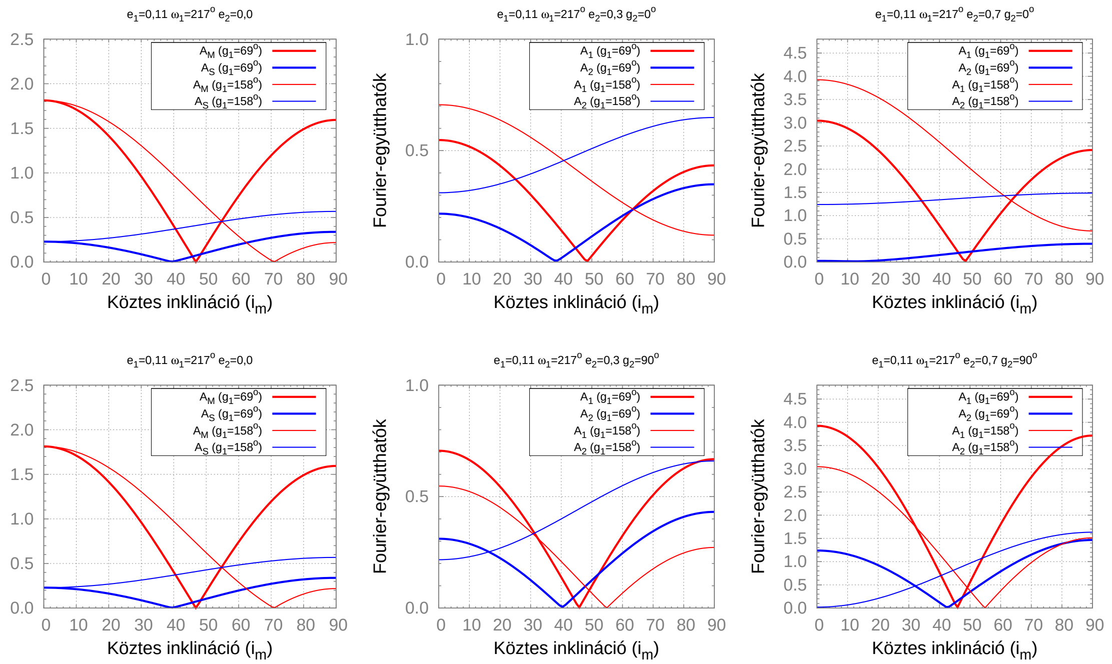
[8] Érdemes emlékezetünkben tartani, hogy az A_n Fourier-együtthatókhoz tartozó trigonometrikus függvények szabad változója a v_2 valódi anomália és nem a t idő, tehát a t idő (vagy az E ciklusszám) függvényében e görbék szigorúan véve ez utóbbi esetben sem tisztán $\frac{1}{2}P_2$, hanem továbbra is P_2 szerint periodikusak

[9] Szigorúan véve ez az állítás csak akkor igaz, ha megengedjük az együtthatók negatív értékét is. Ez $A_\mathcal{M}$ esetében nem ütközik annak definíciójával. Ellenben, $A_\mathcal{S}$-t nemnegatív mennyiségként vezettük be, azonban negatív értéke egy egyszerű 180$^\mathrm{o}$-os fáziseltolással értelmezhető.



2.4. ábra. Egy képzeletbeli $P_2 = 10\,000$ nap keringési idejű, $m_C = 1M_\odot$ tömegű, közepesen lapult ($e_2 = 0{,}3$) pályán keringő harmadik kísérő által okozott tranzitidőpont-változások a CoRoT–9b fedési exobolygó esetében négy különböző belső excentricitás ($e_1 = 0$; 0,11; 0,5; 0,9), illetve a dinamikai szögpályaelemek változatos értékeire. (A jobb összehasonlíthatóságért a görbéket korrigáltam az eltérő átlagos tranzitperiódusokra és nullponti eltolásokra.)

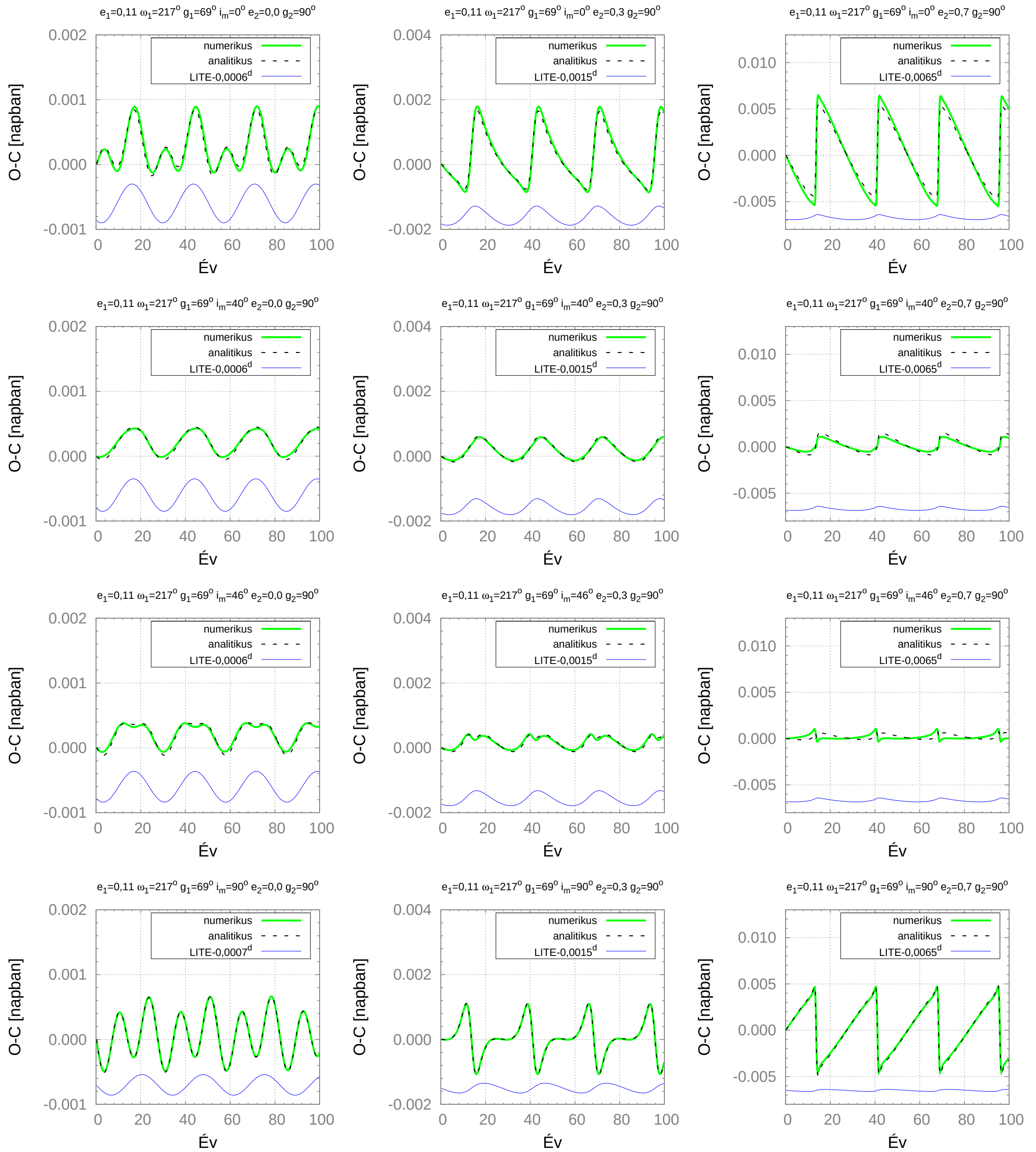
gyorsan változó arányából következő változatos formákra tett korábbi megállapításainkat, azonban egy nagyon érdekes további lehetőségre is felhívják a figyelmet. Jól látható, hogy a $g_1 = 69^{\rm o}$ esetben csaknem egyszerre csökken le mind az $A_{\mathcal{M}}$ és az $A_{\mathcal{S}}$ együttható értéke nullára a közepes köztes inklinációk tartományában, ami azt vonja maga után, hogy ilyen esetekben magának a dinamikai fedésiminimumidőpont-változásnak az amplitúdója is drasztikusan lecsökkenhet! Ráadásul, tegyük hozzá, ez éppen abban a köztesinklináció-tartományban fordulhat elő ($i_{\rm m} \sim 40^{\rm o} - 50^{\rm o}$), amely a Kozai–Lidov-jelenség szempontjából nagy fontosságú.



2.5. ábra. *Bal panelek:* Az $A_{\mathcal{M},\mathcal{S}}$ együtthatók $i_{\rm m}$ köztes inklinációtól való függése a CoRoT–9b exobolygó pálya paraméterei esetében, $g_1 = 69^{\rm o}$ és $g_1 = 158^{\rm o}$ dinamikai periasztronértékek mellett. Más g_1 értékekre a görbék a megfelelő behatárolt területeken belül futnának. (A két bal oldali ábra azonos.) *Középső és jobb panelek:* A megfelelő $A_{1,2}$ együtthatók $e_2 = 0{,}3$ (középen) és $e_2 = 0{,}7$ (jobb oldalt) excentricitású tág pályán keringő harmadik test esetén $g_2 = 0^{\rm o}$ (fent), illetve $g_2 = 90^{\rm o}$ (lent) dinamikai periasztronargumentum esetén. Érdemes emlékeztetni rá, hogy az $e_2 = 0$ esetben $A_{\mathcal{S}} \equiv A_2$ (valamint $A_1 \equiv 0$), ily módon a bal oldali ábrák $A_{\mathcal{S}}$ görbéje egyben az $e_2 = 0$ eset A_2 görbéjét is megadja.

Mindezek szemléltetése céljából a 2.6. ábrán olyan szimulált $O - C$ görbéket mutatok, amelyeket az előbbi 2.5. ábra alsó sorában feltüntetett orbitális konfigurációkra állítottam elő, a CoRoT–9b egyéb fizikai paramétereinek (tömegek, periódusok) felhasználásával, egy $P_2 = 10\,000$ nap periódusú, $m_{\rm p2} = 0{,}005{\rm M}_\odot$ ($\approx 5{\rm M_J}$) második óriásbolygó jelenlétét feltételezve. (Ezen felül, hogy még realisztikusabb legyen az eredmény, ehelyütt a geometriai fényidőeffektus járulékát is figyelembe vettem, hiszen az a tényleges megfigyeléseknél is rárakódik a dinamikai fedésiminimumidőpont-változások hatására.) Ezeken az ábrákon valóban jól látható, hogy az $i_{\rm m} = 40^{\rm o}$, illetve $i_{\rm m} = 46^{\rm o}$ köztes inklinációkhoz tartozó görbék (középső két sor) esetében drasztikusan lecsökken a dinamikai járulék, gyakorlatilag csak a fényidőeffektus hatása marad meg.

Ehelyütt érdemes egy további jellegzetességet is megemlíteni. Az első és az utolsó sor ábráit összehasonlítva szembetűnő, hogy lapult külső pálya esetén a dinamikai $O - C$ gör-



2.6. ábra. A CoRoT–9b analitikusan számolt (fekete szaggatott), illetve a mozgásegyenletek numerikus integrálásával generált (zöld folytonos görbék) tranzitidőpont-változásai egy képzeletbeli $P_2 = 10\,000\,\mathrm{d}$ periódusú $m_{p2} = 0{,}005\mathrm{M}_\odot$ ($\approx 5\mathrm{M_J}$) tömegű további óriásbolygó zavaró hatása esetén. Az egyes oszlopokban a dinamikai periasztronargumentumok, illetve a tág pálya excentricitása megegyeznek a 2.5. ábra alsó sorának három ábráján feltüntetett vastag görbékhez tartozó paraméterekkel, azaz $g_1 = 69^\circ$, $g_2 = 90^\circ$, illetve $e_2 = 0$, 0,3 és 0,7 (balról jobbra). Az egyes sorokban a pályasíkok i_m köztes inklinációja fentről lefelé rendre $i_\mathrm{m} = 0^\circ$, 40°, 46° és 90°. A görbék a dinamikai és a fényidőeffektus (LITE) eredő hatását mutatják. Ez utóbbi effektus járulékát külön is ábrázoltam (vékony kék, folytonos vonallal). Felhívom a figyelmet, hogy az egyes oszlopokban az y tengely skálája különböző.

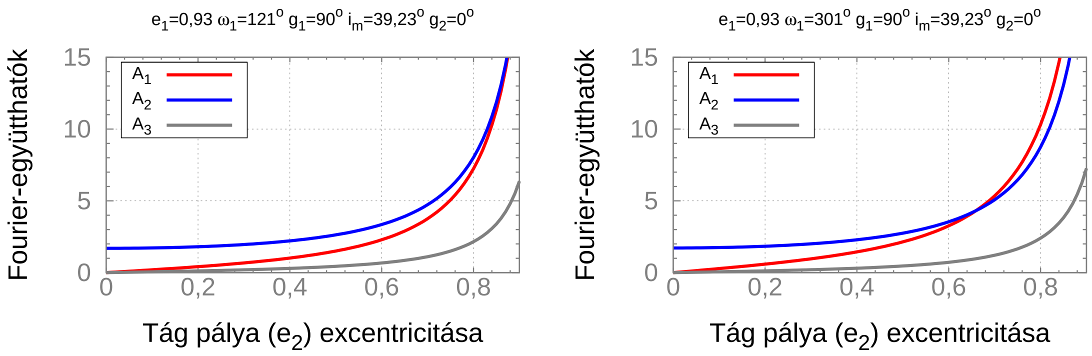
bék ellentétes irányban „dőlnek" az egysíkú, illetve a merőleges pályasíkú konfigurációk esetén. Nevezetesen, kis köztes inklinációjú pályáknál a harmadik komponens periasztronátmenete közelében egy meredek emelkedés (azaz a fedési vagy tranzit események gyors késése) tapasztalható, amelyet egy jóval lankásabb leszálló ág követ, míg a merőleges(hez közeli) esetben éppen ellentétesen, a harmadik komponens pericentrumátmenete meredek leszálló ágat eredményez, amit pedig lassú, kevésbé meredek felszálló ág követ. (Ugyanez a jellegzetesség a 2.4 ábrán is megfigyelhető, illetve a későbbiekben a 4. fejezet tényleges észleléseken alapuló $O-C$ görbéin is látványosan visszaköszön.) E jelenség megértéséhez a perturbáló erő három komponensének (2.26–2.28) alatti kifejezéséhez kell visszanyúlnunk. A könnyebb áttekinthetőség céljából ehelyütt megismétlem a számunkra most egyedül érdekes radiális erőkomponensnek a kvadrupól közelítésben érvényes alakját:

$$\begin{aligned} f_\mathrm{r}^\mathrm{quad} &= \frac{3}{8}\frac{Gm_\mathrm{C}}{\rho_2^2}\frac{\rho_1}{\rho_2}\left[(1+I)^2\cos(2w_2-2w_1)+(1-I)^2\cos(2w_2+2w_1)\right.\\ &\left.\quad +2(1-I^2)(\cos 2w_1+\cos 2w_2)+2\left(I^2-\frac{1}{3}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.107}$$

A három erőkomponenst az oktupól közelítésig bezárólag megadó teljes (2.26–2.28) erőformulában egyedül a fenti, (2.107) kifejezésben megjelenő jobb oldali utolsó komponens az egyetlen, amely nem függ egyik w-szögtől (és így a testek egymáshoz, illetve a pályasíkokhoz viszonyított térbeli helyzetétől) sem, hanem csupán az aktuális távolságarányuktól. Ennélfogva ez a komponens összességében úgy hat, mintha a szoros kettős tömegét módosítaná időtől függő módon. Amíg $I^2 < 1/3$ ez az erőkomponens mindig kifelé irányul, tehát kisebb eredő tömeget, és ezáltal időátlagban hosszabb P_1 belső periódust eredményez, míg nagy köztes inklinációk (vagyis $54\overset{\circ}{.}736 \lesssim i_\mathrm{m} \lesssim 125\overset{\circ}{.}264$) esetén az eredő hatás ellentétes lesz. Ennek természetes következményeként az excentrikus pályán mozgó tág kettős periasztronátmenete környékén (vagyis amikor a ρ_1/ρ_2 arány, és ily módon az effektus is a legnagyobb), a kis köztes inklinációjú rendszerek gyors és gyorsan változó mértékű időkésést fognak elszenvedni, amely az $O-C$ görbén éppen egy rövid és meredek felszálló ágként fog megjelenni. Merőlegeshez közeli pályahajlások esetén pedig természetesen a periódus éppen ellentétes irányban fog változni, azaz gyorsan rövidülni fog.

A 2.6. ábra egyben a formulák ellenőrzésére is szolgál, ugyanis összehasonlításképpen feltüntettem rajtuk a háromtest-rendszer mozgásának numerikus integrálásából meghatározott $O-C$ görbéket is. Amint látható, a legszebb egyezés a merőleges konfiguráció esetében tapasztalható, és ekkor az analitikus modell még nagy külső excentricitások (a példában $e_2 = 0{,}7$) esetén is jól adja vissza a numerikus eredményt. Az egysíkú elrendeződésre (legfelső sor) szintén kielégítő az egyezés, bár ebben az esetben a görbe amplitúdóját az analitikus megoldás kissé alulbecsli, és kisebb alakbeli eltérések is láthatók. Ezek valószínűleg a harmadrendű járulékok figyelmen kívül hagyásából származnak[10]. Ehhez érdemes figyelembe venni, hogy (az „apszis-csomóvonali" típusú perturbációk esetére) már Söderhjelm (1982), illetve Ford és mktsai. (2000) is kimutatták, hogy a magasabb rendű perturbációk viszonylagos járuléka az $e_1 \simeq 0$, $\sin i_\mathrm{m} \simeq 0$ elrendeződés esetében a legnagyobb, így ezt várhatjuk a jelenleg vizsgált hosszú periódusú perturbációk esetére is. Az analitikus modell, illetve a numerikus integrálás révén kapott eredmények eltérése ugyanakkor közepes köztes inklinációkra feltűnőbbé válik, sőt a nagy külső excentricitású ($e_2 = 0{,}7$) esetben az $i_\mathrm{m} = 46^\circ$ köztes inklinációnál számolt megoldás (jobb oldali oszlop, harmadik sor) teljesen tévesnek látszik. Vegyük észre azonban, hogy az analitikus modell ebben az esetben is gyakorlatilag helyesen visszaadja a dinamikai tag erősen lecsökkenő amplitúdóját

[10]Ez utóbbiakat csak 2014-ben számítottam ki és publikáltam (Borkovits és mktsai., 2015), tehát a jelenleg ismertetett vizsgálatok idején még nem voltak elérhetőek.

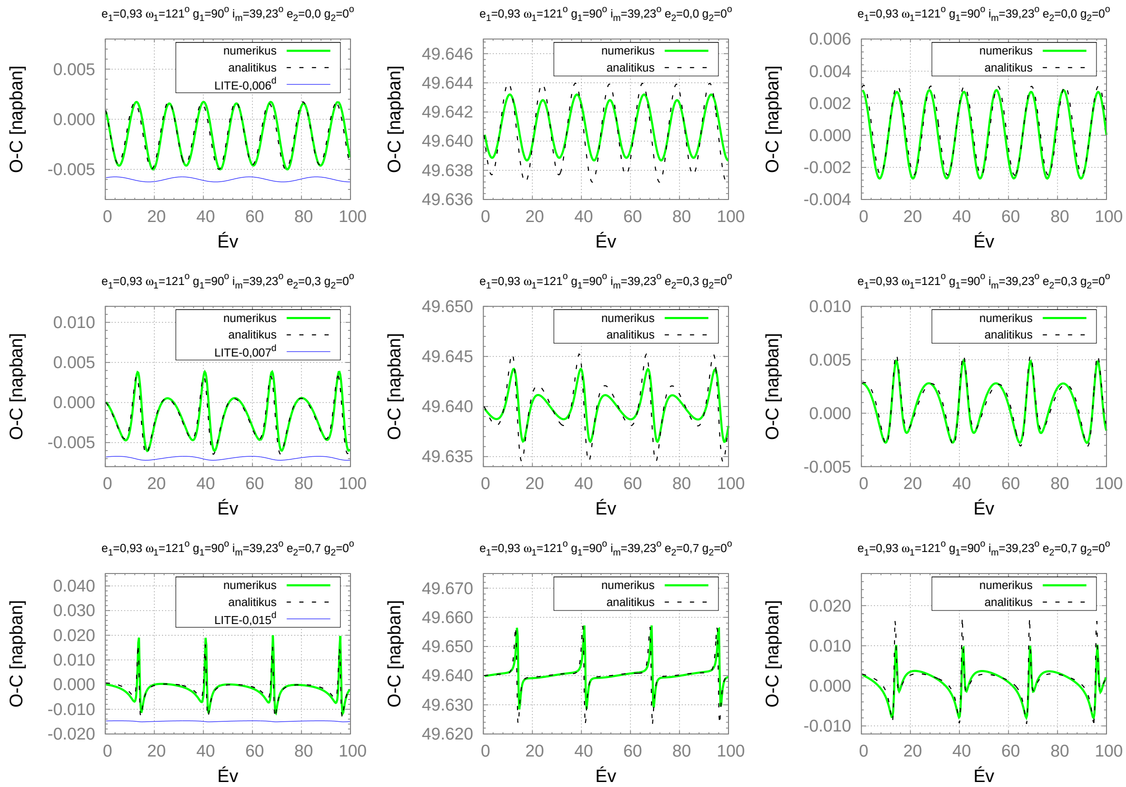


2.7. ábra. Az $A_{1,2,3}$ Fourier-együtthatók értékei HD 80606b exobolygó átvonulásaira (balra), illetve másodlagos okkultációira (jobbra). A megfelelő pályaelemek megválasztásánál azt feltételeztem, hogy a planéta egy Kozai–Lidov-ciklus maximum fázisában van.

csakúgy, mint a periasztronátmenet környékén feltűnő „tüske" vastagságát. Valójában itt is csak arról van szó, hogy a jelentősen lecsökkenő kvadrupól járulék következtében megnő az ehelyütt (még) nem modellezett magasabb rendű járulék(ok) szerepe. Összességében tehát az analitikus modell kis belső excentricitású esetben a tág pálya e_2 excentricitásától, illetve a két pályasík i_m kölcsönös pályahajlásától függetlenül jól visszaadta a numerikusan szimulált adatsorokat.

A nagy belső (e_1) excentricitású eset vizsgálatára az extrém pályán keringő HD 80606b exobolygó különösen alkalmas. A teljes fázistér tanulmányozása helyett itt csupán annak egy kis tartományára szorítkoztam. Ehhez abból az elméletileg mindenképpen nagyon izgalmas feltételezésből indultam ki, hogy a nem egészen négy hónapos keringési idejű ($P_1 = 111\overset{\mathrm{d}}{.}44$) exobolygó pályájának rendkívüli lapultságát ($e_1 = 0{,}93$) az okozza, hogy a rendszerben jelen van egy távolabbi, nagy köztes inklinációjú harmadik komponens, és ezáltal nem csak hogy teljesülnek a Kozai–Lidov-jelenség feltételei, de a HD 80606b jelenleg éppen egy ilyen ciklus maximális excentricitású fázisában jár. Ebben az esetben az i_m köztes inklináció és a g_1 dinamikai periasztronargumentum csak meghatározott értékeket vehet fel (Kozai, 1962; Söderhjelm, 1982). Ezért a most következő vizsgálatokhoz e paramétereket az elmélet által jósolt $i_\mathrm{m} = 39\overset{\circ}{.}23$, illetve $g_1 = 90^\circ$ értékeken rögzítettem. E két mennyiség rögzített értéke a 2.1 táblázatban felsorolt paraméterekkel együtt egyértelműen meghatározza az $A_{\mathcal{M},\mathcal{S}}$ együtthatók értékét, mégpedig az elsődleges tranzitok esetére ezek $A_\mathcal{M} = -0{,}38$, $A_\mathcal{S} = 1{,}69$. A másodlagos okkultációk esetére ugyanezek a mennyiségek úgy határozhatók meg, hogy az észlelői koordináta-rendszerben értelmezett ω_1 pericentrumargumentumot formálisan $\omega_1 + 180^\circ$-kal helyettesítjük. Ekként erre az esetre $A_\mathcal{M} = -1{,}06$, illetve $A_\mathcal{S} = 1{,}72$ értékek adódnak. A 2.7. ábrán az adott szituációhoz tartozó $A_{1,2,3}$ Fourier-együtthatókat ábrázoltam a tág pálya e_2 excentricitása függvényében, a fennmaradó utolsó szabad paramétert, azaz a tág pálya dinamikai periasztronargumentumát $g_2 = 0^\circ$-nak választva. (A Fourier-együtthatók [2.103] alatti definíciójából látható, hogy a g_2 paraméter értéke e mennyiségeket csak az $\mathcal{S}$-járulék ϕ fázisán keresztül befolyásolja, ráadásul a nagy e_2 külső excentricitások esetét nem számítva, ekkor is inkább csak az A_1 együtthatót. Ily módon e szögpályaelem értékére a Fourier-együtthatók – az egyes komponensek fázisával ellentétben – kevésbé érzékenyek.)

A 2.8. ábrán az $e_2 = 0; 0{,}3; 0{,}7$ külső excentricitás értékekre a (2.60) alapján számolt, illetve numerikusan generált $O - C$ görbéket rajzoltam fel mind az elsődleges tranzitok, mind a másodlagos okkultációk esetére, valamint a görbék különbségét is megadtam a jobb



2.8. ábra. A HD 80606b exobolygó analitikusan számolt (fekete szaggatott), illetve a mozgásegyenletek numerikus integrálásával generált (zöld folytonos görbék) tranzitidőpont-változásai egy képzeletbeli $P_2 = 10\,000$ nap periódusú $m_{p2} = 0{,}005\mathrm{M}_\odot$ ($\approx 5\mathrm{M_J}$) tömegű további óriásbolygó zavaró hatása esetén. (A rendszer orbitális paramétereit úgy választottam meg, mintha a HD 80606b éppen egy Kozai–Lidov-ciklus legnagyobb e_1 excentricitású fázisában lenne.) Felül: $e_2 = 0$; középen: $e_2 = 0{,}3$; alul: $e_2 = 0{,}7$ ($g_2 = 0^\mathrm{o}$ minden esetben); *bal oszlop:* elsődleges átvonulás; *középső oszlop:* másodlagos fedés; *jobb oszlop:* az előbbi kettő különbsége. (A jobb összehasonlíthatóság kedvéért a görbéket korrigáltam a különböző átlagos periódusokra, illetve nullponti eltolásokra.)

oldali oszlopban. Az ábrák jól példázzák, hogy az analitikus formulám még ilyen extrém excentricitások (például a legalső sorban $e_1 = 0{,}93$, $e_2 = 0{,}7$) esetén is kielégítő eredményt ad.[11] A képet ugyanakkor egy kissé árnyalja, hogy a másodlagos okkultációk (középső oszlop) esetén valamivel gyengébb az egyezés: itt az analitikus modell, noha jellegében a numerikussal megegyező eredményt ad, annak amplitúdóját jelentősen túlbecsüli. Ez a tény azt sugallja, hogy a pontosságra az ω_1 pericentrumargumentum tényleges értékének is van némi befolyása.

A fenti 2.4., 2.6., illetve 2.8. ábrák évszázados időskálán mutatják egy képzeletbeli, közel 27,5 év keringési idejű kísérő okozta tranzitidőpont-változásokat. Tanulságos ugyanakkor azzal az esettel is foglalkozni, amikor a távolabbi, harmadik komponens keringési ideje jelentősen felülmúlja azt az időtartamot, amelyről tranzit-, illetve fedésiminimum-észlelések

[11] A folyóiratcikk bírálója annak idején külön is kiemelte ezt az eredményt, tekintve, hogy a bolygópályák leírására klasszikusan alkalmazott planetáris perturbáció-elmélet esetében ilyen excentrikus pályákra (még egysíkú esetben is) csak jóval magasabb rendű és sokkal több komponenst tartalmazó formula adna hasonlóan kielégítő eredményt. A nagy különbség oka a hierarchikus konfigurációban található, ez teszi lehetővé, hogy a jelen esetben ennyire egyszerű formulával ilyen pontos eredményt érhessek el.

elérhetőek. A 2.9. ábrán ezért a fenti $O-C$ görbék közül kiválasztottam néhányat, és ezeknek a kezdő epochától számított első és második nyolc éves időintervallumát ábrázoltam. Ezen ábrák esetében a tranzitidőpont-változást leíró $O-C$ görbéket a „tényleges” periódusról mit sem tudva ugyanúgy számítottam ki, ahogy az bármely újonnan felfedezett tranzitáló exobolygó vagy fedési kettős esetében szokás, azaz egyszerűen az első néhány (szélső esetben az első két) megfigyelt minimum között eltelt időt vettem alapul. (Magyarán ez azt jelenti, hogy az $O-C$ diagram első pontjaira fektetett egyenes párhuzamos a x-tengellyel.) Jól látható, hogy a bal oldali ábrákon minden esetben a körpályán keringő harmadik test okozza a legnagyobb mérvű tranzitidőpont-változást annak ellenére, hogy egy teljes külső (P_2) periódusra vetítve a változás amplitúdója ilyenkor a legkisebb. Az adott helyzetekben a legnagyobb ($e_2 = 0{,}7$) külső excentricitású, és összességében a legnagyobb amplitúdójú változást okozó perturbáló komponens, a körpályán keringővel szemben könnyen lehet, hogy észrevétlen maradna. Ennek az oka, hogy mivel a numerikus integrálásoknál (és ezzel együtt, természetesen, az analitikus számításoknál is) a harmadik komponenst a külső pálya apocentrumából indítottam, ezen első nyolc éves $O-C$ szeleteken, különösen azok első felén minél lapultabb a külső pálya, a harmadik test perturbáló hatása egyrészt annál kisebb, másrészt, és ez a fontosabb: mivel lassabban mozog, így a szoros kettőshöz viszonyított helyzete és ezáltal a perturbáció nagysága (és iránya is) lassabban változik, s így az adott idő alatt jóval kisebb mértékű periódusváltozást eredményez, vagyis kisebb lesz az $O-C$ görbe görbülete. A jobb oldali oszlopban aztán eljön az „igazság pillanata”, hiszen erre az intervallumra esik a kísérők periasztronátmenete. Amikor ebben az időszakban sikerül felfedezni egy tranzitáló exobolygót vagy fedési kettőst, a harmadik komponens szerencsés módon, rövid időn belül felfedezhető.[12]

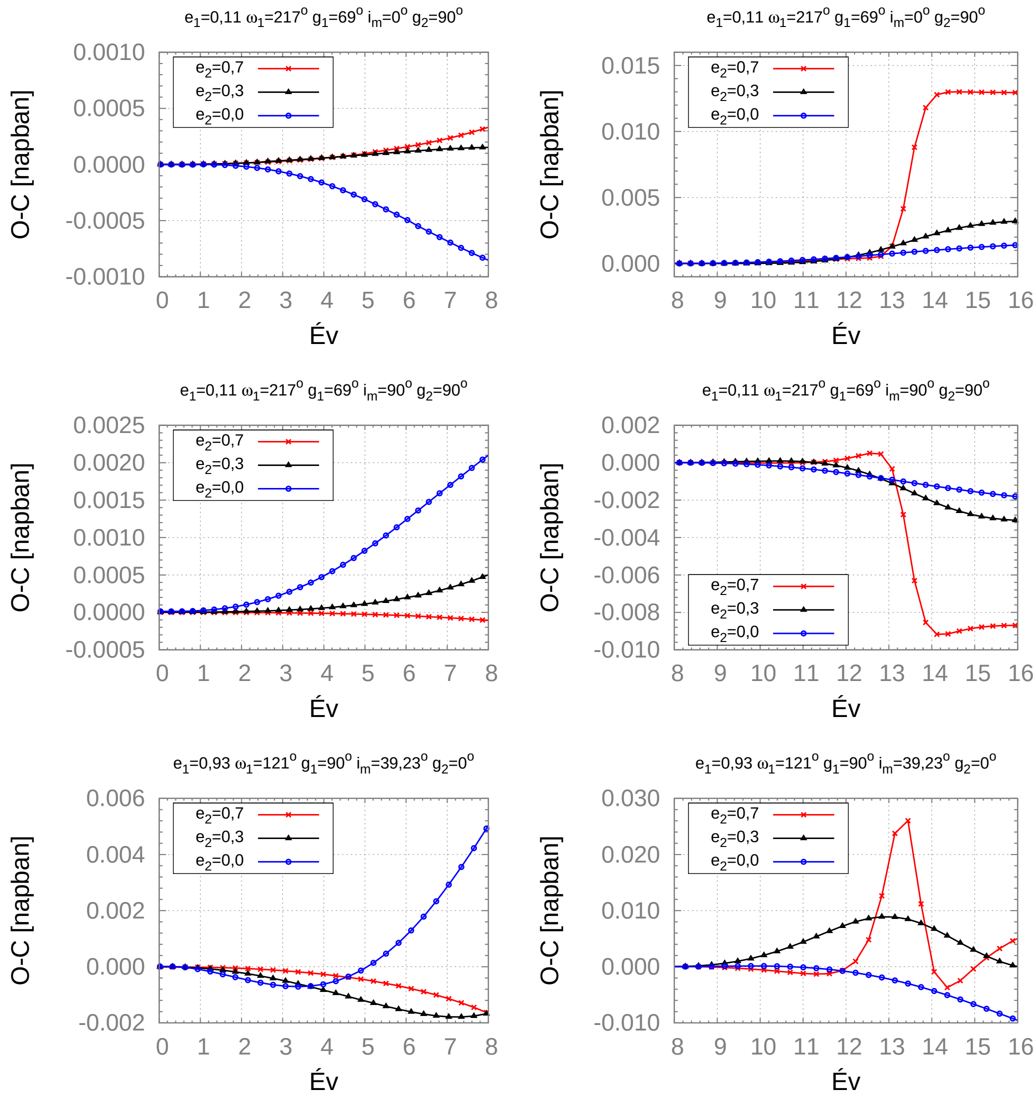
Természetesen azt nem árt szem előtt tartani, hogy a 2.9. ábra összefüggő görbéi nem egészen felelnek meg a valóságnak. Egyrészt a valóságban az $O-C$ görbe csak a fényességminimumok pillanatában értelmezett (azaz csak az ábra megjelölt pontjaiban határozható meg az értéke), azaz a fenti rendszerekben görbénként legjobb esetben is (a 95, 111 napos periódusokat figyelembe véve) maximum 25-30 pont lehetne, másrészt ezek közül feltehetőleg jó néhány észlelése időjárási, évszakos, napszakos vagy egyéb okokból meghiúsulna, illetve pontosságuk is eltérő lenne. Ebből a szempontból is hatalmas előrelépést jelentett a *Kepler*-, illetve kisebb részben a CoRoT-űrtávcső működése, hisz ezek az eszközök hosszabb-rövidebb időszakon keresztül folyamatos és pontos fotometriai észleléseket végeztek, lehetővé téve, hogy az adott időszak alatt a megfigyelt fedési kettősök, illetve csillaguk előtt átvonuló exobolygók szinte összes fényességminimumát detektálni lehessen.

2.4. Összefoglalás, az eredmények áttekintése

E fejezetben hierarchikus hármas csillagrendszerben keringő, a harmadik komponens gravitációs perturbációinak alávetett szoros, fedési kettőscsillagok fedésiminimumidőpont-változásainak analitikus leírására tett erőfeszítéseimet foglaltam össze. Számításaim során a három égitestet tömegpontnak tekintve, az égimechanikai „sztelláris háromtest-probléma” keretein belül, a tág kettős P_2 keringési idejének megfelelő időskálán fellépő fedésiminimumidőpont-változásokra koncentráltam.

- A szakirodalomban korábban elérhető addigi legteljesebb (szintén általam, még PhD-értekezésem keretében kidolgozott), a perturbációs függvény másodrendű komponenseire szorítkozó matematikai modell komoly hiányossága az volt, hogy csak körpá-

[12] A 4. fejezetben vizsgált *Kepler*-rendszerek esetében éppen ez a szituáció valósul meg a KIC 05731312 (ld. a C.3. ábrán), a KIC 08143170 (C.5. ábra) és néhány további hármas rendszer esetében is.



2.9. ábra. Soronként a 2.6. ábra első és utolsó sorában, illetve a 2.8. ábra első oszlopában feltüntetett $O-C$ diagramok első, illetve második nyolc éve. Az $O-C$ értékek kiszámításához minden egyes esetben az adott rendszernek az adott időintervallumon belüli első két tranzitja között eltelt időt vettem az adott görbére vonatkozó P_1 periódusnak.

lyán keringő szoros (fedési) kettősök esetére volt érvényes. (Ugyanakkor, a tág kettős tetszőleges excentricitású pályán mozoghatott, és úgyszintén, érvényes volt a két pályasík által bezárt tetszőleges szögre, köztes inklinációra is.) Az ehelyütt bemutatott, újonnan levezetett formula már excentrikus pályán mozgó szoros (fedési) kettősök esetében is, azaz a paramétertér teljes tartományán érvényes (leszámítva talán a gyakorlatban nem vagy csak nagyon ritkán előforduló egészen extrém excentricitások esetét). Ezen felül egyrészt a harmadrendű perturbációs komponensekkel is kibővítettem a matematikai modellt, másrészt (a másodrendű perturbációk esetében) a rövid, $\sim P_1$ időskálájú perturbációknak a fedési kettős egy periódusára vett átlagolásából származó további járulékát is figyelembe vettem. Ez utóbbi két kiterjesztés lehetővé tette, hogy a legkompaktabb hierarchikus hármas rendszerekre is alkalmazható formulákat kapjak.

- Megmutattam, hogy a fedésiminimumidőpont-változások alakjában és nagyságában mind a komponensek egymáshoz, mind a földi észlelőhöz viszonyított helyzete fontos szerepet játszik. Azaz, az analitikus formulában mind a dinamikai (a perturbációszámítási problémákban általánosan használt), mind pedig az észlelői (pl. asztrometriai) koordináta-rendszerben definiált szögpályaelemek is megjelennek.

- Megadtam további olyan szférikus geometriai összefüggéseket, amelyek lehetővé teszik a konverziót a dinamikai, illetve az észlelői rendszerbeli szögpályaelemek között, és ezáltal megteremtettem a lehetőséget arra, hogy a ténylegesen megfigyelt dinamikai fedésiminimumidőpont-változások segítségével egy hierarchikus hármas rendszer teljes térbeli konfigurációját, valamint a csillagok legfőbb dinamikai paramétereit (tömegek) meg lehessen határozni.

- Kimutattam, hogy a fedésiminimumidőpont-változásokat leíró formula szétválasztható egy az adott rendszer fizikai paramétereitől független, csak a pályák alakjától, illetve az egymáshoz, valamint az észlelőhöz viszonyított helyzetüktől függő (geometriai) összetevőre, illetve egy gyakorlatilag csak a komponensek tömegarányától, illetve a periódusoktól (vagy fizikai paraméretektől) függő komponensre. Mindez lehetővé teszi egyrészt, hogy (i) anélkül becsüljük meg egy konkrét hierarchikus hármas rendszerben a dinamikai fedésiminimumidőpont-változások várható nagyságát, hogy ismernénk a rendszer geometriai konfigurációját; másrészt, hogy (ii) általánosságban, bármely konkrét hármas rendszertől függetlenül vizsgálhassuk a fedésiminimumidőpont-változásokat leíró függvények időbeli lefutását tetszőleges geometriai konfigurációk és pályalapultságok esetére.

- Az általam kapott analitikus formula változtatás nélkül alkalmazható a központi csillaga előtt átvonuló naprendszeren kívüli bolygó, és egy távolabbi harmadik komponens esetében is, feltéve, hogy a három égitest dinamikailag kielégíti a hierarchikus hármas közelítés feltételeit. Megvizsgáltam, hogy két konkrét, viszonylag hosszú periódusú, excentrikus pályán mozgó exobolygó (CoRoT–9b, HD 80606b) esetében milyen feltételek mellett lenne kimutatható további bolygókísérő. Ennek során megmutattam, hogy minden központi csillag–exobolygó relációban, amennyiben az exobolygó periódusa, illetve a központi csillag tömege ismert, a további kísérő (bolygó) okozta tranzitidőpont-változások várható amplitúdója egyszerűen a külső objektum tömegének és keringési periódusának m_{p2}/P_2 arányától függ.

- Megvizsgáltam a fedésiminimumidőpont-változások nagyságának, illetve alakjának függését a különböző szögpályaelemektől. Ezek különféle kombinációjának megfelelően a mintázat a kvázi-szinuszostól a dupla frekvenciás szinuszoidális alakon keresztül az EKG-szerű tüske formáig terjedhet. Emellett a görbe (elsősorban a köztes inklinációtól függően) dőlhet balra, illetve jobbra is. Az amplitúdókat illetően a nagyobb excentricitások (a tüskéken felül) általában nagyobb amplitúdót eredményeznek. Ennél váratlanabb eredmény, hogy közepes köztes inklinációk esetében az amplitúdó jelentősen lecsökken az egysíkú, illetve a merőleges konfigurációjú rendszerek amplitúdójához képest.

- Az analitikus formulából számolt, illetve numerikus integrálásokkal generált fedésiminimumidőpont-változások összehasonlítása megmutatta, hogy az analitikus modell még 0,9 feletti excentricitások, illetve egymásra merőleges pályasíkok esetén is kielégítő pontosságú eredményt ad.

Az e fejezetben levezetett formulák gyakorlati alkalmazásait a 4. fejezetben tárgyalom.

3. fejezet

Fedésiminimumidőpont-változások analitikus vizsgálata hierarchikus hármas rendszerekben

II. A forgási és árapálytorzultság hatása az évszázados perturbációkra

3.1. Motiváció: a rendellenesen lassú apszismozgású fedési kettősök rejtélye

Az előző fejezetben bemutatott kutatásaim során a hierarchikus hármas rendszerek perturbációit vizsgálva mindvégig a tömegponti közelítés keretén belül maradtam. Az ebben a fejezetben ismertetett munkámban meghaladtam ezt a tárgyalásmódot. Ehelyütt azt az esetet tanulmányozom, amikor a szoros kettős két tagja közti árapály-kölcsönhatás, illetve a harmadik komponens gravitációs perturbációi együttesen alakítják a rendszer dinamikai evolúcióját. Ez irányú kutatásaim apropóját a rendellenesen lassú apszismozgású fedési kettőscsillagok rejtélye adta. Amint azt az 1.2.3. szakaszban már megemlítettem, a 2000-es évek közepére mintegy egy tucat olyan excentrikus pályán mozgó fedési kettőscsillag vált ismeretessé, amelyek esetében a fedésiminimum-időpontok változásából meghatározott apszismozgási periódus jelentősen meghaladta az elméleti megfontolásokból várt értéket. A jelenség legfőbb érdekességét az adta, hogy minden esetben olyan, rendkívül hosszú apszismozgási periódusú kettősöknél figyelték meg, ahol a viszonylag nagyobb pályaméret miatt a relativisztikus apszismozgási járulék hasonló nagyságrendű, mint az elméletileg várt klasszikus, az árapálytorzultságból származó komponens. Így például a jelenséget elsőként annak a DI Herculisnak az esetében mutatták ki (Semeniuk, 1968; Martynov és Khaliullin, 1980; Guinan és Maloney, 1985), amelyre Rudkjøbing (1959) éppen azzal hívta fel a tudományos közvélemény figyelmét, hogy rámutatott, hogy az akkoriban ismert fedési kettősök közt egyedülálló módon, a relativisztikus apszismozgási járulék nagy valószínűséggel meghaladja a klasszikus összetevőt. A kérdéssel foglalkozó asztrofizikus kutatók túlnyomó többsége ugyan a klasszikus, newtoni mechanika keretein belül kereste a probléma feloldását, de felmerült az a lehetőség is, hogy az általános relativitáselméletet kellene felváltani egy alternatív gravitációelmélettel. A J. W. Moffat kanadai kutató által megalkotott úgynevezett „nemszimmetrikus gravitációelméletben" az akkoriban ismert rendellenes apszismozgású rendszereket a szerző a modell egyes paramétereinek kalibrációjához használta

(Moffat, 1979, 1983, 1984, 1986; Moffat és Woolgar, 1985).

Az ellentmondás feloldására tett egyéb, a klasszikus mechanika keretén belül maradó megoldási javaslatok összefoglalása megtalálható Claret (1998) cikkében. Ezek közül kettőt érdemes kiemelni. Azt korai cikkében már Martynov és Khaliullin (1980) is felvetette, hogy a DI Herculis rendellenesen lassú apszismozgását egy távolabbi, harmadik komponens gravitációs perturbációi okozhatják. A továbbiakban Khodykin és Vedeneyev (1997) és Khodykin és mktsai. (2004) konkrét számításokat is végeztek, hogy milyen orbitális, illetve fizikai paraméterekkel rendelkező harmadik kísérő esetén hozható összhangba a megfigyelt és az elméleti apszismozgási ráta mind a DI Herculis, mind az AS Camelopardalis esetében.

Mivel a rendellenesen lassú apszismozgást mutató rendszereket fiatal, korai típusú csillagok alkotják, amelyek esetében elképzelhető, hogy a kettős életkora kisebb a tipikus szinkronizációs időskálánál (lásd pl. Zahn, 1977), felmerült az a lehetőség is, hogy ezeknél a csillagoknál a csillagok egyenlítői síkja nem esik egybe a pályasíkkal, és ez eredményezheti az eredő lassú apszismozgási rátát. E modellt matematikailag Shakura (1985), Hegedüs és Nuspl (1986), illetve Company és mktsai. (1988) dolgozták ki. Azonban, amint azt Maloney és mktsai. (1989) hangsúlyozták, az AS Camelopardalis radiálissebesség-mérései (Hilditch, 1972b) szinkronizált tengelyforgást valószínűsítettek. A DI Herculis esetében pedig Claret (1998) szintén elvetette ezt a hipotézist.[1]

Claret (1998) azonban elsőként arra is felhívta a figyelmet, hogy mivel a jelentős relativisztikus apszismozgási járulékú excentrikus kettőscsillagok apszismozgási periódusa szükségszerűen hosszú, több száz vagy akár több ezer év, adatmintavételezési és egyéb kiválasztási effektusok is erőteljesen és szisztematikusan befolyásolhatják az észlelésekből kikövetkeztetett apszismozgási periódusokat. E csillagok apszismozgási rátáját ugyanis a legjobb esetben is alig egy évszazad hosszúságú, de többnyire még rövidebb, tehát a pályaellipszis körbefordulási ciklusának csupán egy tizedét vagy még kisebb hányadát lefedő, ráadásul meglehetősen inhomogén, és nagyon eltérő pontossággal meghatározott fedésiminimumidőpont-változásokból vagyunk kénytelenek meghatározni. Ráadásul a problémát tovább bonyolítja, hogy e kettősök erősen excentrikus volta miatt a fő-, illetve a mellékminimumok mélysége még akkor is erősen eltérő lehet, ha különben hasonló felületi fényességű csillagok alkotják az adott fedési kettőst. Ennek folyományaként a fő- és a mellékminimumok bekövetkezésének időbeli változását gyakran csak számottevően eltérő pontossággal lehet meghatározni, vagy akár a mellékminimumokról a kis amplitúdó miatt nem, vagy csak korlátozott mértékben érhető el észlelés. Azonban, még ha megfelelő mennyiségű és minőségű fedésiminimum-időpont állna is rendelkezésre egy adott kettős fő- és mellékminimumaiból is, a meghatározott apszismozgási periódus pontosságát akkor is nagy mértékben befolyásolja a pályaellipszis pillanatnyi helyzete. Amint azt Claret (1998) megmutatta, a legkedvezőtlenebb helyzet az, amikor a pálya a földi észlelő számára a kistengely irányából látszik (azaz $\omega = 0^{\circ}$ vagy 180°), ekkor ugyanis az apszismozgás miatti látszólagos periódusváltozás, vagyis az $O-C$ diagram időderiváltja (amely $e\dot{\omega}\sin\omega$-val arányos) közel nulla, s ezért az apszismozgási periódus meghatározásához használt (1.27) függvény túlságosan lapos. Értelem szerint, a legkedvezőbb eset pedig az, amikor a nagytengely irányából ($\omega = \pm 90^{\circ}$) látszik a pályaellipszis.

Elsősorban Claret (1998) a fenti bekezdésben ismertetett vizsgálata adta az ötletet,

[1] E korai megállapítások pikantériája, hogy a közelmúltban mégis az bizonyosodott be, hogy mindkét fent említett kettőscsillag esetében a forgástengely dőltsége áll a lassú apszismozgás hátterében. A korábbinál újabb, sokkal érzékenyebb spektroszkópiai mérések ugyanis lehetővé tették a Rossiter–McLaughlin-effektus nagy pontosságú kimérését e kettőscsillagoknál. A DI Her esetében Albrecht és mktsai. (2009) azt találták, hogy mindkét csillag forgástengelye az Uránuszéhoz hasonlóan szinte a pályasíkban helyezkedik el, amely jelentős, negatív apszismozgási járulékot ad a szinkron keringés esetében várthoz. Az AS Cam vizsgálata során pedig újabban Pavlovski és mktsai. (2011) jutottak hasonló végkövetkeztetésre.

hogy újszerű megközelítésben, a korábbi teóriák ötvözésével keressem a választ a rendellenesen lassú apszismozgás jelenségének magyarázatára. Az e fejezetben ismertetendő tanulmányokban (Borkovits és mktsai., 2005b, 2007) a következő kérdéseket vizsgáltam: Vajon a harmadik komponens okozta (korábban csak tömegponti rendszerben kezelt) gravitációs perturbációk és az árapálytorzultság kombinált hatása miként befolyásolja az excentrikus, szoros kettős (i) fizikai vagy másképp dinamikai, illetve (ii) észlelői rendszerbeli pályaelemeinek változását, különös tekintettel a kétféle (dinamikai, illetve észlelési) apszismozgási periódusra; továbbá (iii) e perturbációk hogyan tükröződnek a fedésiminimumidőpont-változásokat leíró $O-C$ diagram matematikai alakjában, s végül a legfontosabb kérdés, (iv) hogyan befolyásolja a mérhető apszismozgási periódust, ha ennek az erősen perturbált $O-C$ diagramnak csak egy a tényleges periódushoz képest rövid szakaszából próbáljuk azt kikövetkeztetni.[2] E vizsgálat a harmadik kísérő keltette perturbációk esetét tanulmányozó, fentebb említett, korábbi szerzők munkáihoz képest abban is újszerű, hogy e korai munkákban az árapály-kölcsönhatás és a harmadik test perturbációi által okozott apszismozgást egymástól függetlennek tekintették, s az eredő apszismozgási szögsebességet az egyes járulékok algebrai összegeként számították ki. Amint rövidesen látni fogjuk, ez már a dinamikai rendszerbeli apszismozgásra sem igaz, az észlelői rendszerben pedig még összetettebb a probléma.

A továbbiakban először a szoros kettős pályaelemeinek, illetve magának az $O-C$ diagramnak az „apszis-csomóvonali", vagy másképp szekuláris perturbációit számítom ki arra az esetre, amikor a két csillag árapálytorzultsága, illetve a harmadik komponens gravitációs perturbációi együttesen befolyásolják a mozgást. Ezt követően pedig megmutatom, hogy a pályaellipszis teljes körülfordulásához képest rövid időtartamú mintavételezés a pályaellipszis akár az észlelőhöz, akár a perturbáló komponens pályájához viszonyított helyzete függvényében milyen alapvetően képes befolyásolni az észlelésekből kikövetkeztethető apszismozgási periódust. Végül azt tárgyalom, hogy milyen feltételek mellett várhatunk a megfigyelésekkel összhangban, az elméletileg jósoltnál számottevően lassabb apszismozgási rátát, és ennek milyen egyéb észlelési implikációi vannak.

3.2. Az O–C diagram matematikai alakja kombinált árapály- és harmadiktest-perturbációk esetén

A most ismertetendő kutatás során ugyanazt az eljárást követtem, amelyet a korábbi 2.2, 2.3. szakaszokban ismertettem, ezért csak az ott részletezett lépésektől való eltérésekre térek ki. A legalapvetőbb különbség, hogy mivel ehelyütt a szoros kettős két tagja közti árapály-kölcsönhatást is figyelembe vettem, a harmadik test (2.26 – 2.28) perturbáló erőkomponensei kiegészülnek az árapály-kölcsönhatás következtében fellépő további perturbáló erőkomponensekkel. A jelen vizsgálatban ezek kiszámításához az árapály-kölcsönhatás legegyszerűbb modelljét, az úgynevezett egyensúlyi árapályközelítést (lásd pl. Kopal, 1978, II. fejezet) alkalmaztam. Amennyiben még az árapálysúrlódást is elhanyagoljuk, akkor a kísérő keltette árapályerő eredőjének csak radiális komponense van, nagysága pedig csupán a két csillag pillanatnyi szeparációjától függ. A forgási torzultság figyelembevételénél hasonlóan, a legegyszerűbb modellből indultam ki, amely szerint a csillagok egyenlítője egybeesik a pályasíkkal, és a forgás szögsebessége állandó. Ezen felül az árapály- illetve a forgási torzultság kölcsönhatását leíró magasabb rendű tagokat szintén elhanyagoltam. Eb-

[2] Az előző fejezetben tárgyalt kutatásokhoz hasonlóan, az itt hivatkozott többszerzős cikkekben leírt, és alábbiakban ismertetendő vizsgálatokat is teljes egészében magam végeztem. A társszerzők tevékenysége az analitikus formulák átnézésére, néhány számítási hiba felismerésére, illetve egyes ábrák megrajzolására korlátozódott.

ben az esetben a forgási torzultság is csak radiális erőkomponenst ad, és így a (2.10 – 2.15) egyenletekben megjelenő perturbáló erők egyedül az

$$f_{\mathrm{Tr}} = -\frac{Gm_{\mathrm{AB}}}{\rho_1^4}\left(\frac{\mathcal{T}}{\rho_1^3}+\mathcal{R}\right), \tag{3.1}$$

járulékkal egészülnek ki, ahol

$$\mathcal{T} = 6\left(\frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}}k_2^{(\mathrm{A})}R_{\mathrm{A}}^5+\frac{m_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{B}}}k_2^{(\mathrm{B})}R_{\mathrm{B}}^5\right), \tag{3.2}$$

$$\mathcal{R} = \frac{k_2^{(\mathrm{A})}R_{\mathrm{A}}^5 s_{\mathrm{A}}^2}{Gm_{\mathrm{A}}}+\frac{k_2^{(\mathrm{B})}R_{\mathrm{B}}^5 s_{\mathrm{B}}^2}{Gm_{\mathrm{B}}} \tag{3.3}$$

a (legalacsonyabb rendű) árapály-, illetve forgási járulékot jelöli, továbbá k_2, R, illetve s rendre az egyes csillagok első apszismozgási állandóját, sugarát, illetve forgási szögsebességét jelöli.

Ezen a ponton szükséges megemlíteni, hogy amint azt az előző, 3.1. szakaszban megemlítettem, az újabb kutatások azt igazolták, hogy mind a DI Herculis, mind pedig a most tárgyalandó munkában esettanulmányként szereplő AS Camelopardalis rendszerében a csillagok egyenlítői síkja messze nem esik egybe a pályasíkkal, s ily módon a fenti egyszerűsített rotációs modell nem alkalmazható. Ugyanakkor hangsúlyoznom kell, hogy ezirányú vizsgálataim idején (2004 – 2007) ezek a kutatási eredmények még nem voltak ismertek, hanem éppen ellenkezőleg, ezekben a kettősökben is a szinkronizált tengelyforgást tartották valószínűnek. Ezen felül a most ismertetendő számítási eredményeket és a belőle levont következtetéseket ezek az újabb felfedezések csak annyiban befolyásolják, hogy éppen e két konkrét excentrikus kettősre nem alkalmazható a kapott eredmény, de ettől függetlenül, minden más olyan excentrikus kettősre, amelyben a komponensek tengelyforgása szinkronizált, eredményeim természetesen érvényesek. Ehhez még azt is hozzá lehet tenni, hogy a most következő eredmények dőlt forgástengely esetére való általánosítása különösebb nehézséget nem okozna. Természetesen egy ilyen általánosítás nem egy akadémiai doktori értekezés keretén belül végzendő el, azonban a teljesség kedvéért ezen a ponton megadom a forgástengely tetszőleges helyzetére érvényes perturbálóerő-komponenseket:

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{Tr}} &= -\frac{Gm_{\mathrm{AB}}}{\rho_1^4}\left\{\frac{\mathcal{T}}{\rho_1^3}+\mathcal{R}_{\mathrm{A}}\left[\frac{3}{2}\cos^2 i_{\mathrm{rA}}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sin^2 i_{\mathrm{rA}}\cos(2u-2n_{\mathrm{rA}})\right]\right.\\ &\left.\quad+\mathcal{R}_{\mathrm{B}}\left[\frac{3}{2}\cos^2 i_{\mathrm{rB}}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sin^2 i_{\mathrm{rB}}\cos(2u-2n_{\mathrm{rB}})\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$f_{\mathrm{Tt}} = -\frac{Gm_{\mathrm{AB}}}{\rho_1^4}\left[\mathcal{R}_{\mathrm{A}}\sin^2 i_{\mathrm{rA}}\sin(2u-2n_{\mathrm{rA}})+\mathcal{R}_{\mathrm{B}}\sin^2 i_{\mathrm{rB}}\sin(2u-2n_{\mathrm{rB}})\right], \tag{3.5}$$

$$f_{\mathrm{Tn}} = -\frac{Gm_{\mathrm{AB}}}{\rho_1^4}\left[\mathcal{R}_{\mathrm{A}}\sin 2i_{\mathrm{rA}}\sin(u-n_{\mathrm{rA}})+\mathcal{R}_{\mathrm{B}}\sin 2i_{\mathrm{rB}}\sin(u-n_{\mathrm{rB}})\right], \tag{3.6}$$

ahol $i_{\mathrm{rA,B}}$, illetve $n_{\mathrm{rA,B}}$ a korábban tárgyalt háromtest-probléma i_{m}, n_1 szögeivel analóg mennyiségek, amelyeket szemléletesen úgy kapunk meg, hogy a tág pálya síkját az adott csillag egyenlítői síkjával helyettesítjük.

Az egyes pályaelemekre vonatkozó perturbációs egyenletek kiszámítása ezt követően ugyanúgy történik, mint ahogy azt a 2.3. szakaszban tárgyaltam, csupán, mivel ezúttal az „apszis-csomóvonali” időskálájú perturbációkat kívánjuk vizsgálni, az egyenleteket még egyszer átlagoljuk, mégpedig a tág pálya v_2 valódi anomáliája szerint. Az ily módon kapott szekuláris perturbációs egyenletek, a harmadik test perturbációit a kvadrupól járulékig figyelembe véve a következők:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}u} &= 0, && (3.7)\\
\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}u} &= A_\mathrm{G}(1-e_1^2)^{1/2}e_1\left(1-I^2\right)\sin 2g_1, && (3.8)\\
\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}u} &= A_\mathrm{G}(1-e_1^2)^{-1/2}\left[I^2-\frac{1}{5}\left(1-e_1^2\right)+\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)\frac{G_1}{G_2}I\right.\\
&\left.+\left(1-e_1^2-I^2-e_1^2\frac{G_1}{G_2}I\right)\cos 2g_1\right]+\frac{5\mathcal{T}}{2a^5}\frac{1+\frac{3}{2}e_1^2+\frac{1}{8}e_1^4}{(1-e_1^2)^5}\\
&+\frac{\mathcal{R}_\mathrm{A}}{a_1^2(1-e_1^2)^2}\left[\frac{3}{2}\left(I_\mathrm{rA}^2-\frac{1}{3}\right)+I_\mathrm{rA}\sin i_\mathrm{rA}\cot j_1\cos(n_\mathrm{rA}-n_1)\right], && (3.9)\\
\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}u} &= -A_\mathrm{G}(1-e_1^2)^{-1/2}I\frac{C}{G_2}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}e_1^2-e_1^2\cos 2g_1\right)\\
&-\frac{\mathcal{R}_\mathrm{A}}{a_1^2(1-e_1^2)^2}I_\mathrm{rA}\frac{\sin i_\mathrm{rA}}{\sin j_1}\cos(n_\mathrm{rA}-n_1), && (3.10)\\
\frac{\mathrm{d}j_1}{\mathrm{d}u} &= -A_\mathrm{G}(1-e^2)^{-1/2}I\sin i_\mathrm{m}e_1^2\sin 2g_1-\frac{\mathcal{R}_\mathrm{A}}{a_1^2(1-e_1^2)^2}I_\mathrm{rA}\sin i_\mathrm{rA}\sin(n_\mathrm{rA}-n_1), \\
& && (3.11)\\
\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}u} &= A_\mathrm{G}(1-e_1^2)^{1/2}\left[\frac{3}{5}\left(I^2-\frac{1}{3}\right)+\left(1-I^2\right)\cos 2g_1\right]\\
&+\frac{5\mathcal{T}}{2a_1^5}\frac{1+\frac{3}{2}e_1^2+\frac{1}{8}e_1^4}{(1-e_1^2)^5}+\frac{\mathcal{R}_\mathrm{A}}{a_1^2(1-e_1^2)^2}\frac{3}{2}\left(I_\mathrm{rA}^2-\frac{1}{3}\right)-\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}u}\cos i_1, && (3.12)\\
\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}u} &= A_\mathrm{G}(1-e_1^2)^{-1/2}\frac{I\sin i_\mathrm{m}}{\sin i_1}\left[\frac{2}{5}(1-e_1^2)\cos n_1+2e^2\sin\omega_1\sin g_1\right]\\
&-\frac{\mathcal{R}_\mathrm{A}}{a_1^2(1-e_1^2)^2}I_\mathrm{rA}\frac{\sin i_\mathrm{rA}}{\sin i_1}\cos n_\mathrm{rA} && (3.13)\\
&= \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}u}\frac{\sin j_1}{\sin i_1}\cos n_1+\frac{\mathrm{d}j_1}{\mathrm{d}u}\frac{1}{\sin i_1}\sin n_1,\\
\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}u} &= A_\mathrm{G}(1-e^2)^{-1/2}I\sin i_\mathrm{m}\left[-\frac{2}{5}(1-e_1^2)\sin n_1+2e_1^2\cos\omega_1\sin g_1\right]\\
&+\frac{\mathcal{R}_\mathrm{A}}{a_1^2(1-e_1^2)^2}I_\mathrm{rA}\sin i_\mathrm{rA}\sin n_\mathrm{rA} && (3.14)\\
&= -\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}u}\sin j_1\sin n_1+\frac{\mathrm{d}j_1}{\mathrm{d}u}\cos n_1,
\end{aligned}
$$

ahol

$$
A_\mathrm{G}=\frac{P_1}{P_2}A_\mathrm{L1}=\frac{15}{8}\frac{m_\mathrm{C}}{m_\mathrm{ABC}}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2\left(1-e_2^2\right)^{-3/2}, \tag{3.15}
$$

valamint az egyszerűség kedvéért a B csillagra vonatkozó forgási tagokat nem írtam ki. Fontos szem előtt tartani, hogy a fenti egyenletekben nem az eredeti pályaelemek, hanem azok kétszeresen, tehát mind a szűk, mind a tág pályán való keringésre átlagolt megfelelői szerepelnek. A továbbiakban azonban ezt a módosult jelentést nem hangsúlyozva egyszerűen mint pályaelemekre fogok hivatkozni rájuk.

A fenti egyenletek az árapály-potenciállal kiegészített szekuláris Hamilton-függvényből is levezethetők. Mivel az árapályjárulék bevezetésével nem lép fel újabb változó, a kvadrupól probléma a tömegponti esethez hasonlóan továbbra is egy szabadsági fokú marad, és ezért a rendszer továbbra is integrálható. Azonban szemben a tömegponti szekuláris perturbációk esetével, ezúttal zárt alakú, analitikus megoldás nem ismeretes. Így vizsgálataimban a megoldást a fokozatos közelítések módszerének egy speciális alkalmazásával állítottam elő.

A megoldáshoz a (3.9) egyenlet felhasználásával új független változónak a g_1 dinamikai periasztronargumentumot vezetjük be. Ekkor a többi pályaelem g_1 függvényében felírt perturbációs egyenletei a következő alakot öltik:

$$\frac{1}{e_1}\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}g_1} = \frac{B_\mathrm{o}\sin 2g_1}{A+B\cos 2g_1}, \tag{3.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}g_1} = \frac{A_\mathrm{h}+B_\mathrm{h}\cos 2g_1}{A+B\cos 2g_1}, \tag{3.17}$$

$$\cot j_1\frac{\mathrm{d}j_1}{\mathrm{d}g_1} = -\frac{B_\mathrm{n}\sin 2g_1}{A+B\cos 2g_1}, \tag{3.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}g_1} = \frac{A_\lambda+B_\lambda\cos 2g_1}{A+B\cos 2g_1}, \tag{3.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}g_1} = \frac{A_\mathrm{o}+B_\mathrm{o}\cos 2g_1}{A+B\cos 2g_1}-\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}g_1}\cos i_1, \tag{3.20}$$

$$= 1+\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}g_1}\cos j_1-\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}g_1}\cos i_1, \tag{3.21}$$

$$= 1+\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}g_1}, \tag{3.22}$$

míg g_1 (szekuláris) időfüggését a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}g_1} = \frac{1}{A+B\cos 2g_1}-\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}g_1}\cos i_1 \tag{3.23}$$

egyenlet fogja megadni. A fenti egyenletekben szereplő különböző indexekkel ellátott A_x és B_x együtthatók elsősorban a szekuláris e_1 excentricitás, illetve i_m köztes inklináció alábbi függvényei:

$$A = A_\mathrm{GR}+A_\mathrm{TR}+A_\mathrm{3b}, \tag{3.24}$$

$$A_\mathrm{GR} = 3\frac{Gm_\mathrm{AB}}{c^2a_1\left(1-e_1^2\right)} \tag{3.25}$$

$$A_\mathrm{TR} = \frac{5\mathcal{T}}{2a_1^5}\frac{1+\frac{3}{2}e_1^2+\frac{1}{8}e_1^4}{\left(1-e_1^2\right)^5}+\frac{\mathcal{R}}{a_1^2\left(1-e_1^2\right)^2}, \tag{3.26}$$

$$A_\mathrm{3b} = A_\mathrm{G}(1-e_1^2)^{-1/2}\left[I^2-\frac{1}{5}\left(1-e_1^2\right)+\frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)\frac{G_1}{G_2}I\right], \tag{3.27}$$

$$B = A_\mathrm{G}(1-e_1^2)^{-1/2}\left(1-e_1^2-I^2-e_1^2\frac{G_1}{G_2}I\right), \tag{3.28}$$

$$A_\mathrm{o} = A+A_\mathrm{h}\cos j_1 = A_\mathrm{GR}+A_\mathrm{TR}+\frac{3}{5}A_\mathrm{G}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}\left(I^2-\frac{1}{3}\right), \tag{3.29}$$

$$B_\mathrm{o} = B+B_\mathrm{h}\cos j_1 = A_\mathrm{G}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}\sin^2 i_\mathrm{m}, \tag{3.30}$$

$$A_\mathrm{h} = -\frac{2}{5}A_\mathrm{G}\frac{1+\frac{3}{2}e_1^2}{\left(1-e_1^2\right)^{1/2}}\frac{C}{G_2}I, \tag{3.31}$$

$$B_\mathrm{h} = A_\mathrm{G}\frac{e_1^2}{\left(1-e_1^2\right)^{1/2}}\frac{C}{G_2}I, \tag{3.32}$$

$$B_\mathrm{n} = B_\mathrm{h}\cos j_1 = A_\mathrm{G}\frac{e_1^2}{\left(1-e_1^2\right)^{1/2}}\left(I^2+\frac{G_1}{G_2}I\right). \tag{3.33}$$

Végezetül az ehelyütt λ_1-gyel jelölt, a pálya menti mozgás perturbált, nem egyenletes sebességéből adódó, közvetlen perturbációs járulék szekuláris részében megjelenő két analóg mennyiség:[3]

$$
\begin{aligned}
A_\lambda &= A_{\lambda\mathrm{TR}} + A_{\lambda 3\mathrm{b}}, & (3.34)\\
A_{\lambda\mathrm{TR}} &= -\frac{2}{a_1^5}\left[\mathcal{T}_2\frac{1+\frac{37}{8}e_1^2+\frac{59}{16}e_1^4+\frac{113}{32}e_1^6}{\left(1-e_1^2\right)^5}+\mathcal{R}\frac{1+\frac{5}{4}e_1^2\left(1+e_1^2+e_1^4\right)}{\left(1-e_1^2\right)^2}\right], & (3.35)\\
A_{\lambda 3\mathrm{b}} &= \frac{4}{5}A_\mathrm{G}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}\left(1+\frac{25}{8}e_1^2+\frac{15}{8}e_1^4+\frac{95}{64}e_1^6\right)\left(I^2-\frac{1}{3}\right), & (3.36)\\
B_\lambda &= \frac{51}{20}A_\mathrm{G}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}e_1^2\left(1+\frac{31}{51}e_1^2+\frac{23}{48}e_1^4\right)\sin^2 i_\mathrm{m}. & (3.37)
\end{aligned}
$$

3.2.1. Megoldás éléről látszó belső pálya és kis excentricitásváltozások esetén

A fokozatos közelítések módszere értelmében a (3.16 – 3.23) jobb oldalán lévő mennyiségeket a független változónak használt g_1 kivételével, az első lépésben állandónak tekintjük. Ebben az esetben a fenti differenciálegyenleteknek zárt alakban könnyen felírható analitikus megoldása van. A megoldás jellegét az

$$\epsilon = \frac{B}{A} \tag{3.38}$$

arány határozza meg. Amennyiben $\epsilon^2 < 1$, a differenciálegyenletek mindenhol regulárisak. Könnyen látható azonban, hogy a (3.16) – (3.23) egyenletek $\epsilon^2 \geq 1$ esetén g_1 bizonyos értékeire szingulárissá válnak. Amennyiben a nem a harmadik testtől származó apszismozgási járulékot figyelmen kívül hagyjuk, ez az

$$I^2 + \frac{1}{5}\left(1+4e_1^2\right)\frac{G_1}{G_2}I = \frac{3}{5}\left(1-e_1^2\right) \tag{3.39}$$

feltételi egyenletet adja, amely nem más, mint a Kozai–Lidov-jelenség „bekapcsolási” feltétele. Az első esetben a megoldás trigonometrikus, a másodikban viszont hiperbolikus függvények formájában adódik.

A jelen vizsgálatban csak az $\epsilon^2 < 1$ esettel foglalkoztam,[4] ugyanis a vizsgálódás idejében még egyetlen olyan fedési kettőscsillag sem volt ismert, ahol a harmadik komponens gravitációs perturbációiból származó apszismozgási járulék felülmúlta, vagy akár csak megközelítette volna a klasszikus (árapály), illetve a relativisztikus járulék nagyságát. Ezért jó okom volt feltételezni, hogy a rendellenesen lassú apszismozgású rendszerek esetében, ha van is perturbáló harmadik komponens, ugyanez lenne a helyzet.

A megoldás első lépésében azt is feltesszük, hogy a szoros, fedési kettős pályájára közel az éléről látunk rá, azaz $i_1 \simeq 90°$. Ez a feltevés a gyakorlatban nem jelent további megszorítást, ugyanis azokban a kettősökben, amelyekben a relativisztikus apszismozgási járulék összemérhető a klasszikussal, a csillagok fajlagos sugara szükségképpen viszonylag kis érték, és ezért fedéseket csak akkor észlelhetünk, ha a pályasík a Földről nézve valóban

[3] Az alábbi (3.36), illetve (3.37) egyenletekben – nem meglepő módon – a korábban, a fedésiminimum-változások harmadik test általi közvetlen perturbációi hosszú (P_2) időskálájú komponenseinek kiszámítása kapcsán a (2.58, 2.59) egyenletek által definiált $f_1(e_1)$ és $f_2(e_1)$ függvények jelennek meg újra. A jobb áttekinthetőség érdekében azonban ehelyütt újra kiírtam a teljes kifejezéseket.

[4] Könnyen belátható, hogy ez maga után vonja az $A > 0$ feltétel teljesülését is. Ezt a későbbiekben ki is fogjuk használni, például a (3.55) kifejezés második sorában.

csaknem az éléről látszik. Ebben az esetben a (3.23) egyenlet jobb oldalán a második tag eltűnik, s a (3.16 – 3.23) egyenletek megoldása a következő:

$$u = u_0 + \frac{1}{\sqrt{A^2 - B^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan g_1 \right)_{g_{10}}^{g_1}, \tag{3.40}$$

$$e_1 = e_{10} \left(\frac{1 + \epsilon \cos 2g_1}{1 + \epsilon \cos 2g_{10}} \right)^{-\frac{1}{2}\frac{B_\mathrm{o}}{B}}, \tag{3.41}$$

$$h_1 = h_{10} + \frac{B_\mathrm{h}}{B}(g_1 - g_{10}) + \left(A_\mathrm{h} - \frac{B_\mathrm{h}}{\epsilon} \right)(u - u_0), \tag{3.42}$$

$$\sin j_1 = \sin j_{10} \left(\frac{1 + \epsilon \cos 2g_1}{1 + \epsilon \cos 2g_{10}} \right)^{\frac{1}{2}\frac{B_\mathrm{n}}{B}}, \tag{3.43}$$

$$\lambda_1 = \lambda_{10} + \frac{B_\lambda}{B}(g_1 - g_{10}) + \left(A_\lambda - \frac{B_\lambda}{\epsilon} \right)(u - u_0), \tag{3.44}$$

$$\omega_1 = \omega_{10} + \frac{B_\mathrm{o}}{B}(g_1 - g_{10}) + \left(A_\mathrm{o} - \frac{B_\mathrm{o}}{\epsilon} \right)(u - u_0), \tag{3.45}$$

$$= \omega_{10} - g_{10} - h_{10} \cos j_{10} + g_1 + h_1 \cos j_{10}. \tag{3.46}$$

Bevezetve a

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \arctan \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan g_1 \right) \\ &= g_1 + \arctan \left(\frac{-\epsilon \sin 2g_1}{1 + \sqrt{1-\epsilon^2} + \epsilon \cos 2g_1} \right) \\ &= \mathcal{G}_0 + \Pi(u - u_0) \end{aligned} \tag{3.47}$$

változót, amelyet a Kepler-problémával való formális (és részleges) analógia alapján „közepes dinamikai periasztronargumentum"-nak nevezhetünk, könnyen látható, hogy

$$\Pi = \sqrt{A^2 - B^2} \tag{3.48}$$

a szoros kettős egy periódusára átlagolt szekuláris apszismozgási ráta. E változót felhasználva a fenti pályaelemek időfüggése az alábbi alakban kapható meg:

$$g_1 = \arctan \left(\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \tan \mathcal{G} \right), \tag{3.49}$$

$$e_1 = e_{10} \sqrt{\left(\frac{1 - \epsilon \cos 2\mathcal{G}}{1 - \epsilon \cos 2\mathcal{G}_0} \right)^{\frac{B_\mathrm{o}}{B}}}, \tag{3.50}$$

$$\sin j_1 = \sin j_{10} \sqrt{\left(\frac{1 - \epsilon \cos 2\mathcal{G}}{1 - \epsilon \cos 2\mathcal{G}_0} \right)^{-\frac{B_\mathrm{n}}{B}}}, \tag{3.51}$$

$$h_1 = h_0 + \frac{B_\mathrm{h}}{B} \arctan \left(\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \tan \mathcal{G} \right) + \left(A_\mathrm{h} - \frac{B_\mathrm{h}}{\epsilon} \right) \Pi^{-1} \mathcal{G}, \tag{3.52}$$

továbbá,

$$\mathcal{G}_0 = \arctan \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \tan g_{10} \right), \tag{3.53}$$

$$h_0 = h_{10} - \frac{B_\mathrm{h}}{B} g_{10} - \left(A_\mathrm{h} - \frac{B_\mathrm{h}}{\epsilon} \right) \Pi^{-1} \mathcal{G}_0. \tag{3.54}$$

A nem részletezett többi, számunkra releváns pályaelem esetében a felírás a (3.52, 3.54) kifejezésekkel azonos formában, az indexek értelemszerű megváltoztatásával kapható meg.[5]

A fenti megoldásokból a (h_1) dinamikai csomóvonal-hosszúság, illetve az (ω_1) észlelési rendszerbeli pericentrumargumentum cirkulációs komponensének közepes szekuláris szögsebességére

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{B_\mathrm{h}}{B}\Pi + \frac{BA_\mathrm{h}-AB_\mathrm{h}}{B}\\ &= A_\mathrm{h} - B_\mathrm{h}\frac{\epsilon}{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}\\ &\approx -\frac{2}{5}\frac{A_\mathrm{G}}{\sqrt{1-e_1^2}}\frac{C}{G_2}I\left[1+e_1^2\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\epsilon+\frac{5}{16}\epsilon^3+...\right)\right],\end{aligned}\tag{3.55}$$

illetve

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \frac{B_\mathrm{o}}{B}\Pi + \frac{BA_\mathrm{o}-AB_\mathrm{o}}{B}\\ &= \Pi + \mathcal{H}\cos j_{10}\end{aligned}\tag{3.56}$$

adódik. Hasonlóképpen, a közvetlen perturbációkból származó, időben állandó nagyságú, analóg kifejezés:

$$\Lambda = A_\lambda - B_\lambda\frac{\epsilon}{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}.\tag{3.57}$$

A h_1 dinamikai csomóvonal-hosszúság szögsebességének harmadik sorában szereplő kifejezésének jobb oldali első tagja a tömegponti sztelláris háromtest-problémából ismert közelítő formulát (lásd pl. Söderhjelm, 1975) adja vissza. Az árapály-perturbációk hatása közvetve, az ϵ paraméteren keresztül jelentkezik. Az egyenlet alakja azt mutatja, hogy amennyiben a rendszerben jelen van egy, a szoros kettős pályasíkjától különböző síkban keringő harmadik komponens, és a szoros kettős excentrikus pályán mozog, akkor az árapályerők közvetve még akkor is befolyásolják a pályasík precesszióját, ha azoknak csak a pályasíkban ható komponensük van. Ugyanakkor, első ránézésre meglepő módon, minél jelentősebb az árapályerők járuléka a harmadik komponens járulékához képest, annál kevésbé érvényesül az árapályerők befolyásoló hatása (hiszen ilyenkor ϵ egyre kisebb értéket vesz fel). Ezen felül az is jól látható, hogy direkt keringés esetén ($\cos i_\mathrm{m} > 0$) a dinamikai csomóvonal hátráló, ellenkező esetben előre haladó mozgást végez. Mindezek fényében az észlelői rendszerbeli ω_1 pericentrumargumentum szögsebességét megadó (3.56) kifejezés második sorából közvetlenül látható, hogy a szekuláris mozgás átlagos szögsebessége, amennyiben a pályasík precesszál, direkt vagy retrográd keringéstől függetlenül, általában kisebb mint a dinamikai pericentrumargumentum átlagos szekuláris szögsebessége, és ily módon az észlelt apszismozgási periódus hosszabb, mint a dinamikai.

A pályaelemek, illetve az $O-C$-t közvetlenül érintő pálya menti mozgás szekuláris perturbációinak ismeretében a fedésiminimumidőpont-változások „apszis-csomóvonali", vagy szekuláris időskálájú változásai közvetlenül felírhatók. E függvényt ehelyütt, a (3.49, 3.50) kifejezések (ϵ-szerinti) Taylor-sorfejtése, illetve (3.45) figyelembevételével az időben lineáris

[5]Vegyük észre azt is, hogy e_1, $\sin j_1$ esetében a hatványkitevő előjele változott!

közepes dinamikai periasztronargumentum ($\mathcal{G}$) trigonometrikus függvényeivel adjuk meg:

$$
\begin{aligned}
\frac{2\pi}{P_1}\Delta_{\mathrm{sec}} &= \pm 2e_0\cos[\omega_0+(1+\mathcal{U})\mathcal{G}]+\frac{3}{4}e_0^2\sin[2\omega_0+2(1+\mathcal{U})\mathcal{G}] \\
&\mp\frac{1}{3}e_0^3\cos[3\omega_0+3(1+\mathcal{U})\mathcal{G}] \\
&\pm\frac{1}{2}e_0\epsilon_1\cos[\omega_0+(3+\mathcal{U})\mathcal{G}]\mp\frac{3}{2}e_0\epsilon_1\cos[\omega_0-(1-\mathcal{U})\mathcal{G}] \\
&\mp e_0\left[\frac{3}{8}\epsilon_1^2+\frac{1}{4}\epsilon\epsilon_1\right]\cos[\omega_0+(1+\mathcal{U})\mathcal{G}] \\
&\pm e_0\left[\frac{9}{16}\epsilon_1^2-\frac{3}{8}\epsilon\epsilon_1\right]\cos[\omega_0-(3-\mathcal{U})\mathcal{G}] \\
&\pm e_0\left[\frac{1}{16}\epsilon_1^2+\frac{1}{8}\epsilon\epsilon_1\right]\cos[\omega_0+(5+\mathcal{U})\mathcal{G}] \\
&+\frac{3}{8}e_0^2\epsilon_1\sin[2\omega_0+2(2+\mathcal{U})\mathcal{G}]-\frac{9}{8}e_0^2\epsilon_1\sin(2\omega_0+2\mathcal{U}\mathcal{G}) \\
&+\frac{51}{40}e_0^2\epsilon_1\sin 2\mathcal{G}+\mathcal{O}\left[(e_0,\epsilon,\epsilon_1)^4\right]. \qquad (3.58)
\end{aligned}
$$

ahol

$$\epsilon_1=\frac{B_\mathrm{o}}{A}, \qquad (3.59)$$

továbbá

$$
\begin{aligned}
e_0 &= e_{10}\left(1-\epsilon\cos 2\mathcal{G}_0\right)^{-B_\mathrm{o}/2B} \\
&= \frac{e_{10}}{\sqrt{(1-\epsilon\cos 2\mathcal{G}_0)^{\epsilon_1/\epsilon}}}, \qquad (3.60)\\
\omega_0 &= \omega_{10}-g_{10}-h_{10}\cos j_{10}, \qquad (3.61)
\end{aligned}
$$

illetve

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \frac{\mathcal{H}}{\Pi}\cos j_{10} \\
&= -\frac{2}{5}\frac{A_\mathrm{G}}{\Pi}\frac{I^2+\frac{G_1}{G_2}I}{\sqrt{1-e_1^2}}\left[1+e_1^2\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\frac{\epsilon}{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)\right], \qquad (3.62)
\end{aligned}
$$

amely utóbbi mennyiség az észlelési, illetve a dinamikai rendszerbeli apszismozgási szögsebesség relatív különbségét adja meg. A fenti egyenletben azt is feltettük, és ezt a feltételezést a továbbiakban is fenntartjuk, hogy mind ϵ, mind ϵ_1 ez e_1 belső excentricitással egy nagyságrendbe esik. (Tekintettel arra, hogy az alapkikötésünk szerint csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor $\epsilon^2<1$, ez a választás további indoklást nem igényel.)

A (3.58) egyenlet jobb oldalán álló kifejezés első két sora formálisan megegyezik a jól ismert, szokásos (1.26) formulával. A harmadik komponens által az e_1 excentricitásban, illetve a szögpályaelemekben keltett ciklikus perturbációk közvetett hatását a 3–5. sorok írják le, míg az utolsó sor a mozgás sebességében jelentkező közvetlen perturbációk legalacsonyabb rendű ciklikus tagja. E perturbációknak az – ebben a közelítésben – időben állandó (3.57) komponense a fenti $O-C$ kifejezésben nem jelenik meg, hanem a P_s fedési periódushoz ad egy állandó járulékot. Fontos szem előtt tartani, hogy a (3.58) kifejezés formálisan ugyanígy nézne ki akkor is, ha a fedési kettősre csak a harmadik komponens tömegponti perturbációi hatnának. A harmadik test gravitációs perturbációinak, illetve az árapálytorzultságából származó perturbációknak a kombinációja a jelen közelítés keretén belül csak közvetve, az ϵ, ϵ_1, illetve e_0, ω_0 konstansok, illetve a szögsebességek numerikus értékén keresztül jelenik meg. Ugyanakkor már ez az eredmény is mutatja, hogy amennyiben jelen van egy perturbáló harmadik test is, az $O-C$ diagram alakja, és így egyes rövidebb szakaszainak a meredeksége is jelentősen eltérhet az egyszerű, egyenletes apszismozgás esetében mérhetőtől, és maga az apszismozgás szögsebessége sem számítható egyszerűen a különböző jelenségek keltette apszismozgási szögsebességek összegeként.

A fenti kijelentés alól az egyetlen kivétel az egysíkú, azaz ($I^2=1$) eset. Ekkor $\epsilon_1=0$, és ily módon (3.58) a szokásos alakjára redukálódik. Továbbá, ebben az esetben $\omega_1=g_1+h_1$, azaz az észlelői pericentrumargumentum megegyezik a dinamikai pericentrumhosszúsággal (ilyenkor a dinamikai pericentrumargumentum önmagában nem is értelmezett), és így természetesen a kettő szögsebessége is megegyezik, mégpedig

$$(1+\mathcal{U})\Pi = A_\mathrm{o} + A_\mathrm{TR}(+A_\mathrm{GR}), \tag{3.63}$$

azaz valóban egyszerűen az egyes komponensek algebrai összege.

Másik végletként tekintsük a merőleges ($I=0$) elrendeződést. Ekkor $\mathcal{U}$ eltűnik. (Egymásra merőleges pályák esetén a pályasíkok precessziós periódusa ∞-hez tart.) Ezen felül, ebben az esetben $\epsilon=\epsilon_1$, és ennek köszönhetően (3.58) valamivel egyszerűbb alakot vesz fel. Továbbá, és ez lényegesebb, ebben a két szélső helyzetben az $O-C$ görbének egyetlen alapvető periódusa van, míg más elrendeződések esetén már nem létezik ilyen kizárólagos, fundamentális periódus. Végezetül, e két speciális konfiguráció esetén

$$\dot{\Omega}_1 \equiv 0, \tag{3.64}$$

azaz a fenti egyenletek nem csak éléről látszó, hanem bármilyen i_1 látszó inklinációjú kettőscsillagra érvényesek mindaddig, amíg az e_1 excentricitás a perturbációs egyenletek jobb oldalán állandónak tekinthető.

Az excentrikus fedési kettősök „apszis-csomóvonali” időskálájú fedésiminimumidőpont-változásait (3.58) addig írja le kielégítő pontossággal, amíg az e_1 excentricitás csak kis mértékben változik. Ehhez az szükséges, hogy akár ϵ, akár ϵ_1 kis értéket vegyen fel. Ez kétféleképpen valósulhat meg. Egyrészt, amennyiben a mozgás síkmozgás, akkor $\epsilon_1=0$, az e_1 excentricitás kezdeti értékétől függetlenül. Ebben az esetben a kvadrupól közelítés keretén belül e_1 állandó marad.[6] Másrészt, amennyiben az árapálytorzultságból származó apszismozgási ráta jelentősen meghaladja a háromtest-kölcsönhatásét, azaz $A\gg B$, akkor ez szintén az $\epsilon^2\ll 1$, $\epsilon_1\ll 1$ eredményre, és így csak kis mértékben változó e_1 excentricitáshoz vezet. Ugyanakkor, ezekben az esetekben, éppen a kis ϵ és ϵ_1 értékek miatt (3.58) extra tagjai kicsik maradnak, s így a fenti számítások gyakorlati hasznossága jelentősen mérséklődik. Azonban vegyük észre, hogy amennyiben az apszisvonal egy körbefordulási idejénél sokkal kisebb időintervallumon vizsgáljuk a mozgást (márpedig, amint a rendellenesen lassú apszismozgást mutató excentrikus fedési kettősöknél éppen ez a helyzet), akkor, ezen a kis intervallumon belül az e_1 excentricitás elég lassan változhat ahhoz, hogy a (3.58) kifejezés az észlelési intervallum teljes hosszán érvényes legyen nagyobb ϵ, ϵ_1 értékek mellett is, és így érvényes megállapításokat tehessünk arra nézve, hogy milyen észlelési következményei lehetnek a szekuláris fedésiminimumidőpont-változásokban fellépő extra perturbációs tagoknak az apszismozgási periódus meghatározására.

Mielőtt azonban ezt a diszkussziót megtennénk, a teljesség kedvéért kiterjesztjük vizsgálatainkat azokra az esetekre is, amikor a belső excentricitás többé nem csak kis mértékben változik, illetve amikor a fedési kettős pályasíkja nem pontosan éléről látszik.

[6] Amint azt már Söderhjelm (1984) megmutatta, az oktupól (harmadrendű) tárgyalásmódban e_1 továbbra is változik, de ez a kis amplitúdójú változás lényegében nem befolyásolja (3.58) használhatóságát.

3.2.2. Megoldás az általános esetben

A fokozatos közelítések módszerét követve először a (3.16), illetve a (3.23) perturbációs egyenletek jobb oldalait e_{10} körül e_1-szerinti Taylor-sorokba fejtjük, amelyek a második deriváltakig bezárólag) az alábbi kifejezésekre vezetnek:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}g_1} &= \left(\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}g_1}\right)_0 + \left[\frac{\partial}{\partial e_1}\left(\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}g_1}\right)\right]_0 \Delta e_1 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial {e_1}^2}\left(\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}g_1}\right)\right]_0 (\Delta e_1)^2 \\ &= e_{10}\epsilon_{10}\sin 2g_1 \left\{\Gamma_0 + [(1+\varepsilon_1)\Gamma_0 + \varepsilon_2\Gamma_1]_0 \frac{1}{e_{10}}\Delta e_1 \right. \\ &\quad \left. +\frac{1}{2}\left[(2\varepsilon_1+\varepsilon_3)\Gamma_0 + (2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_4)\Gamma_1 + \varepsilon_2^2\Gamma_2\right]_0 \frac{1}{e_{10}^2}(\Delta e_1)^2\right\},\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}g_1} &= \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}g_1}\right)_0 + \left[\frac{\partial}{\partial e_1}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}g_1}\right)\right]_0 \Delta e + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial {e_1}^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}g_1}\right)\right]_0 (\Delta e)^2 \\ &= A_0^{-1}\Gamma_0 + A_0^{-1}[\varepsilon_5\Gamma_0 + \varepsilon_2\Gamma_1]_0 \frac{1}{e_{10}}\Delta e_1 \\ &\quad +\frac{1}{2}A_0^{-1}\left[\varepsilon_6\Gamma_0 + (\varepsilon_4 + 2\varepsilon_2\varepsilon_5)\Gamma_1 + \varepsilon_2^2\Gamma_2\right]_0 \frac{1}{e_{10}^2}(\Delta e)^2,\end{aligned} \tag{3.66}$$

ahol

$$\varepsilon_1 = e_1\frac{1}{\epsilon_1}\frac{\mathrm{d}\epsilon_1}{\mathrm{d}e_1} = e_1\left(\frac{1}{B_\mathrm{o}}\frac{\mathrm{d}B_\mathrm{o}}{\mathrm{d}e_1} - \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}e_1}\right), \tag{3.67}$$

$$\varepsilon_2 = e_1\frac{1}{\epsilon}\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}e_1} = e_1\left(\frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}e_1} - \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}e_1}\right), \tag{3.68}$$

$$\varepsilon_3 = e_1^2\frac{1}{\epsilon_1}\frac{\mathrm{d}^2\epsilon_1}{\mathrm{d}e_1^2} = e_1^2\left(\frac{1}{B_\mathrm{o}}\frac{\mathrm{d}^2B_\mathrm{o}}{\mathrm{d}e_1^2} - \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}e_1^2}\right) - 2e_1\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}e_1}\varepsilon_1, \tag{3.69}$$

$$\varepsilon_4 = e_1^2\frac{1}{\epsilon}\frac{\mathrm{d}^2\epsilon}{\mathrm{d}e_1^2} = e_1^2\left(\frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}e_1^2} - \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}e_1^2}\right) - 2e_1\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}e_1}\varepsilon_2, \tag{3.70}$$

$$\varepsilon_5 = -e_1\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}e_1} \tag{3.71}$$

$$\varepsilon_6 = -e_1^2\frac{1}{A}\left[\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}e_1^2} - 2\left(\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}e_1}\right)^2\right], \tag{3.72}$$

illetve

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \frac{1}{1+\epsilon\cos 2g_1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{3}{8}\epsilon^4 - \left(1+\frac{3}{4}\epsilon^2\right)\epsilon\cos 2g_1 + \frac{1}{2}\left(1+\epsilon^2\right)\epsilon^2\cos 4g_1 \\ &\quad -\frac{1}{4}\epsilon^3\cos 6g_1 + \frac{1}{8}\epsilon^4\cos 8g_1 + \mathcal{O}(\epsilon^5),\end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\Gamma_1 = \epsilon\frac{\mathrm{d}\Gamma_0}{\mathrm{d}\epsilon}, \tag{3.74}$$

$$\Gamma_2 = \epsilon^2\frac{\mathrm{d}^2\Gamma_0}{\mathrm{d}\epsilon^2}, \tag{3.75}$$

amely kifejezések Fourier-sorainak együtthatói, amint az a matematikai analízisből ismeretes, a következő zárt alakokban írhatók fel:

$$
\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}, && (3.76)\\
G_{0n} &= \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\left(\frac{-\epsilon}{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)^n, && (3.77)\\
G_{10} &= \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\frac{\epsilon^2}{1-\epsilon^2}, && (3.78)\\
G_{1n} &= \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\frac{\epsilon^2}{1-\epsilon^2}\left(\frac{-\epsilon}{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)^n\left(1+n\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon^2}\right), && (3.79)\\
G_{20} &= \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\frac{\epsilon^2(1+2\epsilon^2)}{(1-\epsilon^2)^2}, && (3.80)\\
G_{2n} &= \frac{2}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\frac{\epsilon^2(1+2\epsilon^2)}{(1-\epsilon^2)^2}\left(\frac{-\epsilon}{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}\right)^n\left(1-\frac{1-4\epsilon^2}{1+2\epsilon^2}n\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon^2}+\frac{n^2}{\epsilon^2}\frac{1-\epsilon^2}{1+2\epsilon^2}\right), && (3.81)
\end{aligned}
$$

Az e_1 excentricitást az

$$e_1 = e_{10} + e_{10}\sum_{k=0}^{\infty} E_k \cos 2kg_1. \tag{3.82}$$

Fourier-sor formájában keressük, amelyhez az E_k együtthatókat a (3.65) kifejezésből határozzuk meg. Így például az E_1 együtthatóra érvényes implicit egyenlet első néhány tagja, a megfelelő trigonometriai azonosságok figyelembevételével a következő formát ölti:

$$
\begin{aligned}
-2E_1 &= D_{00} - \frac{1}{2}D_{02} + \left(D_{10} - \frac{1}{2}D_{12}\right)E_0 + \frac{1}{4}\left(D_{11} - D_{13}\right)E_1\\
&\quad -\frac{1}{2}\left(D_{10} - D_{12} + \frac{1}{2}D_{14}\right)E_2 - \frac{1}{4}\left(D_{11} - 2D_{13} + D_{15}\right)E_3\\
&\quad +D_{20}\left(E_0^2 + \frac{1}{4}E_1^2 - E_0E_2\right) + \frac{1}{2}D_{21}\left(E_0E_1 - E_0E_3\right)\\
&\quad -\frac{1}{4}D_{22}(2E_0^2 - E_0E_2) + \frac{1}{4}D_{23}E_1E_2 + ..., && (3.83)
\end{aligned}
$$

ahol az alább felsorolt további egyszerűsítő jelöléseket vezettük be:

$$
\begin{aligned}
D_{0n} &= \epsilon_1 G_{0n}, && (3.84)\\
D_{1n} &= \epsilon_1\left[(1+\varepsilon_1)G_{0n} + \varepsilon_2 G_{1n}\right], && (3.85)\\
D_{2n} &= \frac{1}{2}\epsilon_1\left[(2\varepsilon_1+\varepsilon_3)G_{0n} + (2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_4)G_{1n} + \varepsilon_2^2 G_{2n}\right]. && (3.86)
\end{aligned}
$$

Az $E_{2..n}$ együtthatókra hasonló implicit egyenletek írhatók fel, míg az integrációs állandó szerepét játszó E_0 együttható értelem szerint minden egyes iterációs lépés végén az

$$E_0 = -\sum_{k=1}^{\infty} E_k \cos 2kg_{10} \tag{3.87}$$

összefüggésből határozható meg.

A fenti együtthatókkal felírt Δe_1, $\Delta(e_1)^2$ kifejezéseket a (3.65) egyenletbe helyettesítve, egyetlen (tagonkénti) integrálással kapjuk $u(g_1)$

$$u = (\Pi^*)^{-1} g_1 + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \sin 2kg_1, \tag{3.88}$$

Fourier-sorát, ahol $(\Pi^*)^{-1}$ a perturbált dinamikai apszismozgási periódust adja meg (a fedési periódus egységében). Ennek értéke az összes, formálisan maximum hatodrendű tagot feltüntetve:

$$\begin{aligned}
(\Pi^*)^{-1} = \Pi^{-1} \Bigg\{ & 1 + \left(\varepsilon_5 + \varepsilon_2 \frac{\epsilon^2}{1-\epsilon^2}\right) E_0 \\
& + \frac{1}{2}\left[\varepsilon_6 + (\varepsilon_4 + 2\varepsilon_2\varepsilon_5)\frac{\epsilon^2}{1-\epsilon^2} + \varepsilon_2^2 \frac{\epsilon^2(1+2\epsilon^2)}{(1-\epsilon^2)^2}\right]\left(E_0^2 + \frac{1}{2}E_1^2 + \frac{1}{2}E_2^2\right) \\
& + \frac{1}{2}\varepsilon_5(G_{01}E_1 + G_{02}E_2) + \frac{1}{2}\varepsilon_2(G_{11}E_1 + G_{12}E_2) \\
& + \frac{1}{2}\left[\varepsilon_6 G_{01} + (\varepsilon_4 + 2\varepsilon_2\varepsilon_5)G_{11} + \varepsilon_2^2 G_{21}\right]\left(E_0E_1 + \frac{1}{2}E_1E_2\right) \\
& + \frac{1}{2}\left[\varepsilon_6 G_{02} + (\varepsilon_4 + 2\varepsilon_2\varepsilon_5)G_{12} + \varepsilon_2^2 G_{22}\right] E_0E_2 \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

(Tartsuk szem előtt, hogy az ehelyütt szereplő $G_{0..2n}$ együtthatók kis mértékben különböznek korábban definiált alakjuktól, ugyanis kiemeltük a nulladrendű megoldásban az apszismozgási periódusban megjelenő $1/\sqrt{1-\epsilon^2}$ szorzót.) Az $u(g_1)$ Fourier-sor további együtthatói hasonlóképpen, szintén könnyen és automatikusan felírható (felprogramozható) formában kaphatók meg.

Az általam tanulmányozott esetekben a fenti kifejezések még az ϵ paraméter viszonylag nagyobb ($\epsilon \sim 0{,}7$) értéke esetén is viszonylag gyorsan konvergáltak, és $5-6$ együttható elegendőnek bizonyult az $e_1(g_1)$, $u(g_1)$ függvények (beleértve a $(\Pi^*)^{-1}$ dinamikai apszismozgási periódust is) bőven 1%-os hibahatáron belüli pontos leírásához (a numerikus integráláshoz viszonyítva). Még nagyobb ϵ értékek esetén azonban lassul a konvergencia, s gyorsan növekszik a figyelembe veendő tagok száma. Azonban tapasztalataim szerint a sorfejtések első néhány (formálisan) alacsonyabb rendű tagja még egészen nagy ($\epsilon > 0{,}9$) értékek mellett is meglepően jól visszaadja az apszismozgási periódus, illetve a pályaelemváltozások lefutásának numerikus integrálások során kapott alakját. Ezért az alábbiakban megadom az együtthatók explicit alakját is, formálisan negyed-ötöd rendig. Ehhez a továbbiakban a $\varepsilon_{1..6}$ kifejezéseket csakúgy, mint az ϵ, ϵ_1 amplitúdóarányokat, nagyságrendileg szintén az e_1 excentricitáshoz hasonlóan kezeljük. Ekkor tehát, az összes fenti mennyiséget e_1-ben elsőrendűnek tekintve, a számítások az excentricitás negyedik rendjéig bezárólag, a következő együtthatókra vezetnek:[7]

$$\begin{aligned}
E_0 = & \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\varepsilon_1 + \frac{3}{512}\epsilon_1^2 + \frac{9}{128}\epsilon^2\right)\epsilon_1^2 + \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{64}\epsilon_1^2 - \frac{1}{32}\epsilon_1\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^2\right. \\
& \left. + \frac{3}{16}\epsilon_1^2\varepsilon_1 + \frac{3}{64}\epsilon_1^2\varepsilon_3 - \frac{1}{32}\epsilon_1\epsilon\varepsilon_1 + \frac{1}{32}\epsilon_1\epsilon\varepsilon_2\right]\epsilon_1 \cos 2g_{10} \\
& + \left[\frac{1}{16}\epsilon_1 - \frac{1}{8}\epsilon + \frac{1}{16}\epsilon_1\varepsilon_1 + \frac{1}{192}\epsilon_1^3 - \frac{1}{64}\epsilon_1^2\epsilon + \frac{1}{24}\epsilon_1\epsilon^2 - \frac{1}{16}\epsilon^3\right]\epsilon_1 \cos 4g_{10}
\end{aligned}$$

[7] Az eredeti dolgozat (Borkovits és mktsai., 2007) csak elektronikusan elérhető függelékében ugyanezeket az együtthatókat – némileg más jelöléseket alkalmazva – eggyel magasabb rendig adtam meg, amitől, terjedelmi okokból, ehelyütt eltekintek.

$$
\begin{aligned}
&+\left[\frac{1}{192}\epsilon_1^2-\frac{1}{32}\epsilon_1\epsilon+\frac{1}{24}\epsilon^2\right.\\
&\left.+\frac{1}{48}\epsilon_1^2\varepsilon_1+\frac{1}{192}\epsilon_1^2\varepsilon_3-\frac{1}{32}\epsilon_1\epsilon\varepsilon_1-\frac{1}{96}\epsilon_1\epsilon\varepsilon_2\right]\epsilon_1\cos 6g_{10}\\
&+\left[\frac{1}{3072}\epsilon_1^3-\frac{1}{256}\epsilon_1^2\epsilon+\frac{11}{768}\epsilon_1\epsilon^2-\frac{1}{64}\epsilon^3\right]\epsilon_1\cos 8g_{10} \qquad (3.90)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_1 &= -\frac{1}{2}\epsilon_1-\frac{3}{64}\left(1+4\varepsilon_1+\varepsilon_3\right)\epsilon_1^3-\frac{1}{32}\left(1+\varepsilon_1+2\varepsilon_2\right)\epsilon_1^2\epsilon-\frac{1}{8}\epsilon_1\epsilon^2\\
&-\left[\frac{1}{4}\left(1+\varepsilon_1\right)\epsilon_1+\frac{1}{64}\epsilon_1^3+\frac{1}{8}\epsilon_1\epsilon^2\right]\epsilon_1\cos 2g_{10}\\
&-\left[\frac{1}{32}\left(1+4\varepsilon_1+\varepsilon_3\right)\epsilon_1^2-\frac{1}{16}\left(1+\varepsilon_1\right)\epsilon_1\epsilon\right]\epsilon_1\cos 4g_{10}\\
&-\left(\frac{1}{384}\epsilon_1^3-\frac{1}{64}\epsilon_1^2\epsilon+\frac{1}{48}\epsilon_1\epsilon^2\right)\epsilon_1\cos 6g_{10}, \qquad (3.91)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_2 &= \frac{1}{16}\left(1+\varepsilon_1\right)\epsilon_1^2+\frac{1}{8}\epsilon_1\epsilon+\frac{1}{192}\epsilon_1^4+\frac{1}{64}\epsilon_1^3\epsilon_1+\frac{1}{24}\epsilon_1^2\epsilon^2+\frac{1}{16}\epsilon_1\epsilon^3\\
&+\left[\frac{1}{32}\left(1+4\varepsilon_1+\varepsilon_3\right)\epsilon_1^2+\frac{1}{16}\left(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\epsilon_1\epsilon\right]\epsilon_1\cos 2g_{10}\\
&+\left(\frac{1}{256}\epsilon_1^3-\frac{1}{64}\epsilon_1\epsilon^2\right)\epsilon_1\cos 4g_{10}, \qquad (3.92)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_3 &= -\frac{1}{192}\left(1+4\varepsilon_1+\varepsilon_3\right)\epsilon_1^3-\frac{1}{32}\left(1+\varepsilon_1+\frac{2}{3}\varepsilon_2\right)\epsilon_1^2\epsilon-\frac{1}{24}\epsilon_1\epsilon^2\\
&-\left(\frac{1}{384}\epsilon_1^3+\frac{1}{64}\epsilon_1^2\epsilon+\frac{1}{48}\epsilon_1\epsilon^2\right)\epsilon_1\cos 2g_{10}, \qquad (3.93)
\end{aligned}
$$

$$
E_4 = \frac{1}{3072}\epsilon_1^4+\frac{1}{256}\epsilon_1^3\epsilon+\frac{11}{768}\epsilon_1^2\epsilon^2+\frac{1}{64}\epsilon_1\epsilon^3. \qquad (3.94)
$$

A dinamikai apszismozgási periódus a fentiekkel összhangban, szintén (formálisan) negyedrendig a

$$
\begin{aligned}
(\Pi^*)^{-1} &= \Pi^{-1}\left\{1+\frac{1}{16}\varepsilon_6\epsilon_1^2+\frac{1}{4}\left(\varepsilon_2+\varepsilon_5\right)\epsilon_1\epsilon\right.\\
&\left.+\left[\varepsilon_5+\frac{1}{8}\varepsilon_6\epsilon_1^2+\frac{1}{4}\left(\varepsilon_2+\varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6\right)\epsilon_1\epsilon+\varepsilon_2\epsilon^2\right]E_0+\frac{1}{2}\varepsilon_6E_0^2\right\} \qquad (3.95)
\end{aligned}
$$

alakot veszi fel, az $u(g_1)$ Fourier-sor további együtthatói pedig ugyanebben a közelítésben:

$$
\begin{aligned}
\Pi G_1 &= -\frac{1}{2}\epsilon-\frac{1}{8}\epsilon^3-\frac{1}{4}\varepsilon_5\epsilon_1+\frac{1}{128}(\varepsilon_5-\varepsilon_6)\epsilon_1^3\\
&-\frac{1}{64}(\varepsilon_2+3\varepsilon_4+2\varepsilon_5+4\varepsilon_6)\epsilon_1^2\epsilon-\frac{1}{32}(13\varepsilon_2+5\varepsilon_5)\epsilon_1\epsilon^2\\
&-\left[\frac{1}{4}(\varepsilon_5+\varepsilon_6+\varepsilon_1\varepsilon_5)\epsilon_1+\frac{1}{2}(\varepsilon_2+\varepsilon_5)\epsilon\right]E_0-\left[\frac{1}{4}\varepsilon_6\epsilon_1+\frac{1}{4}(\varepsilon_4+\varepsilon_6)\epsilon\right]E_0^2, \qquad (3.96)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi G_2 &= \frac{1}{8}\epsilon^2+\frac{1}{16}\epsilon^4+\frac{1}{64}(\varepsilon_5+\varepsilon_6+\varepsilon_1\varepsilon_5)\epsilon_1^2+\frac{1}{32}\left(2\varepsilon_2+3\varepsilon_5\right)\epsilon_1\epsilon\\
&+\left[\frac{1}{64}\left(\varepsilon_5+3\varepsilon_6\right)\epsilon_1^2+\frac{1}{32}(2\varepsilon_2+2\varepsilon_4+3\varepsilon_5+3\varepsilon_6)\epsilon_1\epsilon+\frac{1}{8}(2\varepsilon_2+\varepsilon_5)\epsilon^2\right]E_0 \qquad (3.97)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\Pi G_3 &= -\frac{1}{24}\epsilon^3 - \frac{1}{1152}(\varepsilon_5+3\varepsilon_6)\epsilon_1^3 - \frac{1}{192}(\varepsilon_2+\varepsilon_4+2\varepsilon_5+2\varepsilon_6)\epsilon_1^2\epsilon \\
&\quad -\frac{1}{288}(15\varepsilon_2+11\varepsilon_5)\epsilon_1\epsilon^2 \qquad (3.98)\\
\Pi G_4 &= \frac{1}{64}\epsilon^4, \qquad (3.99)
\end{aligned}$$

illetve

$$\mathcal{G}_0 = \Pi^* u_0 - g_{10} - \frac{\Pi^*}{\Pi}\sum_{k=1}^{\infty} G_k \sin 2kg_{10}. \qquad (3.100)$$

A dinamikai periasztronargumentum időfüggését (3.88) invertálásával kapjuk meg. Bevezetjük a közepes perturbált dinamikai periasztronargumentumot:

$$\mathcal{G} = \Pi^*(u - u_0^*), \qquad (3.101)$$

és g_1-et eszerint haladó Fourier-sor alakjában keressük, azaz

$$g_1 = \mathcal{G} + \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n \sin 2n\mathcal{G}. \qquad (3.102)$$

A γ_n együtthatókat a

$$\gamma_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(g-\mathcal{G})\sin 2n\mathcal{G}(g_1)\frac{\mathrm{d}\mathcal{G}}{\mathrm{d}g_1}\mathrm{d}g_1 \qquad (3.103)$$

összefüggés alapján számítjuk ki, amihez a $\sin 2n\mathcal{G}(g_1)$, illetve a $\frac{\mathrm{d}\mathcal{G}}{\mathrm{d}g_1}$ függvények a (3.88) összefüggésből könnyen kiszámíthatók. Eredményül a következő együtthatókat kapjuk:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{8}\epsilon^3 + \frac{1}{4}\varepsilon_5\epsilon_1 - \frac{1}{128}(\varepsilon_5-\varepsilon_6)\epsilon_1^3 \\
&\quad +\frac{1}{128}(2\varepsilon_2+6\varepsilon_4+5\varepsilon_5+5\varepsilon_6)\epsilon_1^2\epsilon + \frac{1}{64}(20\varepsilon_2+\varepsilon_5)\epsilon_1\epsilon^2 \\
&\quad +\frac{1}{4}\left[\left(\varepsilon_5+\varepsilon_6+\varepsilon_1\varepsilon_5-\varepsilon_5^2\right)\epsilon_1 + 2\varepsilon_2\epsilon\right]E_0 + \frac{1}{4}\left(\varepsilon_6\epsilon_1+\varepsilon_4\epsilon\right)E_0^2, \qquad (3.104)\\
\gamma_2 &= \frac{1}{8}\epsilon^2 + \frac{1}{16}\epsilon^4 - \frac{1}{64}\left(\varepsilon_5+\varepsilon_6+\varepsilon_1\varepsilon_5-4\varepsilon_5^2\right)\epsilon_1^2 - \frac{1}{32}\left(2\varepsilon_2-5\varepsilon_5\right)\epsilon_1\epsilon \\
&\quad -\left[\frac{1}{64}(\varepsilon_5+3\varepsilon_6)\epsilon_1^2 + \frac{1}{32}(2\varepsilon_2+2\varepsilon_4-5\varepsilon_5-5\varepsilon_6)\epsilon_1\epsilon - \frac{1}{4}\varepsilon_2\epsilon^2\right]E_0, \qquad (3.105)\\
\gamma_3 &= \frac{1}{24}\epsilon^3 + \frac{1}{1152}(\varepsilon_5+3\varepsilon_6)\epsilon_1^3 + \frac{1}{384}(2\varepsilon_2+2\varepsilon_4-5\varepsilon_5-5\varepsilon_6)\epsilon_1^2\epsilon \\
&\quad -\frac{1}{576}(24\varepsilon_2-49\varepsilon_5)\epsilon_1\epsilon^2, \qquad (3.106)\\
\gamma_4 &= \frac{1}{64}\epsilon^4. \qquad (3.107)
\end{aligned}$$

A $\gamma_{1..4}$ együtthatók kiszámítása után az e_1 excentricitás könnyen átírható a $\mathcal{G}$ közepes perturbált dinamikai periasztronargumentum, és így közvetve a (kétszeresen átlagolt) fedési ciklusszám szerint haladó alábbi trigonometrikus sorra,

$$e_1 = e_{10}(1 + \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{E}_n \cos 2n\mathcal{G}), \qquad (3.108)$$

ahol az egyes együtthatók szintén negyedrendig:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0 &= \frac{1}{4}\epsilon_1\epsilon + \frac{1}{8}\varepsilon_5\epsilon_1^2 - \frac{1}{128}\epsilon_1^3\epsilon + \frac{1}{32}\epsilon_1^2\epsilon^2 + \frac{5}{32}\epsilon_1\epsilon^3 \\
&\quad + \left[1 + \frac{1}{4}(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\epsilon_1\epsilon + \frac{1}{8}(2\varepsilon_5+\varepsilon_6)\epsilon_1^2\right] E_0, && (3.109)\\
\mathcal{E}_1 &= -\frac{1}{2}\epsilon_1 + \frac{1}{128}(2-2\varepsilon_3-5\varepsilon_5-\varepsilon_6)\epsilon_1^3 - \frac{1}{64}(6+6\varepsilon_1+6\varepsilon_2-5\varepsilon_5)\epsilon_1^2\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon_1\epsilon^2 \\
&\quad - \left[\frac{1}{2}(1+\varepsilon_1) - \frac{1}{64}\left(\epsilon_1^2 - 6\epsilon_1\epsilon - 8\epsilon^2\right)\right]\epsilon_1 E_0 - \frac{1}{4}(2\varepsilon_1+\varepsilon_3)\epsilon_1 E_0^2, && (3.110)\\
\mathcal{E}_2 &= \frac{1}{16}(1+\varepsilon_1-2\varepsilon_5)\epsilon_1^2 - \frac{1}{8}\epsilon_1\epsilon - \frac{1}{384}\epsilon_1^4 + \frac{1}{64}\epsilon_1^3\epsilon + \frac{1}{96}\epsilon_1^2\epsilon^2 - \frac{1}{16}\epsilon_1\epsilon^3 \\
&\quad + \left[\frac{1}{16}(1+4\varepsilon_1+\varepsilon_3-4\varepsilon_5-2\varepsilon_6)\epsilon_1 - \frac{1}{8}(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\epsilon\right]\epsilon_1 E_0, && (3.111)\\
\mathcal{E}_3 &= -\frac{1}{384}(2+8\varepsilon_1+2\varepsilon_3-15\varepsilon_5-3\varepsilon_6)\epsilon_1^3 + \frac{1}{192}(6+6\varepsilon_1+2\varepsilon_2-15\varepsilon_5)\epsilon_1^2\epsilon \\
&\quad - \frac{1}{24}\epsilon_1\epsilon^2 - \frac{1}{192}(\epsilon_1^2 - 6\epsilon_1\epsilon + 8\epsilon^2)\epsilon_1 E_0, && (3.112)\\
\mathcal{E}_4 &= \frac{1}{3072}\epsilon_1^4 - \frac{1}{256}\epsilon_1^3\epsilon + \frac{11}{768}\epsilon_1^2\epsilon^2 - \frac{1}{64}\epsilon_1\epsilon^3. && (3.113)
\end{aligned}$$

Ezek után a többi pályaelem, és pályaelem-jellegű mennyiségre érvényes perturbációs egyenletek Taylor-sora közvetlenül a $\mathcal{G}$ változóra áttérve is felírható, miszerint

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\mathcal{G}} = \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\mathcal{G}}\right)_0 + \left(\frac{\partial}{\partial e_1}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\mathcal{G}}\right)_0 \Delta e + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial {e_1}^2}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\mathcal{G}}\right)_0 (\Delta e_1^2) + ... \tag{3.114}$$

Például a dinamikai csomóvonal (h_1) perturbációs egyenlete az alábbi alakot veszi fel:

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}\mathcal{G}} = \chi_2 + \chi_1\cos 2g_1 + (\chi_4 + \chi_3\cos 2g_1)\frac{\Delta e}{e} + \frac{1}{2}(\chi_6 + \chi_5\cos 2g_1)\left(\frac{\Delta e}{e}\right)^2, \tag{3.115}$$

ahol

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{B_\mathrm{h}}{\Pi^*}, && (3.116)\\
\chi_2 &= \frac{A_\mathrm{h}}{\Pi^*}, && (3.117)\\
\chi_3 &= \frac{1}{\Pi^*}\frac{\mathrm{d}B_\mathrm{h}}{\mathrm{d}e}, && (3.118)\\
\chi_4 &= \frac{1}{\Pi^*}\frac{\mathrm{d}A_\mathrm{h}}{\mathrm{d}e}, && (3.119)\\
\chi_5 &= \frac{1}{\Pi^*}\frac{\mathrm{d}^2B_\mathrm{h}}{\mathrm{d}e^2}, && (3.120)\\
\chi_6 &= \frac{1}{\Pi^*}\frac{\mathrm{d}^2A_\mathrm{h}}{\mathrm{d}e^2}. && (3.121)
\end{aligned}$$

Ekkor

$$
\begin{aligned}
H_0 \;=\;& -\left(\chi_1+\chi_3E_0+\frac{1}{2}\chi_5E_0^2\right)\frac{\epsilon}{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}-\frac{1}{4}(\chi_1\varepsilon_5+\chi_3)\epsilon_1\\
&+\frac{1}{128}(\chi_1\varepsilon_5+\chi_3)\epsilon_1^3-\frac{1}{64}\left[\chi_1(\varepsilon_2+2\varepsilon_5)+2\chi_3\right]\epsilon_1^2\epsilon\\
&-\frac{1}{32}[\chi_1(9\varepsilon_2+\varepsilon_5)+5\chi_3]\epsilon_1\epsilon^2\\
&-\left\{\frac{1}{4}\left[\chi_1(\varepsilon_5+\varepsilon_6+\varepsilon_1\varepsilon_5+\varepsilon_5^2)+\chi_3(1+\varepsilon_1+\varepsilon_5)+\chi_5\right]\epsilon_1-\frac{1}{2}\chi_1\varepsilon_2\epsilon\right\}E_0\\
&+\chi_2+\chi_4\mathcal{E}_0+\frac{1}{2}\chi_6\left(\mathcal{E}_0^2+\frac{1}{2}\mathcal{E}_1^2\right),
\end{aligned}
\tag{3.122}
$$

továbbá, a librációs tagok amplitúdói rendre

$$
\begin{aligned}
H_1 \;=\;& \frac{1}{2}\left(\chi_1+\chi_3E_0+\frac{1}{2}\chi_5E_0^2\right)\left(1-\frac{1}{4}\epsilon^2-\frac{1}{8}\epsilon^4\right)\\
&+\frac{1}{128}\left[\chi_1(\varepsilon_5+\varepsilon_6+\varepsilon_1\varepsilon_5-6\varepsilon_5^2)+2\chi_3(1+\varepsilon_1+4\varepsilon_5)+6\chi_5\right]\epsilon_1^2\\
&+\frac{1}{64}\left[\chi_1(2\varepsilon_2-9\varepsilon_5)+5\chi_3\right]\epsilon_1\epsilon\\
&+\left\{\frac{1}{128}\left(\chi_1\varepsilon_5+2\chi_3\right)\epsilon_1^2+\frac{1}{64}\left[\chi_1(2\varepsilon_2-9\varepsilon_5)+5\chi_3\right]\epsilon_1\epsilon-\frac{1}{4}\chi_1\varepsilon_2\epsilon^2\right\}E_0\\
&+\frac{1}{2}\chi_4\mathcal{E}_1+\frac{1}{2}\chi_6\mathcal{E}_0\mathcal{E}_1,
\end{aligned}
\tag{3.123}
$$

$$
\begin{aligned}
H_2 \;=\;& \frac{1}{8}\left(\chi_1+\chi_3E_0+\frac{1}{2}\chi_5E_0^2\right)\left(\epsilon-\frac{1}{16}\epsilon^5\right)+\frac{1}{16}(\chi_1\varepsilon_5-\chi_3)\epsilon_1\\
&+\left[\frac{1}{16}(\chi_1\varepsilon_5-\chi_3)\epsilon_1+\frac{1}{8}\chi_1\varepsilon_2\epsilon\right]E_0+\frac{1}{4}\chi_4\mathcal{E}_2+\frac{1}{4}\chi_6\left(\mathcal{E}_0\mathcal{E}_2+\frac{1}{4}\mathcal{E}_1^2\right),
\end{aligned}
\tag{3.124}
$$

$$
H_3 = \frac{1}{24}\left(\chi_1+\chi_3E_0+\frac{1}{2}\chi_5E_0^2\right)\left(\epsilon^2+\frac{1}{4}\epsilon^4\right)+\frac{1}{6}\chi_4\mathcal{E}_3, \tag{3.125}
$$

$$
H_4 = \frac{1}{64}\left(\chi_1+\chi_3E_0+\frac{1}{2}\chi_5E_0^2\right)\left(\epsilon^3+\frac{1}{2}\epsilon^5\right)+\frac{1}{8}\chi_4\mathcal{E}_4. \tag{3.126}
$$

A fenti együtthatók természetesen megadják az összes többi olyan pályaelem, s pályaelem-jellegű mennyiség időfüggését is, amelyek idtelevision deriváltja a (h_1) dinamikai csomóvonalhosszúságához hasonlóan $A_\mathrm{x}+B_\mathrm{x}\cos 2g_1$ alakú, csak a (3.116 − 3.121) egyenletekkel definiált $\chi_{1..6}$ együtthatókban szereplő A_x, B_x mennyiségeket kell értelemszerűen behelyettesíteni.[8]

Az észlelői rendszerbeli ω_1 pericentrumargumentum időfüggésének (és ezzel együtt a mérhető apszismozgási rátának) a meghatározásához az általános esetben még figyelembe kell vennünk a fedési kettős pályasíkjának precesszióját is, amely a $\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}g_1}\cos i_1$ kifejezésen keresztül jelenik meg az ω_1-e vonatkozó (3.20) perturbációs egyenletben. Ráadásul, ahogy az már a (2.3) alapegyenletből is kiderül, ugyanez a derivált megjelenik az u szélességi argumentum időderiváltjában is, azaz az $O-C$ diagramhoz közvetlen járulékot is ad. Az észlelői rendszerbeli Ω_1 csomóvonal-hosszúság, illetve az i_1 látszó inklináció és dinamikai rendszerbeli megfelelőik $(h_1,\ j_1)$ kapcsolatát az A. függelékben tárgyalom részletesen. Az

[8]Tekintettel arra, hogy a g_1 dinamikai periasztronargumentum időfüggését leíró egyenlet szintén ugyanilyen alakú, formálisan ez is felírható ebben a formában. Ekkor természetesen a $_0$ indexű együtthatóra, amely az adott szögpályaelem (jellegű mennyiség) cirkulációs szögsebességét adja meg a dinamikai apszismozgási szögsebesség egységében, egyet kell visszakapnunk.

ott leírtak alapján könnyen látható, hogy az általunk keresett differenciálegyenlet a

$$\mathrm{d}\Omega_1 \cos i_1 = \mathrm{d}h_1 \frac{\cos i_0 \cos i_1 - \cos j_1 \cos^2 i_1}{\sin^2 i_1} + \mathrm{d}j_1 \frac{\sin i_0 \sin h_1 \cos i_1}{\sin^2 i_1} \tag{3.127}$$

összefüggés alapján írható fel. Az i_1 inklináció a gömbháromszögtani koszinusz-tétel segítségével szintén kifejezhető a dinamikai rendszerbeli mennyiségekkel, miszerint

$$\cos i_1 = \cos i_0 \cos j_1 - \sin i_0 \sin j_1 \cos h_1. \tag{3.128}$$

Mivel fedési kettősöket vizsgálunk, vagy még pontosabban: a hármas rendszerbeli szoros kettősök a jelen vizsgálat során számunkra addig érdekesek, amíg fedéseket mutatnak, ezért (3.127) jobb oldalán elegendő a

$$\sin^{-2} i_1 = 1 + \cos^2 i_1 + \mathcal{O}(\cos^4 i_1) \tag{3.129}$$

közelítést alkalmaznunk. Ekkor (3.127) a következő alakban írható fel:

$$\mathrm{d}\Omega^* = \mathrm{d}\Omega_1 \cos i_1 = \sum_j \left(C_j \cos j h_1 \mathrm{d}h_1 + S_j \sin h_1 \mathrm{d}j_1 \right), \tag{3.130}$$

ahol az egyes együtthatók $\cos^4 i_1$-ig bezárólag:

$$\begin{aligned}
C_0^* \cos j_1 &= \cos j_1 \left[\frac{1}{2}\cos^2 i_0 - \frac{1}{4}\sin^2 i_0 + \frac{1}{8}\cos^4 i_0 - \frac{9}{64}\sin^4 i_0 + \frac{3}{8}\cos^2 i_0 \sin^2 i_0 \right.\\
&\quad + \left(-\frac{1}{2}\cos^2 i_0 + \frac{1}{4}\sin^2 i_0 + \frac{3}{16}\sin^4 i_0 - \frac{3}{4}\cos^2 i_0 \sin^2 i_0 \right) \cos 2j_1 \\
&\quad \left. + \left(-\frac{1}{8}\cos^4 i_0 - \frac{3}{64}\sin^4 i_0 + \frac{3}{8}\cos^2 i_0 \sin^2 i_0 \right) \cos 4j_1 \right], && (3.131)\\
C_1 &= -\frac{1}{16}\cos i_0 \sin i_0 \left[(8 + 3\sin^2 i_0 + 4\cos^2 i_0)\sin j_1 - (8 + 6\sin^2 i_0)\sin 3j_1 \right.\\
&\quad \left. + (3\sin^2 i_0 - 4\cos^2 i_0)\sin 5j_1 \right], && (3.132)\\
C_2 &= -\frac{1}{32}\sin^2 i_0 \left[(4 + 2\sin^2 i_0)\cos j_1 - (4 + 3\sin^2 i_0 - 6\cos^2 i_0)\cos 3j_1 \right.\\
&\quad \left. + (\sin^2 i_0 - 6\cos^2 i_0)\cos 5j_1 \right], && (3.133)\\
C_3 &= -\frac{1}{16}\cos i_0 \sin^3 i_0 \left(\sin j_1 - 2\sin 3j_1 + \sin 5j_1 \right), && (3.134)\\
C_4 &= -\frac{1}{128}\sin^4 i_0 \left(2\cos j_1 - 3\cos 3j_1 + \cos 5j_1 \right), && (3.135)\\
S_1 &= \frac{1}{16}\sin i_0 \cos i_0 \left[(16 + 12\cos^2 i_0 + 3\sin^2 i_0)\cos j_1 \right.\\
&\quad \left. + (4\cos^2 i_0 - 3\sin^2 i_0)\cos 3j_1 \right], && (3.136)\\
S_2 &= -\frac{1}{16}\sin^2 i_0 \left[(8 + 6\cos^2 i_0 + 3\sin^2 i_0)\sin j_1 \right.\\
&\quad \left. + (6\cos^2 i_0 - \sin^2 i_0)\sin 3j_1 \right], && (3.137)\\
S_3 &= \frac{3}{16}\cos i_0 \sin^3 i_0 (\cos j_1 - \cos 3j_1), && (3.138)\\
S_4 &= -\frac{1}{32}\sin^4 i_0 (3\sin j_1 - \sin 3j_1). && (3.139)
\end{aligned}$$

(Az együtthatók felírásánál a $\cos^2 i_0 + \sin^2 i_0 \equiv 1$ azonosság alkalmazásától azért tekintettem el, mert így könnyen elkülöníthetők az egymást követő $\sin^{-2} i_1 \simeq 1$ és $\sin^{-2} i_1 \simeq$

$1+\cos^2 i_1$ közelítésekből adódó tagok. Az első közelítésből származó tagok esetében a $\sin i_0$, $\cos i_0$ tényezők hatványkitevőinek összege kettő, míg a második közelítésnél négy.) A C_0 együttható esetében kiemeltem $\cos j_1$-et, ugyanis ily módon ebben a tagban ugyanaz a $\mathrm{d}h_1 \cos j_1$ kifejezés jelenik meg, amely n_1, s ezen keresztül ω_1 deriváltjában is megjelenik, és időfüggése közvetlenül megkapható a h_1 időfüggését leíró fenti egyenletekből, az $A_\mathrm{h} \to A_\mathrm{n}$, $B_\mathrm{h} \to B_\mathrm{n}$ helyettesítésekkel.

A (3.130) kifejezés integrálása könnyen elvégezhető. Az egyszerűség kedvéért a jobb oldalon j_1-et (a $\mathrm{d}h_1 \cos j_1$ kifejezés behelyettesítésétől eltekintve) állandónak vesszük, s a kis amplitúdójú $\mathrm{d}j_1$-gyel szorzott tagoktól is eltekintünk. Ekkor a következő adódik:

$$\Omega^* = \Omega_0^* + C_0^* \left(N_0 \mathcal{G} + \sum_{j=1}^{4} N_j \sin 2j\mathcal{G} \right) + \sum_{n=1}^{4} \frac{C_n}{n} \sin nh, \tag{3.140}$$

ahol az $N_{0..4}$ együtthatók formálisan a fenti $H_{0..4}$ együtthatókkal egyeznek meg a megfelelő amplitúdók fentebb említett cseréjétől eltekintve. Ezzel, $\mathrm{d}\omega_1$ (3.21) alatti alakját használva közvetlenül megkapjuk az észlelési rendszerbeli periasztron argumentum teljes időfüggését a pályasík precessziója esetére is:

$$\omega_1 = \omega_0 + O_0 \mathcal{G} + \sum_j O_j \sin 2j\mathcal{G} - \sum_n \sum_j O_{n,\pm j} \sin[nh_0 + (nH_0 \pm j)\mathcal{G}], \tag{3.141}$$

ahol

$$O_0 = 1 + (1 - C_0^*) N_0, \tag{3.142}$$

az észlelői rendszerbeli pertrubált apszismozgási szögsebesség és a perturbált dinamikai apszismozgási szögsebesség aránya, míg az

$$O_j = \gamma_j + (1 - C_0^*) N_j \tag{3.143}$$

együtthatók az észlelési rendszerbeli apszisvonal mozgásnak a dinamika csomóvonal pillanatnyi helyzetétől független, librációs részét adják meg. A dinamikai csomóvonal pozíciójának változása explicit módon az $O_{n,j}$ együtthatójú tagokon keresztül jelenik meg ω_1 időfüggésében. Ezen együtthatók első tagjai a következők:

$$O_{n,0} = C_n \left[\frac{1}{n} - \frac{n}{4} H_1^2 + \frac{n^3}{64} H_1^4 - \frac{n}{4} H_2^2 \right] \tag{3.144}$$

$$O_{n,1} = C_n H_1 \left[\frac{1}{2} - \frac{n^2}{16} H_1^2 - \frac{n}{4} H_2 \right] \tag{3.145}$$

$$O_{n,-1} = C_n H_1 \left[-\frac{1}{2} + \frac{n^2}{16} H_1^2 - \frac{n}{4} H_2 \right] \tag{3.146}$$

$$O_{n,2} = C_n \left[\frac{n}{8} H_1^2 + \frac{1}{2} H_2 - \frac{n^3}{96} H_1^4 - \frac{n^2}{8} H_1^2 H_2 - \frac{n}{4} H_1 H_3 \right] \tag{3.147}$$

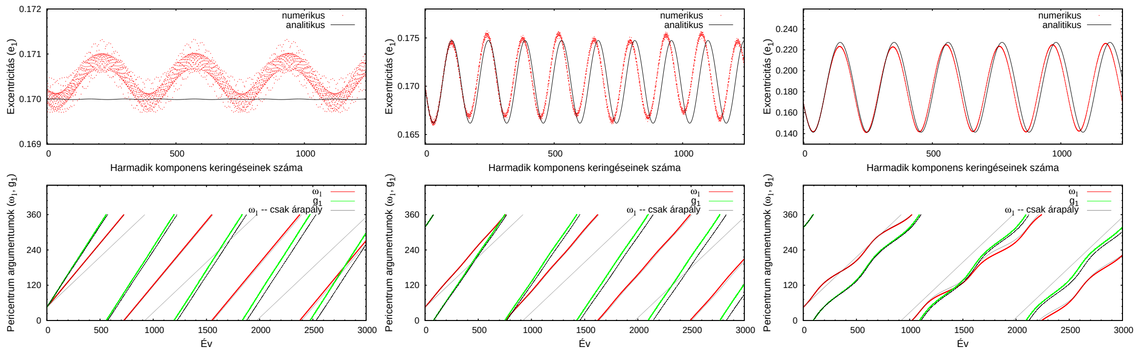
$$O_{n,-2} = C_n \left[\frac{n}{8} H_1^2 - \frac{1}{2} H_2 - \frac{n^3}{96} H_1^4 + \frac{n^2}{8} H_1^2 H_2 - \frac{n}{4} H_1 H_3 \right] \tag{3.148}$$

$$O_{n,3} = C_n \left[\frac{n^2}{48} H_1^3 + \frac{n}{4} H_1 H_2 + \frac{1}{2} H_3 \right] \tag{3.149}$$

$$O_{n,-3} = C_n \left[-\frac{n^2}{48} H_1^3 + \frac{n}{4} H_1 H_2 - \frac{1}{2} H_3 \right] \tag{3.150}$$

$$O_{n,4} = C_n \left[\frac{n^3}{384} H_1^4 + \frac{n^2}{16} H_1^2 H_2 + \frac{n}{4} H_1 H_3 + \frac{n}{8} H_2^2 + \frac{1}{2} H_4 \right] \tag{3.151}$$

$$O_{n,-4} = C_n \left[\frac{n^3}{384} H_1^4 - \frac{n^2}{16} H_1^2 H_2 + \frac{n}{4} H_1 H_3 + \frac{n}{8} H_2^2 - \frac{1}{2} H_4 \right]. \tag{3.152}$$



3.1. ábra. Az e_1 excentricitás *(felül)*, illetve az ω_1 észlelői, valamint g_1 dinamikai pericentrum argumentumok *(alul)* időbeli változása az AS Cam kettős rendszerében egy hipotetikus harmadik kísérő hatására. A bal oldali paneleken a köztes inklináció $i_\mathrm{m} = 0^\mathrm{o}$, a középsőkön $i_\mathrm{m} = 20^\mathrm{o}$, a jobb oldaliakon pedig $i_\mathrm{m} = 60^\mathrm{o}$. (A további kezdeti paraméterek részben a 3.1 táblázatban, részben pedig a 3.2 táblázat S1, S2, illetve S3 jelű oszlopaiban találhatók.) A színes görbék a numerikus integrálás során kapott („észlelt"), míg a feketék az analitikusan számolt értékeket mutatják. Az alsó paneleken szürkével berajzoltam ω_1 értékét arra az esetre is, ha nem lenne jelen harmadik test a rendszerben, s csak az árapály-kölcsönhatás határozná meg az apszismozgási rátát. (Az analitikus és numerikus eredmények közti kisebb eltérések magyarázatát a szövegben adom meg.)

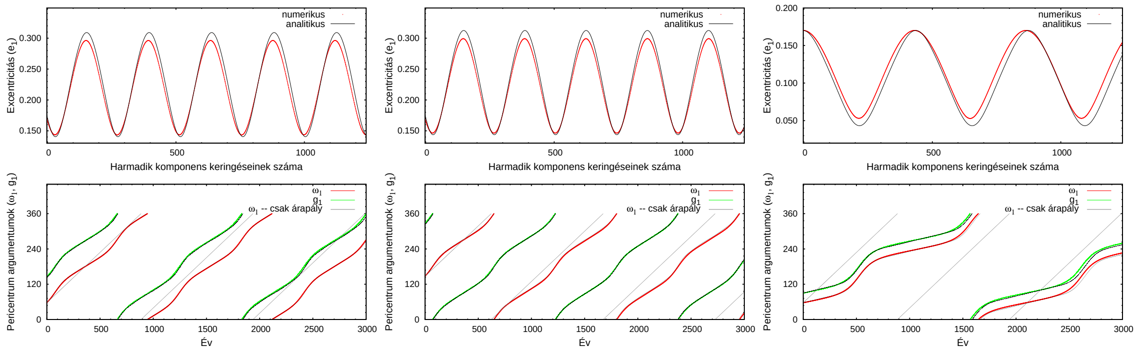
A fentiek felhasználásával immáron felírhatjuk az „apszis-csomóvonali" időskálájú fedési minimumok időpontjának változásait leíró $O-C$ diagram időfüggését az általános esetben. Eszerint, csupán a legalacsonyabb rendű tagokra hagyatkozva:

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{P_1}\Delta_\mathrm{sec} &= \sum_{j,n} V_{1,\pm j,\pm n}\cos[\omega_0 \pm nh_0 + (O_0 \pm 2j \pm nH_0)\mathcal{G}] \\ &\quad + V_{2,\pm j,\pm n}\sin[2\omega_0 \pm nh_0 + (2O_0 \pm 2j \pm nH_0)\mathcal{G}] \\ &\quad + V_{3,\pm j,\pm n}\cos[3\omega_0 \pm nh_0 + (3O_0 \pm 2j \pm nH_0)\mathcal{G}] \\ &\quad + V_{0,j,0}\sin(2j\mathcal{G}) + V_{0,j,n}\sin[nh_0 + (nH_0 \pm 2j)\mathcal{G}]. \qquad (3.153)\end{aligned}$$

A témát feldolgozó 2007. évi tanulmányom (Borkovits és mktsai., 2007) online függelékének utolsó hét A4-es oldalát foglalja el a formálisan maximum ötödrendű együtthatók megadása. Ehelyütt ezért, helytakarékosságból, csupán néhány jellemző együtthatót adok meg, azokat sem explicit, hanem a korábbi együtthatókkal formálisan kifejezett alakjukban.

A fenti (3.153) formula első három sorában megadott együtthatók közvetlenül a jól ismert, hagyományos, perturbálatlan (1.26) alakból származtathatók e_1, illetve ω_1 fentebb levezetett sorfejtésének behelyettesítésével. Ennek megfelelően egy-egy jellemző komponens így néz ki:

$$\begin{aligned}V_{100} &= 2je_{10}\left\{(1+\mathcal{E}_0)\left[1-\frac{1}{4}(O_1^2+O_{10}^2+O_{20}^2)+\frac{1}{64}O_1^4-\frac{1}{4}O_2^2\right]\right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{4}\mathcal{E}_1O_1O_2+\frac{1}{8}\mathcal{E}_2O_1^2\right\}, \qquad (3.154) \\ V_{110} &= je_{10}\left\{(1+\mathcal{E}_0)\left[O_1-\frac{1}{8}O_1^3-\frac{1}{2}O_1O_2-\frac{1}{4}O_1(O_{10}^2+O_{20}^2)\right.\right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2}O_{10}(O_{11}+O_{1-1})-\frac{1}{2}O_{20}(O_{21}+O_{2-1})\right] \\ &\quad \left. +\mathcal{E}_1\left(1-\frac{1}{8}O_1^2+\frac{1}{2}O_2-\frac{1}{4}O_{10}^2-\frac{1}{4}O_{20}^2\right)-\frac{1}{2}\mathcal{E}_2O_1\right\}, \qquad (3.155)\end{aligned}$$



3.2. ábra. Az e_1 excentricitás *(felül)*, illetve az ω_1 észlelői, valamint g_1 dinamikai pericentrum argumentumok *(alul)* időbeli változása az AS Cam kettős rendszerében egy hipotetikus harmadik kísérő hatására, három különböző, merőleges ($i_\mathrm{m} = 90^\mathrm{o}$) konfiguráció esetére. (A további kezdeti paraméterek részben a 3.1 táblázatban, részben pedig a 3.2 táblázat S4a,b,c oszlopaiban találhatók.) A színes görbék a numerikus integrálás során kapott („észlelt"), míg a feketék az analitikusan számolt értékeket mutatják. Az alsó paneleken szürkével berajzoltam ω_1 értékét arra az esetre is, ha nem lenne jelen harmadik test a rendszerben, s csak az árapály-kölcsönhatás határozná meg az apszismozgási rátát. (Az analitikus és numerikus eredmények közti kisebb eltérések magyarázatát a szövegben adom meg.)

$$\begin{aligned}
V_{1-10} &= je_{10}\left\{(1+\mathcal{E}_0)\left[-O_1+\frac{1}{8}O_1^3-\frac{1}{2}O_1O_2+\frac{1}{4}O_1(O_{10}^2+O_{20}^2)\right.\right.\\
&\left.\quad -\frac{1}{2}O_{10}(O_{11}+O_{1-1})-\frac{1}{2}O_{20}(O_{21}+O_{2-1})\right]\\
&\left.\quad +\mathcal{E}_1\left(1-\frac{1}{8}O_1^2-\frac{1}{2}O_2-\frac{1}{4}O_{10}^2-\frac{1}{4}O_{20}^2\right)+\frac{1}{2}\mathcal{E}_2O_1\right\}, \qquad (3.156)\\
V_{1-1-2} &= je_{10}\left\{(1+\mathcal{E}_0)\left[O_{21}-O_1\left(\frac{1}{2}O_{20}+\frac{1}{8}O_{10}^2\right)+\frac{1}{2}O_{10}O_{11}\right]\right.\\
&\left.\quad +\mathcal{E}_1\left(\frac{1}{2}O_{20}+\frac{1}{8}O_{10}^2\right)\right\}, \qquad (3.157)\\
V_{2-20} &= \frac{3}{4}e_{10}^2\left[(1+\mathcal{E}_0)^2\left(\frac{1}{2}O_1^2-O_2\right)-\mathcal{E}_1O_1+\frac{1}{4}\mathcal{E}_1^2+\mathcal{E}_2\right], \qquad (3.158)\\
V_{301} &= \frac{1}{2}je_{10}^3(1+\mathcal{E}_0)^3O_{10}. \qquad (3.159)
\end{aligned}$$

Az utolsó sorban szereplő két kifejezésből az elsőben a közvetlen perturbációk librációs komponense, illetve az észlelői rendszerbeli csomóvonalmozgás h_1 trigonometrikus függvényeitől független része jelenik meg, míg a második (és egyben utolsó tag) közvetlenül ez utóbbinak a dinamikai csomóvonalmozgás trigonometrikus függvényeitől függő részét tartalmazza. Ezek szerint

$$\begin{aligned}
V_{0j0} &= \Lambda_j + C_0^* N_j, \qquad (3.160)\\
V_{0jn} &= O_{nj} \quad n = 1..4, j = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \qquad (3.161)
\end{aligned}$$

ahol Λ_j a megfelelő H_j együtthatóból formálisan a $A_\mathrm{h} \to A_\lambda$, $B_\mathrm{h} \to B_\lambda$ helyettesítéssel kapható meg.[9]

[9] Ugyanakkor hozzá kell tenni, hogy az így adódó együtthatók az általam vizsgált konfigurációkban általában 1–2 nagyságrenddel nagyobbnak bizonyultak, mint a csomóvonalmozgás egyenleteiben megjelenő

3.3. Összevetés a numerikus vizsgálatokkal – az eredmények diszkussziója

Az AS Camelopardalis hipotetikus hármas rendszerének hosszabb távú pályaelem-változásait, illetve a szinkronizációs, cirkularizációs folyamatokat vizsgálandó, kiterjedt numerikus integrálásokat is végeztem, amelyek egyben a fentebb levezetett analitikus formulák érvényességi tartományának ellenőrzésére is szolgálnak. A numerikus integrálásokat az általam, PhD-munkám keretében kifejlesztett (s fentebb futólag már említett) numerikus integrátorral végeztem el, amely párhuzamosan integrálja a hierarchikus hármas rendszerek orbitális mozgásegyenleteit, illetve a szoros kettőst alkotó csillagok tengely körüli forgását leíró Euler-egyenleteket, ez utóbbiakban benne foglalva a deformációs, valamint disszipációs tagokat is. Ily módon a kóddal numerikusan vizsgálható hierarchikus hármas rendszerek dinamikai fejlődése tetszőleges forgásiszögsebesség-vektorok, illetve disszipációs (viszkozitási) paraméterek esetére is (Borkovits, 2002; Borkovits és mktsai., 2003, 2004). A különböző integrálások során végig változatlanul tartott kezdeti paramétereket a 3.1. táblázatban adom meg, míg az egyes futtatások során változtatott bemeneti észlelői rendszerbeli szögpályaelemeket, illetve az adott kezdeti konfigurációkhoz tartozó (számított) dinamikai szögpályaelemeket a 3.2. táblázatban sorolom fel. A 3.1., illetve 3.2. ábrákon pedig hatféle, különböző köztes inklinációjú konfiguráció esetére az e_1 excentricitás, illetve a dinamikai (g_1) és az észlelési rendszerbeli (ω_1) pericentrumargumentum időfejlődése látható mind numerikus integrálással, mind a fentebb levezetett analitikus formulákkal számolva. Végül, 3.3. táblázatban a további diszkusszióhoz az analitikus formulákkal kiszámolt, különféle apszismozgási periódusokat adom meg, valamint a fenti sorfejtésekben a kis paraméter szerepét játszó, az egyes perturbációk librációs és cirkulációs amplitúdóinak arányaiból képzett ϵ, ϵ_1 együtthatók értékét is feltüntetem.

3.1. táblázat. A szoros kettős, illetve a harmadik kísérő az egyes integrálások során nem változtatott kezdeti paraméterei. A $k_j^{(\mathrm{A,B})}$ belsőszerkezeti állandókat Claret és Gimènez (1991) táblázataiból vettem. A szoros kettős további paraméterei (az önkényesen választott Ω_1 észlelési csomóvonal-hosszúság, illetve $\lambda_{\mathrm{A,B}}$ disszipációs paraméterek kivételével) Khodykin és Vedeneyev (1997) munkájából származnak. A harmadik komponens paramétereit egy korábbi konferenciaközleményben (Borkovits, 2003) ismertetett fényidőpálya-megoldásomból adaptáltam.

a_1	17,195 $\mathrm{R}_\odot$	a_2	736,98 $\mathrm{R}_\odot$
e_1	0,17	e_2	0,41
τ_1^a	50 000 HJD	τ_2	52 085 HJD
	50 000,82		
	50 001,7		
i_1	88,°78		
Ω_1	130°		
m_A	3,3 $\mathrm{M}_\odot$	m_B	2,5 $\mathrm{M}_\odot$
m_C	1,1 $\mathrm{M}_\odot$		
R_A	2,60 $\mathrm{R}_\odot$	R_B	1,96 $\mathrm{R}_\odot$
$k_2^{(\mathrm{A})}$	0,0049	$k_2^{(\mathrm{B})}$	0,0038
$k_3^{(\mathrm{A})}$	0,0011	$k_3^{(\mathrm{B})}$	0,0008
λ_A	0,0	λ_B	0,0
	0,0001		0,0001

a: A három érték arra utal, hogy az integrálás a periasztron, a középmozgással megegyező pillanatnyi orbitális szögsebesség, illetve az apasztron pozíciójából indult-e.

A numerikus és analitikus görbéket összevetve első pillantásra talán meglepőnek tűnhet, hogy a dinamikai apszismozgási periódusban (s így az excentricitás ciklikus váltakozásá-

perturbációs együtthatók, s ily módon az együtthatókat a megfelelő pontosságú matematikai leíráshoz magasabb rendig kellett kiszámítanom, mint a dinamikai csomóvonalra vonatkozó perturbációs egyenletben.

3.2. táblázat. Az egyes integrálások során különböző kezdeti értékű észlelési rendszerbeli szögpályaelemek (ω_1, ω_2, Ω_2, i_2), valamint dinamikai rendszerbeli (számolt) megfelelőik

	AS1	AS2	AS3	AS3b	AS4	AS4b	AS4c
g_1	$45\overset{\circ}{,}0$	$317\overset{\circ}{,}5$	$316\overset{\circ}{,}6$	$57\overset{\circ}{,}1$	$145\overset{\circ}{,}1$	$327\overset{\circ}{,}1$	$90\overset{\circ}{,}1$
ω_1	45°	45°	45°	$57\overset{\circ}{,}1$	$57\overset{\circ}{,}1$	$147\overset{\circ}{,}1$	$57\overset{\circ}{,}1$
h_1	$0\overset{\circ}{,}00$	$87\overset{\circ}{,}94$	$89\overset{\circ}{,}89$	$0\overset{\circ}{,}00$	$269\overset{\circ}{,}27$	$180\overset{\circ}{,}00$	$287\overset{\circ}{,}42$
j_1	$0\overset{\circ}{,}63$	$16\overset{\circ}{,}25$	$49\overset{\circ}{,}71$	$49\overset{\circ}{,}74$	$76\overset{\circ}{,}80$	$76\overset{\circ}{,}76$	$76\overset{\circ}{,}79$
g_2	$81\overset{\circ}{,}00$	$352\overset{\circ}{,}93$	$350\overset{\circ}{,}75$	$351\overset{\circ}{,}00$	$172\overset{\circ}{,}22$	$351\overset{\circ}{,}00$	$180\overset{\circ}{,}00$
ω_2	261°	261°	261°	171°	261°	351°	$267\overset{\circ}{,}84$
h_2	$179\overset{\circ}{,}87$	$267\overset{\circ}{,}95$	$269\overset{\circ}{,}89$	$180\overset{\circ}{,}00$	$89\overset{\circ}{,}27$	$0\overset{\circ}{,}00$	$107\overset{\circ}{,}42$
Ω_2	130°	110°	70°	130°	220°	130°	222°
j_2	$0\overset{\circ}{,}15$	$3\overset{\circ}{,}75$	$10\overset{\circ}{,}27$	$10\overset{\circ}{,}26$	$13\overset{\circ}{,}16$	$13\overset{\circ}{,}16$	$13\overset{\circ}{,}16$
i_2	$88\overset{\circ}{,}0$	$88\overset{\circ}{,}0$	$88\overset{\circ}{,}0$	$28\overset{\circ}{,}78$	$88\overset{\circ}{,}0$	$178\overset{\circ}{,}7$	$33\overset{\circ}{,}02$
i_{m}	$0\overset{\circ}{,}78$	$20\overset{\circ}{,}01$	$59\overset{\circ}{,}98$	$60\overset{\circ}{,}00$	$89\overset{\circ}{,}96$	$89\overset{\circ}{,}92$	$89\overset{\circ}{,}95$

nak periódusában is) a legnagyobb (bár még így is alig néhány százalékos eltérés) a három közül a legkisebb köztes inklinációjú ($i_{\mathrm{m}} = 20^\circ$) esetben van, amikor pedig az excentricitás változása a legkisebb (a két ϵ paraméter gyakorlatilag nulla), és ily módon a (3.16 – 3.23) perturbációs egyenletek jobb oldala valóban állandónak tekinthető, s következésképp a (3.40 – 3.45) zárt, analitikus megoldások voltaképpen a mozgás egzakt leírását kellene, hogy adják. A látszólagos ellentmondás mögött az a tény áll, hogy kis köztes inklinációk esetén, amint korábban ez már szóba került, a perturbáló erőnek a fenti vizsgálatok során elhanyagolt oktupól komponense is jelentős további járulékot ad. Mindez persze, amint a numerikus integrálásból látható, jellegében nem változtatja meg a megoldást, csak numerikusan eredményez némi eltérést. Így viszont a most következő megállapítások érvényesek maradnak az alacsony köztes inklinációjú esetekre is.

3.3. táblázat. Az analitikus modellekkel számolt különféle apszismozgási periódusok (években) és egyéb paraméterek a periasztronhoz szinkronizált tengelyforgási szögsebességek esetén. (A különböző periódusok definícióját a szövegben adom meg.)

	AS1	AS2	AS3	AS3b	AS4	AS4b	AS4c
P^{tide}	1052	1052	1052	1052	1052	1052	1052
P_{ω_1}	833	860	1057	1375	960	924	4979
$\overline{P}_{\omega_1}$	833	874	1201	1146	1173	1151	2119
P_{g_1}	653	686	958	1207	960	924	4978
$(\overline{P}_{g1})_0$	653	689	1102	1103	1853	1852	1853
$\overline{P}_{g1}$	653	688	1057	1073	1175	1151	2119
ϵ	$-0,01$	$0,04$	$0,45$	$0,45$	$0,76$	$0,76$	$0,76$
ϵ_1	$0,00$	$0,05$	$0,46$	$0,46$	$0,76$	$0,76$	$0,76$

A továbbiakban foglalkozzunk először az apszismozgási periódusokkal! A 3.3. táblázatban öt különféle apszismozgási periódust definiáltam. Ezek a következők:

$$P_{\rm tide} = \frac{P_1}{A_{\rm TR}} \tag{3.162}$$

lenne az apszismozgási periódus abban az esetben, ha csak a szoros kettős két tagja közti árapály-kölcsönhatás lenne az apszismozgás egyetlen forrása.[10] Ebben az esetben nincs értelme külön észlelői, illetve dinamikai rendszerbeli apszismozgásról beszélni, hiszen harmadik komponens hiányában a két koordináta-rendszer gyakorlatilag egybeesik.[11] Ezen felül észlelési szempontból talán a legfontosabb a

$$P_{\omega_1} = \left(\frac{P_1}{A_{\rm o}+B_{\rm o}\cos 2g_1}\right)_{t=t_0} \tag{3.163}$$

pillanatnyi, észlelési rendszerbeli apszismozgási periódus, amely a földi észlelések legjobb esetben is alig néhány évtizedes, s ily módon az általában sok évszázados, vagy akár évezredes apszismozgási periódushoz képest rövid időskáláján belül, megadja az észlelésekből lineáris interpolációval kikövetkeztethető apszismozgási periódust. Az észlelői rendszerbeli tényleges apszismozgási periódust ugyanakkor (a jelen közelítés keretein belül) a

$$\overline{P}_{\omega_1} = \frac{P_1}{O_0\Pi^*} = \frac{1}{O_0}\overline{P}_{g_1} \tag{3.164}$$

kifejezés adja meg, ahol O_0 a (3.142) formulából számolható. A három különböző dinamikai apszismozgási periódus pedig:

$$P_{g_1} = \left(\frac{P_1}{A+B\cos 2g_1}\right)_{t=t_0}, \tag{3.165}$$

$$\left(\overline{P}_{g_1}\right)_0 = \frac{P_1}{\sqrt{A^2-B^2}} = \frac{P_1}{\Pi}, \tag{3.166}$$

$$\overline{P}_{g_1} = \frac{P_1}{\Pi^*}. \tag{3.167}$$

Tekintsük először az alacsony köztes inklinációjú (AS1, AS2) konfigurációkat. Ezekben az esetekben jól látható, hogy az összes fentebb definiált apszismozgási periódus jelentősen kisebb értéket ad, mint a csak a klasszikus árapály-jelenségből számolt periódus. Ez könnyen megérthető például abból a tényből, hogy az általam vizsgált közelítés esetében, vagyis amíg az árapály-kölcsönhatás dominál a harmadiktest-perturbációk fölött, a pillanatnyi látszó apszismozgási szögsebesség maximumát (mivel a librációs $B_{\rm o}$ amplitúdó biztosan nemnegatív) a $\cos 2g_1=-1$ helyen veszi fel, és itt értéke:

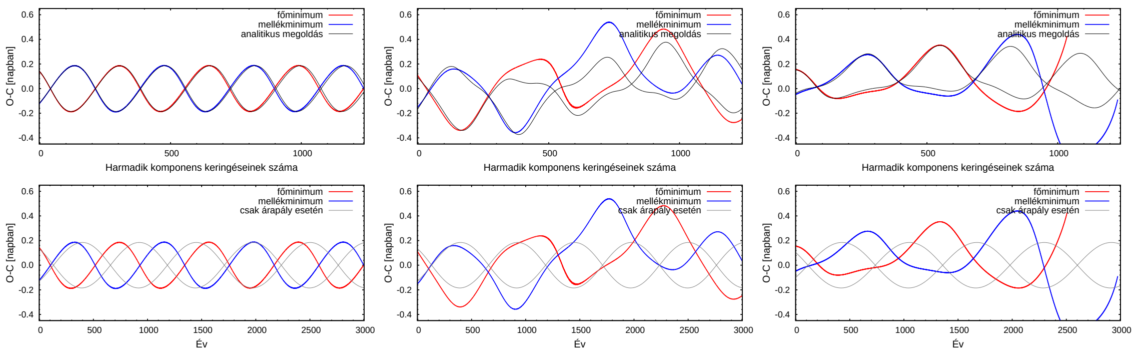
$$\dot\omega_1^{\rm pill} \sim A_{\rm TR} - \frac{6}{5}A_{\rm G}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}\left(1-\frac{4}{3}I^2\right), \tag{3.168}$$

amiből egyszerű számolással adódik, hogy ha a két pályasík egymással 30°-nál kisebb vagy 150°-nál nagyobb szöget zár be, akkor a megfigyelés pillanatában érvényes pillanatnyi apszismozgási periódus biztosan kisebb lesz, mint ha csak pusztán az árapály-kölcsönhatás

[10] Újfent emlékeztetek rá, hogy ebben a tanulmányban a relativisztikus apszismozgási járulékot nem vettem figyelembe.

[11] Még pontosabban, ebben az esetben $\omega_1 = g_1 + h_1$, ahol e két utóbbi mennyiségnek külön-külön nincs is értelme. Ebből kifolyólag a csak az árapály-kölcsönhatást (és esetleg a relativisztikus járulékot) figyelembe vevő, apszismozgással kapcsolatos munkákban szokásos az ω pericentrumargumentum helyett a ϖ pericentrumhosszúságról beszélni.

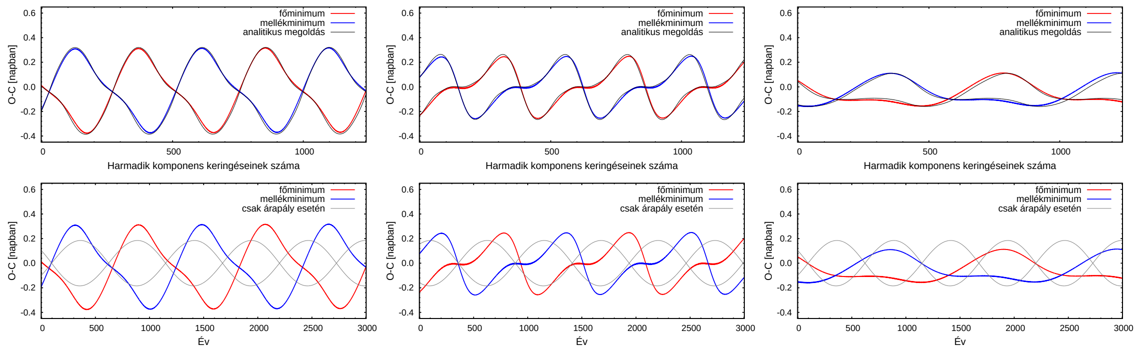
határozná meg az apszismozgási rátát. Magasabb kölcsönös pályahajlások esetén a dinamikai periasztron éppen aktuális helyzete függvényében az észlelt apszismozgási periódus lehet kisebb, illetve nagyobb is a kizárólag az árapály-kölcsönhatásból származótól. Ez utóbbi kijelentést különösen látványosan illusztrálja az AS4c jelű futtatás során kapott apszismozgási periódus. Ebben a merőleges konfigurációjú esetben ($i_\mathrm{m} = 90^\mathrm{o}$) az integrálást a dinamikai pericentrumargumentum $g_1 = 90^\mathrm{o}$ értékénél indítottam. (Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a szűk pálya nagytengelye 90^o-os szöget zár be a két pályasík metszésvonalával, vagy másképpen, a két pályasík csomóvonala a szűk pálya *semi-latus rectum*-ának[12] egyenesével esik egybe.) Ez egyben azt is jelenti, hogy a szoros kettős excentricitása ekkor éppen a maximális értékét veszi fel, de a mi szempontunkból még érdekesebb, hogy a pillanatnyi apszismozgási szögsebesség, legyen szó akár a dinamikai, akár az észlelői rendszerről, ekkor a legkisebb, következésképp a mérhető pillanatnyi apszismozgási periódus ekkor a leghosszabb. A konkrét esetben például, amint az a 3.3. táblázat utolsó oszlopából kiderül, ez csaknem ötszöröse a pusztán az árapály-kölcsönhatásból számított (várt) apszismozgási periódusnak. Mindezt látványosan szemlélteti a 3.2. ábra jobb oldali alsó panelja is.



3.3. ábra. A numerikus integrálással, illetve az analitikusan számolt $O-C$ görbék összevetése különböző kezdeti konfigurációk esetére *(felső sor ábrái)*, valamint a harmadik test által perturbált, illetve a harmadik test hiányában, a pusztán a klasszikus (árapály-eredetű) apszismozgás esetén várt $O-C$ görbék összehasonlítása ugyanezen kezdeti konfigurációk esetén *(alsó sor ábrái)*. Az egyes kezdeti konfigurációkhoz tartozó pályaelemek a 3.2. táblázat AS1 ($i_\mathrm{m} = 0^\mathrm{o}$), AS3 ($i_\mathrm{m} = 60^\mathrm{o}$), illetve AS3b ($i_\mathrm{m} = 60^\mathrm{o}$) oszlopaiban találhatók.

További érdekes megállapításokra vezet, ha közvetlenül a perturbált $O-C$ diagramokat hasonlítjuk össze, hiszen az apszismozgási periódus megállapítása a kérdéses rendszereknél elsősorban e diagram felhasználásával történik. A 3.3. ábrán 3000 éves időskálán mutatom be a numerikusan generált, illetve az analitikus formulákból számolt $O-C$ görbe lefutását a koplanáris (AS1), illetve két ($i_\mathrm{m} = 60^\mathrm{o}$) köztes inklinációjú, de egyéb paramétereiben különböző konfiguráció (AS3, A0S3b) esetére (felső ábrák). Emellett, az összehasonlítás kedvéért az alsó paneleken a harmadik test hiányában várt $O-C$ diagramokat is felrajzoltam (szürkével). A koplanáris (AS1) konfiguráció $O-C$-je a korábbiakhoz képest újdonsággal nem szolgál, újfent az látható, hogy ebben az esetben az észlelhető apszismozgási periódus rövidebb, mint a harmadiktest-mentes esetben. A két különböző $i_\mathrm{m} = 60^\mathrm{o}$ köztes inklinációjú konfiguráció esetében viszont változatos, és „szabálytalan" $O-C$ mintázatot láthatunk. Továbbá, az AS3 esetben kb. 600-700, az AS3b futtatásnál pedig 1600-1700 év múltán az analitikus görbe jelentős eltérést mutat a numerikus integrálás során kapottaktól. Ennek magyarázata, hogy az AS3 konfiguráció esetén a pályasíkok precessziója következtében 700

[12] Sajnos ennek a kifejezésnek, amely a fókuszpontból az ellipszis nagytengelyére bocsátott merőleges húrt fedi, nem találtam magyar megfelelőjét.



3.4. ábra. A numerikus integrálással, illetve az analitikusan számolt $O-C$ görbék összevetése három különböző, merőleges ($i_\mathrm{m}=90^\mathrm{o}$) konfiguráció esetére. Az egyes kezdeti konfigurációkhoz tartozó pályaelemek a 3.2. táblázat AS4, AS4b, illetve AS4c oszlopaiban találhatók. (Diszkusszió a szövegben.)

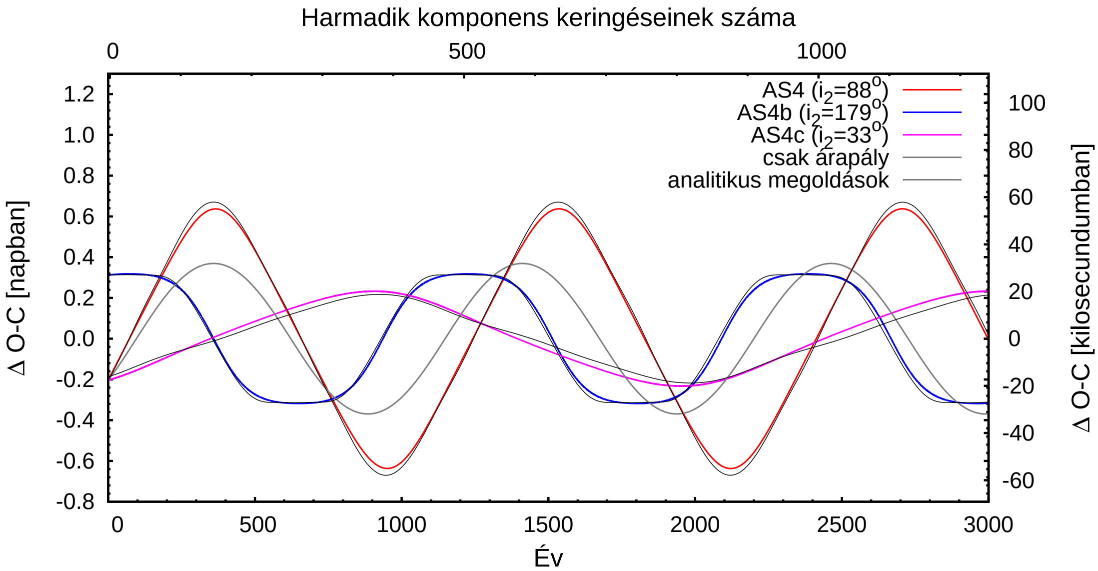
évvel az integrálás kezdete után a fedési kettős kezdeti $i_1 \simeq 88^\mathrm{o}$ látszó inklinációja eléri az $i_1 \gtrsim 120^\mathrm{o}$ értéket, (illetve az AS3b konfigurációnál kb. 1500 év után az $i_1 \lesssim 60^\mathrm{o}$ értéket), s ekkor a pályasík precesszióját leíró Ω^* komponens kiszámításánál alkalmazott közelítések többé nem adnak kielégítő eredményt. Azonban mindez a jelen vizsgálataink szempontjából érdektelen, hisz mindkét konfiguráció esetén a szoros kettős már jóval korábban megszűnne fedési kettős lenni. Sőt, az AS3 konfiguráció fennállása esetén az AS Camelopardalis napjainkban $\Delta i_1 \simeq 4\overset{\circ}{.}5$/évszázad inklinációváltozást szenvedne el, ami látványos, és könnyen kimutatható fedésmélység-változást eredményezne. (Az AS3b esetben ez az érték jelenleg csupán $\Delta i_1 \simeq -0\overset{\circ}{.}4$/évszázad lenne, ami még a detektálási határ alatt marad.)

A mi szempontunkból különösen jelentős a közel merőleges ($i_\mathrm{m} \simeq 90^\mathrm{o}$) orbitális konfigurációk esete. A merőleges AS4, AS4b, AS4c konfigurációkhoz tartozó $O-C$ diagramok a 3.4. ábrán láthatók. Korábban már arra az eredményre jutottam, hogy nagy köztes inklinációk esetén a g_1 dinamikai periasztronargumentum kezdeti értékének alkalmas megválasztásával elérhető, hogy az P_{ω_1} pillanatnyi apszismozgási periódus sokkal hosszabbnak adódjon az árapály-kölcsönhatásból jósoltnál (AS4c konfiguráció). Ehelyütt azt is megmutatom, hogy könnyen találhatunk olyan speciális geometriai elrendeződéseket is, amikor még egy viszonylag rövid pillanatnyi apszismozgási periódus (azaz gyorsabb pillanatnyi apszismozgási szögsebesség) esetén is, a pályaellipszis tényleges körbefordulási idejéhez képest nagyon rövid időtartamú mintavételezés során jelentősen hosszabb apszismozgási periódust kapnánk. Ezt a lehetőséget szemlélteti a 3.5. ábra, amelyen a három fentebb tárgyalt merőleges konfiguráció esetére a fő- és mellékminimumra kapott $O-C$ görbék különbségeit[13] rajzoltam fel (mind a numerikus integrálások, mind az analitikus formulák alapján). Már első pillantásra is szembetűnőek az AS4b konfiguráció esetén a több száz év hosszúságú, csaknem vízszintes szakaszok. Amennyiben a rendszerünket egy ilyen fázisban figyelnénk meg, akár évszázados időskálán, azt tapasztalnánk, hogy a mellékminimumok főminimumokhoz viszonyított fázisa csak rendkívül lassan (vagy akár nem kimutathatóan) változik, s ily módon rendellenesen lassú apszismozgást detektálnánk.

A jelenség magyarázata a következő. Amint az a D különbségfüggvény (1.28) alatti Taylor-sorfejtéséből látható, a kétféle fedési esemény minimumidőpont-változásai különbségének domináns tagja $e_1\cos\omega_1$. Ennek deriváltja:

$$\frac{\mathrm{d}e_1\cos\omega_1}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}u}\cos\omega_1 - e_1\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}u}\sin\omega_1$$

[13]Lásd és bevezető 1.2.3 alfejezetet, illetve az (1.27) egyenletet!



3.5. ábra. A három merőleges konfiguráció (AS4,4b,4c) mellékminimumokra, illetve főminimumokra kapott $O-C$ görbéinek különbsége, azaz a (1.27) alatt definiált D függvény realizációi. Számunkra különösen az AS4b jelű (kék) görbén látható széles, lapos tartományok az érdekesek. Az ezen tartományok során végzett észlelésekből interpolált apszismozgási periódus a ténylegesnél jelentősen lassabb (rendellenesen lassú) apszismozgási rátát eredményezheti. (További diszkusszió a szövegben.)

$$
\begin{aligned}
&= e_1B_\mathrm{o}\sin(2g_1-\omega_1)-e_1A_\mathrm{o}\sin\omega_1+e_1\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}u}\cos i_1\sin\omega_1 \\
&= e_1B_\mathrm{o}\sin(\omega_1-2n_1)-e_1A_\mathrm{o}\sin\omega_1+e_1\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}u}\cos i_1\sin\omega_1.
\end{aligned}
\tag{3.169}
$$

Merőlegeshez közeli pályasíkok esetében a h_1 dinamikai csomóvonal hátráló mozgásának (3.55) szögsebessége nullához tart, ily módon egyrészt n_1 évszázados időskálán állandónak tekinthető, másrészt a pályasík precessziójával kapcsolatos jobb oldali utolsó tag elhanyagolható.

Az AS4 és AS4b konfigurációknál a kezdeti paramétereket úgy választottam meg, hogy a dinamikai szempontból egymáshoz nagyon hasonló (bár nem teljesen azonos) legyen a kiindulási elrendeződés, azonban a földi észlelő szempontjából a pályasíkok elhelyezkedése a két lehetséges végletet valósítsa meg. Az AS4 futtatás esetében a földi észlelő mindkét, egymásra merőleges pályasíkot közel az éléről látná ($i_1=88\overset{\circ}{.}78$, $i_2=88\overset{\circ}{.}0$), míg az AS4b esetben a harmadik komponens pályasíkja gyakorlatilag az égbolt síkjába esne ($i_1=88\overset{\circ}{.}78$, $i_2=178\overset{\circ}{.}7$). Könnyen belátható (ld. pl. 2.1. ábra), hogy az első esetben $n_1\simeq\pm90^\circ$, míg a lapjáról látszó harmadik pálya esetén $n_1=0^\circ$ vagy $n_1=180^\circ$. Ez utóbbi esetben tehát (3.169) alapján

$$
\dot{D}_0=-\frac{P_1}{\pi}2e_1(A_\mathrm{o}-B_\mathrm{o})\sin\omega_1,
\tag{3.170}
$$

amiből, amennyiben az apszismozgást (ez esetben tévesen) csupán az árapály-kölcsönhatásnak (illetve esetleg az árapály-kölcsönhatás és a relativisztikus effektus eredőjének) tulajdonítanánk, az apszismozgás szögsebességére formálisan

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_1^{\mathrm{form}} &= A_{\mathrm{o}} - B_{\mathrm{o}} \\
&= A_{\mathrm{TR}} - \frac{6}{5}A_{\mathrm{G}}\left(1-e_1^2\right)^{1/2}\left(1-\frac{4}{3}I^2\right) \\
&\simeq A_{\mathrm{TR}} - \frac{6}{5}A_{\mathrm{G}}\left(1-e_1^2\right)^{1/2} \qquad (3.171)
\end{aligned}$$

adódna. Ez merőleges pályasíkok esetén bizonyosan (és esetünkben lényegesen) kisebb, mint a tisztán az árapály-kölcsönhatásból származó A_{TR} szögsebesség. Vegyük észre, hogy ebben a speciális helyzetben a fenti kifejezés formálisan megegyezik a $\cos 2g_1 = -1$ helyen érvényes, minimális (3.168) pillanatnyi apszismozgási szögsebességgel. Fontos különbség azonban, hogy a fenti formula nem a g_1 dinamikai periasztronargumentum valamely speciális értéke esetén áll fenn, hanem akkor, amikor a két pályasíknak az észlelőhöz viszonyított helyzete speciális, nevezetesen amikor a két pályasík nagyjából az égbolt síkjában metszi egymást ($n_1 = 0^{\mathrm{o}}$ vagy 180^{o}). Mivel pedig merőlegesközeli pályasíkok esetében az orbitális precesszió periódusa nagyon hosszú, a pályasíkok helyzete csak rendkívül lassan változik, ezért az általunk tanulmányozott AS4b konfiguráció esetében tetszőleges g_1, illetve ω_1 értékek mellett ugyanezt a (téves) lassú apszismozgási szögsebességet mérnénk.

3.4. Összefoglalás, végkövetkeztetések

Az e fejezetben ismertetett kutatásaim során az árapály-kölcsönhatás, illetve egy harmadik komponens gravitációs perturbációinak eredő hatását vizsgáltam excentrikus pályán keringő fedési kettőscsillagok viszonylag rövid időskálájú dinamikai evolúciójára. Az általam követett szemléletmód újszerűsége az alábbi két, egymást kiegészítő pilléren nyugodott. Egyrészt, tudomásom szerint elsőként vettem figyelembe, és számítottam ki mind analitikusan, mind numerikusan az árapálytorzultság, illetve a harmadik test perturbációinak egyidejű, egymással szorosan összefüggő hatását, mégpedig rövid (évtizedes, évszázados) kvantitatív eredményeket is megadva.[14] A másik, ehhez szorosan kapcsolódó újdonság, hogy a hármas rendszernek az egyidejűleg vizsgált, egymással kölcsönható perturbációk következtében fellépő rövidtávú dinamikai fejlődését mindvégig összekötöttem annak a vizsgálatával, hogy e változások miként nyilvánulnak meg a földi észlelő által, a perturbációk időskálájához képest jelentősen rövidebb időtartamon megfigyelhető, mérhető, számolható mennyiségekben. Ez utóbbi pont esetében azonban annyit meg kell jegyeznem, hogy az észlelői, illetve dinamikai koordináta-rendszerek megkülönböztetése megjelenik már Khodykin és Vedeneyev (1997), illetve Khodykin és mktsai. (2004) munkáiban is, az első esetben éppen az ehelyütt is példának használt AS Camelopardalis rendellenesen lassú apszismozgásának vizsgálata során. Azonban e kezdeti munkákban az itt követett eljárással szemben a különböző apszismozgási járulékokat még lineárisan összeadhatónak tekintik, ráadásul levezetéseik során össze is keveredik az észlelői rendszerbeli, illetve a dinamikai rendszerbeli pericentrumargumentum, ami például különös zavart okoz a második tanulmányban, ahol a szerzők egy dinamikai stabilitási kritériumot a dinamikai rendszerbeli pericentrumargumentum helyett az észlelési rendszerre írnak fel (37. egyenletük). A jelen dolgozatban azonban gondosan ügyeltem arra, hogy az egyes mennyiségeket minden esetben gondosan

[14] Noha a KCTF mechanizmus (ld. 1.3.3. fejezet) Kiseleva és mktsai. (1998) általi felvetését követően a szoros kettősök körül keringő harmadik komponensek által okozott perturbációk és a klasszikus árapály-kölcsönhatás, különösképpen az árapály-disszipáció kapcsolata az érdeklődés középpontjába került, ám az ezzel kapcsolatos vizsgálatok minden esetben évmilliós időskálákra koncentráltak, a rövid távú effektusok, illetve ezek hatásai nem kerültek a különböző szerzők látókörébe.

definiáljam és megkülönböztessem, elkerülve hasonló zavarok esetleges felléptét. Ezen felül még azt is érdemes megjegyezni, hogy noha a pillanatnyi apszismozgási szögsebességek meghatározásánál a különböző effektusokból származó járulékok egyszerű összeadása természetesen még indokolható és elfogadható, így ezen a ponton nem kívánom elvitatni az elsőséget az előbb idézett szerzőktől, azonban a jelen tanulmány többi része, azaz az évszázados, évezredes időskálán történő, összetett pályaelem-fejlődés leírása, és különösképpen az utolsó szakaszban tárgyalt és a 3.5. ábrán szemléltetett észlelési effektus kimutatása és magyarázata mindenképpen a jelen vizsgálat eredménye.

Összefoglalva, vizsgálataimban kimutattam, hogy a hierarchikus hármas csillagrendszerek paraméterterének magas köztes inklinációjú részén jelentős kiterjedésű olyan tartományok vannak, amelyben a földi észlelő jelentősen lassabb apszismozgási rátát észlelhet, mint amit az adott periódusú fedési kettőscsillag észlelt e_1 excentricitása és ω_1 pericentrumargumentuma, valamint a csillagok egyéb kimért fizikai paraméterei alapján a klasszikus árapály-teóriák, illetve az általános relativitáselmélet alapján várnánk. A kisebb apszismozgási rátának lehet egyrészt dinamikai, másrészt méréstechnikai oka is.

1. Megmutattam ugyanis, hogy $30^\circ < i_\mathrm{m} < 150^\circ$ köztes inklináció esetén a g_1 pericentrumargumentum bizonyos értékeire a harmadik test okozta dinamikai apszismozgás negatív járulékot ad a klasszikus, illetve árapálytaghoz. A merőleges ($i_\mathrm{m} = 90^\circ$) konfigurációhoz közelítve g_1 egyre szélesebb tartományában lesz negatív a járulék, és az apszismozgási ráta akár nullához, s így a periódus végtelenhez is tarthat.[15]

2. Észlelési oldalról vizsgálva a kérdést azt találtam, hogy azokban a speciális esetekben, amikor a harmadik komponens pályasíkja közel esik az égbolt síkjához, azaz a tág pályát csaknem lapjáról látjuk, a dinamikai pericentrum argumentum értékétől (azaz a fedési kettős pályaellipszisének a pályasíkon belüli helyzetétől) függetlenül, a fő- és mellékminimumok különbségének a fél keringési periódustól való eltérésének változásán alapuló szokványos apszismozgási szögsebességmérési módszer *minden esetben* lassabb apszismozgási rátát, azaz hosszabb apszismozgási periódust eredményez, éspedig az éppen aktuális e_1 excentricitás értékkel számolt minimális $\dot{\omega}_1^\mathrm{pill}$ apszismozgási rátát, függetlenül attól, hogy a mérési időszak alatt mekkora a tényleges $\dot{\omega}_1^\mathrm{pill}$ pillanatnyi apszismozgási szögsebesség.

Természetesen felmerül a kérdés: miért nem sikerült mind a mai napig megfigyelni egyetlen harmadik komponenst sem rendellenesen lassú apszismozgású fedési kettősök körül. Erre a kérdésre csábító (vagy más szempontból éppen szerencsétlen) választ ad a fentebb kimutatott észlelési effektus. Amennyiben ugyanis a harmadik komponens pályája lapjáról látszik, akkor egyrészt *(i)* a csaknem merőleges pályasíkok következtében a fedési kettős pályasíkjának precessziója nagyon lassú, és ily módon évszázados időskálán fedésmélység változás nem várható. Továbbá, *(ii)* mivel a harmadik komponens pályasíkja közel az égbolt síkjába esik, ezért a tág pályán való keringés nem feltétlenül okoz sem fényidőeffektust, sem további radiálissebesség-változást, azaz a harmadik komponens valóban észrevétlen maradhat. (Vagy megfordítva, rendellenesen lassú apszismozgás okait keresve akkor is számolhatunk egy harmadik komponens jelenlétével és gravitációs perturbációival, ha sem az $O-C$ diagram, sem a radiálissebesség-mérések nem utalnak egy harmadik csillag jelenlétére.) Ugyanakkor, amennyiben a hipotetikus harmadik komponens nem túl halvány, jelenléte kimutatható lenne a fedési fénygörbemegoldás során meghatározható l_3

[15] A jelen vizsgálatokban kizártam azt az esetet, amikor a háromtest-kölcsönhatás dominál az árapály-kölcsönhatás felett. Ebben az esetben nem fordulhat elő negatív eredő apszismozgási járulék. Ugyanakkor a következő fejezetben látni fogunk ilyen esetre is konkrét példát.

harmadik fény paraméterből. Sajnálatos módon azonban, különösen excentrikus kettősök esetén, a pályaellipszis laputsága, pályasíkon belüli helyzete, a pályasíknak az égbolt síkjához viszonyított helyzete, a két komponensnek a pályaméréthez viszonyított relatív nagysága, valamint az esetleges harmadik fény mennyisége nagyon szorosan korrelál egymással, és így rendkívül elfajult fénygörbemegoldást eredményez. Ebből kifolyólag, még számottevő harmadik fény jelenléte esetén is, többnyire látszólag konzisztens fénygörbemegoldás nyerhető harmadik fény feltételezése nélkül is. Ily módon, hacsak nem fordítottak különös hangsúlyt a harmadik fény modellezésére, a szakirodalomban excentrikus kettősökre elérhető, harmadik fény nélküli fénygörbemegoldásokból nem vonható le automatikusan a következtetés, hogy az adott kettősnek valóban nincsen harmadik, csillagtömegű kísérője.

Marad azonban még egy további, dinamikai lehetőség is az esetleges közeli, perturbáló kísérő felfedezésére. Éppen a jelen tanulmányban láttuk, hogy egy közeli harmadik komponens nemcsak a fedésiminimum-időpontok változásait befolyásolja, hanem jelentősen perturbálhatja a szoros kettős egyéb pályaelemeit is. Így például az általam vizsgált nagy hajlásszögű esetekben a szoros kettős e_1 excentricitása $\Delta e_1 \sim 10^{-3}\,\mathrm{y}^{-1}$ nagyságrendű változást szenvedett el, amely évtizedes időskálán már a 70–80-as évek mérési pontossága szintjén is kimutatható volt. Ennek fényében érdemes megemlíteni, hogy Maloney és mktsai. (1991), Hilditch (1972a,b), illetve Padalia és Srivastava (1975) 1969 és 1971 közötti radiálissebesség-méréseiből $e_1 \sim 0{,}14$-os excentricitást határoztak meg, míg Khaliullin és Kozyreva (1983) az 1981. decemberi észlelésekből $e_1 \sim 0{,}16$-ot kapott, amely a mérésekből meghatározott $\omega_1 = 40^\mathrm{o} - 60^\mathrm{o}$ pericentrumargumentumok mellett egy lapjáról látszó tág pálya (azaz $g_1 \simeq \omega_1$) esetén nem csak nagyságrendjében, hanem előjelében is jól adja vissza a belső excentricitás várható viselkedését.

Összességében tehát az a következtetés vonható le, hogy a rendellenesen lassú apszismozgást mutató excentrikus kettősök esetében, az esetlegesen az égbolt síkjában keringő, és ily módon a hagyományos kimutatási módszerek szempontjából rejtőzködő további, harmadik komponensek kimutatása végett szükség lenne új, alapos, nagy pontosságú fotometriai észlelésekre (a harmadik fény detektálása céljából), valamint ismételt radiálissebesség-mérésekre (az excentricitás esetleges változását kimutatandó). Ezen felül, mivel egy az égbolt síkjában keringő harmadik komponens szeparációja az egyéb pályasíkokhoz viszonyítva a lehető legnagyobb, nagy bázisvonalú interferometriai mérésektől szintén remélhetünk pozitív detektálást.[16]

Létezik egy további módszer is, amivel az égbolt síkjában keringő perturbáló komponenst mégiscsak ki lehetne mutatni. Ez pedig a fedésiminimum-időpontoknak a harmadik test által rövid (P_2) időskálán okozott változásainak detektálásán alapul. Ezt a módszert azonban a jelen dolgozatban még nem vehettem figyelembe, hiszen ennek matematikai alapjait, amelyet a korábbi 2. fejezetben ismertettem, csak évekkel később dolgoztam ki. Emellett tény az is, hogy ha a (2.95) kifejezés segítségével megbecsüljük, hogy a fentebb vizsgált konfigurációk esetén mekkora dinamikai fedésiminimumidőpont-változást tapasztalhatnánk a hipotetikus harmadik komponens 2,4 éves keringési ideje alatt, akkor az eredményül adódó $\sim 4-5\times10^{-4}$ napos amplitúdó mutatja, hogy reménytelen vállalkozás lenne földfelszíni fedésiminimum-észlelésekkel kimutatni ezt a jelenséget. A harmadik komponens okozta P_2 időskálájú, dinamikai minimumidőpont-változások tényleges detektálását csak a *Kepler*-űrtávcső hosszú idejű, csaknem folyamatos, és nagy pontosságú fotometriai mérései tették lehetővé. Az e téren elért eredményeimet a következő fejezetben ismertetem.

[16] Amint azt a fejezet bevezetőjében említettem, a dolgozat 2007-es publikálását követően mind a DI Her, mind az AS Cam esetében az újabb spektroszkópiai észlelések azt mutatták ki, hogy a csillagok forgástengelyei jelentős szöget zárnak be a pályasík normálisával, s így jelen pillanatban e két rendszernél a nem szinkronizált tengelyforgásból származó negatív apszismozgási járulékkal magyarázzák a rendellenesen lassú apszismozgást. Mindez azonban nem befolyásolja a jelen dolgozatban kifejtett általános eredményeket.

4. fejezet

A *Kepler*-mezőbeli hierarchikus hármas csillagok átfogó vizsgálata fedésiminimumidőpont-változások analízisével

4.1. Szubjektív bevezetés: a *Kepler*-űrtávcső esete az íróasztalfiókommal

Amikor 2002-ben, a PhD-dolgozatom alapját jelentő, a torzult hierarchikus hármas rendszerek dinamikai evolúcióját modellező numerikus integrátorom tesztelése közben észrevettem, hogy a numerikus integrátorral generált $O-C$ görbék némelyikén a perturbáló harmadik komponens keringési idejével megegyező periódusú, kis amplitúdójú mintázat jelenik meg, amely esetenként akár egészen éles tüskék formáját is öltheti, nem gondoltam, hogy ezen mintázat kvalitatív és kvantitatív leírásának egyéb gyakorlati haszna is lesz, minthogy kielégítse becsvágyamat, miszerint képes vagyok ezt megtenni. Az eredményül kapott analitikus formulát végül is publikáltam (Borkovits és mktsai., 2003), és a számítás PhD-dolgozatomban is kapott egy külön alfejezetet. Azonban a tanulmány diszkussziójában arra a következtetésre jutottam, hogy bár a levezetett formula alapján elvben a hármasok számos fontos paraméterét (például a szoros kettős, illetve a harmadik komponens tömegét) meg lehetne határozni pusztán dinamikai úton, azonban a jelenség olyan kicsi, hogy földfelszíni mérésekkel megfelelő pontosságú detektálása reménytelen. Így hát a munka képletesen belekerült az íróasztalfiókba. Azután majdnem egy évtizeddel később, 2010-ben, Csizmadia Szilárd kollégám, aki akkor már egy ideje a berlini DLR-ben, a CoRoT misszión dolgozott felhívta a figyelmemet a CoRoT–9b – még publikálás előtt álló – felfedezésére. Ez volt a CoRoT műhold által felfedezett első (akkori léptékkel nagyon) hosszú, 95 napos periódusú tranzitáló exobolygó. Ráadásul csaknem ezzel egy időben a spektroszkópiai úton már a 2000-es évek legelején felfedezett, extrém excentrikus pályán keringő és valamivel még hosszabb keringési idejű HD 80606b-jelű exobolygónak is sikerült megfigyelni a központi csillaga előtti és mögötti átvonulásait. Tekintettel arra, hogy a dinamikai fedésiminimumidőpont-változás amplitúdója a fedési (tranzit) periódussal skálázódik, illetve a CoRoT-, valamint az akkor már pályán levő *Kepler*-űrtávcsövek korábban példa nélküli pontosságára, Szilárd barátomnak sikerült rávennie, hogy poroljam le a korábbi számításokat, és általánosítsam a formulákat excentrikus belső pályák esetére is. Így születtek meg 2010 nyarán a 2. fejezetben ismertetett általánosított analitikus formulák

(Borkovits és mktsai., 2011). Bár ez utóbbi tanulmány a tranzitáló exobolygókra volt kihegyezve, az igazi áttörést a *Kepler*-űrtávcső, illetve az általa felfedezett, és négy éven át csaknem folyamatosan, rendkívül nagy pontossággal megfigyelt két és fél ezer új fedési kettőscsillag hozta meg. Ahogy újabb meg újabb negyedévnyi fénygörbék váltak elérhetővé, egyre több és több fedési kettős $O-C$ görbéje kezdett a 2.4., 2.6., vagy akár a 2.8. ábrákon láthatókhoz hasonló alakot ölteni.

Ilyen előzmények után keresett meg 2012 őszén Saul A. Rappaport az M.I.T. emeritus professzora, és kért fel együttműködésre a *Kepler*-űrtávcső által mért fedési kettőscsillagok minimumidőpont-változásainak analízisében. Rappaport professzor tanítványaival fedési kettősök körüli harmadik komponensek detektálását tűzte ki célul. Az első 13 *Kepler*-negyedév fénygörbéiből legyártott $O-C$ görbék átvizsgálása során 39 olyan fedési kettőst találtak, amelyeknek a fedésiminimumidőpont-változásai harmadik komponens jelenlétére utaltak. Azonban az is rögtön nyilvánvaló volt számukra, hogy a 39 $O-C$ görbe jelentős hányada nem modellezhető kielégítően csak a fényidőeffektus figyelembevételével, hanem szükség van az általam leírt dinamikai perturbációk egyidejű figyelembevételére is. Azóta is tartó gyümölcsöző együttműködésünknek csupán az első lépése volt az a 2013 elején megjelent tanulmány (Rappaport és mktsai., 2013), amely nemcsak abban volt úttörő, hogy az első szisztematikus (és eredményes[1]) harmadik kísérők utáni kutatást jelentette a *Kepler*-kettősök között, hanem abban is, hogy az első olyan munka volt, amely az $O-C$-k kvantitatív analízisénél mind a fényidőeffektust, mind a dinamikai effektust egyenértékűen vette figyelembe.[2] Úgy is mondhatjuk, hogy gyakorlatilag ez a munka hozta be a köztudatba a harmadik test okozta fedésiminimumidőpont-változások esetében a fényidőeffektus mellett a dinamikai perturbációk modellezésének szükségességét is.[3]

Asztrofizikai szempontból ennél lényegesebb, hogy e tanulmány megmutatta azt is, hogy a szoros kettőscsillagok körül sokkal több rövid (akár néhány hónapos vagy éves) periódusú harmadik komponens lehet, mint azt korábban gondoltuk, vagyis a többes csillagrendszerek egy jelentős része sokkal gyengébben hierarchikus, vagy másképp, dinamikailag sokkal aktívabb lehet, mint régebben feltételeztük, ami már a kettős és többes csillagrendszerek dinamikai evolúciója, sőt amint a bevezetésben említettem, ennek következményeként az ilyen rendszereket alkotó csillagok életútja szempontjából sem elhanyagolható körülmény.

Ugyanakkor e munka világosan kijelölte a további kutatás irányait is. A 39 általunk talált hármas rendszerből 19 esetben a dinamikai $O-C$ komponens amplitúdója hasonló nagyságrendűnek vagy nagyobbnak bizonyult a fényidőeffektus amplitúdója. Mégis, annak ellenére, hogy e 19 hierarchikus hármas rendszerből 10 esetben a *Kepler*-fénygörbék alapján a fedési kettős pályája excentrikusnak bizonyult, ebben a dolgozatban a dinamikai effektusnak csak az egyszerűbb, a fedési kettős pályáját kör alakúnak feltételező közelítését (Borkovits és mktsai., 2003) vettük figyelembe. Ily módon a kezdetektől fogva nyilvánvaló volt, hogy a következő lépésként az excentrikus belső pálya esetében érvényes, összetettebb formulákat (Borkovits és mktsai., 2011) is be kell vonni az $O-C$ görbék modellezésébe. Ezen a problémán dolgozva hamar világossá vált, hogy az excentrikus belső pályára vonat-

[1] Egy valamivel korábbi tanulmányukban Gies és mktsai. (2012) 42 bizonyos speciális szempontok szerint kiválasztott *Kepler*-mezőbeli fedési kettős $O-C$-jét vizsgálva, egyetlen esetben sem találtak egyértelmű bizonyítékot fényidőeffektus, és így harmadik test jelenlétére.

[2] Ezen a ponton meg kell említeni, hogy a legelső, és az e fejezetben bemutatásra kerülő munkáinkat kivéve mind a mai napig – 2016 nyara – az egyetlen olyan fedési kettős, ahol a harmadik komponens detektálásánál szerepet játszott az $O-C$-ben megnyilvánuló dinamikai effektus, a KOI-928 volt (Steffen és mktsai., 2011). Ennél a rendszernél azonban a dinamikai fedésiminimumidőpont-változás és a radiálissebesség-görbe kombinált modellezése vezetett a harmadik komponens detektálásához.

[3] Olyannyira, hogy a tanulmány megjelenését követő három évben kapott közel félszáz független idézésnek körülbelül az ötöde a dinamikai effektus említésénél az azt kvalitatívan és kvantitatívan leíró korábbi munkáim (Borkovits és mktsai., 2003, 2011) helyett is ezt a cikket jelöli meg forrásként.

kozó formulák beillesztése a kielégítő modellezés érdekében megköveteli az apszismozgást leíró összefüggések figyelembevételét is. Ezen felül az is kiderült, hogy a legszorosabb hármasok fedésiminimumidőpont-változásainak leírásához a korábbi munkámban (Borkovits és mktsai., 2011) alkalmazott kvadrupól közelítés nem elegendő. Így a matematikai modellbe bevontam a perturbáló erő oktupól komponense okozta járulékokat, valamint a rövid időskálájú perturbációk bizonyos átlagolt hatását is. E kiterjesztett matematikai modellt és annak első alkalmazásait 26 excentrikus fedési kettőst tartalmazó kompakt hármas rendszerre 2014 végén publikáltuk (Borkovits és mktsai., 2015). Végül, az így kidolgozott és bejáratott eljárásomat kiterjesztettük a teljes *Kepler*-mintára, és e kutatómunka során több mint 220 hierarchikus hármasrendszer-jelöltet azonosítottunk az eredeti *Kepler*-mező fedési kettőscsillagai között (Borkovits és mktsai., 2016).

A fentebb említett, továbbfejlesztett matematikai modellt az eredeti, 2011-es másodrendű (kvadrupól) modellel egy helyen, a 2. fejezetben tárgyaltam. A jelen fejezetben a gyakorlati alkalmazások eredményeit, illetve ezt megelőzően, az adatok kiválasztásának, előfeldolgozásának, valamint az analízisnek a menetét és technikai részleteteit ismertetem a Borkovits és mktsai. (2015, 2016) dolgozatokban tárgyaltak szerint.

4.2. Az analitikus O–C modell elemei

A fedésiminimumidőpont-változások matematikai alakját az alábbi általános alakban definiáltam:

$$\begin{aligned}\Delta &= T(E) - T(0) - P_{\mathrm{s}}E \\ &= \sum_{i=0}^{3} c_i E^i + \left[\Delta_{\mathrm{LTTE}} + \Delta_{\mathrm{dyn}} + \Delta_{\mathrm{apse}}\right]_0^E,\end{aligned} \tag{4.1}$$

ahol $T(E)$ az E-edik fedés észlelt középideje, $T(0) = T_0$ a referenciaepocha, azaz a „nulladik" fedési minimum középideje, míg a P_{s} állandó a fedési periódust jelöli. A polinomiális tag c_0, illetve c_1 együtthatói a T_0 epocha és P_{s} periódusbeli konstans korrekciós tagok, míg a kvadratikus tag c_2 együtthatója formálisan egy állandó nagyságú periódusváltozást ($\Delta P_1/2$) ír le, függetlenül annak tényleges eredetétől.[4] A legutóbbi munkámban (Borkovits és mktsai., 2016) bevezetett köbös járulékot csupán egy-két speciális esetben alkalmaztam, egyes szemmel láthatóan nem kvadratikus hosszabb időskálájú változást mutató $O-C$ görbék modellezésénél a célból, hogy jobb illeszkedést kapva numerikusan megkönnyítsem a jelentősen rövidebb időskálájú, harmadik test eredetű, periodikus változások illesztését anélkül, hogy az így bevezetett köbös tag jelentősen befolyásolná a harmadiktestes megoldás paramétereit. Egyébiránt egy köbös járulék, amennyiben nem egy hosszabb időskálájú periodikus jel megnyilvánulása, időben állandó mértékben változó periódusváltozással (s így például változó ütemű tömegátadással, tömegvesztéssel) lehet kapcsolatban. Végül, a Δ_{LTTE}, Δ_{dyn}, illetve Δ_{apse} szimbólumok a fényidőeffektusból (LTTE), a dinamikai perturbációkból, illetve az „apszis-csomóvonali" időskálájú perturbációkból (elsősorban magából az apszismozgásból) származó komponenseket jelölik.

A fenti összetevők mindegyikét részletesen tárgyaltam korábban az 1.2.1., 2., illetve 3. fejezetekben, azonban a jobb áttekinthetőség kedvéért, röviden ehelyütt is megadom, hogy a három utóbbi, periodikus komponensből mely rendszerparaméterek határozhatók meg.

[4] A $\Delta P_1 = 2c_1$ a periódusváltozás nagysága egy fedési periódus alatt (azaz egysége [nap/ciklus], s ily módon nem tévesztendő össze a közönséges időderiválttal, amely $\dot{P}_1 \simeq 2c_2/P_1$. Hasonlóképpen, a köbös tag c_3 együtthatója a periódus második időderiváltjával a $\ddot{P}_1 \simeq 6c_3/P_1^2$ kapcsolatban van.

(i) fényidőeffektus: P_2, e_2, ω_2, τ_2 (vagy ekvivalensei), illetve $a_{\rm AB}\sin i_2$, azaz a szoros kettős tág rendszerbeli fizikai pályája fél nagytengelyének a látóirányba eső vetülete, vagy az ezzel ekvivalens (fotometriai) tömegfüggvény, $f(m_{\rm C})$.

(ii) P_2 időskálájú dinamikai perturbációk (beleértve a rövid [P_1] időskálájú perturbációk átlagát is): Ez esetben gyakorlatilag az összes dinamikai, illetve észlelési koordináta-rendszerbeli pályaelemről kapunk információkat, azaz a következőkről: P_1, e_1, ω_1, P_2, e_2, ω_2, τ_2, $i_{\rm m}$, továbbá (az n_1, n_2 csomóvonal-jellegű ívhosszakon keresztül) a $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$, g_1, g_2, h_1, h_2 szögekről is, valamint (legalábbis elvben) mind az égbolt síkjához viszonyított (észlelési) i_1, i_2, mind az invariábilis síktól mért (dinamikai) j_1, j_2 inklinációkról is, és ily módon természetesen az invariábilis síknak az égbolt síkjával bezárt i_0 szöge is megkapható. Ezen felül a dinamikai perturbációk amplitúdója az $m_{\rm C}/m_{\rm ABC}$ tömegarányról hordoz információt. Végül, az oktupól komponensen keresztül elvben a szoros kettős q_1 tömegaránya is meghatározható.

(iii) „Apszis-csomóvonal" időskálájú effektusok: A fedési kettős apszismozgásának, illetve a pályasík esetleges precessziójának kezelésére több különböző működési módot (azaz több különféle közelítő matematikai leírást) építettem bele az illesztő kódba, és ennek függvényében a visszanyerhető paraméterek is különbözőek. Ezek az üzemmódok a következők:

AP0: nincs apszismozgás – körpályán keringő fedési kettős ($e_1 = 0$) esetén természetesen ezt az üzemmódot használtam.

AP1: Állandó sebességű apszismozgás, ahol az egy fedési periódusra érvényes $\Delta\omega$ apszismozgási ráta tetszőlegesen állítható (illeszthető) paraméter. Ezt az üzemmódot célszerű használni, ha az apszismozgást elsősorban a klasszikus árapály- vagy a relativisztikus effektus dominálja, illetve ha a vizsgált $O - C$ görbe minősége, rövidsége vagy akár bonyolultsága nem teszi lehetővé az alább tárgyalandó, a jelen dinamikai modellen alapuló további üzemmódok használatát. Ebben az üzemmódban tehát az illeszthető paraméterek: e_1, ω_1 (illetve $e_1\cos\omega_1$, $e_1\sin\omega_1$), valamint $\Delta\omega$, vagy a vele ekvivalens $P_{\rm apse}$ apszismozgási periódus.

AP2: Állandó sebességű apszismozgás, ahol azonban az apszismozgási ráta nem állítható szabadon, hanem a program maga számítja a (3.163) formulával definiált

$$P_{\omega_1} = \frac{P_1}{A_{\rm o} + B_{\rm o}\cos(2g_1)_0} \tag{4.2}$$

pillanatnyi apszismozgási periódus alapján.[5] Ebben a működési módban tehát a következő paraméterek határozzák meg az apszismozgást leíró tagot: e_1, ω_1, g_1, e_2, $i_{\rm m}$, P_1/P_2, $m_{\rm C}/m_{\rm ABC}$, és ily módon, ez az üzemmód segítséget nyújt a P_2 időskálájú dinamikai formulák egyes paraméterdegenerációinak feloldásához.

AP3: A másodrendű analitikus modellből számított, változó sebességű apszismozgás. Ebben az esetben a program minden észlelési adat időpontjára kiszámítja a g_1

[5] Fontos megjegyezni azonban, hogy a jelen vizsgálódásnál a klasszikus árapályeffektusból származó, valamint a relativisztikus járulékot nem vettem figyelembe. Ennek praktikusan az volt az oka, hogy így nem volt szükségem a klasszikus járulék kiszámításához szükséges további, csillagspecifikus paraméterekre (csillagsugarak, k_2 apszismozgási állandók, illetve az egyes csillagok tengelyforgásával kapcsolatos paraméterek), amelyek a legtöbb esetben nem is álltak rendelkezésre. Szerencsére ez a döntés könnyen igazolható azzal is, hogy amint majd látni fogjuk, az általam vizsgált esetek csaknem mindegyikében a dinamikai apszismozgás időskálája jelentősen rövidebbnek bizonyult a másik két mechanizmusból várt időskáláknál.

dinamikai, valamint ω_1 észlelési pericentrum argumentumok, valamint a h_1 dinamikai csomóvonal-hosszúság, illetve opcionálisan, az e_1 excentricitás aktuális értékét a 3.2.1. szakaszban ismertetett módon,[6] majd az így aktualizált értékekből határozza meg Δ_{apse}, valamint opcionálisan Δ_{dyn} adott időben érvényes értékét. Ebben az esetben a megjelenő paraméterek megegyeznek az AP2 üzemmódban felsoroltakkal.

AP4: Hasonló az előző üzemmódhoz, azonban itt az összes pályaelem „apszis-csomóvonali" időskálájú perturbációja minden egyes lépésben kiszámításra kerül, mégpedig a sztelláris hierarchikus háromtest-probléma Söderhjelm (1982) által tárgyalt nem-aszimptotikus, másodrendű, analitikus megoldása alapján.[7] Az apszismozgás ily módon történő kezelése természetesen ugyanazokról a paraméterekről ad további információt, mint a fenti AP2, AP3 üzemmódok.

A pályasík precessziója, korábban láttuk, *közvetlenül* kevésbé befolyásolja a fedésiminimum-időpontok változását. E jelenségnek inkább a közvetett hatása jelentős, hiszen egyrészt befolyásolja a dinamikai apszimozgás sebességét, másrészt pedig, mind dinamikai, mind geometriai összefüggéseken keresztül az $n_{1,2}$ csomóvonal-jellegű mennyiségek értékét is, amelyek viszont már közvetlenül megjelennek a Δ_{dyn} dinamikai $O-C$ járulékban. Ezért mindenképpen szükségesnek bizonyult ezt a jelenséget is figyelembe venni. A program közvetlenül a dinamikai csomóvonalmozgást (azaz a h_1 dinamikai csomóvonal-hosszúság pályaelem) időbeli változását illeszti vagy számolja, amelyből a szükséges további paraméterek az A. függelékben bemutatott geometriai összefüggéseken keresztül származtathatók. A csomóvonal mozgásának figyelembevétele szintén négy különböző üzemmód szerint történhet. Ezek a következők:

NO0: Nincs csomóvonalmozgás. A pályasík végig állandó marad.

NO1: Állandó sebességű csomóvonalmozgás, ahol a Δh paraméter, és így a precessziós periódus tetszőleges értéket felvehet.

NO2: Állandó sebességű csomóvonalmozgás, amelynek sebessége a T_0 epochában érvényes

$$P_{h_1} = \frac{P_1}{A_{\mathrm{h}} + B_{\mathrm{h}} \cos 2(g_1)_0} \tag{4.3}$$

pillanatnyi dinamikai precessziós periódussal definiált.

NO3,4: Az AP3,4 üzemmódok megfelelői. Ha az AP3 vagy AP4 üzemmódok aktívak, a program automatikusan bekapcsolja az NO3 vagy NO4 üzemmódokat is.

Ehelyütt érdemes megemlíteni, hogy léteznek további, jóval kisebb effektusok is. Ezek közül, noha érdemben nem befolyásolják a később ismertetendő eredményeket, az általam kifejlesztett kód az alábbi kettőt opcionálisan figyelembe veszi:

(a): A szoros kettősön belüli fényidőeffektus. Miközben a fedési kettőscsillag két tagja a közös tömegközéppont körül kering, a két csillag tőlünk való távolsága értelem szerint pillanatról pillanatra változik. Ezért a fedési események bekövetkeztében egy további fényidőeffektus is fellép. Amennyiben a két csillag körpályán mozog, ez az effektus csupán annyit eredményez, hogy (amennyiben a két csillag nem pontosan egyforma tömegű), akkor a mellékminimum nem tökéletesen a két főminimum között

[6] A perturbációs egyenletekben újfent elhanyagolva a klasszikus árapályerők járulékát.
[7] E szerző néhány levezetésbeli hibáját javítottam.

eltelt idő felénél fog bekövetkezni. Ugyanakkor, ha a kettős excentrikus pályán kering, amelynek nagytengelye körbe forog a pályasíkban (apszismozgás), akkor már az azonos típusú fedési események egymásra következésében is megjelenik ez a belső fényidőeffektus. Mivel a jelenlegi, illetve közelmúltbeli, földfelszíni, illetve űrfotometrián alapuló hosszú időtartamú fotometriai észlelések előtti időszakban általában véletlenszerűen felfedezett fedési kettősök túlnyomó többsége érthető módon rövid periódusú, ily módon a kis pályaméret miatt ez a jelenség eddig a földi észlelések mérési pontossága alatt maradt, s így nem volt szükség arra, hogy figyelembe vegyék. Ebből kifolyólag nem meglepő, hogy annak ellenére, hogy triviális jelenségről van szó, először mégis csak az elmúlt évtized végén, éppen a *Kepler*-űrtávcső méréseivel kapcsolatban jelent meg a szakirodalomban. Az effektus differenciális alakját (azaz a fő- és mellékminimumok időkülönbségét leíró formáját) körpálya esetére először Kaplan (2010) írta le, majd még ugyanebben az évben Fabrycky (2010) megadta az általánosabb, excentrikus alakot. Ugyanakkor a fő- és mellékminimumokra külön-külön érvényes formát tudomásom szerint először én adtam meg (Borkovits és mktsai., 2015):

$$\Delta_{\mathrm{LTTEin}} = \pm\frac{q_1-1}{q_1+1}\frac{a_1\sin i_1}{c}\frac{1-e_1^2}{1\mp e_1\sin\omega_1}, \tag{4.4}$$

s ezt építettem be az illesztőprogramba is.

(b): A másik kis effektus az excentrikus kettősök esetében a fedési események bekövetkeztének gyenge (i_1) inklinációfüggése. Amint azt a bevezető 1.2.1. fejezetben az (1.24) kifejezéssel kapcsolatosan említettem, ezt a kérdést Giménez és Garcia-Pelayo (1983) vizsgálta részletesen. E szerzők sorfejtés formájában megadták az apszismozgás okozta fedésiminimumidőpont-változás matematikai alakját arra az esetre is, ha ezt a gyenge inklinációfüggést figyelembe vesszük. Az általam kifejlesztett program azonban másképp kezeli ezt az apró járulékot, mégpedig oly módon, hogy az észlelési rendszerbeli periasztronargumentumot formálisan újradefiniálja a következő módon:

$$\omega_1^* = \omega_1 \mp \frac{e_1\cos\omega_1\cos^2 i_1}{\sin^2 i_1 \mp e_1\sin\omega_1}, \tag{4.5}$$

s ezt az ω_1^* mennyiséget helyettesíti be Δ_{apse} (1.25) alatti zárt alakjába. Könnyen megmutatható, hogy ω_1^* fenti definíciója Giménez és Garcia-Pelayo (1983) (10.) egyenletének elsőrendű közelítésével ekvivalens.

Végezetül szükséges megemlíteni a jelenleg követett tárgyalásmód két olyan korlátját is, amely egyben a további fejlesztések irányát is kijelöli. A matematikai modell, és az ezen alapuló kód jelenlegi formájában a harmadik komponens tág pályáját leíró (dinamikai) pályaelemeket (természetesen a $h_2 = h_1 + 180^\circ$ dinamikai csomóvonal hosszúság kivételével) állandónak tekinti. Ennek két oka is van. Az egyik, hogy ezek változásának amplitúdója többségében jóval kisebb, mint a fedési kettős szoros pályájához tartozó pályaelemeké. Továbbá, a tág pályában jelentkező perturbációk csak közvetett hatást fejtenek ki a fedésiminimumidőpont-változásokra azáltal, hogy befolyásolják a szoros kettős perturbált mozgását, és így matematikailag csak a magasabb rendű közelítésekben jelennek meg.

A másik, egyelőre elhanyagolt effektus az „apszis-csomóvonali" időskálájú perturbációk harmadrendű, oktupól komponense. Ugyanakkor ismeretes (ld. pl. Ford és mktsai., 2000), hogy az alacsony köztes inklinációjú tartományban ez a járulék különösen fontos lehet, és ezért a továbbiakban a matematikai modellbe való bevonása szükséges.

4.3. Az O–C-analízis kód

A *Kepler*-mező $O-C$-it vizsgáló első munkánkban (Rappaport és mktsai., 2013) a modellparamétereket egy egyszerű Monte-Carlo (MC) illesztő kóddal határoztuk meg. Abban a tanulmányban éppen azért vetettük el a hagyományos, a nemlineáris legkisebb négyzetek módszerén alapuló Levenberg–Marquardt (LM) eljárás alkalmazását, mert ez utóbbi a paraméterek közt fennálló szoros, erősen nemlineáris korrelációk esetében nem alkalmas a paramétertér feltérképezésére. Az ehelyütt ismertetendő két dolgozat (Borkovits és mktsai., 2015, 2016) esetében viszont arra az elhatározásra jutottam, hogy visszatérek az LM-módszer alkalmazásához. Ennek okai a következők. A Rappaport és mktsai. (2013) tanulmányban tárgyalt nagyfokú paraméterelfajulás elsősorban abból ered, hogy a fényidő- és dinamikai effektusokat leíró függvények nem ortogonálisak. Ez természetesen azokban az esetekben jelent különösen komoly problémát, ahol a fényidőeffektus, illetve a dinamikai perturbációk hatása összemérhető egymással. Amennyiben viszont egyik vagy másik jelenség egyértelműen dominálja a fedésiminimumidőpont-változásokat, az elfajulás sokkal kisebb léptékű marad. Ez különösen a fényidőeffektus esetére igaz. Könnyen megmutatható például, hogy amennyiben a tág pálya P_2 periódusa ismert (mert például a mérési adatok hossza többszöröse a harmadik komponens keringési idejének), nem túl extrém e_2 excentricitású tág pálya esetén a pályaelemek egyszerű, lineáris legkisebb négyzetek módszerével is kielégítő pontossággal meghatározhatók, vagyis a paramétertérbeli abszolút minimumhely biztonsággal lokalizálható (ld. pl. Borkovits és Hegedüs, 1996). A másik oldalon viszont a dinamikai komponenst meghatározó paraméterek között önmagukban is fennállnak bizonyos nemlineáris korrelációk, azonban egyrészt az „apszis-csomóvonali” időskálájú Δ_{apse} $O-C$ komponens figyelembevétele, másrészt az A. függelékben taglalt geometriai összefüggések szigorú alkalmazása az egyes paraméterek között számos olyan további összefüggést hoz be, amely jelentősen csökkenti (bár fel nem oldja) a paramétertér degeneráltságát. E megfontolások nyomán végül is úgy döntöttem, hogy a korábban ismertetett matematikai modellen alapuló paraméterkereső kódomban a nemlineáris LM algoritmus, illetve az egyszerű „rácskeresés” („grid-search”) eljárás ötvözetét fogom alkalmazni.

A kód jelenlegi állapotában 20 illeszthető paramétert tartalmaz, azonban a köztük lévő különféle összefüggések miatt egyszerre nem választható, illetve nem állítható szabadon az összes paraméter. (Példának okaként az i_1, i_2, i_m inklinációk, illetve a $\Delta\Omega$, n_1, n_2 csomóvonalhosszúság-jellegű mennyiségek közül, amelyek a 2.1. ábrán bemutatott és A. függelékben tárgyalt gömbháromszög szögeit és oldalait alkotják, egyszerre csak három állítható, illetve illeszthető szabadon.) A paraméterek közti összefüggések egy részét minden esetben figyelembe veszi a program, míg egyes további összefüggések (ahogy azt fentebb a különféle apszis-, illetve csomóvonalmozgási üzemmódok esetén tárgyaltam) csak bizonyos működési módok kiválasztása esetén aktiválódnak.[8] Az állítható, illetve illeszthető paraméterek így végső soron a következő öt csoportba gyűjthetők:

(i) V_γ – a hármas rendszer tömegközéppontjának radiális sebessége (egyelőre nem használt)

(ii) c_0, c_1, c_2, c_3 – a polinomális járulék együtthatói. Közülük a c_0, illetve c_1 együtthatókat, amelyek a T_0 epocha, illetve a P_s sziderikus (fedési) periódus finomított értékét adják meg minden esetben illeszti a program (bár elvileg ez kikapcsolható), míg a nemlineáris tagok c_2, illetve c_3 együtthatóit általában csak azokban az esetekben illesztettem (és választottam 0-tól különbözőnek), ha egy hosszú távú nemlineáris

[8]Ebből a szempontból a kód a méltán jól ismert Wilson–Devinney-féle fedési fénygörbe-modellező programéhoz (pl. Wilson és Devinney, 1971; Wilson, 1979) hasonló filozófiát követ.

trend teljesen egyértelműen jelen volt az $O-C$-n. (A négyzetes, illetve köbös polinom-illesztés és a harmadiktest-megoldás problematikus összefüggéseire a későbbiekben az eredmények diszkussziójánál még visszatérek.)

(iii) e_1, ω_1, $\Delta\omega_1$ – az apszismozgást leíró három paraméter, amelyek közül az első kettő ugyanakkor a dinamikai perturbációs összetevőben is fontos paraméter. E két paraméter helyett opcionálisan választható $e_1 \cos\omega_1$, illetve $e_1 \sin\omega_1$ is. A $\Delta\omega_1$ apszismozgási ráta az előző alfejezetben tárgyaltak értelmében csak az AP1 üzemmódban állítható, illeszthető szabadon.

(iv) $a_{\mathrm{AB}} \sin i_2$, $a_{\mathrm{C}} \sin i_2$, P_2, e_2, ω_2, τ_2, q_1 – a fényidő-, illetve a dinamikai effektusban megjelenő paraméterek. A tömegeket (is) meghatározó első két paraméter helyett a program kész más paraméterkombinációkat is kezelni, mint például az $f(m_{\mathrm{C}})$ tömegfüggvényt, illetve az $m_{\mathrm{C}}/m_{\mathrm{ABC}}$ tömegarányt. A fedési kettős q_1 tömegaránya csak abban a két esetben „él”, amikor az oktupól perturbáló komponens és/vagy a belső fényidőeffektus számítása engedélyezett.

(v) i_{m}, i_1, i_2, n_1, n_2, Δh – a pályasíkok térbeli elhelyezkedését, illetve a precesszió sebességét megadó paraméterek. Az első öt paraméterből egyszerre csak három illeszthető. Az A. függelékben nemcsak a köztük fennálló geometriai összefüggéseket tárgyalom, hanem azt is, hogy mikor melyik paraméterkombinációt célszerű választani. A Δh precessziós ráta a korábban tárgyaltak értelmében csak az NO1 üzemmódban állítható, illeszthető szabadon.

Egy teljes illesztési folyamat alatt, amely a „rácskeresés” módszerrel összhangban számos, a paraméterek kezdeti értékeiben különböző futtatási lépést tartalmazhat, a fent felsorolt változókat a program hat különféle módon kezelheti: (i) az adott paraméter értéke nem változik, a teljes folyamat alatt megőrzi rögzített, kezdeti értékét; (ii) a paraméter az egy folyamaton belüli futtatási lépések során több különböző (egy előre megadott legkisebb és legnagyobb érték között egyenletesen eloszló) rögzített értéket vesz fel („rácskeresés”); (iii) a paraméter értékét az LM-illesztéssel keresi a program, azonban a kezdeti értéke minden egyes futtatási lépésben ugyanaz az előre megadott érték; (iv) a paraméter szintén részt vesz az LM-illesztési mechanizmusban, azonban a kezdeti értéke futtatási lépésről futtatási lépésre változik, két előre megadott érték között, egyenlő lépésközzel; (v) a paraméter nem állítható szabadon, a program maga számítja ki a megfelelő összefüggések alapján más paraméterekből; illetve, (vi) bizonyos működési módokban a program egyes paramétereket figyelmen kívül hagy.

A 2. fejezetben ismertetett analitikus formulák, illetve a paraméterkereső eljárások numerikus viselkedésének ellenőrzése és a kapott megoldások egyértelműségének vizsgálata céljából számos különféle tesztet futtattam. E vizsgálatoknak alapvetően két különálló része volt. Az első szakaszban a program különböző működési módjaiban, valamint az LM-illesztendő változók körét némileg módosítva, illetve bizonyos paraméterek esetén eltérő kezdeti értékekből kiindulva kerestem megoldásokat a vizsgált rendszerek tényleges $O-C$ görbéire. A második szakaszban pedig az így visszakapott rendszerparamétereket kezdeti értékként használva, numerikusan integráltam az adott hármas rendszerek mozgását, miközben az integrátor numerikusan előállította a megfelelő $O-C$ görbét is. Ezt követően egyrészt összevetettem az analitikus megoldásból kapott illesztett, illetve a numerikusan generált $O-C$ görbéket, másrészt pedig a numerikus integrálásból nyert $O-C$-ket is alávetettem a teljes illesztési folyamatnak, és ellenőriztem, hogy az illesztő kód mennyire adja vissza az ez esetben ismert tényleges paramétereket. Ezek a tesztek egyben arra is szolgáltak, hogy ellenőrizhessem az LM-megoldások kovarianciamátrixából (különböző empirikus rms szórások mellett) számolt formális hibák realitását.

Ugyanakkor, noha az általam alkalmazott tesztek gyorsan és hatékonyan képesek megmutatni, hogy az analitikus illesztés mennyire működik jól, több nyilvánvaló hátrányuk is van. Így például az LM-illesztés nem fedi fel a több dimenziós χ^2-térben rejlő nemellipszoidális korrelációkat, míg a megoldás „rácskeresés" részében eleve kizárjuk a paramétertér fizikailag nem reális részét. Ezért aztán, ahelyett, hogy automatikusan elfogadtam volna az illesztés során kapott formális hibákat, elsősorban a fentebb említett, numerikusan visszaállított $O-C$-görbékre kapott illesztések alapján, a legérzékenyebb paramétereknél „konzervatívabb" hibabecslésekkel dolgoztam. A teljes vizsgálati mechanizmust, illetve a tesztek eredményeit, a belőlük levont tapasztalatokat és következtetéseket részletesen tárgyaltam Borkovits és mktsai. (2015) E. függelékében, ehelyütt azonban ettől, terjedelmi okokból eltekintettem.

4.4. A hármasjelöltek kiválasztása és az adatok előfeldolgozása

Kutatásunkban elsősorban a *Kepler* fedési kettős katalógusára[9] támaszkodtunk, amelyet az Andrej Prša (Villanovai Egyetem) által vezetett csoport gondoz (Slawson és mktsai., 2011; Matijevic és mktsai., 2012; Conroy és mktsai., 2014; LaCourse és mktsai., 2015).[10] Az e katalógusban szereplő több mint két és félezer *Kepler*-fénygörbe mindegyikének fél órás mintavételezéssel felvett (úgynevezett „long-cadence", a továbbiakban: LC), előfeldolgozott adatsorait letöltve elkészítettük ezek előzetes $O-C$ görbéit.[11] (E munka egy részét, az e célra saját maguk által kifejlesztett automata szoftverekkel, két doktoranduszom, Hajdu Tamás és Sztakovics János végezte, illetve tőlük függetlenül az egyik amerikai társszerző, Alan Levine professzor is, ily módon csökkentve annak esélyét, hogy valamely érdekes rendszer elkerülje a figyelmünket.) A katalógusban szereplő összes fénygörbe átvizsgálása során valamivel több mint 400 olyan rendszert találtunk, amelyek $O-C$ görbéjét további vizsgálatra érdemesnek minősítettük (beleértve a korábban már Rappaport és mktsai., 2013 és Conroy és mktsai., 2014 munkáiban szintén hierarchikus hármasrendszer-jelölteknek minősített *Kepler*-kettősöket is).

E jelöltek fénygörbéit egyenként magam is megvizsgáltam, és egy többlépcsős folyamat során pontosabb fedésiminimum-időpontokat határoztam meg. Először a kettős teljes adatsorából fázis szerint feltekert, 1000-2000 egyforma nagyságú fáziscellára felosztott és fáziscellánként átlagolt fénygörbét gyártottam. Ezt követően e feltekert, fázisba rendezett fénygörbék fő- és mellékminimumaira általában 6-8-adrendű polinomokat illesztettem, majd ezeket a polinomokat mint minimumsablonokat használtam az eredeti adatsorban található fedési minimumok középidőinek meghatározására.

Az e célra kifejlesztett saját szoftverben az eredeti idősorokban megjelenő fedések kikeresése két kiválasztási kritérium alapján történik. A program az adatsort végigpásztázva

[9] http://keplerebs.villanova.edu

[10] Nevével ellentétben ez a katalógus nem csak fedési kettőscsillagokat tartalmaz, hanem ellipszoidális változókat is. Mivel az e fejezetben ismertetett vizsgálatok szempontjából az ELV-k sem elméleti, sem gyakorlati téren nem különböznek a fedési kettősöktől, a továbbiakban, a katalógus összeállítóihoz hasonlóan, általában én sem teszek különbséget a két égitestcsoport között, és ha csak az ellenkezőjét nem említem, akkor a „fedési kettős" kifejezés alatt az ellipszoidális változókra is hivatkozom.

[11] A villanovai katalógusban szereplő objektumok közel 10%-a esetében előfordult, hogy 1-2 negyedévnyi *Kepler* észlelés (jobbára a $Q4$ és/vagy a $Q12-13$ adatsorok) nem voltak elérhetők a katalógus weblapjáról. Ezért ezeket az adatokat közvetlenül a Space Telescope Institute (http://archive.stsci.edu/) által működtetett MAST adatbázisból töltöttem le, majd egy saját készítésű, egyszerű kóddal hoztam a villanovai katalógusból letölthető adatokkal azonos formátumúra, és illesztettem be az adatfile-ok megfelelő helyére.

a fedéseket vagy a *(i)* feltekert fénygörbéből meghatározott fázisok környékén keresi, vagy pedig *(ii)* egy előre beállított fluxushatár alá eső adatpontokat keres, amelyekről azután eldönti, hogy úgy viselkednek-e, ahogy egy fedés során elvárható (előbb csökkenő, majd növekvő fluxusértékek, esetleg köztük rövid állandó fényességű szakasszal), illetve azt is ellenőrzi, hogy mind a leszálló-, mind a felszálló ágban elegendő mérési pont áll-e rendelkezésre a minimumidőpont-illesztéshez. A fedési események azonosítását követően az egyedi minimumok középidejének meghatározása (szintén automatikusan) a korábbi fázisban előállított megfelelő sablonpolinomok háromparaméteres LM-illesztésével történik. Az optimalizálandó függvény alakja $f = A\sum_i c_i(\phi - \phi_0)^i + B$, ahol c_i-k az éppen használt sablonpolinom együtthatói (azaz nem illesztett, hanem rögzített mennyiségek). A három illesztett paraméter ϕ_0, A és B, amelyek közül ϕ_0 adja meg az éppen vizsgált minimum középidejének fázisban kifejezett különbségét a sablonminimum közepének fázisától. A másik két paraméterre a minimumidőpont meghatározásához közvetlenül nincs szükség. Az additív B paraméter a sablont illeszti hozzá a fénygörbe fedésről fedésre esetleg kissé változó alap fluxusszintjéhez, míg a multiplikatív A paraméter segítségével még a fedésmélység, illetve a fedéshossz akár jelentős mértékű változása esetén is a módszer pontos fedésiminimum-időpontokat eredményezett. Végezetül a fenti módszert a szoftver általában egymást követően ötször megismétli, ahol a második iteratív lépéstől már minden esetben az előző lépésben meghatározott minimum-középidőpontok körül azonosítja be a fedéshez tartozó fénygörbe pontokat.

Ugyanakkor, alternatív módszerként, egyes rendszerek esetében a sablonminimum-illesztés helyett egyszerű kvadratikus, illetve köbös polinom illesztéssel is meghatározhatók a minimumidőpontok. Azt tapasztaltam, hogy amikor alkalmazható volt, akkor a sablonillesztéses eljárás minden esetben pontosabb eredményeket adott, mint a kis fokszámú polinomillesztés. Ezért ez utóbbi módszert a kezdeti teszteken kívül csak azokban az esetekben használtam, amikor a fedésmélység és -hossz olyan nagy mértékben változott, hogy a háromparaméteres sablonminimum-illesztés nem volt használható.

Az egyedi minimumok bizonytalanságát két független módszerrel is megbecsültem. A „boot-strap" megközelítés esetében a szoftver minden egyes minimum esetében százszor ismétli meg az illesztési eljárást úgy, hogy kis mértékű, illesztésről illesztésre véletlenszerűen, Gauss-eloszlást követve változó fluxusértéket ad hozzá az adatpontokhoz, illetve (opcionálisan) fedési eseményenként 0-3 adatpontot véletlenszerűen el is hagy az adatokból. Ezt követően, feltételezve, hogy az eredményül kapott minimumidőpontok Gauss-eloszlást követnek, meghatározza az eloszlás sztenderd deviációját, és ezt tekinti az adott minimumidőpont bizonytalanságának. A másik, lényegesen egyszerűbb hibabecslés egyszerűen a ϕ_0 változó, illetve a kvadratikus (köbös) polinomillesztés esetén a megfelelő változók kovarianciamátrixainak felhasználásával kiszámítható formális hibán alapul. Úgy találtam, hogy a kvadratikus illesztés formális hibái általában egy nagyságrenddel túlbecsülték a minimumidőpontok tényleges bizonytalanságait, míg a „boot-strap" módszer, valamint a ϕ_0 paraméter formális hibájából számolt bizonytalanságok konzisztenseknek bizonyultak. Végső soron, tapasztalataim szerint, dacára a viszonylag egyszerű fedésiminimum-időpont meghatározási eljárásnak, a minimumidőpontok tipikus bizonytalansága $\sigma \sim 10 - 50$ másodperc közé esett, amely természetesen elsősorban a *Kepler*-űrtávcső kivételesen pontos fotometriai méréseinek az érdeme.[12] Természetesen a fedésiminimumidőpont-meghatározás pontossága

[12] Érdemes megjegyezni, hogy első ránézésre ez a $\sim 10 - 50$ másodperces pontosság nem tűnik kimagaslóan jónak, különösen, ha figyelembe vesszük, hogy földfelszíni megfigyelők (köztük gyakran amatőr csillagászok is) számos esetben adnak meg ennél nagyobb pontosságot akár egészen kis apertúrájú távcsövekkel kimért fedésiminimum-időpontokra is. Azonban, ha összehasonlítjuk bármely fedési kettőscsillag földfelszíni észlelésekből összeállított $O - C$ görbéjét a *Kepler*-űrtávcső észleléseiből kinyerhető $O - C$ görbékkel, láthatjuk, hogy a földi minimumidőpontok esetén az ilyen pontosságú hibabecslés meglehetősen

sok egyéb tényezőn is nyugszik. A legfontosabbak a fedésmélység (egyrészt abszolút értelemben is, de méginkább a fénygörbén megjelenő egyéb, hasonló időskálájú változásokhoz viszonyítva), valamint a fedés hossza és alakja. Úgy találtam, hogy a fenti módszer esetében sem a fényességcsökkenés sekélysége, sem a rövid (de a mintavételezési időnél azért még elegendően hosszabb) fedési időtartam, de még ezek kombinációja sem rontotta érdemben a pontosságot. Ezzel szemben sekély és platós (teljes fedésű) minimumok (mint például a KIC 08023317 mellékminimumai) esetében a fedési középidők meghatározásának bizonytalansága számottevően megnőtt.

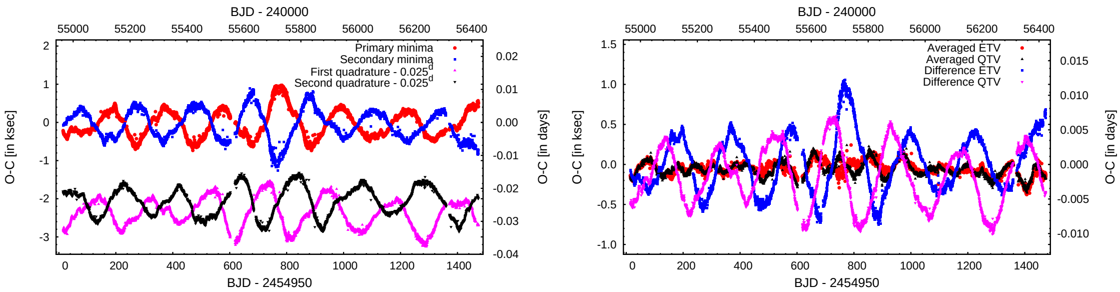
Ugyanakkor úgy találtam, hogy mindkét alkalmazott hibabecslési eljárás túlzottan érzékeny a fedésmélységre, azaz a fedésmélység csökkenésével gyorsan nő az egyes minimumok becsült hibája. Ez különösen azokban az esetekben egyértelmű, ahol a harmadik test perturbációi okozta pályasík-precesszió folytán a *Kepler*-űrtávcső észleléseinek négy éve alatt jelentősen változott a fedésmélység (és a fedéshossz). Például a KIC 07670617 rendszer esetében a fedésmélységek drasztikus csökkenésével a minimumidőpontok formális hibái jelentősen megnőttek, ezzel szemben az $O-C$ görbén nem látható számottevően nagyobb szórás az 50%-kal kisebb fedésmélységű szakaszon sem.[13] Ebből kifolyólag, ha a fenti módszerek valamelyikével becsült hibákat automatikusan felhasználtam volna az $O-C$ görbék analízise során, akkor a gyors fedésmélység-változást elszenvedő rendszerek esetében az $O-C$ görbék kisebb fedésmélységhez tartozó szakaszát a megoldás keresése közben alulsúlyoztam volna. Hasonló probléma adódott volna azoknál a kettősöknél is, ahol a mellékminimum jóval sekélyebb a főminimumnál. Ezekben az esetekben a mellékminimum $O-C$ görbéjét nem vette volna megfelelő súllyal figyelembe az illesztőprogram. Így, a fedésiminimumidőpont-változások végső analízise során, noha általában a fenti módszerek valamelyikével meghatározott individuális bizonytalanságokat használtam, egyes, az itt tárgyalt problémában érintett rendszereknél a fő-, illetve a mellékminimumokra előre beállított, globális bizonytalanságokat adtam meg. Végezetül, függetlenül attól, hogy milyen bizonytalanságokat használtam az $O-C$ paraméter-kereső eljárásban, azért, hogy a kovarianciamátrixból meghatározott formális hibáknak fizikai jelentésük legyen, a végső futtatást megismételtem úgy is, hogy előtte a minimumidőpontok bizonytalanságait átskáláztam úgy, hogy az illesztés χ^2 értéke 1 körüli értéket vegyen fel.

A részletes vizsgálatra kiválasztott több mint 400 rendszer többségének fénygörbéje ellipszoidális változásokat is mutat, amely lehetővé teszi, hogy e rendszerek esetében ne csak a fedési minimumok, hanem a kvadratúrabeli fényességmaximumok középidejét is meghatározzuk. Ez utóbbi, kvadratúraidőket ugyanúgy, kvadratúra-sablonpolinomok képzésével és illesztésével határoztam meg, ahogy azt fentebb a minimum meghatározásnál tárgyaltam. Úgy találtam, hogy egy-két excentrikus pályán mozgó ELV kivételével az összes ELV, valamint az EW (W UMa típusú) fedési kettősök esetében a sablonpolinomok előállításához egyöntetűen használhatók a következő fázishatárok: $\phi_\mathrm{p}=[-0{,}15;0{,}15]$, $\phi_\mathrm{s}=[0{,}35;0{,}65]$ a fő- és mellékminimumokra, illetve $\phi_\mathrm{q1}=[0{,}10;0{,}40]$ és $\phi_\mathrm{q2}=[0{,}60;0{,}90]$ az első és második kvadratúrára. EB és EA kettősök esetén pedig, mivel a fedési események a fénygörbe szűkebb tartományára lokalizálódnak, ennek megfelelően kisebb ϕ_p, ϕ_s fázistartományokat szükséges kijelölni. Ugyanakkor, a maximumsablonok legyártásához az EB típusú kettősök túlnyomó többségében megfelelő volt a fentebb megadott két fázisintervallum.

A minimum/maximumkeresési eljárás elvégzése révén fedési kettősönként 1–2 fedésimi-

optimisztikus. Ugyanakkor azt a tényt is hozzá kell tenni, hogy a *Kepler*-űrtávcső integrációs ideje az LC-üzemmódban 29,4 perc, amely, különösen rövidebb periódusú, illetve rövid időtartamú fedéseket mutató rendszerek esetében messze elmarad az optimálistól, s ebben a tekintetben a földfelszíni, kistávcsöves mérések előnye elvitathatatlan.

[13] Az e fejezetben részletesen analizált rendszerek $O-C$ görbéit a dolgozat legvégén, a C. függelékben, KIC azonosító szerinti sorrendben mutatom be.

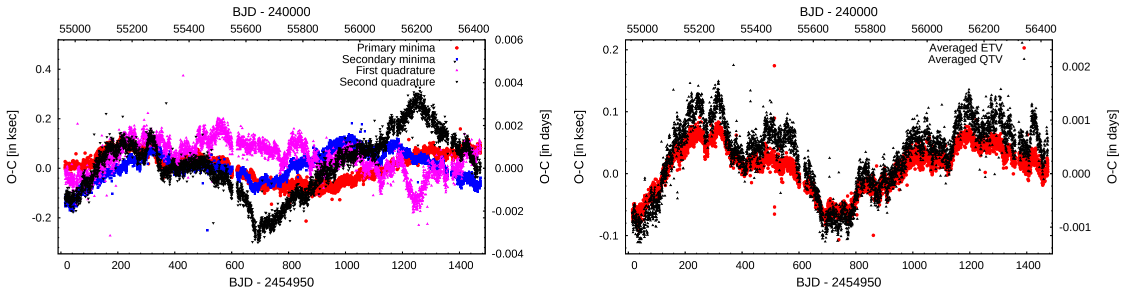


4.1. ábra. Az EW típusú KIC 06431545 erős antikorrelációt mutató, kvázi-periodikus ETV és QTV görbéi. Az ilyen típusú ETV-ket elsőként Tran és mktsai. (2013) munkánkban vizsgáltuk, és megmutattuk, hogy ez a mintázat nagy valószínűséggel a csillag(ok) felszínén elhelyezkedő, nagy kiterjedésű, foltos terület(ek)nek tulajdonítható. *Bal panel:* A fő- (piros körök) és mellékminimumok (kék négyzetek) ETV görbéi, valamint az első (azaz a főminimumot követő; ciklámen, felfelé álló háromszögek) és második kvadratúrák (fekete, csúcsával lefelé álló háromszögek) QTV görbéi. *Jobb panel:* Az átlagolt ETV (piros) és QTV (fekete) görbék csak kis amplitúdójú reziduál ingadozást mutatnak, míg a differenciális ETV (kék) és QTV (ciklámen) görbék jól láthatóan mutatják a negyed periódusnyi fáziseltérést a minimumok és maximumok között.

nimumidőpont-változást (ETV), illetve 0–2 kvadratúraidőpont-változást (QTV) leíró $O-C$ görbét kaptam. Azonban számos esetben szükséges volt ezen $O-C$ görbék további feldolgozása, finomítása. Amennyiben ugyanis a kettőst alkotó csillagok fényessége csillagaktivitás (foltok, kitörések, pulzáció, oszcilláció) vagy más körülmény (például anyagáramlás, akkréciós korong jelenléte) miatt rövid időskálájú változásokat mutat (legyenek ezek akár periodikusak, akár teljesen szabálytalanok), ezek az ingadozások általában az $O-C$ diagramokban is jelentkeznek. Szerencsére, amint azt egy korábbi munkánkban (Tran és mktsai., 2013) megmutattuk, a csillagfoltok a fő- és mellékminimumok $O-C$ görbéit egymással ellentétes fázisban torzítják el. Ugyanez az antikorreláció áll fenn a két kvadratúra $O-C$ görbéje között, továbbá a minimumok, illetve maximumok $O-C$ görbéi között $\pm 90^{\circ}$ fáziseltérés van (4.1. ábra). Ily módon a csillagfoltok hatása számottevően csökkenthető a két minimum- és hasonlóképpen a két maximumgörbe átlagolásával. Többek között (de nem kizárólagosan) ebből a megfontolásból, az $O-C$ illesztésekkel egyidejűleg a programom automatikusan legyártja az átlagolt (illetve a különbség) $O-C$ görbéket is. E görbék kiszámításához a főminimumokra számolt fedésiminimumidőpont-változások formális értékét köbös spline interpolációval határozza meg a mellékminimumok időpontjában. (Hasonló eljárással határozza meg az átlagolt, illetve differenciális kvadratúragörbéket is.)

Tapasztalatom szerint a fenti átlagolási eljárás az EW típusú fedési kettősök, illetve a közel (vagy teljesen) körpályán mozgó ELV-k esetében a leghatékonyabb. Ez persze könnyen megérthető abból a tényből, hogy e rendszerek esetében a minimumok, illetve a maximumok hossza és nagysága páronként egymáshoz hasonló. Ezért ezeknél a rendszereknél a kétféle minimum (és a kétféle maximum) középidőpontjai egyrészt hasonló pontossággal határozhatók meg, másrészt a kétféle minimumot (és maximumot) az egyéb fénygörbeváltozások arányaiban is hasonló mértékben torzítják el (4.2. ábra). Az átlagolt ETV-k (és QTV-k) használatának másik előnye, hogy sok esetben az összeátlagolt $O-C$ görbe szórása jelentősen kisebb a fő- és mellékminimumokra külön számolt eredeti $O-C$ görbékénél. Ezért, számos esetben az átlagolt görbéket használtam a fedésiminimumidőpont-változások analízéséhez a két egyedi $O-C$ görbe helyett.

A fényességingadozások okozta hamis fedésiminimumidőpont-változások eliminálására,

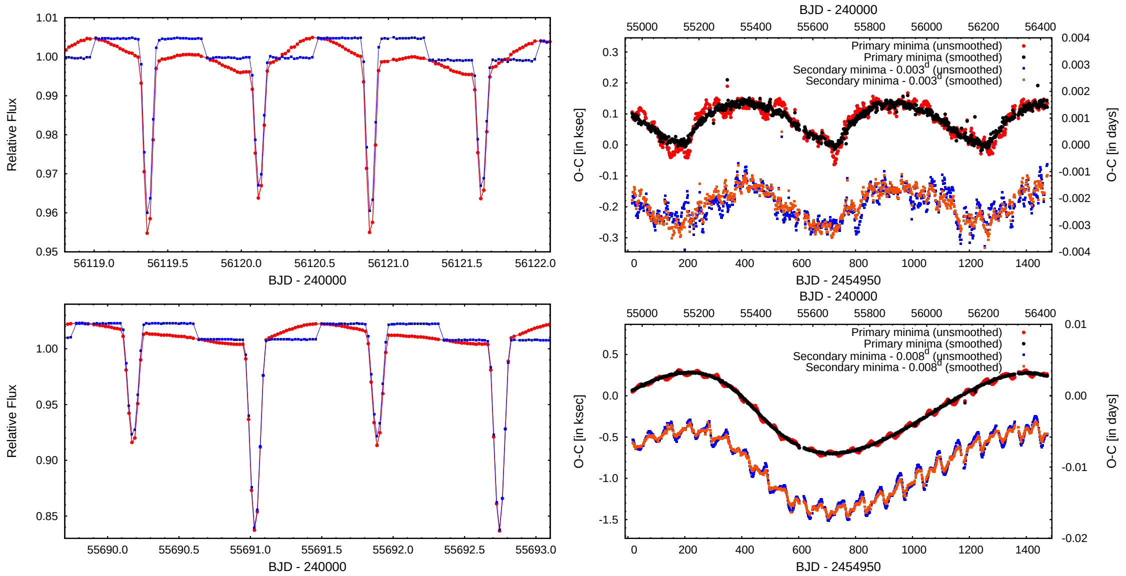


4.2. ábra. A rövid periódusú, valószínűleg EW típusú KIC 02715417 erősen irreguláris, kis amplitúdójú $O-C$ görbéi. *Bal panel:* A fő- (piros körök) és mellékminimumok (kék négyzetek) ETV görbéi, valamint az első (ciklámen, felfelő álló háromszögek) és második kvadratúrák (fekete, csúcsával lefelé álló háromszögek) QTV görbéi. *Jobb panel:* Az átlagolt ETV (piros) és QTV (fekete) görbék látni engedik a korábban szinte elfedett periodikusnak tűnő mintázatot, amely mind az átlagolt ETV, mind az átlagolt QTV esetében hasonló fázisú, amplitúdójú és alakú; ily módon valószínűvé téve, hogy egy kis tömegű (vagy alacsony inklinációjú) harmadik kísérő okozta fényidőeffektus nyomát látjuk.

vagy legalábbis mérséklésére egy további lehetőség helyi simítópolinomok alkalmazása.[14] E módszer során alacsony fokszámú (általában negyedrendű) polinomokat illesztettem a vizsgált fénygörbe minden egyes fedési minimuma körüli fénygörbeszakaszra, azonban az illesztésből kihagyva magát a fedést, (azaz tipikusan a polinomot a $[\phi_{\mathrm{p,s}}-0{,}25; \phi_{\mathrm{p,s_{bal}}}-0{,}02]$ és $[\phi_{\mathrm{p,s_{jobb}}}+0{,}02; \phi_{\mathrm{p,s}}+0{,}25]$ szakaszra illesztve), majd ezt a polinomot levontam az adott fedési esemény körüli teljes $[\phi_{\mathrm{p,s}}-0{,}25; \phi_{\mathrm{p,s}}+0{,}25]$ fénygörbe-intervallumból, ily módon mintegy „kivízszintezve” a fedési fénygörbét (lásd a 4.3. ábra bal paneljein). E módszerrel látványos eredményeket értem el nemcsak foltos fedési kettősök esetén (4.3. ábra jobb oldala), hanem amint azt egy másik munkámban (Borkovits és mktsai., 2014) megmutattam, az eljárás alkalmasnak bizonyult csillagpulzációk okozta hamis periodikus jelek kiszűrésére is (lásd a 6.1. ábrán). A lokális simítópolinomok használata EA típusú kettősök (a fedéseken kívül csak kisebb, és azoktól markánsan elkülönülő fényességingadozásokat mutató fénygörbéi) esetén vezet a leglátványosabb eredményekre, míg EW-k és ELV-k esetében a módszer nem használható.

Az átlagoló és simító eljárások használata, illetve a QTV-k bevonása a vizsgálódás körébe nemcsak azt teszi lehetővé, hogy kisebb amplitúdójú harmadik test okozta változásokat is azonosíthassunk, hanem hozzásegítenek ahhoz is, hogy a korábbiaknál sokkal hatékonyabban szűrhessük ki a tévesen hierachikus hármasként azonosított rendszereket a mintánkból. Jó példa erre a KIC 11247386 katalógusszámú (nagy valószínűséggel) érintkező fedési kettős, amelynek fénygörbéje ráadásul még jelentős O'Connell-effektust is mutat. Conroy és mktsai. (2014) e kettős $O-C$ görbéjének periodikus viselkedését fényidőeffektussal magyarázták, és $P_2 = 71{,}2 \pm 0{,}2$ napos periódusával az általuk azonosított harmadik komponensek közül ez lett volna a legrövidebb periódusú. Ugyanakkor, ahogy az a 4.4. ábra bal oldalán jól látható, ez a periodicitás határozottan csak a főminimumhoz tartozó ETV-ben, illetve a második kvadratúra QTV-jében van jelen, ráadásul ezekben is eltérő amplitúdóval és némi fáziscsúszással. Ily módon teljesen nyilvánvaló, hogy ez a periodikus jel nem származhat egy harmadik komponens okozta fényidőeffektusból. Ezzel szemben a 4.4. ábra jobb oldalán egy olyan példát mutatok be, ahol az (átlagolt) ETV, illetve QTV görbék noha egymástól némileg eltérően viselkednek (a két görbe amplitúdója kis mér-

[14] Ezt az eljárást eredetileg, Kiss László ötleteként a HD 180868 (alias Trinity) szoros kettőse fedésiminimum-időpontjainak meghatározásakor alkalmaztuk (5. fejezet).

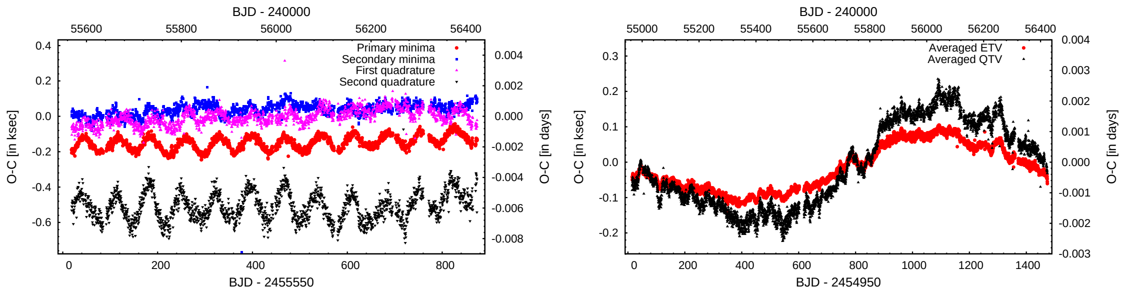


4.3. ábra. Példák lokális simító polinomok használatának mikéntjére, illetve a módszer hatékonyságának illusztrálására. Mind a KIC 05216727 (felső sor) és a KIC 09711751 (alsó sor) egy-egy olyan Algol típusú fedési kettős, amely feltehetőleg rotációs fényváltozást mutat a forgó csillag(ok) felszínén található csillagfoltoknak köszönhetően. A bal oldali ábrák a trendek levonása utáni *Kepler* LC fénygörbék egy-egy rövid szakaszát (piros), valamint az ezekhez tartozó, helyileg simított fénygörbeszakaszokat (kék) mutatják. A jobb oldali ábrákon az eredeti, simítatlan, illetve a helyileg simított fénygörbékből nyert $O-C$ görbéket rajzoltam fel. Jól látható, hogy a mélyebb főminimumokra az eljárás hatékonyabb, csaknem tökéletesen eltünteti a (forgási) torzultságból eredő hamis, periodikus mintázatot. Ezzel szemben a sekélyebb mellékminimumok esetében a hamis periodikus mintázat nem tűnik el teljesen, de jelentősen csökken az amplitúdója. (A jobb áttekinthetőség érdekében a mellékminimumok $O-C$ görbéit lefelé eltoltam a főminimumokéhoz képest.)

tékben eltér egymástól), azonban az eltérés nem olyan nagy fokú, hogy automatikusan, további vizsgálat nélkül elvessük a fényidőeffektus hipotézist.

A tévesen hierarchikus hármasoknak minősíthető rendszerek egy másik csoportjába azok az objektumok tartoznak, ahol az $O-C$ diagram alakja valóban fényidőeffektussal magyarázható, azonban magát a fénygörbe (és így az $O-C$ diagram) forrását kategorizálták tévesen fedési kettősként. Jól ismert, hogy a δ Scuti típusú pulzáló változók és az ELV-k, de akár még a kis amplitúdójú, érintkező, (ténylegesen) fedési (EW) kettőscsillagok fénygörbéje is könnyen összetéveszthető egymással. Noha ökölszabályként feltehető, hogy minél kisebb a fényváltozás periódusa, annál valószínűbb, hogy a fénygörbe nem két csillag ellipszoidális változásából, hanem egyetlen objektum oszcillációiból ered (és $P \lesssim 0{,}15$ napos periódus alatt ez szinte teljesen biztosra vehető), radiálissebesség-mérések nélkül a kérdés teljes bizonyossággal nem dönthető el (ld. pl. Tal-Or és mktsai., 2015). Radiálissebesség-adatok hiányában hőmérséklet, illetve színi információk is segíthetnek a fénygörbe helyes klasszifikációjában. Azonban a *Kepler*-mérések egyedülálló tulajdonságait felhasználva, ebben a munkánkban egy további, egyedül a fénygörbén, illetve az ebből származtatott ETV és QTV adatokon alapuló eljárást alkalmaztam a pulzáló változók kiszűrésére.

Egy körpályán mozgó ELV esetében a fénygörbét egy, a keringési idő felével megegyező periódusú szinuszos komponens uralja. Azonban a Doppler-nyalábolás, a visszasugárzási effektus, vagy a kromoszferikus aktivitáshoz köthető fényváltozások következtében a feltekert

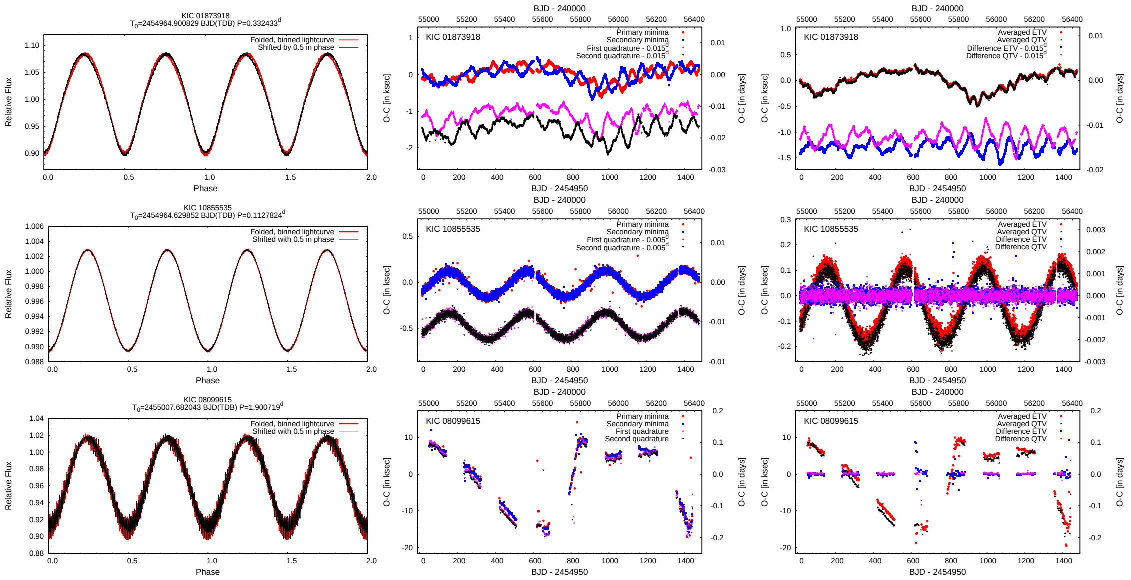


4.4. ábra. Példák a harmadiktest-hipotézisnek különböző mértékben ellentmondó ETV és QTV görbékre. *Bal panel:* Egy nyilvánvalóan hamis (false positive) eset: A KIC 11247386 jelű fedési kettős ETV és QTV görbéi. A Conroy és mktsai. (2014) által fényidőeffektusként értelmezett $P_2 = 71{,}2 \pm 0{,}1$ napos periódusú mintázat könnyen felismerhető. Az azonban, hogy a mintázat amplitúdója az egyes görbék esetében jelentősen eltér egymástól, kétségkívül kizárja, hogy harmadik kísérő okozta fényidőeffektusnak tulajdonítsuk az eredetét. (Vegyük észre azt is, hogy az egyes görbék periodikus mintázata nem csak amplitúdóban, de fázisban is eltér egymástól, ami még azonos amplitúdók esetén is cáfolná a harmadiktest hipotézist.) *Jobb panel:* Példa egy marginálisan még elfogadható fényidő-hipotézisre: a KIC 11246163 átlagolt ETV és QTV görbéi. Bár a két görbe amplitúdója némileg eltérő, ez esetben még nem vethetjük teljesen el a fényidő-hipotézist.

és átlagolt fénygörbe két ([0,0; 0,5] és [0,5; 1,0]) fázisok közti szakasza általában szemmel láthatóan különbözik egymástól. Ezzel szemben, amennyiben a szinuszoidális fényváltozás csillagpulzációtól vagy oszcillációtól ered, amelynek a periódusa természetesen a fele a „keringési időként” értelmezett feltekerési periódusnak, akkor a feltekert fénygörbe két fenti szakasza várhatóan többé-kevésbé teljesen egyforma lesz. Továbbá, ez utóbbi esetben, mivel az egymást követő minimumok (illetve maximumok) ugyanahhoz a fényváltozási fázishoz tartoznak, nem pedig geometriailag különböző konfigurációkhoz, a „két” ETV, (illetve QTV) görbe valójában egy, tehát a mérések szórását leszámítva azonos (egymást átfedő) ETV (QTV) görbéket fogunk kapni. Ezzel szemben, amint azt már a korábbi példákban is láttuk, amennyiben a kettős komponensei kromoszferikusan aktívak (foltosak), a fő- és mellékminimumokhoz (és az egymást követő kvadratúrákhoz) tartozó $O-C$ görbék jelentősen különböz(het)nek egymástól. Ennélfogva, amint azt Tran és mktsai. (2013) munkánkban is felvetettük, az összes olyan szinuszoidális fénygörbe, amelyek esetében az egymást követő minimumokból, illetve maximumokból meghatározott ETV és QTV görbék jelentősen különböznek, nagy valószínűséggel nem csillagpulzációból származik. Összességében tehát, amennyiben a feltekert fénygörbe két fele különbözik, valószínűleg kettős rendszerrel van dolgunk.[15] Ha azonban a két fénygörbeszakasz azonos, és ezen felül az ETV és QTV görbék páronként (valamint összességében is) nagyon hasonlók, nagyon valószínű, hogy a fénygörbe forrását tévesen osztályoztuk fedési kettősként, illetve ellipszoidális változóként. A fenti klasszifikációs eljárásra a 4.5. ábrán mutatok pozitív, illetve negatív példát is.

Miután előállítottam az előfeldolgozott ETV, illetve QTV görbéket, valamint kiszűrtem a tévesen klasszifikált eseteket, a következő lépés annak eldöntése volt, hogy az adott rendszer esetében egyszerű fényidőpálya-megoldást, vagy egy összetett, a fényidőeffektus mellett a dinamikai perturbációkat is figyelembe vevő megoldást keressek-e. A legtöbb esetben a választás első ránézésre nyilvánvaló volt, minthogy sok esetben az ETV görbék

[15] Ugyanakkor, ahogy Jurcsik Johanna egy, a tanulmány megjelenését követő szemináriumi előadásomon felhívta rá a figyelmem, egy gyorsan forgó, foltos csillag rotációs fényváltozása nem feltétlenül különböztethető meg ily módon az ellipszoidális változástól.



4.5. ábra. Egy igazolás és két elvetés. Három *Kepler*-célpont, amelynek természete pusztán a fénygörbe alapján első ránézésre nem egyértelmű. *Bal oldali ábrák:* Feltekert, átlagolt „long-cadence” fénygörbék (piros), és ezek 0,5 fázissal eltolt változatai (fekete). *Középső ábrák:* Az egymást követő fényességminimumokra (piros és kék), valamint fényességmaximumokra (ciklámen és fekete) meghatározott ETV és QTV görbék. *Jobb oldali ábrák:* A két-két ETV és QTV görbe átlaga, illetve különbsége. A *felső sorban* mutatott KIC 01873918 a *Kepler* EB katalógusban mint tévesen fedési kettősnek klasszifikált objektum (false positive) szerepel. Ezzel szemben a feltekert, átlagolt fénygörbe azt mutatja, hogy az egymást követő minimumok, illetve maximumok enyhén különböznek mind amplitúdójukban, mind alakjukban. Ez már önmagában is arra utal, hogy ez az objektum nem egy szabályosan pulzáló csillag. Ezt méginkább alátámasztja, hogy a két ETV, illetve a két QTV görbe egymással páronként antikorrelál. Ily módon nagy biztonsággal kijelenthetjük, hogy ez az objektum fedési kettős, amely ráadásul egy hierarchikus hármas rendszer tagja is. (Az egymással egybecsengő, átlagolt ETV és QTV görbék alakja kielégítően modellezhető fényidőeffektussal.) A különösen rövid periódusú KIC 10855535 (*középső sor*), illetve a hosszabb periódusú KIC 08099615 (*alsó sor*) objektumok esetében az egymást követő fényességminimumok (és maximumok) teljesen egyformák. Ezen túl, a két ETV és úgyszintén a két QTV görbe teljesen fedi egymást. Mindezek alapján erősen valószínűsíthető, hogy ez esetekben el kell vetni a fedési kettős hipotézist, és a fényváltozás okául valamely más (fele ekkora periódusú) jelenséget kell keresni. Ettől függetlenül, a KIC 10855535 esetében mind az ETV, mind a QTV görbék egyértelműen fényidőeffektusra utalnak. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy ez a rendszer egy $P_{\mathrm{LTTE}} = 411{,}9 \pm 0{,}2$ nap periódusú tág kettőscsillag. A KIC 08099615 esetében a nagy amplitúdójú, pekuliáris ETV (és QTV) görbének valamely más, a jelen vizsgálatok szempontjából nem érdekes eredete lehet.

egyértelműen mutatták a 2.4., 2.6., illetve 2.8. ábrákon látható jellegzetességek egyikét-másikát, vagy pedig éppen ellenkezőleg, az ETV görbéből ránézésre megbecsülhető P_2 periódus olyan nagy P_2/P_1 arányt eredményezett, amely mellett a dinamikai perturbációk már biztonsággal elhanyagolhatók. Külön figyelmet elsősorban azok a (kétesélyes) rendszerek igényeltek, amelyekben egy többé-kevésbé szinuszos ETV mintázat egy mérsékelten nagy P_2/P_1 aránnyal társult. Ebből kifolyólag az összes olyan rendszernél is, ahol elsőre csak fényidőmegoldást illesztettem, becslést adtam a dinamikai perturbációkból származó járulék valószínűsíthető relatív nagyságára. Ehhez a fedési kettősök tömegét egységesen $2\mathrm{M}_\odot$-nak feltételezve, a konkrét fényidőmegoldásból kapott $f(m_\mathrm{C})$ tömegfüggvény felhasználásával kiszámoltam a harmadik test lehetséges tömegét több különböző látszó inklináció esetére, majd ebből a (2.95) kifejezés felhasználásával meghatároztam a dinamikai járulék valószínűsíthető nagyságát. Amennyiben azt találtam, hogy e járulék a lehetséges minimális m_C tömeg mellett (azaz az $i_2 = 90^\mathrm{o}$ esetben) meghaladta a fényidő-amplitúdó 25%-át, az adott rendszerre kombinált dinamikai és fényidőmegoldást is illesztettem.

4.5. A vizsgált rendszerek áttekintése

Összesen az eredeti *Kepler*-mező 230 fedési kettőscsillagának ETV görbéire sikerült legalább egy bizonyos mértékben megbízható fényidő- és/vagy dinamikai megoldást adnom.[16] Az e rendszerek alapvető paramétereivel, valamint az ETV és QTV görbéikkel és a rájuk adott megoldások általános jellemzőivel kapcsolatos információkat a 4.1. táblázatban adom meg.

A 4.1. táblázat második és harmadik oszlopa a fedési kettős fénygörbék kétféle klasszifikációját adja meg. Hacsak nem egy nyilvánvalóan különálló kettősről van szó, a fénygörbe alapján történő klasszifikáció korántsem egyszerű és magától értetődő feladat. Amint korábban már szóba került, különösen az ELV-k és a kis amplitúdójú érintkező rendszerek (EW típusú fénygörbéjének) megkülönböztetése jelent nehézséget, amit még tovább tetéz a fénygörbéhez egyes esetekben hozzáadódó harmadik fény is, amely az amplitúdót még tovább csökkentheti. Ugyanakkor még a tényleges fedési kettősök esetében sem egyszerű például egy alacsony kitöltési faktorú érintkező (EW) kettős, és egy szoros félig érintkező (EB) rendszer megkülönböztetése. Erre egyebek között a sokáig az egyik legegyértelműbben érintkező kettősnek klasszifikált AW UMa esete szolgáltat jó példát, amelyről Pribulla és Rucinski (2008) kimutatták, hogy valójában egy félig érintkező kettőscsillag jelentős vastagságú anyagbefogási koronggal.[17] Ehhez hasonlóan, maguk az ELV-k között is problémát okozhat az alacsony inklinációjú érintkező, és a nem is annyira alacsony inklinációjú félig érintkező kettősök megkülönböztetése. Végül, amint az előző fejezetben már tárgyaltam, mindezen felül fennáll a pulzáló változók fedési és/vagy ellipszoidális változókkal való összekeverésének veszélye is. Ezért a 2. oszlopban felsorolt hagyományos fénygörbe-klasszifikációt, amely ráadásul a szubjektív elemet (ez esetben e sorok írójának döntését) sem nélkülözi, némileg fenntartással kell kezelni. A nagy mennyiségű *Kepler*-adaton alapuló, reménybeli automatizálható fénygörbe-klasszifikáció felé irányuló lépésként Matijevic és mktsai. (2012) definiáltak egy, a fénygörbék topológiai tulajdonságain alapuló, kvantitatív, morfológiai osztályozási sémát. A harmadik oszlopban az e séma szerinti klasszifikációt is megadtam, ahogy az a *Kepler* EB katalógusban elérhető. Jól látható, hogy a kétféle

[16] Mivel e 230 kettős között a korábbi munkáinkban (Rappaport és mktsai., 2013; Borkovits és mktsai., 2015) vizsgált 45 rendszer mindegyike szerepel, a két korábbi munkában kapott megoldásokat külön nem tárgyalom. Az első munkánkban vizsgált 39 rendszer esetében az ottani eredményektől teljesen független, új analízist végeztem.

[17] „Most érkezett!" A legfrissebb fordulat AW UMa ügyben: Eaton (2016) amellett érvel, hogy mégiscsak érintkező kettősről van szó.

4.1. táblázat. A vizsgált rendszerek tulajdonságai

KIC No.	Tip.	Morf.	T_0 (MBJD)	P_1 (d)	K_p (mag)	adathossz (d)	$\frac{\mathrm{ETV}}{\mathrm{QTV}}$	Ill. görbék	Ill. tip.	Tab	Ref.
1873918	ELV(EW)	0,86	54964,900829	0,332433	13,7	1459	2/2	a	l+q	L2-13	7
2302092	EW	0,89	54964,694441	0,294673	14,4	1459	2/2	a	l	L2-27	3
2305372	EA	0,58	54965,956227	1,4046920	13,8	1458(4216)	2s4/2	p(+e)	l(+q)	L3-25	6,23
2450566	ELV	0,98	55001,560102	1,8445871	11,7	1468	2/2	a	l	L2-24	3
2576692	EA	0,04	55027,103323	87,8782329	12,7	1406	2/0	p+s	l+d	D3-08	
2708156	EA	0,57	54954,336095	1,8912671	10,7	33912	2s8/0	p+e	l+c	L1-38	1
2715007	ELV	0,87	54964,783119	0,2971105	14,7	1459	2/2	a	l	L3-17	
2715417	ELV(EW)	0,76	54964,667658	0,2364399	14,1	1459	2/2	a	l(+q)	L2-15	
2835289	ELV+E3	0,92	55000,444609	0,857762	13,0	1469	2/2	a	l	L1-35	3,8
2856960	EA+E3	0,60	54964,661805	0,258507	15,6	1458	2/0	a	l+q	L1-03	3,9,10,11
2983113	EW	0,89	55001,969640	0,3951601	15,2	1238	2/2	a	l	L3-04	3
3114667	EA	0,52	54999,758222	0,8885832	17,4	683	2s4/0	a	l	L2-02	3
3228863	EB	0,65	54954,26185	0,730944	11,8	6636	2/2	a+e	l+q	L1-29	2,3,12,22
3245776	ELV	0,96	55001,663004	1,4920589	14,4	1458	2/2	a	l	L1-30	3
3248019	EA	0,37	55098,778000	2,6682057	15,4	1329	2/0	a	l	L3-24	
3335816	EA	0,16	54954,355631	7,4220263	12,1	1462	2/0	a	l	L3-38	
3338660	EA	0,60	55002,262623	1,8733806	14,8	852	2s4/0	p	l	L2-07	
3345675	EA	0,00	55083,146716	120,0040103	15,6	1320	1/0	p	l+d	D3-03	
3440230	EA	0,54	54967,238413	2,8811010	13,6	1455	2s4/2	p	l+q	L2-35	1,6
3544694	EA	0,29	55740,65102	3,845728	15,9	683	2s8/0	p+s	l+d	D1-05	
3766353	EA(HB)	−1, 00	54966,722264	2,666966	14,0	1456	2/2	p	l	L3-12	3
3839964	ELV(EW)	0,78	54964,792432	0,2561499	14,6	1459	2/2	a	l+q	L3-40	3
3853259	ELV(EW)	0,98	54964,781808	0,2766478	13,9	1459	2/2	a	l+q	L1-10	
4037163	EA	0,58	55000,227976	0,6354447	16,7	684	2/0	a	l(+q)	L1-07	3
4055092	EA	0,01	54966,932772	76,464989	15,3	1404	2/0	p+s	l+d	D3-16	
4069063	EA	0,55	54964,906342	0,5042953	13,3	1452	2s4/0	a	l	L2-18	3
4074708	EW	0,73	54964,856673	0,3021166	15,4	1459	2/2	a	l	L2-37	3
4078157	EA	0,08	54960,300077	16,025671	15,5	1202	2/0	p+s	l+d	D3-02	
4079530	EA	0,07	54994,805374	17,7271000	15,6	579	2/0	p+s	l+d	D1-12	
4138301	ELV	0,90	54964,685221	0,253379	14,7	1459	2/2	a	l(+q)	L2-14	3
4174507	EA	0,24	54966,041640	3,891825	15,4	1456	2/0	a	l(+d)	L3-31	
4244929	EW	0,91	54964,747256	0,341403	15,1	1459	2/2	a	l	L2-55	3
4451148	EW	0,82	54954,385233	0,7359815	11,2	1470	2/2	a	l	L2-06	3
4547308	ELV	0,88	54953,635293	0,5769278	12,5	1470	2/2	a	l	L2-17	3
4574310	EA	0,56	54954,662614	1,3062201	13,2	1468	2s4/2	p	l	L2-56	23
4647652	EB	0,68	54953,945894	1,06482495	11,8	1470	2/2	p	l	L2-08	2,3
4670267	EA	0,60	54966,375624	2,0060974	15,1	1456	2s4/2	a	l(+d)	L2-09	3
4681152	EA	0,55	54954,060778	1,835930	13,1	1456	2s4/2	p	l	L2-43	3
4753988	EA	0,16	54968,025737	7,304476	15,0	1454	2/0	p+s	l+d	D3-14	
4758368	EA	0,57	54958,206761	3,749935	10,8	1468	2s4/2	p+s	l+a	L3-45	3,13
4762887	ELV	0,95	54964,771668	0,7365737	14,4	1458	2/2	a	l	L2-47	3
4769799	EA	0,12	54968,515532	21,928614	10,9	1438	2/0	p+s	l+d	D2-11	4,5
4848423	EA	0,48	55000,595941	3,003613	11,8	922	2/2	a	l	L3-03	1,23
4859432	EW	0,76	54949,996305	0,3854799	15,5	1421	2/2	a	l(+q)	L2-05	3
4909707	EB	0,72	54953,913193	2,3023675	10,7	1470	2/2	p+s	l+d	D1-28	2,3
4937217	EW	0,82	54964,627330	0,4293416	15,4	1459	2/2	a	l+q	L3-42	3

Megjegyzések. (1) A 2. oszlopban a fénygörbék típusát a klasszikus fedési kettős fénygörbe-tipológia (ld. az 1.1.2. szakaszban) szerint adtam meg, ezt kiegészítve az E3=külső fedéseket mutató rendszer jelölésekkel. (2) A 3. oszlop a közelmúltban, Matijevic és mktsai. (2012) által bevezetett morfológiai osztályozást mutatja. (3) T_0 és P_1 az $O-C$ görbék kiszámításához használt epocha és fedési (sziderikus) periódus. (4) A *Kepler*-magnitúdókat a Kepler Input Catalog-ból (KIC) (Batalha és mktsai., 2010) vettem. (5) Az ETV/QTV oszlop az adott rendszerre számolt ETV és QTV görbék számát adja meg. Amennyiben mindkét ETV (és/vagy) QTV meghatározható volt, akkor ezek átlagát és (fél-)differenciáját is kiszámoltam. Azoknál a rendszereknél, ahol a fénygörbén lokális polinomos simítást alkalmaztam, ezt az ETV darabszáma után tett n-nel, majd a simító polinom fokszámával jeleztem. (6) Az „Ill(esztett) görbék” oszlopban használt rövidítések: ‘p’ – főminimumra számolt, s’ – mellékminimumra számolt, ‘a’ – átlagolt ETV görbék, ‘e’ – földfelszíni minimumészleléseket is figyelembe vettem; (7) Rövidítések az „Ill(esztés) tip(usa)” oszlopban: l’ – LTTE; ‘a’ – AME (csak a nem-d’-típusú megoldásoknál jelzem külön); d’ – dinamikai; ‘q’ – kvadratikus; c’ – köbös. A helyenkénti zárójeles hozzátoldások ebben az oszlopban azt jelzik, hogy több különféle modellt is számítottam, amelyek közül a zárójellel jelölt a kevésbé preferált megoldást adta. (8) A „Tab” oszlop az adott rendszerre kapott megoldás helyét adja meg a 4.2–4.4., 4.5–4.7. vagy 4.8. táblázatokban (L1’–L3’ puszta LTTE, D1’–D3’ kombinált LTTE és dinamikai megoldás, illetve ‘F’ tévesen azonosított (false positive) rendszerek).

Referenciák: 1: Gies és mktsai. (2012); 2: Rappaport és mktsai. (2013); 3: Conroy és mktsai. (2014); 4: Borkovits és mktsai. (2015); 5: Orosz (2015); 6: Zasche és mktsai. (2015); 7: Tran és mktsai. (2013); 8: Conroy és mktsai. (2015); 9: Armstrong és mktsai. (2012); 10: Lee és mktsai. (2013); 11: Marsh és mktsai. (2014); 12: Lee és mktsai. (2014); 13: Gaulme és mktsai. (2013); 14: Lee és mktsai. (2015); 15: Carter és mktsai. (2011); 16: Borkovits és mktsai. (2013); 17: Masuda és mktsai. (2015); 18: Fabrycky és mktsai., előkészületben; 19: Steffen és mktsai. (2011); 20: Baran és mktsai. (2015); 21: Liška (2014); 22: Csizmadia és Sándor (2001); 23: Gies és mktsai. (2015)

4.1. táblázat. (*folytatás*)

KIC No.	Tip.	Morf.	T_0 (MBJD)	P_1 (d)	K_p (mag)	adathossz (d)	$\frac{\mathrm{ETV}}{\mathrm{QTV}}$	Ill. görbék	Ill. tip.	Tab	Ref.
4940201	EA	0,15	54967,276926	8,816578	15,0	1455	2/0	p+s	l+d	D1-23	2,4,5
4945857	EW	0,74	54964,830222	0,335416	14,0	1459	2/2	a	l	L2-59	3
4948863	EA	0,10	54972,831420	8,6435903	15,4	1452	2/0	p+s	l+d	D2-09	
5003117	EA	0,37	54986,095638	37,610001	14,0	1429	2/0	p+s	l+d	D3-06	4,5
5039441	EA	0,39	54955,351360	2,151383	12,9	1469	2s4/0	p+s	l+a	L1-33	2
5080652	EA	0,30	54968,166959	4,144357	15,1	1422	2/0	p	l+d	D1-15	
5095269	EA	0,05	54966,865286	18,6119616	13,5	1433	1/0	p	l+d	D1-16	5
5128972	EW	0,74	54965,047601	0,505323	13,2	1459	2/2	a	l	L1-16	2,3
5216727	EA	0,48	54964,929149	1,513023	13,4	1459	2s4/2	p	l	L1-22	
5255552	EA+E3	0,17	54970,636491	32,458635	15,2	1414	2/0	p+s	l+d	D1-31	4,5
5264818	ELV	0,92	54955,241047	1,905050	8,9	1469	2/0	a	l+d(+q)	D1-20	2,3
5269407	EA	0,53	54965,651124	0,9588631	14,2	1458	2s4/0	a	l	L3-30	3
5307780	EW	0,88	54964,977524	0,308851	14,9	1459	2/2	a	l+q	L2-38	
5310387	EW	0,96	54953,664664	0,441669	12,7	1470	2/2	a	l+q	L1-04	2,3
5353374	EW	0,78	54964,661848	0,3933205	14,1	1459	2/2	a	l	L3-11	3
5376552	EW	0,82	54954,083210	0,5038188	12,9	1470	2/2	a	l(+q)	L1-11	2,3
5384802	EA	0,17	54966,988768	6,083093	13,7	1454	2/0	a	l+d	D1-19	2,5
5459373	ELV	0,97	54964,670887	0,2866088	15,1	1459	2/2	a	l	L1-14	3
5478466	EW	0,97	54964,859645	0,4825005	14,2	1459	2/2	a	l	L2-04	3
5513861	EA	0,57	54954,995935	1,5102117	11,6	3010	2/2	a+e	l	L2-63	1,3,6,23
5611561	ELV(EW)	0,74	55000,011420	0,25869465	14,0	1421	2/2	a	l	L2-33	3
5621294	EA	0,60	54954,510518	0,938905	13,6	1470	2s4/2	p	l+q	L2-36	1,6,14
5653126	EA	0,09	54985,913152	38,493382	13,2	1424	2/0	p+s	l+d	D2-06	4,5
5731312	EA	0,08	54968,093163	7,946382	13,8	1456	2/0	p+s	l+d	D2-05	4,5
5771589	EA	0,12	54962,130765	10,738342	11,8	1434	2/0	p+s	l+d	D1-10	2,4,5
5897826	EA+E3	..	55069,313	1,76713	13,1	..	..	..	..	D1-01	15
5903301	EA	0,41	55003,431007	2,320302	15,1	1330	2/2	a	l	L2-49	
5952403	EA+E3	0,52	55051,237191	0,9056774	7,0	1426	2s4/0	a	l+d(+q)	D1-02	16
5956776	EA	0,61	55000,305505	0,5691150	16,7	855	2s4/2	p	l	L3-21	
5962716	EA	0,47	54965,398009	1,804586	13,9	1458	2s4/0	p	l	L3-32	
5975712	ELV	0,87	54953,924190	1,136083	11,5	1469	2/2	a	l(+q)	L3-39	3
6103049	EA	0,59	54964,888912	0,6431712	15,1	1426	2s4/0	a	l	L3-09	
6144827	ELV	0,79	54964,642040	0,234650	15,0	1459	2/2	a	l+q	L1-05	3
6233903	EA	0,36	55001,719115	5,9908477	16,5	851	2s4/2	p+s	l+a	L3-54	
6265720	EW	0,93	54964,729666	0,3124277	14,8	1426	2/2	a	l	L3-06	3
6281103	ELV(EW)	0,98	54964,870642	0,3632811	14,9	1459	2/2	a	l+q	L2-50	3
6287172	FP?	0,95	54953,651911	0,2038732(/2)	12,7	1469	2/2(1/1)	a	l	F-06	
6370665	EW	0,96	54965,405240	0,9323155	14,0	1458	2/2	a	l+q	L1-08	2,3
6516874	EA	0,60	55001,4643225	0,9163260	15,9	1237	2s4/0	a	l	L2-20	3
6525196	EA	0,36	54954,353139	3,420598	10,2	1467	2s4/0	a	l+d	D1-26	2
6531485	EA	0,53	54964,801481	0,676990	15,6	1459	2/0	p+s	l+d	D1-03	2
6543674	EA+E3	0,53	54965,303847	2,391030	13,5	1456	2s4/2	a	l	L1-36	3,17
6545018	EA	0,42	54965,835642	3,991460	13,7	1457	2/2	p+s	l+d	D1-07	2,4,5
6546508	EA	0,20	55189,798579	6,107057	15,7	1237	2/0	p+s	l+d	D2-10	
6606282	EA	0,31	54965,433543	2,107130	13,0	1456	2/0	a	l	L3-22	
6615041	EW	0,75	54964,807732	0,3400856	13,9	1459	2/2	a	l(+q)	L3-49	3
6669809	EB	0,64	54953,997571	0,7337388	10,8	1437	2s4/2	p	l+c	L1-02	
6671698	EW	0,73	54954,077303	0,471525	13,5	1437	2/2	a	l+q	L2-52	3
6766325	ELV(EW)	0,92	54964,713835	0,4399657	13,8	1459	2/2	a	l	L3-26	3
6794131	ELV?	0,81	54954,298318	1,613328	12,5	1455	2/2	p	l(+q)	L3-52	3
6877673	EA	0,11	54989,092003	36,7587372	13,7	1454	2/0	p+s	l+d	D3-07	
6964043	EA+E3	0,35	55190,170	10,725518	15,6	1233	2/0	p+s	l+d	D1-17	4
6965293	EA	0,18	54957,473848	5,077746	12,8	1468	2/0	p+s	l+a(+d)	L2-39	
7119757	EA	0,64	54965,304131	0,7429217	15,6	1459	2s4/2	a	l	L2-57	3
7177553	EA	0,06	54954,545842	17,996467	11,5	1458	2/0	p+s	l+d	D1-29	
7272739	EW	0,75	54964,853794	0,2811644	13,0	1459	2/2	a	l(+q)	L3-58	3
7289157	EA+E3	0,37	54969,966600	5,266525	12,9	1459	2/0	p+s	l+d	D1-18	2,4,5
7339345	EW	0,74	54964,6478878	0,2596643	15,2	1459	2/2	a	l+q	L2-19	3
7362751	ELV(EW)	0,73	54964,744494	0,338249	15,8	1459	2/2	a	l+q	L1-25	3
7375612	FP?	0,98	54953,639904	0,1600728(/2)	12,0	1470	2/2(1/1)	a	l(+q)	F-07	3
7385478	EA	0,54	54954,534784	1,655478	11,5	1468	2s4/2	p	l	L2-31	3
7440742	EW(ELV)	0,71	54949,930411	0,2839922	11,8	1388	2/2	a	l	L2-45	
7518816	EB	0,65	54953,692277	0,4665805	12,8	1470	2s4/2	a	l	L3-13	3

4.1. táblázat. (*folytatás*)

KIC No.	Tip.	Morf.	T_0 (MBJD)	P_1 (d)	K_p (mag)	adathossz (d)	$\frac{\mathrm{ETV}}{\mathrm{QTV}}$	Ill. görbék	Ill. tip.	Tab	Ref.
7552344	EA	0,24	54964,948438	2,001491	15,4	1457	2/0	a	l	L2-25	
7593110	EA	0,17	54999,192999	3,549384	15,9	1235	2/0	p	l+d	D1-22	
7630658	EA	0,47	55003,279035	2,151155	13,9	1418	2s4/2	a	l	L2-22	6
7668648	EA+E3	0,08	54963,315401	27,825590	15,3	1433	2/0	p+s	l+d	D1-13	2,4,5
7670617	EA	0,07	54969,139216	24,703160	15,5	1433	2/0	p+s	l+d	D3-09	4,5
7680593	ELV(EW)	0,97	54964,639100	0,2763915	15,4	1459	2/2	a	l+q	L2-32	3
7685689	EW	0,77	55001,994674	0,3251596	15,5	1238	2/2	a	l(+q)	L1-21	3
7690843	EB	0,69	54954,158345	0,786260	11,1	1470	2s4/2	a	l+d+c	D1-04	2,3,13
7811211	EA	0,49	54964,825947	0,9024037	14,6	1458	2s4/0	p	l(+q)	L1-19	
7812175	EA	0,06	55002,612666	17,793925	16,3	658	2/0	p+s	l+d	D2-01	4
7821010	EA	0,03	54969,615845	24,2382426	10,8	1454	2/0	p+s	l+d	D2-07	18
7837302	EA	0,06	54982,935571	23,837136	13,7	1430	1/0	p	l+d	D2-12	2
7877062	EW	0,81	54964,779743	0,3036520	13,8	1459	2/2	a	l	L2-54	3
7955301	EA	0,14	54967,950750	15,32784	12,7	1448	2/0	p+s	l+d	D1-14	2,4,5,13
8016214	EA	0,53	54966,725645	3,1749714	14,4	1454	2s4/2	p	l(+q)	L3-57	3
8023317	EA	0,13	54979,733478	16,579002	12,9	1465	2/2	p+s	l+d	D1-30	2,4
8043961	EA	0,63	54954,555903	1,5592127	10,7	1469	2/2	a	l(+d)	L1-20	2,3
8045121	FP?	1,00	54953,761839	0,2631774(/2)	12,0	1470	2/2(1/1)	a	l(+q)	F-02	3
8081389	EA	0,56	54965,003801	1,4894435	14,0	1458	2s4/2	p	l(+q)	L2-58	
8094140	EA	0,49	54965,145553	0,7064292	15,2	1459	2s4/0	a	l	L1-32	
8143170	EA	0,15	54970,113064	28,785943	12,9	1455	2/0	p+s	l+d	D3-04	4
8145477	EW	0,89	54965,076077	0,5657843	14,8	497	2/2	a	l	L2-01	3
8190491	ELV	0,95	54965,198125	0,7778768	14,3	1459	2/2	a	l(+q)	L1-27	3
8192840	ELV(EW)	0,95	54965,013933	0,43354925	13,5	1459	2/2	a	l(+q)	L2-40	2,3
8210721	EA	0,08	54971,157082	22,672816	14,3	1451	2/0	p+s	l+d	D2-03	4,5
8242493	EW	0,73	54964,621844	0,2832856	14,7	1459	2/2	a	l(+q)	L2-29	3
8265951	EW	0,81	54954,246763	0,7799575	12,7	1469	2/2	a	l	L3-48	3
8330092	ELV(EW)	0,79	54964,940576	0,32172355	13,5	1459	2/2	a	l	L1-26	3
8386865	ELV	0,99	54953,942556	1,258041	12,0	1466	2/2	a	l(+d)	L1-09	2,3
8394040	ELV(EW)	0,77	54964,878453	0,3021262	14,5	1459	2/2	a	l	L1-12	2,3
8429450	EA	0,47	54954,217684	2,7051516	13,1	1466	2/2	a	l	L3-46	5
8444552	EA	0,49	54964,595346	1,178090	13,6	1459	2s4/0	a	l	L3-41	
8553788	EA	0,54	54954,997634	1,6061632	12,7	2771	2s4/2	p+e	l	L3-51	1,5,6,23
8563964	FP?	1,00	54953,846748	0,338436(/2)	12,9	1470	2/2(1/1)	a	l	F-03	3
8690104	EW	0,77	54964,834110	0,4087744	14,9	1459	2/2	a	l	L3-27	3
8719897	EA	0,50	54955,237444	3,151420	12,4	1469	2s4/0	a	l+d	D1-21	2,13
8739802	ELV	0,93	55001,999865	0,2745129	14,9	1238	2/2	a	l	L2-21	3
8758161[a]	EA	„	54953,834107	1,9964352	12,5	1467	2s4/2	a	l	L3-43	
8868650	EA	0,62	54957,940589	4,447430	11,9	1463	2s4/2	p	l(+q)	L3-36	
8904448	EW	0,74	54965,059034	0,865983	13,9	1458	2s2/2	p	l+c	L1-23	2,3
8938628	EA	0,14	54966,603088	6,862216	13,7	1455	2/0	p+s	l+d	D1-25	2,4
8957887	EW	0,76	54964,884185	0,3473543	15,4	1459	2/2	a	l	L2-11	3
8982514	EW	0,83	54953,930563	0,4144906	13,2	1470	2/2	a	l	L3-28	3
9007918	EA+E3	0,52	54954,748782	1,3872066	11,7	1469	2s4/2	p	l(+d)	L1-18	6
9028474	EA	0,00	55010,672516	124,9365792	12,3	1374	2/0	p+s	l+d	D3-11	
9075704	EB	0,68	54999,891435	0,5131516	16,2	855	2/2	a	l+q	L1-13	3
9083523	EB	0,65	54954,484907	0,9184208	12,7	1470	2s4/2	p	l	L3-16	3
9084778	EA	0,49	54964,654261	0,5922444	15,7	1459	1/0	p	l	L1-34	
9091810	EB	0,69	54953,600339	0,4797214	12,8	1470	2s4/2	a	l	L2-53	3
9101279	EA	0,58	54965,932213	1,8114606	13,9	1456(4987)	2s6/2	p(+e)	l+q	L2-46	3
9110346	EA	0,43	55002,222003	1,7905531	16,4	1330	2s4/2	a	l	L3-47	
9140402	EA	0,27	54966,441095	4,9883312	15,3	1457	2/0	p+s	l+d	D1-11	19
9159301	EA	0,55	54956,304393	3,0447712	12,1	1468	2s4/0	p	l	L2-34	1
9181877	EW	0,74	54953,797919	0,3210098	11,7	1470	2/2	a	l	L3-55	3,13
9272276	EW	0,78	54953,693247	0,280615	13,2	1470	2/2	a	l	L2-61	3
9283826	EW	0,84	54953,801153	0,3565232	13,1	1470	2/2	a(+e)	l	L3-08	3
9353234	ELV	0,86	54965,446983	1,4865274	13,7	1458	2/2	a	l	L2-28	3
9392702	EA	0,37	54964,893911	3,9093245	14,6	868	2s4/0	p	l	L3-02	
9402652[b]	EA	0,65	54954,290416	1,073106	11,8	2048(5723)	2/2	p+s+e	l	L2-62	1,6,23
9412114	ELV	0,85	55001,895873	0,2502532	15,2	1147	2/2	a	l(+q)	L3-56	3
9451096	EA	0,53	54954,729422	1,2503906	12,6	1470	2s4/2	p+s	l+d	D1-09	2,3,5

Megjegyzések. [a]: A tényleges periódus a *Kepler* EB katalógusban megadott érték duplája; [b]: A HAT, ASAS, SWASP projektek által meghatározott minimumokat nem vettem figyelembe.

4.1. táblázat. (*folytatás*)

KIC No.	Tip.	Morf.	T_0 (MBJD)	P_1 (d)	K_p (mag)	adathossz (d)	$\frac{\mathrm{ETV}}{\mathrm{QTV}}$	Ill. görbék	Ill. tip.	Tab	Ref.
9472174[a]	oEA,sdB+dM	0,78	54953,643197	0,12576528	12,3	1437	2/0	p	l+c	L1-15	20
9532219	EW	0,74	55001,947386	0,1981551	16,1	1330	2/2	a	l	L3-50	3
9574614	EA	0,40	54965,687069	0,9820954	15,9	1458	1/0	p	l	L2-48	
9592145	EB	0,65	54965,015451	0,4888674	14,0	1459	2/2	p	l+q	L2-03	3
9596187	EA	0,47	54964,705879	0,9532917	14,5	1459	2/0	p	l	L3-18	
9612468	FP?	1,00	54953,604225	0,1334715(/2)	11,5	1470	2/2(1/1)	a	l	F-08	3
9664215	EA	0,27	54964,925032	3,3194959	15,1	1459	2s4/0	p+s	l+d	D2-04	
9665086	EB	0,67	55000,087903	0,296536	13,9	1421	2/2	a	l(+q)	L2-16	3
9706078	EA	0,56	54954,140288	0,6135606	12,8	1470	2s4/0	a	l	L3-20	3
9711751	EA	0,49	54965,352420	1,7115283	13,8	1458	2s4/0	p	l	L2-44	
9714358	EA	0,13	54967,395501	6,474177	15,0	1454	2/0	p+s	l+d	D1-08	2,4,5
9715925	EA	0,10	54998,920053	6,308299	16,5	830	2/0	p+s	l+d	D2-02	4
9722737	EW	0,78	54964,973629	0,4185284	14,9	1459	2/2	a	l	L1-17	2,3
9777987	EW	0,74	55000,068578	0,2585001	16,3	684	2/2	a	l	L1-01	
9788457	EA	0,60	54965,186856	0,9633378	13,0	1459	2s2/2	p	l+q	L3-33	3
9821923	EW	0,95	54964,814614	0,3495329	14,2	1459	2/2	a	l	L3-10	3
9838047	EW	0,84	54953,713063	0,436162	13,5	1470	2/2	a	l	L2-41	3
9850387	EA	0,47	54956,416799	2,7484986	13,5	1468	2s4/0	a	l(+d)	L1-31	
9912977	EA	0,59	54966,709125	1,887874	13,7	1457	2s4/2	a	l	L2-10	2,3
9963009	EA	0,06	54986,018248	40,069657	14,5	1443	2/0	p+s	l+d	D3-12	4
9994475	EW	0,76	54964,733082	0,3184064	14,3	1459	2/2	a	l+q	L1-28	3
10095469	EA	0,60	54999,865835	0,6777625	14,7	855	2s4/0	p	l	L3-01	3
10095512	EA	0,24	54953,888455	6,017207	13,1	1468	2/0	p+s	l+d	D1-27	2
10226388	EW	0,77	54954,120530	0,6606583	10,8	1470	2/2	a	l	L2-26	2,3
10268809	EA	0,05	54971,999951	24,708999	13,7	1450	2/0	p+s	l+d	D3-15	4
10268903	EA	0,39	54999,901602	1,1039788	17,4	683	2/0	a	l	L3-05	
10275197	EW	0,79	54953,707304	0,3908377	12,9	1470	2/2	a	l	L3-37	3
10296163	EA	0,17	54959,387400	9,2967444	13,2	1463	2/0	p+s	l+d	D3-17	
10319590	EA	0,09	54965,716743	21,320459	13,7	405	2/0	p+s	l+d	D3-01	2,4,5
10383620	EA	0,64	54954,123817	0,7345658	12,8	1470	2/2	a	l	L3-14	3
10483644	EA	0,12	54966,314610	5,1107711	14,0	1457	2/0	p	l+d	D1-24	
10549576	EA	0,20	54972,078799	9,0894658	13,0	1454	2/0	p+s	l+d	D2-13	
10557008	EW	0,77	54964,639092	0,2654186	14,7	1459	2/2	a	l	L3-15	
10583181	EA	0,47	54955,206895	2,696353	11,0	1467	2s4/2	p	l	L2-42	
10613718	EA	0,39	54953,886226	1,175878	12,7	1469	2s4/0	a	l+d	D1-06	2
10686876	EA	0,45	54953,951815	2,6184153	11,7	3820	2s4/2	p+e	l	L3-53	6,23
10724533	EB	0,75	54954,395189	0,7450918	9,0	1470	2s4/2	p	l	L3-35	3
10727655	EW	0,74	54953,910817	0,3533652	13,4	4374	2/2	a+e	l+q	L1-37	3
10848807	EW	0,74	54999,987867	0,3462467	15,8	1421	2/2	a	l	L2-12	3
10855535	FP?	0,99	54964,629852	0,1127824(/2)	13,9	1459	2/2(1/1)	a	l	F-01	3
10916675	EW	0,86	54953,700609	0,4188675	13,4	1470	2/2	a	l	L3-19	3
10934755	EB	0,68	54964,840450	0,786486	14,4	1459	2/2	p	l	L3-07	3
10979716	EA	0,10	54967,081259	10,684056	15,8	1453	2/0	p+s	l+d	D2-08	4
10991989	EA	0,54	54954,650910	0,9744775	10,3	1470	2s4/0	a	l	L1-24	2,3,13
11042923	EW	0,76	54964,970492	0,390162	14,4	1459	2/2	a	l	L2-30	2,3
11234677	EA	0,42	54953,872607	1,587425	13,3	1470	2s4/2	p	l	L3-23	
11246163	EW	0,77	54964,565448	0,2792271	14,5	1459	2/2	a	l(+q)	L3-29	3
11502172	EA	0,05	54968,617081	25,4319585	14,2	1435	2/0	p+s	l+d	D3-10	
11519226	EA	0,03	54972,990000	22,161715	13,0	1463	2/0	p+s	l+d	D2-14	4
11558882	EA	0,01	54987,716793	73,914770	15,4	1384	2/0	p+s	l+d	D3-13	
11604958	EW	0,72	54964,653176	0,2989297	13,9	1459	2/2	a	l	L2-51	3
11825204	FP?	0,98	54964,751093	0,2096356(/2)	13,8	1458	2/2(1/1)	a	l+q	F-05	3
11968490	EA	0,49	54965,437249	1,078890	13,7	1458	2s4/0	a	l+q(+d)	L1-06	2
12019674	EW	0,76	53363,5350	0,3544975	13,0	5188	2/2	a+e	l	L2-64	3,21
12055014	EW	0,85	54965,041294	0,4999046	13,5	1459	2/2	a	l	L3-34	
12055255	ELV(EW)	0,90	54964,528184	0,2209404	15,9	1459	2/2	a	l	L3-44	3
12071741	ELV(EW)	0,94	54964,820555	0,3142642	14,8	1459	2/2	a	l	L2-23	3
12356914	EA	0,03	54976,492322	27,308455	15,5	1459	2/0	p+s	l+d	D3-05	4
12508348	FP?	0,97	54951,682693	0,255596(/2)	13,4	1457	2/2(1/1)	a	l+q	F-04	
12554536	EB	0,63	54953,964623	0,6844956	12,8	1470	2s4/2	p	l	L2-60	3

Megjegyzések. [a]: csak a „short-cadence” (SC) adatokat vettem figyelembe klasszifikáció többé-kevésbé konzisztens, eltekintve attól, hogy az ellipszoidális változók és érintkező fedési kettősök közötti bizonytalanságot a jelek szerint ez az eljárás sem tudja feloldani.

Ehelyütt jegyzem meg, hogy a 230 rendszert tartalmazó mintánk tíz olyan hierarchikus hármast is tartalmaz, ahol olyan extra fedési események is megfigyelhetők, amelyek mind a tíz rendszernél nagy valószínűséggel a szoros kettős távolabbi, harmadik kísérőjének tulajdoníthatók. E tíz triplán fedő hierarchikus hármas rendszert a 2. oszlopban a további „E3" szimbólummal jelöltem meg. E rendszerekre majd külön kitérek a 4.6.3. alfejezetben.

A negyedik és az ötödik oszlopban azt a kezdeti epochát és fedési periódust adtam meg, amelyet az adott fénygörbe fázisba rendezésénél, átlagolásánal és így értelemszerűen a minimumsablonok létrehozásánál, valamint az $O-C$-görbék legyártásánál használtam. Magától értetődő, hogy e paraméterek végső, illesztés utáni értéke az illesztett modelltől függően, még ugyanannál a rendszernél is, ETV megoldásról ETV megoldásra kicsit különbözhet, hiszen a paraméter optimalizáló eljárásba minden esetben belevont c_0 és c_1 korrekciók értéke nyilvánvalóan érzékeny a modellfeltevésre. A 4.1. táblázat további oszlopai nem igényelnek bővebb magyarázatot a táblázat első oldala alatt megadottnál.

Vizsgálataim során az egyes rendszerekre kapott pályaelemeket és egyéb paramétereket a 4.2–4.9. táblázatokban soroltam fel, és 222 hierarchikushármas-jelölt $O-C$-, illetve megoldásgörbéit (egy kivétellel) a C. függelékben mutatom be. A 230 fedési kettősből 160 rendszerre egyszerű fényidőmegoldást találtam, míg 62 esetben volt szükség a dinamikai és a fényidőmodell kombinált alkalmazására. A fennmaradó 8 „rendszer" esetében arra a következtetésre jutottam, hogy ezeket előzetesen tévesen klasszifikálták fedési kettősként, és valójában a *Kepler*-fénygörbe egyetlen, feltehetőleg pulzáló csillagtól származik. Ennek ellenére e csillagok $O-C$-ire is megadtam az általam kapott fényidőmegoldást, hiszen asztrofizikai megfontolásokból érdekes lehet, hogy e megoldások bizonyítják, hogy ezek a pulzáló változók tág kettős rendszerek tagjai.

4.5.1. Fedési kettősök tisztán fényidőmegoldással

E fejezetben a tisztán fényidőeffektussal modellezett rendszerek általános jellemzőit tekintem át. Az e csoportba tartozó 160 hierarchikus hármast három alcsoportba soroltam. Ez a felosztás többé-kevésbé fedi a Conroy és mktsai. (2014) által is követett besorolást. A felosztás azon alapul, hogy a rendelkezésre álló adatsor hossza (egyes esetekben beleértve az akár jelentősen hosszabb idősávban elérhető földi megfigyeléseket is) miképpen viszonyul a harmadik test (pontosabban a tág pálya) fényidőmegoldásból meghatározott P_2 periódusához. Az első alcsoportba sorolt hármasoknál az adatsor hossza több mint a duplája a P_2 orbitális periódusnak. A második alcsoport esetében az ETV görbe legalább egy, de kevesebb mint két tág pálya menti keringést fed le, míg azok a rendszerek kerültek a legbizonytalanabb eseteket tartalmazó harmadik alcsoportba, amelyek esetében az orbitális periódus meghaladja az észlelések hosszát. Természetesen ez a viszony önmagában még se pro se kontra nem biztosítja (illetve cáfolja) a megoldásaink jóságát és megbízhatóságát, de mindenképpen irányadó e szempontból.

Az *első alcsoport* 38 hierarchikushármas-jelöltet tartalmaz a $95\,\mathrm{d} \lesssim P_2 \lesssim 5532\,\mathrm{d}$ tágpálya-periódus tartományban. A legalább két orbitális periódust meghaladó adatsor hosszúságú rendszerek mellé, kivételt erősítő szabályként ebbe az alcsoportba soroltam a KIC 06543674-et is. Ennél a fedési kettősnél ugyan az egyedül rendelkezésre álló *Kepler*-észlelések csak 1,32 tág pálya menti keringést fednek le, azonban a fénygörbén a fényidőpálya megfelelő fázisában megfigyelhető extra fedési esemény egyértelműen igazolja a fényidőmegoldásból nyert paraméterekkel jellemzett harmadik test jelenlétét. Az ebbe az alcsoportba sorolt két leghosszabb tágpálya-periódusú rendszer a KIC 10727655(=V2280 Cyg), illetve a KIC 02708156(=UZ Lyr), ahol a hosszabb (a második esetben csaknem egy évszázadnyi) földi észlelések teszik lehetővé az első alcsoportba sorolást. (Azonban, különösen az UZ Lyr esetében fontos hozzátenni, hogy ezt az eredményt ebben a speciális esetben így is erős fenntartással kell kezelni.) A *második*, jóval népesebb *alcsoportot* 64 kevésbé biztos hierarchikushármas-jelölt alkotja. Ebben az alcsoportban a tágpálya-periódusok a 364 d $\lesssim P_2 \lesssim$ 2800 d tartományba esnek. Ebben a kategóriában három olyan rendszer van, ahol földi észlelésekkel felhasználásával meg a megfelelő mértékben ki tudtam bővíteni a vizsgálható idősávot. Végül, a fennmaradó 58 hierarchikushármas-jelöltet a legbizonytalanabb, *harmadik alcsoportba* soroltam, minthogy az elérhető adatsor hossza rövidebb, mint a megoldásból származtatott tágpálya-periódus. Az ide tartozó rendszerek esetében ez a 932 d $\lesssim P_2 \lesssim$ 9256 d tartományt jelenti.

4.2. táblázat. Tisztán fényidőmegoldásból meghatározott pályaelemek.
I. Legbiztosabb esetek: a rendelkezésre álló minimumadatok időtartama meghaladja a külső periódus kétszeresét, és/vagy a fénygörbe külső fedéseket mutat

KIC No.	P_1 (d)	ΔP_1 $\times 10^{-10}$ (d/c)	P_2 (d)	$a_{AB} \sin i_2$ ($R_\odot$)	e_2	ω_2 (°)	τ_2 (MBJD)	$f(m_C)$ ($M_\odot$)	$(m_C)_{min}$ ($M_\odot$)	$\frac{\mathcal{A}_{dyn}}{\mathcal{A}_{LTTE}}$	m_{AB} ($M_\odot$)
9777987	0,25850259(5)	−6,3(1)	95,28(6)	20,6(2)	0,19(2)	245(5)	54979(2)	0,0129(3)	0,42	0,04	2:
6669809[a]	0,73374152(7)	−101(2)	193,8(1)	25,9(2)	0,12(2)	74(8)	54958(4)	0,0062(2)	0,32	0,09	2:
2856960	0,25850790(6)	−2,2(2)	204,8(2)	94(3)	0,55(3)	164(3)	55007(2)	0,27(2)	1,48	0,02	2:
5310387	0,44166866(1)	2,80(4)	214,0(1)	13,5(1)	0,23(1)	210(4)	55051(2)	0,00072(2)	0,15	0,03	2:
6144827	0,23465160(1)	−5,80(4)	228,0(2)	32,8(3)	0,15(2)	52(6)	54921(4)	0,0091(2)	0,37	0,008	2:
11968490	1,07889066(9)	−3(1)	253,9(1)	111,9(5)	0,374(8)	284(1)	54862(1)	0,291(4)	1,54	0,13	2:
4037163	0,63544461(3)	–	268(2)	20(2)	0,66(7)	356(4)	54901(10)	0,0015(4)	0,19	0,12	2:
6370665	0,93231431(7)	14,8(8)	286,4(5)	27,7(4)	0,08(3)	354(19)	55027(15)	0,0035(1)	0,26	0,08	2:
8386865	1,25804169(7)	–	294,0(5)	84(2)	0,49(3)	314(4)	55028(3)	0,092(6)	0,92	0,19	2:
3853259:	0,27664714(1)	2,48(4)	325,7(6)	17,2(4)	0,60(3)	121(3)	54900(3)	0,00064(4)	0,01	0,14	2:
5376552	0,50381878(1)	–	334,8(1)	41,9(2)	0,349(6)	355,2(9)	54874(1)	0,0088(1)	0,37	0,02	2:
8394040	0,30212624(1)	–	388,9(1)	124,6(4)	0,520(5)	295(1)	54809(1)	0,171(2)	1,21	0,007	2:
9075704	0,5131488(1)	15,2(7)	402,0(5)	63,4(3)	0,160(9)	252(3)	55084(4)	0,0212(3)	0,51	0,01	2:
5459373	0,28660872(1)	–	412,7(2)	98,6(3)	0,361(6)	271(1)	55051(1)	0,0754(7)	0,85	0,004	2:
9472174[b]	0,12576528(1)	−0,063(4)	418(2)	0,63(2)	0,38(4)	124(6)	55118(8)	20(2)E-9	0,0019	0,000	0,60(3)
5128972	0,50532338(1)	–	442,1(2)	114,6(3)	0,285(5)	285(1)	54940(1)	0,1032(9)	0,97	0,01	2:
9722737	0,41852837(1)	–	444,2(1)	103,4(2)	0,174(4)	223(1)	54913(2)	0,0750(5)	0,85	0,007	2:
9007918	1,38720655(1)	–	470,9(6)	17,7(2)	0,68(2)	271(1)	54827(2)	0,00033(1)	0,11	0,19	2:
7811211	0,90240346(9)	–	477(6)	35(3)	0,29(12)	169(24)	55168(33)	0,0026(6)	0,24	0,04	2:
8043961	1,55921280(1)	–	478,6(2)	82,6(2)	0,245(5)	13(1)	54817(2)	0,0330(3)	0,61	0,10	2:
7685689	0,32515963(1)	–	514,9(5)	80,2(3)	0,125(8)	170(4)	54774(5)	0,0261(3)	0,55	0,003	2:
5216727	1,51302292(1)	–	532,9(6)	30,1(2)	0,50(1)	129(1)	55158(2)	0,00129(3)	0,18	0,11	2:
8904448[c]	0,8659838(1)	−99(3)	543,7(6)	68,5(4)	0,525(9)	307,7(9)	54796(2)	0,0146(3)	0,44	0,04	2:
10991989	0,97447759(5)	–	548(1)	106(1)	0,35(2)	29(4)	54960(6)	0,053(2)	0,73	0,03	2:
7362751	0,33825080(4)	−9,2(2)	552,0(6)	120,1(6)	0,256(9)	107(2)	54930(3)	0,076(1)	0,85	0,004	2:
8330092	0,32172365(1)	–	581(1)	52,9(4)	0,18(1)	2(4)	55134(7)	0,0059(1)	0,32	0,003	2:
8190491	0,77787699(4)	–	621(3)	65(1)	0,54(3)	67(4)	54789(7)	0,0097(7)	0,38	0,02	2:
9994475	0,31840931(2)	−13,28(6)	626,6(5)	85,3(3)	0,288(6)	199(1)	54779(2)	0,0212(2)	0,51	0,003	2:
3228863	0,73094352(1)	3,31(7)	642,8(6)	83,8(6)	0,05(1)	57(16)	55052(28)	0,0191(4)	0,49	0,01	2:
3245776	1,4920589(2)	–	663(9)	54(3)	0,45(12)	263(16)	55003(33)	0,0048(9)	0,29	0,07	2:
9850387	2,7484978(1)	–	671(2)	98(1)	0,46(2)	121(3)	54683(6)	0,028(1)	0,57	0,22	2:
8094140	0,70642857(1)	–	676(1)	56,3(4)	0,35(1)	171(2)	54774(4)	0,0052(1)	0,30	0,01	2:
5039441	2,15138294(6)	–	678(1)	87,2(7)	0,25(1)	163(3)	55217(6)	0,0194(5)	0,49	0,10	2:
9084778	0,59224375(8)	–	680(9)	69(3)	0,20(9)	176(25)	55168(49)	0,009(1)	0,38	0,008	2:
2835289	0,8577610(1)	–	755(5)	138(7)	0,74(6)	294(4)	54933(11)	0,06(1)	0,78	0,04	2:
6543674	2,39103051(1)	–	1101,4(4)	115,2(1)	0,617(2)	267,1(1)	55038(1)	0,01689(6)	0,47	0,10	2:
10727655	0,35336509(1)	0,38(4)	1138,1(6)	141,8(2)	0,247(2)	36,4(5)	55063(2)	0,0295(1)	0,58	0,001	2:
2708156:[d]	1,8912615(2)	−29,4(7)	5532(26)	137(7)	0,46(3)	242(9)	55955(153)	0,0011(2)	0,17	0,003	2:

Megjegyzések. *a*: Köbös efemerisz – $c_3 = 1{,}84(3) \times 10^{-12}$ d/c^3; *b*: Köbös efemerisz – $c_3 = 3 \times 10^{-16}$ d/c^3; *c*: Köbös efemerisz – $c_3 = 2{,}57(6) \times 10^{-12}$ d/c^3; *d*: Köbös efemerisz – $c_3 = -0{,}058(2) \times 10^{-12}$ d/c^3

Az ezekre a rendszerekre kapott fényidőpálya-paramétereket, azok becsült bizonytalanságaival együtt, alcsoportonkénti bontásban, a 4.2–4.4. táblázatokban tüntettem fel. Az egyes táblázatokban a rendszereket a P_2 keringési idő növekvő sorrendjében rendeztem el. Mivel a fényidőeffektus a radiálissebesség-észlelésekhez hasonlóan csak a pályaellipszis látóirányú vetületének nagyságára érzékeny, még abban az esetben sem teszi lehetővé a harmadik komponens (m_C) tömegének egyértelmű meghatározását, ha a szoros kettős (m_{AB}) tömegét ismerjük. A *Kepler*-kettősök többségénél azonban még ez az információ sem áll(t) rendelkezésemre. Ezért az esetek többségében meg kellett elégednem azzal, hogy a szoros kettős tömegére a statisztikailag ésszerű ($m_{AB} = 2M_\odot$) feltételezést téve, a fényidőmeg-

4.3. táblázat. Tisztán fényidőmegoldásból meghatározott pályaelemek.
II. Kevésbé biztos esetek: a rendelkezésre álló minimumadatok időtartama egy és két külső periódus közé esik

KIC No.	P_1	ΔP_1	P_2	$a_{\mathrm{AB}} \sin i_2$	e_2	ω_2	τ_2	$f(m_{\mathrm{C}})$	$(m_{\mathrm{C}})_{\min}$	$\frac{\mathcal{A}_{\mathrm{dyn}}}{\mathcal{A}_{\mathrm{LTTE}}}$	m_{AB}
	(d)	$\times 10^{-10}$ (d/c)	(d)	($R_\odot$)		(°)	(MBJD)	($M_\odot$)	($M_\odot$)		($M_\odot$)
8145477	0,56578395(8)	–	364(4)	59,2(8)	0,41(2)	190(2)	54911(4)	0,021(1)	0,51	0,03	2:
3114667:	0,88858302(3)	–	573(4)	21(1)	0,73(4)	347(2)	55275(9)	0,00038(7)	0,12	0,10	2:
9592145:	0,48886728(1)	0,75(3)	730(2)	6,88(6)	0,28(2)	260(3)	55041(7)	82(2)E-7	0,03	0,005	2:
5478466	0,48250055(1)	–	739,2(9)	91,2(8)	0,505(9)	17,6(9)	54961(2)	0,0186(5)	0,49	0,007	2:
4859432	0,38547990(1)	–	747,3(8)	67,3(3)	0,565(8)	270,0(8)	54634(2)	0,0073(1)	0,34	0,005	2:
4451148	0,73598174(1)	–	749,7(6)	139,6(5)	0,288(6)	44(1)	55002(3)	0,0649(7)	0,80	0,01	2:
3338660:	1,8733818(1)	–	752(18)	7,7(8)	0,76(8)	308(5)	54821(30)	0,000011(3)	0,04	0,26	2:
4647652	1,06482497(1)	–	754,7(3)	106,2(2)	0,291(3)	30,7(5)	54760(1)	0,0282(1)	0,57	0,02	2:
4670267	2,00609728(2)	–	755(2)	29,4(4)	0,56(2)	63(2)	55052(5)	0,00060(3)	0,14	0,13	2:
9912977	1,88787319(1)	–	756,2(5)	47,4(1)	0,282(5)	76(1)	55168(2)	0,00250(2)	0,23	0,07	2:
8957887	0,34735418(1)	–	774,2(4)	186,1(4)	0,468(3)	151,2(4)	55275(1)	0,144(1)	1,12	0,003	2:
10848807:	0,34624670(1)	–	785(3)	11,3(2)	0,36(3)	339(1)	55013(11)	0,000031(2)	0,05	0,003	2:
1873918	0,33243183(3)	−3,6(1)	840,9(9)	124,4(7)	0,663(7)	64,5(7)	55035(2)	0,0364(7)	0,63	0,004	2:
4138301	0,25337919(1)	–	844(1)	122,8(7)	0,423(8)	221(1)	55049(3)	0,0348(6)	0,62	0,001	2:
2715417	0,23643993(1)	–	856(2)	21,9(2)	0,22(1)	124(3)	54939(8)	0,00019(1)	0,09	0,001	2:
9665086	0,29653688(2)	–	856(2)	253(3)	0,51(1)	66(2)	54659(4)	0,297(9)	1,55	0,002	2:
4547308	0,57692798(1)	–	871(4)	105(4)	0,90(2)	54(2)	55078(7)	0,020(2)	0,50	0,06	2:
4069063	0,50429527(3)	–	876(1)	233(2)	0,64(1)	132(1)	55013(3)	0,220(7)	1,35	0,007	2:
7339345:	0,25966151(1)	10,01(2)	892(2)	15,3(1)	0,40(1)	286(2)	55120(5)	0,000060(1)	0,06	0,001	2:
6516874	0,91632549(7)	–	905(4)	102,3(8)	0,24(1)	205(2)	54663(9)	0,0175(4)	0,48	0,01	2:
8739802	0,27451278(1)	–	907(5)	41,1(6)	0,40(2)	191(3)	55357(9)	0,00113(5)	0,17	0,001	2:
7630658	2,15115567(2)	–	921,6(3)	179,8(5)	0,673(2)	326,2(2)	55353(1)	0,0917(7)	0,92	0,16	2:
12071741	0,31426438(1)	–	927(2)	176(2)	0,64(1)	149,5(8)	54932(2)	0,085(3)	0,89	0,003	2:
2450566	1,8445840(7)	–	935(11)	236(19)	0,72(8)	142(6)	55050(19)	0,20(5)	1,30	0,12	2:
7552344	2,0014910(9)	–	952(14)	237(9)	0,26(8)	261(17)	55330(47)	0,20(2)	1,29	0,05	2:
10226388	0,66065835(1)	–	954,6(8)	211,3(5)	0,276(4)	108(1)	54716(3)	0,139(1)	1,10	0,005	2:
2302092	0,29467288(1)	–	986,1(7)	175,2(4)	0,442(4)	109,9(5)	55112(2)	0,0741(5)	0,84	0,001	2:
9353234	1,4865278(2)	–	987(20)	60(4)	0,18(11)	121(39)	55240(108)	0,0029(5)	0,24	0,03	2:
8242493	0,28328569(1)	–	1013(2)	27,4(1)	0,182(7)	1(2)	55094(7)	0,000268(3)	0,11	0,001	2:
11042923	0,39016214(1)	–	1041,7(8)	120,6(2)	0,274(2)	167,6(5)	54483(2)	0,02165(9)	0,52	0,002	2:
7385478:	1,655473(1)	–	1049(9)	67(1)	0,47(4)	119(4)	55039(14)	0,0037(2)	0,27	0,04	2:
7680593:	0,27639826(5)	−25,7(2)	1051(5)	43,6(8)	0,54(2)	148(2)	55315(6)	0,00101(6)	0,17	0,001	2:
5611561	0,25869469(1)	–	1052(2)	44,5(2)	0,205(9)	347(2)	55362(7)	0,00106(2)	0,17	0,001	2:
9159301	3,0447717(1)	–	1072(23)	12,6(3)	0,40(4)	263(7)	54922(27)	0,000023(2)	0,05	0,12	2:
3440230	2,8811326(2)	−1277(10)	1082(8)	17,6(5)	0,56(3)	178(3)	55203(11)	0,000063(5)	0,06	0,17	2:
5621294:	0,93890979(5)	−59,2(8)	1083(15)	6,8(2)	0,43(5)	323(7)	55143(22)	36(4)E-7	0,02	0,01	2:
4074708	0,30211649(1)	–	1110(3)	28,1(1)	0,09(1)	42(6)	54843(18)	0,000243(4)	0,10	0,001	2:
5307780	0,30884972(3)	5,7(1)	1115(2)	48(2)	0,86(1)	15(1)	55101(5)	0,0012(1)	0,18	0,01	2:
6965293	5,0777443(1)	–	1119(2)	197,4(6)	0,204(7)	312(2)	54716(6)	0,0823(9)	0,88	0,23	2:
8192840	0,43354928(1)	–	1145(4)	118,4(7)	0,655(4)	3,5(3)	55486(3)	0,0170(3)	0,47	0,005	2:
9838047	0,43616206(3)	–	1154(2)	221,1(8)	0,267(6)	174(1)	55008(4)	0,109(1)	0,99	0,002	2:
10583181	2,69635389(2)	–	1169,2(9)	154,0(1)	0,060(2)	99(2)	54503(6)	0,0358(1)	0,63	0,06	2:
4681152	1,8359276(2)	–	1177(21)	36,3(9)	0,22(3)	155(7)	54998(26)	0,00046(4)	0,13	0,03	2:
9711751	1,71152818(1)	–	1186,1(7)	218,1(2)	0,259(1)	351,0(4)	55385(1)	0,0989(3)	0,95	0,02	2:
7440742	0,28399218(1)	–	1200(4)	29,9(4)	0,66(3)	287(2)	55048(8)	0,000249(9)	0,10	0,002	2:
9101279:	1,81146057(5)	–	1202(8)	46,8(4)	0,17(1)	129(5)	55342(16)	0,00095(3)	0,16	0,03	2:
4762887	0,73657344(4)	–	1233(37)	25(1)	0,25(8)	5(20)	55288(72)	0,00013(2)	0,08	0,005	2:
9574614	0,982095(1)	–	1234(43)	266(12)	0,02(5)	208(113)	55093(387)	0,17(2)	1,19	0,007	2:
5903301	2,3203030(4)	–	1255(32)	153(3)	0,43(4)	22(6)	54977(31)	0,031(2)	0,59	0,06	2:
6281103	0,36328330(1)	−9,98(6)	1254(3)	76,9(4)	0,024(9)	239(23)	55179(81)	0,00388(7)	0,27	0,001	2:
11604958	0,29892982(1)	–	1256(8)	22,7(3)	0,50(1)	36(1)	55122(6)	0,000099(4)	0,08	0,001	2:
6671698	0,471532(1)	−42(6)	1261(47)	129(9)	0,316(5)	131(1)	54743(39)	0,018(4)	0,48	0,002	2:
9091810	0,47972130(1)	–	1298(33)	17,1(3)	0,25(4)	257(8)	54488(37)	0,000040(3)	0,06	0,002	2:
7877062	0,30365194(5)	–	1321(34)	52(2)	0,128(9)	89(9)	54716(41)	0,0011(1)	0,17	0,001	2:
4244929	0,3414038(1)	–	1342(23)	129(4)	0,28(1)	235(2)	55116(13)	0,016(2)	0,46	0,001	2:
4574310	1,30622013(1)	–	1347(20)	14,9(2)	0,56(2)	154(1)	54557(16)	0,000025(1)	0,05	0,02	2:
8081389	1,48944301(3)	–	1383(15)	13,8(2)	0,27(1)	217(2)	55181(12)	0,000018(1)	0,04	0,02	2:
7119757	0,7429197(2)	–	1402(43)	179(5)	0,60(1)	181,8(5)	54451(32)	0,039(4)	0,65	0,008	2:
4945857	0,33541778(4)	–	1423(6)	346(2)	0,402(2)	343,0(2)	54286(5)	0,273(4)	1,49	0,001	2:
12554536	0,68449643(1)	–	1448(7)	44,8(2)	0,515(9)	246,9(6)	54914(5)	0,000574(9)	0,14	0,004	2:
9272276	0,28061416(2)	–	1458(7)	235(1)	0,252(3)	325,4(9)	55291(5)	0,082(1)	0,88	0,001	2:
9402652	1,07310692(2)	–	1506(2)	163,9(3)	0,805(1)	86,6(2)	54838(2)	0,0260(2)	0,55	0,03	2:
5513861	1,51020953(9)	–	2140(6)	306(2)	0,140(6)	208(4)	54202(22)	0,084(1)	0,89	0,007	2:
12019674	0,35449743(3)	–	2800(13)	408(2)	0,216(5)	145(1)	52584(14)	0,116(2)	1,02	0,001	2:

4.4. táblázat. Tisztán fényidőmegoldásból meghatározott pályaelemek.
III. Bizonytalan esetek: a rendelkezésre álló minimumadatok időtartama rövidebb, mint a külső periódus

KIC No.	P_1 (d)	ΔP_1 $\times 10^{-10}$ (d/c)	P_2 (d)	$a_{\mathrm{AB}} \sin i_2$ ($\mathrm{R}_\odot$)	e_2	ω_2 (°)	τ_2 (MBJD)	$f(m_{\mathrm{C}})$ ($\mathrm{M}_\odot$)	$(m_{\mathrm{C}})_{\mathrm{min}}$ ($\mathrm{M}_\odot$)	$\frac{\mathcal{A}_{\mathrm{dyn}}}{\mathcal{A}_{\mathrm{LTTE}}}$	m_{AB} ($\mathrm{M}_\odot$)
10095469	0,67776245(2)	–	932(15)	40,9(4)	0,19(2)	67(4)	54958(19)	0,00106(5)	0,17	0,006	2:
9392702	3,90933(1)	–	976(170)	103(29)	0,29(3)	281(14)	55044(56)	0,02(1)	0,45	0,19	2:
4848423	3,003612(6)	–	1190(68)	227(22)	0,14(3)	358(7)	55450(68)	0,11(4)	1,00	0,07	2:
2983113	0,39515998(2)	–	1249(36)	36,9(9)	0,49(4)	303(3)	55246(22)	0,00043(4)	0,12	0,002	2:
10268903	1,103978(1)	–	1286(318)	211(33)	0,66(8)	130(4)	54904(293)	0,08(5)	0,85	0,02	2:
6265720	0,31242762(2)	–	1447(15)	220(2)	0,652(7)	192,4(6)	55345(6)	0,068(2)	0,82	0,002	2:
10934755	0,78648549(8)	–	1466(32)	51(1)	0,26(1)	47(3)	54354(24)	0,00083(7)	0,16	0,004	2:
9283826	0,35652321(5)	–	1475(27)	98(2)	0,31(3)	30(3)	54850(19)	0,0057(4)	0,31	0,001	2:
6103049	0,6431713(2)	–	1482(62)	59(5)	0,49(4)	243(2)	54945(20)	0,0013(3)	0,18	0,004	2:
9821923	0,3495323(2)	–	1493(63)	110(7)	0,48(2)	293(12)	54786(52)	0,008(2)	0,35	0,001	2:
5353374	0,39332061(1)	–	1494(33)	29,1(5)	0,13(3)	268(8)	55009(35)	0,00015(1)	0,09	0,001	2:
3766353	2,6669672(8)	–	1522(84)	152(5)	0,24(4)	196(17)	55267(84)	0,020(3)	0,50	0,04	2:
7518816	0,46658065(6)	–	1523(35)	49(2)	0,27(2)	171(3)	55022(22)	0,00067(8)	0,15	0,001	2:
10383620	0,7345688(1)	–	1541(12)	277(3)	0,219(4)	0,9(3)	54250(9)	0,120(4)	1,03	0,003	2:
10557008	0,26541872(1)	–	1545(15)	79,2(5)	0,343(5)	188(2)	55243(11)	0,00279(7)	0,24	0,001	2:
9083523	0,9184227(3)	–	1573(77)	59(5)	0,39(1)	97(2)	54664(53)	0,0011(3)	0,17	0,006	2:
2715007	0,29711140(4)	–	1598(21)	256(3)	0,623(6)	213,3(7)	54766(16)	0,088(4)	0,90	0,001	2:
9596187	0,953283(3)	–	1599(97)	508(52)	0,18(4)	41(7)	54892(46)	0,69(22)	2,35	0,004	2:
10916675	0,41886753(4)	–	1626(77)	20(1)	0,31(3)	36(7)	55133(47)	0,00004(1)	0,06	0,001	2:
9706078:	0,613561(2)	–	1632(287)	109(54)	0,49(11)	73(10)	54973(60)	0,007(10)	0,33	0,003	2:
5956776	0,5691161(6)	–	1655(1122)	33(19)	0,57(20)	16(5)	54222(788)	0,0002(4)	0,09	0,003	2:
6606282	2,107135(1)	–	1681(61)	317(9)	0,32(3)	134(3)	55781(45)	0,15(2)	1,14	0,02	2:
11234677	1,587418(2)	–	1738(171)	135(18)	0,20(4)	156(6)	55586(99)	0,011(5)	0,40	0,01	2:
3248019	2,668200(5)	–	1749(331)	130(48)	0,44(7)	19(12)	54706(162)	0,010(11)	0,38	0,04	2:
2305372	1,40469157(8)	–	1772(25)	140(2)	0,206(9)	305(2)	54966(14)	0,0117(6)	0,41	0,009	2:
6766325:	0,4399650(4)	–	1801(202)	78(17)	0,41(3)	231(4)	54460(149)	0,002(1)	0,21	0,001	2:
8690104:	0,4087740(2)	–	1835(222)	46(9)	0,24(6)	287(7)	54704(133)	0,0004(2)	0,12	0,001	2:
8982514:	0,41449027(4)	–	1901(150)	63(2)	0,12(1)	299(9)	54288(70)	0,0009(1)	0,16	0,001	2:
11246163	0,27922679(9)	–	1902(149)	56(5)	0,36(3)	210(3)	55840(94)	0,0006(2)	0,14	0,001	2:
5269407	0,958860(2)	–	1905(172)	268(31)	0,53(2)	82(6)	55206(61)	0,07(3)	0,83	0,005	2:
4174507	3,89179(1)	–	1922(333)	647(87)	0,82(3)	202(3)	55730(181)	0,98(52)	2,85	0,34	2:
5962716	1,8045827(2)	–	1935(29)	208(2)	0,507(8)	253,4(9)	55804(17)	0,032(1)	0,60	0,02	2:
9788457:	0,96333879(1)	–	1960(425)	27,9(2)	0,46(1)	17(1)	55737(167)	0,00007(3)	0,07	0,005	2:
12055014	0,4999043(1)	–	1961(175)	31(5)	0,32(4)	29(5)	54568(72)	0,00010(6)	0,08	0,001	2:
10724533	0,7450940(4)	–	2028(198)	70(10)	0,499(9)	77(3)	54178(131)	0,0011(5)	0,17	0,003	2:
8868650	4,4474056(9)	–	2040(88)	367(9)	0,62(2)	234(2)	55374(32)	0,16(2)	1,17	0,13	2:
10275197	0,390846(1)	–	2127(82)	612(72)	0,268(4)	210,7(9)	54851(25)	0,68(24)	2,34	0,001	2:
3335816	7,422028(5)	–	2250(1234)	66(42)	0,16(24)	233(69)	54351(703)	0,001(2)	0,15	0,16	2:
5975712	1,136080(1)	–	2308(118)	347(21)	0,43(1)	115(4)	55530(59)	0,11(2)	0,98	0,004	2:
3839964	0,2561427(4)	29(1)	2404(371)	311(22)	0,17(1)	4(5)	53795(184)	0,07(3)	0,82	0,002	2:
8444552	1,1780785(7)	–	2441(73)	376(13)	0,492(6)	104(1)	55301(22)	0,12(1)	1,03	0,005	2:
4937217	0,4293407(2)	3,8(6)	2468(1187)	24(12)	0,49(14)	176(8)	55622(453)	0,00003(5)	0,05	0,001	2:
8758161	1,9964243(2)	–	2501(276)	133(2)	0,196(7)	103(1)	55375(47)	0,005(1)	0,30	0,01	2:
12055255	0,2209449(6)	–	2530(166)	544(57)	0,416(8)	280(2)	55142(33)	0,34(12)	1,65	0,001	2:
4758368	3,74998(1)	–	2876(1289)	357(127)	0,7(1)	313(10)	55556(429)	0,07(10)	0,84	0,08	2:
8429450	2,705145(7)	–	3088(1698)	128(75)	0,38(17)	185(11)	56136(894)	0,003(6)	0,24	0,02	2:
9110346	1,790580(3)	–	3645(695)	350(59)	0,74(2)	307(3)	55406(129)	0,04(3)	0,68	0,01	2:
8265951	0,7799554(2)	–	3721(247)	423(19)	0,76(1)	215,9(5)	55390(41)	0,07(1)	0,84	0,003	2:
6615041	0,34008660(2)	–	3951(1200)	105(1)	0,616(7)	30,3(8)	55747(238)	0,0010(6)	0,17	0,001	2:
9532219	0,19815367(5)	–	4401(900)	217(7)	0,38(1)	205(2)	55770(159)	0,007(3)	0,34	0,001	2:
8553788	1,606184(2)	–	4579(552)	473(66)	0,75(1)	56,2(7)	56474(249)	0,07(3)	0,81	0,008	2:
6794131	1,613324(2)	–	4743(2105)	446(141)	0,87(5)	150(2)	55889(604)	0,05(7)	0,73	0,03	2:
10686876	2,618397(8)	–	5280(1590)	400(147)	0,33(10)	174(3)	54912(51)	0,03(4)	0,59	0,006	2:
6233903	5,99090(3)	–	5359(2135)	642(223)	0,69(8)	2(2)	56036(582)	0,12(16)	1,05	0,08	2:
9181877	0,321019(5)	–	5497(2957)	963(711)	0,35(15)	332(12)	55078(263)	0,40(97)	1,78	0,001	2:
9412114	0,2502592(2)	–	5596(353)	922(48)	0,70(1)	1(1)	55540(53)	0,34(7)	1,65	0,001	2:
8016214	3,174930(5)	–	7350(2008)	484(113)	0,71(5)	173(3)	55328(162)	0,03(2)	0,57	0,02	2:
7272739	0,28116304(6)	–	9256(910)	218(17)	0,75(2)	184(1)	55988(144)	0,0016(5)	0,20	0,001	2:

oldásból adódó $f(m_\mathrm{C})$ tömegfüggvényt felhasználva a harmadik komponensre egy durván becsült minimális tömeget adjak meg. Természetesen, amennyiben a szoros kettős tömege ismert, vagy a jövőben ismertté válik, a harmadik test tényleges minimális tömegét is meg lehet majd adni. A legtöbb esetben azonban még ez az igencsak durva becslés is elegendő ahhoz, hogy behatárolhassuk a harmadik kísérő fizikai természetét, és a későbbi fotometriai, illetve spektroszkópiai észlelések számára előrejelzéseket tehessünk, például a várható (vagy éppen nem várható) harmadik fény mennyiségére vonatkozóan. Ezen felül, jobb híján ugyanezeket a durva tömegbecsléseket használtam az ETV-t okozó dinamikai, illetve fényidőeffektusok ($\mathcal{A}_\mathrm{dyn}/\mathcal{A}_\mathrm{LTTE}$) amplitúdóarányának a meghatározásához.

Az e csoportba tartozó fedési kettősök túlnyomó többségének periódusa a $0{,}23\,\mathrm{d} \leq P_1 \leq 3\,\mathrm{d}$ tartományba esik. E tartomány alsó határa közel esik az érintkező kettősök tapasztalati alsó periódushatárához. Mintánkban az egyetlen ennél rövidebb periódusú olyan fedési kettős, amely nem bizonyult tévesen kategorizáltnak, a KIC 09472174 jelű sdB+dM rendszer, amelyre röviden visszatérek majd a 4.6.4. alfejezetben. A pusztán fényidőmegoldással is leírható rendszerek közül a két leghosszabb fedési periódusa sem haladja meg a hat napot. Ezek az enyhén excentrikus KIC 06965293 ($P_1 = 5{,}^\mathrm{d}08$), illetve KIC 06233903 ($P_1 = 5{,}^\mathrm{d}99$) fedési kettősök. Az ennél hosszabb fedési periódusú rendszerek teljes hiánya ebben a csoportban rövid magyarázatot igényel, amely a következő:

A (2.94, 2.95) kifejezésekből könnyen látható, hogy a két ETV járulék közelítő aránya

$$\frac{\mathcal{A}_\mathrm{dyn}}{\mathcal{A}_\mathrm{LTTE}} = \frac{c}{(2\pi G m_\mathrm{ABC})^{1/3}\sin i_2}\mathcal{E}(e_2,\omega_2)\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 P_2^{1/3}, \tag{4.6}$$

ahol

$$\mathcal{E}(e_2,\omega_2) = \left(1-e_2^2\right)^{-3/2}\left(1-e_2^2\cos^2\omega_2\right)^{-1/2} \tag{4.7}$$

és ily módon

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{A}_\mathrm{dyn}}{\mathcal{A}_\mathrm{LTTE}} &\geq \frac{c}{(2\pi G m_\mathrm{ABC})^{1/3}\sin i_2}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 P_2^{1/3} \\ &\gtrsim 1{,}45\times10^3 m_\mathrm{ABC}^{-1/3}\frac{P_1^2}{P_2^{5/3}},\end{aligned} \tag{4.8}$$

ahol, az utolsó sorban a két periódus napban, a tömeg pedig naptömegben értendő. Az általam vizsgált mintában a P_2 periódusra egy természetes technikai felső határt jelent a *Kepler*-észlelések maximálisan 1470 napos hossza. Ennek figyelembevételével a fenti egyenlőtlenséget kissé átrendezve így is írhatjuk:

$$\frac{\mathcal{A}_\mathrm{dyn}}{\mathcal{A}_\mathrm{LTTE}} \gtrsim m_\mathrm{ABC}^{-1/3}\left(\frac{P_1}{11{,}46}\right)^2\left(\frac{1470}{P_2}\right)^{5/3}, \tag{4.9}$$

amelyből könnyen látható, hogy 5 napos P_1 fedési periódus fölött az ilyen hosszúságú adatsorokból biztonsággal kimutatható harmadik testek esetében a dinamikai járulék nagy valószínűséggel meg fogja haladni, vagy legalábbis összemérhető lesz a fényidőjárulékkal. Ily módon ezek a rendszerek már a kombinált dinamikai és fényidőmegoldást igénylő hármasok csoportjába fognak kerülni.

4.5.2. Fedési kettősök kombinált dinamikai és fényidőmegoldással

Az általam vizsgált rendszerek bő egynegyede, 62 fedési kettős esetében a fényidőeffektus önmagában nem képes leírni a harmadik komponens fedésiminimumidőpont-változásokra

4.5. táblázat. Kombinált dinamikai és fényidőmegoldásból meghatározott pályaelemek. I. Legbiztosabb esetek: a rendelkezésre álló minimumadatok időtartama meghaladja a külső periódus kétszeresét, és/vagy a fénygörbe külső fedéseket mutat

KIC No.	P_1 (d)	P_2 (d)	a_2 ($R_\odot$)	e_2	ω_2 (°)	τ_2 (MBJD)	$f(m_C)$ ($M_\odot$)	$\frac{m_C}{m_{ABC}}$	m_{AB} ($M_\odot$)	m_C ($M_\odot$)	$\frac{\mathcal{A}_{dyn}^{meas}}{\mathcal{A}_{LTTE}}$
5897826[a]	1,76713(19)	33,921(1)	53,6(4)	0,304(2)	52,9(3)	55168,63(3)	0,754(1)	0,748(1)	0,454(4)	1,35(3)	10,67
5952403	0,90567828(5)	45,47(2)	90,3(7)	0,0	–	–	1,19(1)	0,63(1)	1,79(4)	3,0(1)	0,00
6531485	0,67699050(2)	48,267(6)	73(4)	0,57(1)	22(2)	54983(1)	0,198(9)	0,45(2)	1,3(2)	1,0(2)	2,89
7690843[c]	0,7862597(1)	74,25(3)	123(13)	0,369(2)	4(2)	54919(1)	1,25(5)	0,66(7)	1,6(6)	3,0(1,0)	0,60
3544694	3,8457246(6)	80,99(9)	120(7)	0,109(6)	334(2)	55724(7)	0,11(2)	0,32(3)	2,4(4)	1,1(2)	3,17
10613718	1,17587788(3)	88,20(4)	93(10)	0,10(3)	49(12)	54994(3)	0,21(5)	0,53(3)	0,7(2)	0,7(2)	0,31
6545018	3,99145688(7)	90,586(5)	118(3)	0,225(4)	236(1)	54971(1)	0,044(9)	0,25(2)	2,0(2)	0,7(1)	6,68
9714358	6,4742247(8)	103,77(2)	113(12)	0,29(1)	120(2)	54977(1)	0,010(3)	0,178(8)	1,5(5)	0,3(1)	23,98
9451096	1,25039069(1)	106,89(1)	121(12)	0,093(2)	159(2)	54993(1)	0,045(1)	0,28(3)	1,5(5)	0,6(2)	0,21
5771589	10,738233(3)	112,97(2)	152(5)	0,1294(8)	290,8(5)	54978(1)	0,44(9)	0,50(4)	1,9(2)	1,9(2)	21,88
9140402	4,988351(6)	117,0(2)	112(9)	0,24(1)	300(32)	55022(15)	0,48(14)	0,71(9)	0,41(2)	1,0(3)	8,89
4079530:	17,72714(2)	144(1)	134(106)	0,06(5)	89(90)	54967(51)	20(1)E-6	0,02(2)	1,5(3,6)	0,04(9)	18,15
7668648	27,8256(2)	204,8(4)	179(17)	0,33(2)	341(5)	54917(4)	0,006(1)	0,15(1)	1,6(5)	0,27(8)	11,05
7955301	15,32775(1)	209,1(1)	229(26)	0,310(7)	309(1)	54879(1)	0,22(7)	0,40(1)	2,2(8)	1,5(5)	33,26
5080652:	4,1443558(2)	220,9(8)	187(44)	0,13(3)	18(4)	54966(8)	0,16(10)	0,45(5)	1,0(7)	0,8(6)	0,99
5095269	18,611868(5)	236,26(8)	204(28)	0,071(3)	324(3)	55004(2)	13(5)E-7	0,0090(5)	2,0(8)	0,018(8)	30,50
6964043	10,72553(2)	239,1(2)	248(25)	0,52(1)	311(2)	55110(2)	0,27(8)	0,42(2)	2,1(6)	1,5(5)	30,59
7289157	5,2665478(4)	243,36(8)	215(6)	0,309(3)	156,5(7)	54942(1)	0,14(2)	0,39(3)	1,4(1)	0,9(1)	4,41
5384802	6,0830921(3)	255,23(5)	244(11)	0,357(5)	11(2)	55000(2)	0,24(3)	0,44(3)	1,7(2)	1,3(2)	5,06
5264818	1,9050517(1)	299,4(6)	296(40)	0,44(3)	214(6)	54948(6)	0,029(8)	0,34(5)	2,6(1,1)	1,3(6)	0,44
8719897	3,15141994(9)	333,1(2)	264(12)	0,265(7)	128(2)	54997(2)	0,12(2)	0,38(3)	1,4(2)	0,9(1)	0,62
7593110	3,5493857(3)	353(1)	267(140)	0,10(6)	144(29)	54997(29)	0,0248(2)	0,24(12)	1,6(2,5)	0,5(8)	0,24
4940201	8,816559(1)	364,9(3)	278(24)	0,24(2)	247(5)	54864(7)	0,0618(1)	0,31(3)	1,5(4)	0,7(2)	3,62
10483644	5,1107702(2)	371(2)	287(131)	0,17(4)	343(5)	54929(12)	0,04(2)	0,25(10)	1,7(2,4)	0,6(8)	0,77
8938628	6,8622000(2)	388,6(2)	308(27)	0,21(1)	63(2)	54824(4)	0,17(6)	0,41(6)	1,5(4)	1,1(3)	1,46
6525196	3,42059733(4)	418,2(1)	334(27)	0,295(5)	94(2)	55070(3)	0,066(10)	0,29(3)	2,0(5)	0,8(2)	0,51
10095512	6,0172059(1)	473,4(2)	324(76)	0,19(1)	329(4)	54865(8)	0,17(4)	0,44(10)	1,1(8)	0,9(7)	0,81
4909707	2,3023671(2)	514,8(6)	406(14)	0,60(1)	176(1)	54848(2)	0,276	0,43(2)	1,9(2)	1,5(2)	0,65
7177553	17,99628(6)	529(2)	339(50)	0,46(2)	201(5)	54701(9)	41(1)E-9	0,0028(3)	1 ,9(8)	0,005(2)	47,93
8023317	16,57907(1)	610,6(5)	342(11)	0,249(4)	164(1)	55014(3)	0,0015(7)	0,10(2)	1,3(1)	0,15(3)	7,86
5255552	32,465339(2)	862,1(2)	510(17)	0,4342(7)	37,3(1)	54875(1)	0,0609(1)	0,29(1)	1,7(2)	0,7(1)	17,21

Megjegyzések. *a*: Carter és mktsai. (2011) fotodinamikai megoldásából; *b*: Borkovits és mktsai. (2013) kombinált ETV, radiálissebesség- és fénygörbemegoldásából (ld. 5. fejezet); *c*: Köbös efemerisz: $\Delta P = -30(4) \times 10^{-10}$ d/c, $c_3 = 1{,}09(6) \times 10^{-12}$ d/c^3.

kifejtett hatását. E rendszerek (sikeres) modellezése jelenti vizsgálataim legfőbb újszerűségét.[18] Amint a megelőző fejezetekben láttuk, a dinamikai és a fényidőmegoldás együttes alkalmazása elvben lehetővé teszi nem csak a hármas rendszer geometriai és dinamikai paramétereinek szinte teljes körű meghatározását, de még a csillagtömegek dinamikai úton történő kiszámítását is. Ebből kifolyólag a 4.5–4.7. táblázatok által tartalmazott információk némileg eltérnek a fényidőmegoldásos hármas rendszerek 4.2–4.4. táblázataitól. Így ez esetben a szoros kettős m_{AB}, valamint a harmadik komponens m_C tömege is kiszámítható a megoldásból közvetlenül adódó $f(m_C)$, m_C/m_{ABC}, valamint i_2 paraméterekből. Hasonlóképpen, míg a puszta fényidőmegoldásból csupán a fedési kettősnek a hármas rendszer tömegközéppontja körüli pályájának vetített fél nagytengelyét ($a_{AB} \sin i_2$) tudjuk meghatározni, a jelen esetben a fentiekből természetesen könnyen megkapható a (relatív) tág pálya a_2 fél nagytengelye, ezért ez utóbbi szerepel a táblázatban. Végül, ezeknél a rendszereknél a dinamikai, illetve fényidőtag amplitúdójának $\mathcal{A}_{dyn}/\mathcal{A}_{LTTE}$ arányát egy többé-kevésbé durva, teoretikusan számított értékbecslés helyett közvetlenül, az illesztett dinamikai tag amplitúdójának tényleges „megmérésével" tudjuk megadni. Ezzel kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy egyes excentrikus fedési kettősök esetében a fő- illetve a mellékminimumok ETV-iben jelentkező dinamikai komponens amplitúdója akár egy kettes faktorral is

[18]E 62 rendszerből azt a 26-ot, amelyben a dinamikai effektus extrém nagyságúnak bizonyult, és látványosan, önmagában is meghatározza az ETV görbe tulajdonságait, az analitikus elméletet, illetve az ezen alapuló, paraméterillesztési eljárást ismertető Borkovits és mktsai. (2015) munkánkban már alapos, minden részletre kiterjedő vizsgálat alá vetettem. Ebben a dolgozatban az abban a munkában tárgyalt, minden finom, apró részletre kiterjedő analízis ismertetésétől, már csak terjedelmi okokból is eltekintek, és ehelyett, az előző alfejezetekhez hasonlóan beérem az újabb, bővebb, 230 rendszert felölelő munkánk (Borkovits és mktsai., 2016) nem kevésbé alapos, de kevesebb részletre kiterjedő analízisének tárgyalásával, már csak azért is, mert az újabb munka bővebb mintája természetszerűleg magában foglalja a modellhez esettanulmányként használt 26 hármas rendszert is.

4.6. táblázat. Kombinált dinamikai és fényidőmegoldásból meghatározott pályaelemek. II. Kevésbé biztos esetek: a rendelkezésre álló minimumadatok időtartama egy és két külső periódus közé esik

KIC No.	P_1 (d)	P_2 (d)	a_2 ($R_\odot$)	e_2	ω_2 (°)	τ_2 (MBJD)	$f(m_C)$ ($M_\odot$)	$\frac{m_C}{m_{ABC}}$	m_{AB} ($M_\odot$)	m_C ($M_\odot$)	$\frac{\mathcal{A}_{dyn}^{meas}}{\mathcal{A}_{LTTE}}$
7812175	17,79359(2)	583(2)	389(50)	0,030(4)	207(6)	54783(11)	0,07(3)	0,31(7)	1,6(6)	0,7(3)	5,88
9715925	6,308265(3)	736(36)	325(56)	0,38(2)	136(7)	55083(42)	0,007(2)	0,21(4)	0,7(4)	0,2(1)	1,23
8210721	22,67318(4)	789,7(4)	492(19)	0,259(2)	212(1)	54628(4)	0,10(3)	0,34(3)	1,7(2)	0,9(1)	9,74
9664215	3,3195345(8)	910(7)	539(68)	0,536(8)	190(2)	54861(7)	0,161(6)	0,40(5)	1,5(6)	1,0(4)	0,42
5731312	7,9464246(2)	911(3)	423(42)	0,584(2)	25,9(4)	54837(3)	0,0015(5)	0,11(2)	1,1(3)	0,13(4)	4,96
5653126	38,49233(5)	968(2)	586(31)	0,189(4)	326(1)	55469(4)	0,15(2)	0,38(1)	1,8(3)	1,1(2)	26,91
7821010	24,2382191(1)	991(3)	551(23)	0,372(9)	126(2)	55124(6)	3(1)E-9	0,00111(4)	2,3(3)	0,0025(3)	32,60
10979716	10,684099(2)	1047(4)	530(6)	0,445(5)	60,3(5)	54518(4)	0,099(2)	0,389(5)	1,12(4)	0,71(3)	2,57
4948863	8,6435529(9)	1060(11)	80(2)	0,11(2)	124(7)	55107(24)	0,0060(5)	0,15(3)	1,7(9)	0,3(2)	0,28
6546508	6,107118(6)	1154(31)	523(77)	0,34(3)	321(3)	55123(19)	0,26(2)	0,56(8)	0,6(3)	0,8(4)	0,47
4769799	21,9284(1)	1231(8)	653(74)	0,191(8)	233(9)	55542(40)	0,04(1)	0,26(4)	1,8(6)	0,6(2)	3,29
7837302	23,83679(6)	1382(2)	213(238)	0,260(4)	3(5)	54974(26)	0,07(23)	0,31(38)	1,6(2,7)	0,7(1,4)	5,06
10549576	9,08946(3)	1411(52)	821(461)	0,54(7)	139(6)	55015(52)	0,05(3)	0,24(13)	2,8(4,8)	0,9(1,6)	1,31
11519226	22,161767(7)	1437(1)	745(8)	0,332(2)	321,7(5)	55010(2)	0,27(1)	0,463(8)	1,44(5)	1,25(4)	5,21

4.7. táblázat. Kombinált dinamikai és fényidőmegoldásból meghatározott pályaelemek. III. Bizonytalan esetek: a rendelkezésre álló minimumadatok időtartama rövidebb, mint a külső periódus

KIC No.	P_1 (d)	P_2 (d)	a_2 ($R_\odot$)	e_2	ω_2 (°)	τ_2 (MBJD)	$f(m_C)$ ($M_\odot$)	$\frac{m_C}{m_{ABC}}$	m_{AB} ($M_\odot$)	m_C ($M_\odot$)	$\frac{\mathcal{A}_{dyn}^{meas}}{\mathcal{A}_{LTTE}}$
10319590	21,32116(6)	452(2)	330(11)	0,146(4)	316(2)	54857(3)	0,10(3)	0,35(3)	1,5(2)	0,8(1)	10,02
4078157	16,02554(2)	1377(26)	736(66)	0,480(8)	70(3)	54630(24)	0,100	0,34(3)	1,9(5)	1,0(3)	5,09
3345675:	120,033(2)	1662(94)	671(336)	0,39(2)	95(65)	54894(428)	0,001	0,10(5)	1,3(2,0)	0,1(2)	117,39
8143170	28,78680	1710(35)	864(21)	0,704(6)	108,7(9)	54411(26)	0,005(1)	0,13(1)	2,6(2)	0,37(5)	25,48
12356914	27,3083183(3)	1804(1)	807(43)	0,385(1)	36,5(1)	55860(1)	0,0096(1)	0,19(1)	1,8(3)	0,41(7)	7,03
5003117	37,6094(2)	2128(50)	892(145)	0,26(1)	191(6)	54750(49)	0,06(1)	0,33(6)	1,4(7)	0,7(4)	6,32
6877673:	36,759691(6)	2870(11)	1112(254)	0,468(2)	155,5(5)	54286(11)	0,03(2)	0,27(3)	1,6(1,1)	0,6(4)	7,81
2576692	87,8797(1)	2884(173)	936(216)	0,56(3)	161(15)	54277(213)	0,00004(2)	0,032(5)	1,3(9)	0,04(3)	33,85
7670617	24,70317(4)	3304(108)	1054(30)	0,707(7)	86,4(9)	55642(35)	0,082(9)	0,38(2)	0,9(1)	0,55(6)	7,81
11502172:	25,431831(7)	3313(58)	1081(140)	0,17(1)	86(4)	54359(47)	0,020(3)	0,25(3)	1,2(5)	0,4(2)	0,83
9028474	124,93573(1)	3378(94)	1258(421)	0,09(2)	242(8)	54286(78)	10(5)E-6	0,0163(4)	2,3(1,2)	0,04(2)	44,23
9963009	40,0716(1)	3770(10)	1447(46)	0,24(6)	189(6)	54074(79)	0,111(7)	0,41(1)	1,7(2)	1,2(1)	2,98
11558882:	73,9135(2)	4050(50)	1417(301)	0,30(2)	105(5)	54919(80)	0,016(7)	0,19(3)	1,9(1,2)	0,4(3)	7,16
4753988:	7,30451(1)	5567(2325)	1597(577)	0,67(8)	349(3)	55359(238)	0,007(9)	0,20(3)	1,4(1,9)	0,4(5)	0,13
10268809	24,70843(1)	7000(1000)	2208(60)	0,737(1)	292,6(6)	56147(169)	0,32(10)	0,48(2)	1,5(5)	1,4(4)	2,66
4055092	76,464532(9)	11548(88)	2353(39)	0,533(2)	276,2(4)	56487(21)	0,242(2)	0,65(1)	0,5(1)	0,9(1)	3,08
10296163	9,296847(4)	15271(760)	3172(286)	0,73(1)	355(3)	55918(132)	0,016(4)	0,26(1)	1,4(4)	0,5(1)	0,13

különbözhet. Ennek magyarázatát már előzetesen, Borkovits és mktsai. (2011) munkámban (e dolgozatban pedig a 2.3.3. alfejezetben) megadtam. E jelenségre jó példát mutatnak többek között a KIC 05255552, 07670617, 08143170 és 10258809 fedési kettősök $O-C$ görbéi. A táblázatokban minden ilyen esetben a nagyobb dinamikai amplitúdóval számolt arányt tüntettem fel.

A 4.9. táblázatban a dinamikai perturbációk (illetve részben a klasszikus apszismozgás illesztéséből) megkapható további, a szoros kettős pályájára, valamint a hármas rendszer orientációjára vonatkozó paramétereket is megadtam. Az orientációs paraméterek közül, mint már többször szóba került, az i_m köztes inklináció a legfontosabb, minthogy a pályasíkok kölcsönös helyzete döntő módon befolyásolja a hármas rendszer hosszú távú dinamikai evolúcióját is. A 4.5–4.7., illetve 4.9. táblázatokban felsorolt paraméterek köre nem teljes. A megadottakon kívül a módszerből szintén adódó $n_{1,2}$ csomóvonal jellegű ívhosszak, valamint az ezek felhasználásával (az A. függelékben részletezett módon) kiszámítható $g_{1,2}$ dinamikai pericentrum argumentumok, illetve $j_{1,2}$ dinamikai inklinációk, valamint az invariábilis sík i_0 látszó inklinációja, végezetül pedig a – csak az oktupól perturbációs járulék figyelembevétele esetén megkapható – q_1 tömegarány megadásától eltekintettem. A módszert bemutató Borkovits és mktsai. (2015) munkánkban az ott példaként vizsgált 26 rendszerre e paramétereket, sőt ezek némelyikének még az adatsor elején és végén számolt értékét is feltüntettem. Így, abban a tanulmányban az egyes rendszerekre kinyerhető, illetve számolható mennyiségek teljes felsorolása négy teljes oldal hosszúságú táblázatot igyényelt.

4.8. táblázat. Fényidőmegoldásból meghatározott pályaelemek nagy valószínűséggel tévesen fedési kettősnek klasszifikált pulzáló változók esetében.

KIC No.	P_1 (d)	ΔP_1 $\times 10^{-10}$ (d/c)	P_2 (d)	$a_{\rm AB} \sin i_2$ ($R_\odot$)	e_2	ω_2 (°)	τ_2 (MBJD)	$f(m_{\rm C})$ ($M_\odot$)	$(m_{\rm C})_{\rm min}$ ($M_\odot$)	$\frac{\mathcal{A}_{\rm dyn}}{\mathcal{A}_{\rm LTTE}}$	$m_{\rm AB}$ ($M_\odot$)
10855535	0,11278241(1)	–	411,9(2)	61,4(2)	0,096(5)	296(3)	55135(3)	0,0183(1)	0,48	0,006	2:
	0,05639121(1)	–	411,9(2)	60,6(2)	0,106(8)	292(4)	55131(5)	0,0176(2)	0,48	–	2:
8045121	0,26317782(1)	–	896(2)	139(1)	0,37(1)	342(2)	55237(6)	0,045(1)	0,69	0,001	2:
	0,13158891(1)	–	896(3)	140(2)	0,37(2)	342(3)	55238(7)	0,045(2)	0,69	–	2:
8563964	0,33843576(2)	–	1183(6)	98,7(7)	0,199(9)	345(2)	55035(7)	0,0092(2)	0,37	0,001	2:
	0,16921788(1)	–	1184(6)	98,7(7)	0,196(9)	345(2)	55034(8)	0,0092(2)	0,37	–	2:
12508348	0,255619(6)	−86(12)	1839(472)	789(235)	0,36(9)	218(3)	55770(298)	1,95(2,01)	4,23	0,001	2:
	0,127810(4)	−22(4)	1814(618)	754(319)	0,30(13)	213(5)	55754(391)	1,75(2,51)	3,96	–	2:
11825204	0,2096193(1)	46,8(4)	2230(236)	107(9)	0,75(3)	297(2)	55894(140)	0,003(1)	0,26	0,001	2:
	0,1048096(2)	11,8(2)	2588(966)	112(22)	0,79(5)	294(2)	55887(488)	0,003(3)	0,24	–	2:
6287172	0,2038728(2)	–	3583(1875)	365(159)	0,95(3)	170(2)	56053(822)	0,05(9)	0,72	0,005	2:
	0,10193641(9)	–	3320(1216)	345(109)	0,95(2)	170(1)	56052(575)	0,05(6)	0,72	–	2:
7375612	0,16007308(6)	–	4417(835)	287(46)	0,41(7)	306(4)	55957(259)	0,016(10)	0,46	0,001	2:
	0,08003657(5)	–	5859(2075)	365(106)	0,49(11)	302(4)	55938(478)	0,019(21)	0,49	–	2:
9612468	0,13347101(9)	–	5307(1624)	162(38)	0,76(5)	193(4)	55450(225)	0,002(2)	0,22	0,001	2:
	0,06673554(5)	–	4888(1842)	133(38)	0,75(7)	192(5)	55455(274)	0,001(1)	0,18	–	2:

Ehelyütt a 4.9. táblázatban feltüntetett paraméterek vonatkozásában csupán egyetlen dologra hívnám fel a figyelmet, mégpedig a P_{ω_1} apszismozgási periódusra. Látható, hogy kilenc esetben negatív érték szerepel, amely arra utal, hogy e rendszerek esetében a szoros kettős pillanatnyi látszó apszismozgása retrográd. E kilenc hármas rendszerben a köztes inklináció $i_{\rm m} \gtrsim 34^{\rm o}$, de többségükben a kölcsönös pályahajlás az aszimptotikus Kozai–Lidov-mechanizmus $i_{\rm m} = 39\overset{\circ}{.}2$-os kritikus inklinációját is meghaladja. Itt érdemes megjegyezni, hogy noha a forgástengelyek extrém helyzete a klasszikus esetben is előidézhet retrográd apszismozgást, ilyet eddig még nem sikerült megfigyelni. Igaz ugyan, hogy korábban Lacy és mktsai. (2003) a BP Vulpeculae esetében negatív apszismozgást detektáltak, később azonban megmutattuk, hogy ez csak az elégtelen hosszúságú adatsor következtében előállott tévedés volt, s a rendelkezésre álló ETV idősor hosszának jelentős (45 éves) kibővítését követően elvégzett analízisem már pozitív apszismozgást eredményezett (Csizmadia és mktsai., 2009b).

A kombinált ETV analízis első lépésében általában az $i_{\rm m}$ köztes inklináció, illetve az A. függelékben tárgyaltak szerint, az $n_{1,2}$ csomóvonalhossz-jellegű mennyiségek egyike szabadon illesztett paraméter volt. Az illesztés eredményeként a kettősök egy jelentős hányadánál kicsi, de nullától szignifikánsan különböző (tipikusan $i_{\rm m} < 10^{\rm o}$) köztes inklináció adódott. Ilyen kis köztes inklináció esetén a fedési kettős pályasíkja kis amplitúdójú, ámde nagyon gyors precessziót szenved el. (Erre jó példa a rövidesen említésre kerülő KIC 05897826.) Ennek következménye pedig egy látványosan gyors fedésmélység-változás, illetve akár a fedések rövid, akár éves, hónapos skálán bekövetkező eltűnése is lehet. Noha a *Kepler*-mintában valóban vannak ilyen rendszerek, az illesztés alapján kis köztes inklinációjú rendszerek többségénél ennek a gyors fedésmélység-változásnak nem látjuk nyomát. Ezért azoknál a kettősöknél, ahol megoldásom kis $i_{\rm m}$ köztes inklinációt eredményezett, azonban az ebből a program által automatikusan kiszámolt i_1 látszóinklináció-változással összhangban lévő fedésmélység-változást nem tapasztaltunk, az egész illesztési eljárást megismételtem úgy, hogy a köztes inklinációt $i_{\rm m} = 0^{\rm o}$ értéken rögzítettem. E választás csak elsőre tűnik önkényesnek, viszont könnyen igazolható a következő okfejtés alapján. A fedésmélység-változás hiányából vagy a pályasík precessziójának teljes hiánya, vagy annak hosszú periódusa következik. Az első lehetőseg akkor következik be, ha a két pálya egy síkba esik. A második viszont akkor, ha a két pályasík jelentősen különbözik egymástól, hiszen, mint azt korábban már láttuk, nagy köztes inklinációjú esetben nagy amplitúdójú, de hosszú periódusú pályasík-precesszió lép fel. Az illesztés ez utóbbi esetet egyértelműen kizárja. Másrészt, amint azt Borkovits és mktsai. (2015) munkánkban külön tárgyaltam, kis köztes inklinációk esetén a probléma paramétertere meglehetősen lapos. Más szavakkal, egy $i_\mathrm{m} = 0^\mathrm{o}$, illetve mondjuk $i_\mathrm{m} = 10^\mathrm{o}$ köztes inklinációjú esetben az ETV görbe alig különböztethető meg egymástól. Továbbá, azt is hozzá kell tenni, hogy ez az elfajulás nemcsak numerikusan, hanem dinamikailag is fennáll, azaz egy alacsony köztes inklinácójú rendszer hosszú távú dinamikai fejlődése nagy valószínűséggel semmiben sem különbözik egy pontosan egysíkú hármasétól.

A tisztán fényidőeffektust mutató rendszerekhez hasonlóan a kombinált megoldású 62 hierarchikushármas-jelöltünket is három alcsoportba osztottam az adatsor hossza és a P_2 tágpálya-periódus közti viszony, illetve az esetlegesen meglévő külső fedések alapján. Az első alcsoport 31 hármasrendszer-jelöltje esetében a külső periódusok a $34\,\mathrm{d} \lesssim P_2 \lesssim 862\,\mathrm{d}$ tartományba esnek. A középső alcsoport 14 rendszerében ez a tartomány $583\,\mathrm{d} \lesssim P_2 \lesssim 1437\,\mathrm{d}$, míg a fennmaradó 17 lehetséges hármas rendszer esetén pedig $452\,\mathrm{d} \lesssim P_2 \lesssim 15271\,\mathrm{d}$.

Kivételerősítő szabályként az első csoportba két olyan hármas rendszert is besoroltam, amelyek esetében a hármas rendszerre meghatározott paraméterek nem az e fejezetben ismertetett módon, a fedésiminimumidőpont-változások analíziséből, vagy legalábbis nem kizárólagosan abból származnak. E két objektum a KIC 05897826, illetve a KIC 05952403 (alias ,Trinity'), amelyek esetében elsőként sikerült megfigyelni azt a jelenséget, hogy a tág pályán keringő harmadik komponens elfedi a szoros kettőscsillag valamelyik (vagy mindkét tagját), illetve fordítva, a szoros kettős komponensei áthaladnak a távolabbi kísérő előtt. Az előbbi (más jelöléssel KOI–126 katalógusszámú) hierarchikus hármas esetében (amely a maga $P_2 = 33\overset{\mathrm{d}}{.}92$ külső periódusával a *Kepler*-mintában az első, az összes ismert fedési kettős esetében pedig a λ Tauri után a második legrövidebb tágpálya-periódusú) a $P_1 \sim 1\overset{\mathrm{d}}{.}77$ keringési idejű szoros rendszer csak egészen marginálisan tekinthető fedési kettősnek, hiszen az $i_\mathrm{m} \approx 8^\mathrm{o}$-os köztes inklináció okozta gyors pályasík-precesszió következtében a két komponens csak nagyon ritkán, mondhatni véletlenszerűen fedi el egymást (míg a jóval nagyobb méretű harmadik komponens előtti, illetve mögötti átvonulásaik regulárisan megfigyelhetők voltak). Ezért, fedésiminimum-időpontok hiányában azok analízisére sem volt lehetőségem. Így ebben az esetben a Carter és mktsai. (2011) fotodinamikai modelljével meghatározott pálya- és rendszerparamétereket vettem át. A másik objektum, a KIC 05952403 (HD 181068) különleges, triplán fedő jellegzetességét Derekas Aliz ismerte fel (Derekas és mktsai., 2011). E rendszer átfogó analízisét a következő fejezetben fogom ismertetni. Ehelyütt ebből annyi releváns, hogy ebben a sok szempontból különleges, szoros hármas rendszerben mind a szoros, mind a tág pálya kör, és a három objektum egy síkban kering. Ekkor tehát megvalósul az a különleges eset, hogy a dinamikai perturbációk másodrendű, kvadrupól komponense eltűnik, ahogy azt korábban a 2.3.1. alfejezetben jeleztem. Mindez újra aláhúzza azt a korábban tett megjegyzésemet, hogy a pusztán elméleti úton számolt $\mathcal{A}_\mathrm{dyn}/\mathcal{A}_\mathrm{LTTE}$ arány csupán durva becslés. Ennél a hierarchikus hármasnál például ez a becslés 1,22-es értéket adna a tényleges 0 helyett. Ily módon e rendszer esetében a fedési kettős ETV-je csak fényidőeffektust mutat. Ennek ellenére mégis a komplex modellezésű rendszerek közé soroltam, ugyanis, amint a következő fejezetben tárgyalom, a külső fedések általam elvégzett pontos geometriai-dinamikai modellezése, valamint a radiálissebesség-mérések figyelembevétele lehetővé tette, hogy mindazokat a paramétereket meghatározhassam erre a hármas rendszerre is, mint amelyeket különben csak az ETV-k kombinált dinamikai és fényidőeffektus-modelljéből tudnánk meghatározni.

4.9. táblázat. Apszismozgási és/vagy orientációs paraméterek klasszikus apszismozgási (AME) és dinamikai illesztésekből

KIC No.	P_{anom} (d)	a_1 ($R_\odot$)	e_1	ω_1 (°)	τ_1 (MJD)	P_{ω_1} (y)	i_{m} (°)	i_1 (°)	i_2 (°)	$\Delta\Omega$ (°)	P_{node} (y)
4758368	3,750(1)	–	0,0043(5)	4(69)	54959,2(7)	123(527)					
5039441	2,151385(8)	–	0,01(4)	283(42)	54955,4(2)	5286(18159)					
6233903	5,9910(2)	–	0,006(15)	290(48)	55002,1(8)	1690(4648)					
6965293	5,077754(6)	–	0,020(7)	239(12)	54957,1(2)	7095(4286)					
2576692	87,8770(1)	90(21)	0,15(2)	338(19)	55040(4)	−7924	42(2)	88	102	40(5)	2118
3345675	120,054(2)	112(57)	0,11(4)	279(97)	55086(26)	1820	24(19)	86	62	−1(27)	348
3544694	3,8478379(6)	13,8(8)	0,00135(4)	329(6)	55741,28(6)	19	0	84	84	0	–
4055092	76,460808(9)	58,5(1,1)	0,34515(7)	309,53(1)	54970,961(1)	−4298	54(1)	88	119	46(1)	6297
4078157	16,02631(2)	32,9(3,0)	0,198(6)	205(4)	54958,3(1)	913	10(3)	84	75	5(14)	697
4079530	17,72746(8)	33(26)	0,2985(5)	315(10)	54996,0(3)	2642(648)	0	88	88	0	–
4753988	7,30451(2)	17,8(8,1)	0,020(3)	75(2)	54971,35(6)	21051(37135)	47(7)	84	53	38(7)	40986
4769799	21,9300(1)	40,3(4,6)	0,10(2)	330(21)	54972(1)	805	22(2)	86	69	14(10)	826
4909707	2,3023959(2)	9,1(3)	0,013(3)	241(6)	54953,74(4)	503	6(1)	88	87	−6(1)	471
4940201	8,817798(1)	20,6(1,8)	0,0014(1)	194(16)	54965,4(4)	172	6(2)	85	86	−6(2)	139
4948863	8,6436174(9)	21,0(3,7)	0,01810(9)	255	54972,5(3)	3172	0	82	82	0	–
5003117	37,6141(2)	53,0(8,8)	0,14(3)	309(10)	54989,2(8)	826	43(1)	89	66	38(4)	1484
5080652	4,1436823(2)	10,8(2,6)	0	–	–	–	0	80	80	0	–
5095269	18,612758(5)	37,3(5,2)	0,05(5)	270(10)	54966,9(5)	1066	40(1)	86	73	39(1)	136
5255552	32,478076(2)	51,0(1,8)	0,30668(6)	105,27(1)	54956,79(1)	227	6,4(1)	83,8	89,5	−2,8(1)	140
5264818	1,9050371(1)	8,8(2,0)	0	–	–	–	39(3)	70(3)	35	23(4)	433
5384802	6,0812488(3)	16,7(8)	0	–	–	–	5(3)	83	78	−0,8(7)	65
5653126	38,50848(5)	58,1(3,1)	0,247(6)	313(1)	54988,65(8)	251	10(1)	87	78	−5(3)	157
5731312	7,9463939(2)	17,2(1,7)	0,4196(1)	183,9(3)	54967,198(5)	−5622	37,8(4)	88,5	77,3	36,4(4)	1013
5771589	10,7866(1)	25,3(1,1)	0,01285(8)	237,7(3)	54961,139(9)	6,53(2)	7,9(8)	86	82	−6,9(8)	7,5
5897826	1,7671(2)	4,72(2)	0,0223(4)	269,5(4)	55168,754(2)		8	92,1	96,9	8,01(4)	
5952403	0,9056768(2)	4,78(4)	0	–	–	–	0	87,5	87,5	0	–
6525196	3,4205160(1)	12,1(1,0)	0	–	–	–	0[a]	80	80	0	–
6531485	0,6770720(1)	3,5(2)	0,0014(1)	46(3)	54965,056(6)	15	0	80	80	0	–
6545018	3,9914569(1)	13,3(4)	0,00294(1)	176,0(4)	54964,796(4)	27	0	86	86	0	–
6546508	6,107205(6)	12,0(1,9)	0,002(2)	65(27)	55192,4(5)	1172	0	86	86	0	–
6877673	36,75992(4)	54,8(12,6)	0,18038(3)	57,196(6)	55002,8378(9)	16411(2783)	35(1)	88	56	16(1)	1998
6964043	10,73721(2)	26,0(2,7)	0,0548(8)	77,0(2)	55195,103(6)	27	19(1)	91,2	89,5	19(1)	26
7177553	17,9970(4)	35,5(5,2)	0,39412(1)	179,7(4)	54952,23(1)	1173(676)	26(3)	84	81	26(3)	293
7289157	5,2673864(4)	14,1(4)	0,0828(2)	65,43(4)	54972,1908(8)	91	4,3(3)	85,8	89,5	2,2(7)	80
7593110	3,5493317(3)	11,4(6,0)	0	–	–	–	30(13)	82	77	30(13)	536
7668648	27,865(5)	45,0(4,4)	0,08(1)	85,7(8)	54976,85(7)	54(6)	42(1)	84	93	−41(2)	25
7670617	24,7049(1)	34,3(1,3)	0,249(5)	135(1)	54961,5(1)	965(64)	147,4(4)	86	89	−147,8(4)	−1678
7690843	0,7861873(1)	4,1(5)	0	–	–	–	0	80	80	0	–
7812175	17,79638(2)	33,5(4,4)	0,169(4)	321(2)	55004,44(7)	311	17(2)	85	79	−16(2)	176
7821010	24,238246(2)	46,4(2,0)	0,6791[b]	239,234(1)	54969,3138(1)	60500(5000)	25(1)	88	105	−19(2)	618
7837302	23,83859(6)	40,9(22,7)	0,15(5)	314(6)	54985,1(4)	865	0	86	86	0	–
7955301	15,3713(6)	33,8(3,9)	0,02886(8)	115,5(7)	54961,45(3)	14,8(2)	18,4(8)	80	79	−18,7(8)	72(34)
8023317	16,57780(1)	29,8(1,0)	0,2511(2)	177,7(9)	54976,81(4)	−595	49,5(6)	88	93	−49,3(6)	588
8143170	28,78924(2)	54,3(1,6)	0,146(4)	291,3(5)	54971,38(3)	929	38,5(3)	89	114	−30,5(3)	890
8210721	22,67727(4)	40,2(1,7)	0,140(1)	158(1)	54965,04(8)	344	14(1)	89,5	81,6	−11(2)	235
8719897	3,1512989(1)	10,1(5)	0	–	–	–	0[b]	80	80	0	–
8938628	6,8628468(2)	17,5(1,6)	0,00271(3)	345(3)	54968,04(6)	199	14(1)	87	80	12(1)	170
9028474	124,93403(2)	139(24)	0,80575(5)	2,2(3)	55013,96(2)	−25145	50,6(9)	88	87	−50,7(9)	1557
9140402	4,981371(6)	91,(1,1)	0	–	–	–	0	85	85	0	–
9451096	1,2504286(1)	5,6(6)	0,00067(1)	181(8)	54954,42(3)	113	7(1)	86	79	−1(1)	102
9664215	3,3195565(8)	10,8(1,4)	0,02(1)	96(3)	54963,33(3)	1371	0	86	86	0	–
9714358	6,4742247(8)	16,6(1,8)	0,01518(4)	142,1(4)	54965,109(7)	30	0	83	83	0	–
9715925	6,308231(3)	12,6(2,2)	0,201(8)	355(18)	55000,0(3)	−3182	37(2)	83	76	−37(2)	1163
9963009	40,0714(1)	58,7(1,9)	0,22(10)	258(5)	54985,2(4)	−18152	34(3)	89,5	55,7	0(2)	2703
10095512	6,0175433(1)	14,6(3,5)	0,00114(5)	195(9)	54952,6(1)	294	0	83	83	0	–
10268809	24,70935(5)	41,3(4,1)	0,314(2)	143,1(3)	54965,57(3)	1830(99)	23,7(4)	84	94	21,6(4)	3333
10296163	9,296861(7)	20,7(2,0)	0,354(5)	45,7(9)	54962,00(4)	16784(7355)	55(5)	86	127	−40(3)	121561
10319590	21,33946(6)	37,3(1,4)	0,0256(5)	247,7(4)	54964,45(2)	68	40,2(4)	88	102	38,0(5)	110
10483644	5,110517(2)	15,0(6,9)	0	–	–	–	0	86	86	0	–
10549576	9,08958(3)	26,0(14,7)	0,00419(7)	355(5)	54974,2(1)	1985	0	89	89	0	–
10613718	1,1757655(1)	4,1(4)	0	–	–	–	0	86	86	0	–
10979716	10,684099(2)	21,2(3)	0,0753(8)	106,0(2)	54962,300(6)	755	9(1)	86	77	0(1)	616
11502172	25,431970(7)	38,2(5,0)	0,10074(2)	334(10)	54972,4(6)	12746	26(1)	88	110	15(2)	5700
11519226	22,163175(7)	37,5(4)	0,18718(4)	358,4(9)	54977,11(5)	955	17,0(4)	88	89	17,0(4)	510
11558882	73,9103(2)	91,6(19,5)	0,365(4)	169(3)	54975,8(6)	−4653	43(3)	88	84	−43(3)	2702
12356914	27,30812(2)	46,0(2,4)	0,325(1)	113,2(9)	54966,0(1)	−10309(1210)	40,2(1)	88	60	−30,4(1)	1329

Megjegyzések. [a]: $i_{\mathrm{m}} = 0^{\mathrm{o}}$-ra rögzítve, miután a szabadon illesztett köztes inklináció paraméterrel $i_{\mathrm{m}} = 25^{\mathrm{o}} \pm 2^{\mathrm{o}}$ adódott, amely a *Kepler*-észlelések időtartama alatt $\Delta i_1 \sim 1^{\mathrm{o}}$ inklináció-, és ennek következtében szignifikáns fedésmélység-változást eredményezne, ellentmondván a megfigyeléseknek; [b]: e_1 rögzítve a Fabrycky és mktsai. (előkészületben) által radiálissebesség-mérésekből meghatározott értéken; [c]: $i_{\mathrm{m}} = 0^{\mathrm{o}}$-ra rögzítve, miután a szabadon illesztett köztes inklináció paraméterrel $i_{\mathrm{m}} = 23^{\mathrm{o}} \pm 2^{\mathrm{o}}$ adódott, amely a *Kepler*-észlelések időtartama alatt $\Delta i_1 \sim 1{,}7^{\mathrm{o}}$ inklináció-, és ennek következtében szignifikáns fedésmélység-változást eredményezne, ellentmondván a megfigyeléseknek.

4.6. Eredmények

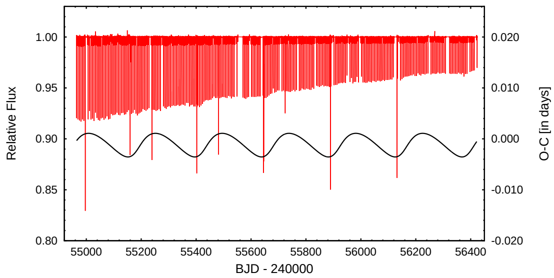
4.6.1. Az eredmények megbízhatósága

Mielőtt rátérek a 222 rendszeres mintára kapott eredmények statisztikai analízisére, valamint néhány különösen érdekesnek talált hármas rendszer speciális tulajdonságainak diszkussziójára, célszerű megvizsgálni azt a kérdést, hogy eredményeim mennyire megbízhatóak. Az első két természetszerűleg felmerülő kérdés a következő. Először is az, hogy az egyes rendszerekben megfigyelhető ETV-t képes voltam fényidőeffektussal, vagy a dinamikai és fényidőeffektusok eredőjével magyarázni, valóban igazolja-e a harmadik test jelenlétét az adott rendszerben? Másodszor pedig, ha a harmadik komponens ténylegesen létezik, mennyire megbízhatóak az általam kapott pálya- és fizikai paraméterek? A kérdésekre adható válaszok némileg különbözőek a tisztán fényidőeffektust, illetve a mind fényidő-, mind dinamikai effektust is mutató kettősök esetében.

A fedésiminimumidőpont-változások fényidőeffektussal való modellezésének plauzabilitásával kapcsolatban Frieboes-Conde és Herczeg (1973) mára klasszikusnak számító munkájukban négy alapvető kritériumot állítottak fel, amelyek röviden a következők: (1) Az ETV görbe alakjának összhangban kell lennie valamely reális paramétereken alapuló fényidőmegoldásból analitikusan származtatott görbével; (2) A mellékminimumok ETV görbéjének mind amplitúdóban, mind fázisban konzisztensnek kell lennie a főminimumok ETV görbéjével; (3) A fényidőmegoldás amplitúdójából számolt minimális tömegnek összhangban kell lennie mind az asztrofizikai modellekkel, mind a fotometriai megfigyelésekből kapott harmadik fény (vagy az arra vonatkozó felső korlát) mennyiségével; végül pedig, (4) amennyiben radiálissebesség-mérések elérhetőek, a rendszersebesség változásainak szintén összhangban kell lenniük a fényidőmegoldással. Amint azt a 4.4. szakaszban láttuk, a *Kepler*-mérések minősége lehetővé tette az ellipszoidális változást is mutató rendszerek esetében az ellipszoidális fényességmaximumok bevonását is a vizsgálódásaim körébe. Ezzel összefüggésben abban a szakaszban a hamis megoldások kiszűrésénél már alkalmaztam is azt az egyik kritériumot, amellyel a fenti négy klasszikus feltétel kiegészíthető: (5) az ellipszoidális fényváltozásból származó fényességmaximumidőpont-változásoknak (QTV) mind fázisban, mind amplitúdóban összhangban kell lenniük a fedésiminimumidőpont-változások (ETV) nagyságával és fázisával. Végül, a szintén elsőként a *Kepler*-űrtávcső által felfedezett tripla vagy külső fedésű rendszerek esetében még egy feltétel felállítható, miszerint az $O-C$-re adott fényidőmegoldás realitása akkor tekinthető kétségkívül bizonyítottnak, ha (6) a fényidőpálya periódusa összhangban van az extra fedések között eltelt (nem feltétlenül szigorúan egyforma) időközökkel, és az extra fedések az $O-C$ görbe extrémumainak szűk környezetében következnek be (ld. 4.6. ábra).

E legutolsó kritériumnak mind a tíz, a mintánkba felvett, külső fedéseket (is) mutató hierarchikus hármas rendszerünk megfelel. Ez az oka annak is, hogy noha közülük kettő (KIC 05255552 és 06543674) esetében nem teljesül az a feltétel, miszerint az adatsor hossza meg kell, hogy haladja legalább a tág pálya periódusának a kétszeresét, e két rendszert mégis kategóriájuk első alcsoportjába, azaz a legbiztosabb megoldások közé soroltam. A fennmaradó 212 hármasjelölt esetében általánosságban az mondható, hogy minél több teljes külső periódust fed le az adatsorunk, annál valószínűbb, hogy tényleg helyesen értelmeztem az ETV-ket. Azonban az óvatosság ehelyütt sem árt. Különösen azt kell észben tartanunk, hogy amint azt a 4.4. fejezetben tárgyaltam, a csillagok bizonyos fényváltozásai okozta fénygörbetorzulások képesek olyan rövid periódusú, kvázi-szinuszos, látszólagos fedésiminimumidőpont-változásokat okozni, amelyek megtévesztésig hasonlíthatnak a fényidőeffektus okozta változásokhoz. Noha vizsgálataim kiterjesztése a QTV görbékre főként éppen ezeknek a hamis effektusoknak a kiszűrésére szolgált, mégsem állíthatom teljes bizonyossággal, hogy minden hamis ETV-t sikerült kiszűrni. Ráadásul markáns ellipszoidális fényváltozás hiányában, vagyis a különálló fedési kettősök többségében ez a módszer nem is alkalmazható. Hozzá kell tenni azonban azt is, hogy a kombinált fényidő- és dinamikai megoldást igénylő rendszerek esetében (amelyek között értelem szerint éppen a különálló fedési kettőst tartalmazó rendszerek vannak elsöprő többségben) szerencsére még kisebb az esély, hogy a harmadik test perturbációi keltette ETV-t valamely más jelenség hatásával keverjük össze. Mindez a dinamikai ETV mintázat gyakran rendkívül jellegzetes alakjának köszönhető. Másik oldalról pedig az mondható, hogy ha a hierarchikushármas-modell tényleg helyes interpretáció egy adott ETV-re, és az $O-C$ görbe lefed legalább két teljes külső pályaperiódust, akkor az ETV-megoldásból kapott orbitális és tömegparaméterek várakozásunk szerint megbízhatóak, és így a későbbiekben biztonsággal használhatók mind statisztikai analízis céljaira, mind pedig az adott rendszer későbbi (vagy éppen korábbi) dinamikai evolúciójának vizsgálatánál.

A két kategória középső alcsoportjaiba sorolt rendszereknél a különbség a pusztán fényidőeffektussal modellezhető, illetve az összetett dinamikai és fényidőmodellt igénylő rendszerek között még kifejezettebb, éppen a dinamikai effektus jellegzetes, mással össze nem téveszthető mintázataiból kifolyólag. Ily módon, noha azt teljes bizonyossággal nem állíthatom, hogy a 4.2–4.4. táblázatokban felsorolt, tisztán fényidőpálya-megoldással modellezett rendszerek között nincs olyan, amely esetében a harmadiktest-hipotézis a későbbiekben tévedésnek fog bizonyulni, a 4.5–4.7. táblázatokban felsorolt, összetett módon modellezett rendszerek esetében ez kevésbé valószínű. A másik oldalról viszont kétségtelen, hogy egy gyengén lefedett külső pálya esetében az egyes paraméterek bizonytalansága a kombinált dinamikai és fényidőmegoldás esetében sokkal nagyobb lehet, mint a tisztán fényidőeffektust mutató rendszerek esetében, azonban alapos numerikus vizsgálatokkal arra a következtetésre jutottunk, hogy a kulcsparaméterek még ezekben az esetekben is elég megbízhatóak ahhoz, hogy legalábbis statisztikai analízishez használhatóak legyenek.[19]



4.6. ábra. A triplán fedő KIC 07289157 LC fénygörbéje. Látványos a szoros kettős reguláris fedéseinek a pályasík precessziójából következő, folyamatosan csökkenő mélysége. Az extra fedések ebben a felbontásban kilógó vonalakként jelennek meg. Az ábrára feketével rárajzoltam az ETV komplett dinamikai és fényidőmegoldásának fényidőeffektusból származó járulékát. Jól látható, hogy az extra fedések a fényidőgörbe extrémumai közelében következnek be. Az alsó extrémumoknál, azaz amikor a fényidőeffektus következtében a kettős fedései a legtöbbet „sietnek”, azaz a fedési kettős a legközelebb van hozzánk, ennek komponensei fedik el a harmadik csillagot, míg a felső extrémumok esetében fordított a helyzet.

Ugyanakkor, mielőtt rátérek az eredmények statisztikai analízisének ismertetésére, szükséges felhívni a figyelmet egy olyan módszertani hibára, amit sajnálatos módon gyakran elkövetnek az $O-C$ görbék analízisével és interpretációjával foglalkozó szerzők. Ez pedig másodfokú polinom körültekintés nélküli illesztése a fényidőmegoldás keresése közben. Vizs-

[19] A paramétermeghatározás egyértelműségének, a paraméterek bizonytalanságának, illetve összefüggéseinek kérdéseit Rappaport és mktsai. (2013) 6.3. fejezetében, valamint Borkovits és mktsai. (2015) 5.2. fejezetében és E. függelékében részletekbe menően megvizsgáltuk. Ehelyütt e kérdést terjedelmi korlátok okán nem részletezem tovább.

gálataim során, különösen amikor az $O-C$ görbén megfigyelhető periodicitás alapján feltételezhetően a második, illetve méginkább a harmadik alcsoportba tartozó $O-C$ görbére kerestem fényidőpálya-megoldást, igyekeztem elkerülni, hogy a fényidőpálya-paraméterekkel egyidejűleg másodfokúpolinom-illesztést is végezzek. Egy jól definiált és könnyen elkülöníthető, rövid periódusú ETV-moduláció hiányában ugyanis egy kvadratikuspolinom-komponens nagyon könnyen tud megtévesztő, hamis fényidőmegoldást eredményezni. Példának okaként egy korábbi munkánban (Borkovits és mktsai., 2005a) megmutattuk, hogy egy egyszerű, két állandó, de eltérő periódusú szakaszból konstruált (és némi normál eloszlású zajjal ellátott) mesterséges ETV görbe (amely tehát elvben egy egyszeri, hirtelen periódusváltozást mutató, de különben állandó periódusú fedési kettősre lenne jellemző) tökéletesen modellezhető egy fényidőpálya és egy másodfokú polinom kombinációjával. Négy esetben azonban előfordult, hogy mégis kénytelenek voltam ezt a kombinációt alkalmazni az $O-C$ modellezésénél, mert más módon nem sikerült realisztikus fényidőmodellt kapnom.[20] Ezekben az esetekben megoldásom általában nagyon kis tömegű harmadik komponenst eredményezett, 1000 nap körüli keringési idővel. E megoldásokat viszont véleményem szerint rendkívül komoly fenntartásokkal kell kezelni.

4.6.2. Statisztikai vizsgálatok

Mintánk legkomolyabb statisztikai jelentősége abban áll, hogy több mint a duplájára növeli a $P_2 \leq 1000$ nap külső periódusú, ismert hierarchikus hármas csillagrendszerek számát.[21] Ez már csak azért is különösen érdekes, mert a rövid ($P_2 \lesssim 1000\,\mathrm{d}$) periódusú harmadik komponensek feltűnő hiánya már egy évtizede ismert volt (Tokovinin és mktsai., 2006). Sőt egy közelmúltbeli dolgozatban Tokovinin (2014b) az F-G törpe főcsillagokat tartalmazó hierarchikus hármascsillagok távolságlimitált mintájában az ilyen rövid külső periódusú rendszerek teljes hiányát jelentette. Ráadásul, ha a mintánkat kibővítjük nagyobb tömegű csillagokat is tartalmazó hármas rendszerekre, akkor is csak nagyon korlátozott számban találunk nem degenerált csillagok alkotta, ennyire kompakt hierarchikus hármasokat.

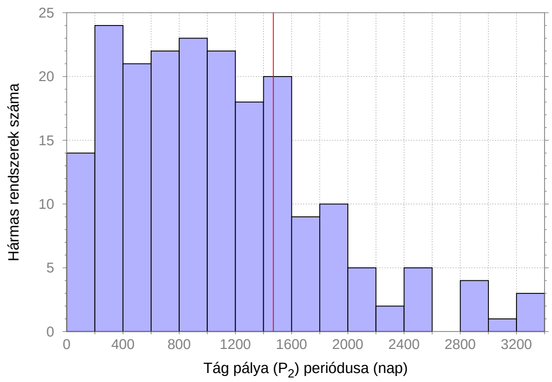
A paraméterek egy része, mégpedig P_1, P_2, e_2, ω_2, valamint $f(m_\mathrm{C})$ mind a 222 rendszerre elérhető, míg az egyes rendszerek térbeli elrendeződésével kapcsolatos i_m köztes inklináció, valamint a szoros kettős m_AB össztömege és a harmadik kísérő m_C tömege csak a 62 fényidő- és dinamikai effektust egyaránt mutató hármas rendszer esetében vizsgálhatók.

A 4.7. ábrán a 222 hierarchikus hármas rendszerünk tágpálya-periódusainak $f(P_2)$ eloszlását ábrázoltuk. Az eloszlás $P_2 \lesssim 1600$ napig, tehát a *Kepler*-misszió időtartamával összemérhető időskálán gyakorlatilag lapos. Hosszabb periódusokra az eloszlás gyorsan csökken. Ez részben vagy akár teljes egészében nyilván annak az észlelési effektusnak köszönhető, hogy az adatsorok hosszánál lényegesen hosszabb keringési periódusú harmadik test okozta ETV megbízható és pontos azonosítására a módszerem nem alkalmas. Ezzel együtt azonban a tapasztalt eloszlás utalhat egy $f(P_2) \propto P_2^{-1}$ jellegű csökkenésre is növekvő P_2 értékekre. Legyen ugyanis $F(P_2)$, illetve $f(P_2)$ a logaritmikus, illetve a lineáris intervallumokra meghatározott P_2 orbitálisperiódus-eloszlás! Ebben az esetben nyilván-

[20] A kérdés természetesen önként adódik. Ha így áll a helyzet, e négy kettőst (KIC 03440230, 05621294, 07339345, 07680593) miért nem töröltük mintánkból? A magyarázat pedig az, hogy az e rendszerekre adott fényidőmegoldások más szerzők munkáiban már korábban szerepeltek, sőt pl. a KIC 05621294 esetében két kutatócsoport külön is kiemeli az így „felfedezett" kísérő szubsztelláris jellegét (Lee és mktsai., 2015; Zasche és mktsai., 2015).

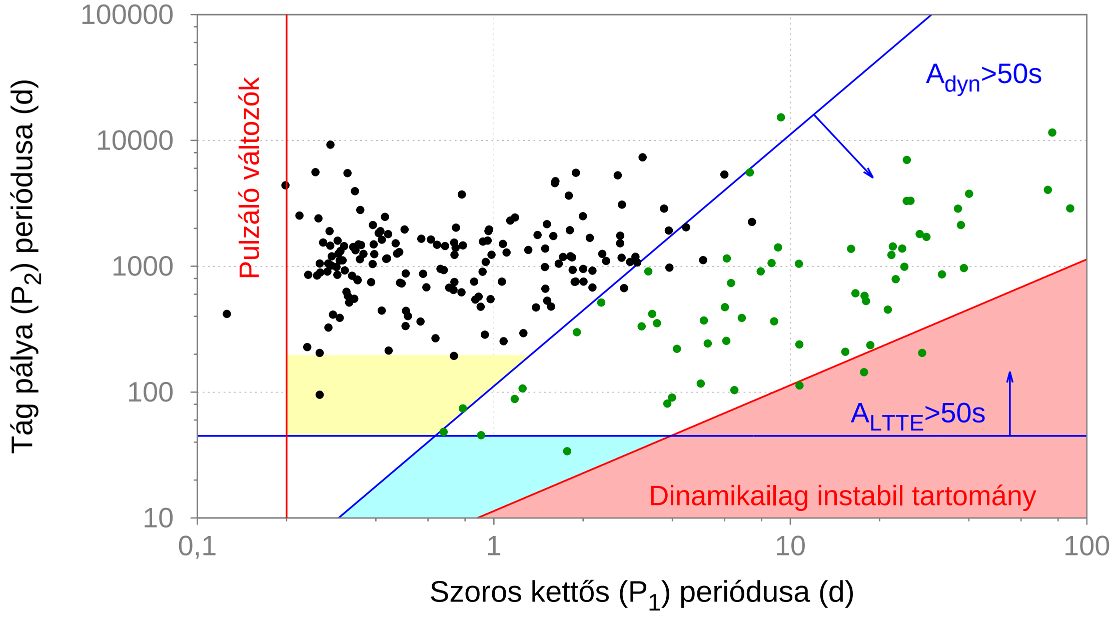
[21] Itt kell megjegyeznem, hogy ez az alfejezet kb. 75%-ban Rappaport professzor munkája, a személyes hozzájárulásom a statisztikai eredményekhez tehát hozzávetőleg 25%. Azonban, minthogy tudományos szempontból ez a statisztikai vizsgálat az egyik legfontosabb része e munkának (valamint a statisztikai vizsgálatot lehetővé tévő egész eljárás pedig kb. 90–95%-ban az én érdemem), úgy döntöttem, hogy ezeket az eredményeket mindenképpen belefoglalom mind a dolgozatomba, mind téziseimbe.

való, hogy $F(P_2) \equiv P_2 f(P_2)$. Ami az $F(P_2)$ függvény tényleges alakját illeti, ez fedhet akár egy logaritmikusan egyenletes eloszlást, akár egy olyan 180 év körüli csúcsot mutató lognormális eloszlást, amilyet Abt és Levy (1978), illetve Duquennoy és Mayor (1991) találtak kettőscsillagok nagyszámú mintáinak perióduseloszlását vizsgálva, vagy akár egy ~ 3000 év közelébe eső csúcsot mutató eloszlást, amely utóbbit Tokovinin (2008) észlelések, illetve Naoz és Fabrycky (2014) pedig numerikus szimulációk útján kapott szoros kettősöket tartalmazó hármas rendszerek esetére. Ezekben az eloszlásokban az mindenesetre közös, hogy mindhárom esetben az általunk vizsgált periódustartományban az $f(P_2)$ eloszlásfüggvény durván P_2^{-1} szerint változna.



4.7. ábra. Az eredeti *Kepler*-mezőben talált 222 hierarchikus hármas rendszer P_2 külső periódusának eloszlása. A függőleges piros vonal az elsődleges *Kepler*-küldetés hosszát jelzi.

A tágpálya-periódusok eloszlásának rövidebbik végével kapcsolatosan még érdekesebb az a kérdés, hogy vajon itt (is) valamely észlelési effektus határozza meg a megfigyelt P_2 periódusok alsó határát, vagy pedig valamilyen dinamikai vagy asztrofizikai, esetleg evolúciós jelenség van a háttérben. A 4.8. ábra, amin a külső periódusokat a szoros kettős P_1 periódusának függvényében ábrázoltuk, szemléletes választ ad erre a felvetésre. Az ábrán kék vonalak határolják azokat a területeket, ahol az $\mathcal{A}_{\mathrm{LTTE}}$, illetve $\mathcal{A}_{\mathrm{dyn}}$ ETV-amplitúdók (az egyes pálya- és dinamikai paraméterekre tett ésszerű becslések mellett) meghaladják az 50 másodpercet, amelyet a biztos detektálás (némileg talán pesszimisztikus) alsó határának tekintünk. A világoskék terület azt a periódustartományt jelöli, ahol a fényidőeffektus ugyan nem, de a dinamikai járulék még detektálható lenne. Amint látható, mintánk egyetlen olyan hármas rendszert, mégpedig a KIC 05897826(=KOI–126) jelűt tartalmaz, amely ebbe a régióba esik. (Ugyanakkor, amint azt az előző szakasz végén említettem, ezt a rendszert nem a fedésiminimumidőpont-változások, hanem a látványos külső fedések alapján fedezték fel.) A sárgára színezett terület pedig azon tartományt fedi, ahol a legszorosabb $P_1 < 1$ nap periódusú fedési kettősök körül egészen közel keringő harmadik komponensek a fényidőeffektusnak köszönhetően már biztonsággal felfedezhetők lennének még megfelelő nagyságú dinamikai járulék nélkül is. A tény, hogy ezekben a tartományokban (és különösen a sárgában) alig találtunk hármas rendszert, meggyőzően bizonyítja, hogy a P_2 perióduseloszlás általunk tapasztalt alsó szélét nem észlelési, hanem tényleges dinamikai vagy evolúciós effektusok határozzák meg. Ugyanakkor, a világoskék régióban esetleg azt az ellenvetést még meg lehetne tenni, hogy a legszorosabb kettősök körül egészen közel keringő harmadik komponensek esetében az árapály-, vagy esetleg más kölcsönhatás elég hatékony lehet ahhoz, hogy mindkét pálya viszonylag rövid időn belül bekörösödjön, és a két pályasík is közel egybeessék (ahogy azt például a HD 181068 esetében látjuk), amely esetben a dinamikai effektus amplitúdója elegendően lecsökkenne ahhoz, hogy az ETV észrevétlen maradjon. A sárga régióban azonban, ahol az ETV-t a fényidőeffektus dominálja, már ez az ellenvetés sem állhat meg. Ily módon nagy biztonsággal kijelenthetjük, hogy a legszorosabb fedési kettőscsillagoknak, vagyis leginkább az érintkező kettősöknek nincs *közeli* harmadik kísérőcsillaga. Ez az eredmény azt is sejteni engedi, hogy a legszorosabb, mondjuk $P_1 \lesssim 1/2$ nap periódusú kettőscsillagokat létrehozó



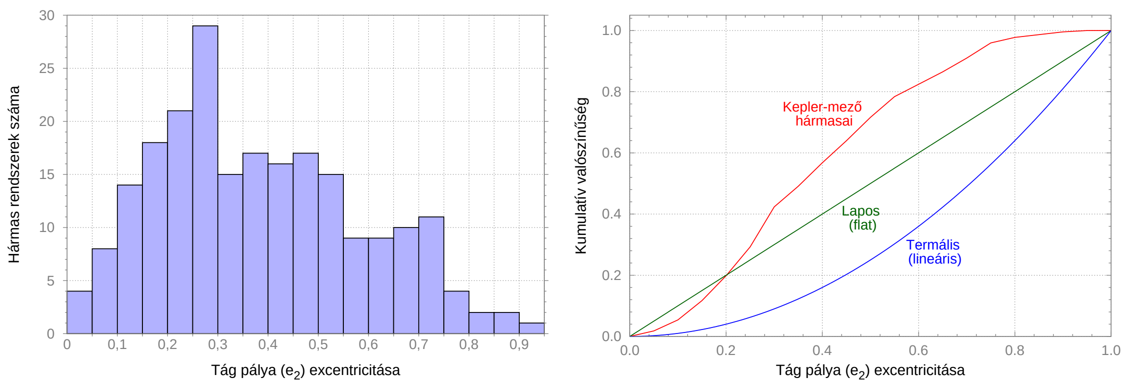
4.8. ábra. Az elsődleges *Kepler*-mezőben talált 222 hierarchikus hármas rendszer külső, P_2 periódusa a belső, szoros kettős P_1 periódusának a függvényében. A fekete korongokkal jelölt rendszerekre csak fényidőmegoldást számoltam, míg a zöld korongok a kombinált fényidő- és dinamikai megoldást igénylő hármasok. A bal oldali függőleges piros vonal a közönséges érintkező kettősök keringési idejének alsó határát jelzi, míg az (4.10) formulával számolt jobb oldali ferde, piros vonal által határolt piros tartomány a dinamikailag instabil régiót jelöli. A vízszintes, illetve a ferde kék vonalak a detektálható fényidő- (vízszintes vonal), illetve dinamikai effektust (ferde vonal) eredményező konfigurációkat választják el a paramétertér azon részeitől, ahol ezek a jelenségek még kimutathatatlanok lennének. A detektálási küszöböt (némileg pesszimistán) az $\mathcal{A}_{\mathrm{LTTE,dyn}}$ amplitúdók 50 másodperces nagyságánál húztuk meg. Az amplitúdókat az alábbi paraméterekre számoltuk ki: $m_\mathrm{A} = m_\mathrm{B} = m_\mathrm{C} = 1\,\mathrm{M}_\odot$, $e_2 = 0{,}35$, $i_2 = 60^\mathrm{o}$, and $\omega_2 = \pm 90^\mathrm{o}$. A nyilak a kétféle effektus nagyságának növekvő irányát jelzik. A világoskék régió azt a tartományt jelzi, ahol a dinamikai effektus még kimutatható lenne, viszont a fényidőeffektus már nem. A 222 rendszerből egyetlen esik ebbe a tartományba (ld. a szövegben). A sárgán satírozott terület pedig azt a tartományt mutatja, ahol egy rövid ($P_2 < 200\,\mathrm{d}$) periódusú harmadik komponens a fényidőeffektusnak köszönhetően, a dinamikai effektus hiánya (illetve kis amplitúdója) dacára is kimutatható lenne. A hierarchikus hármasok feltűnő, csaknem teljes hiánya ebben a régióban érdekes asztrofizikai következtetések levonását teszi lehetővé (lásd a szövegben).

mechanizmus(ok) némileg különböz(het)nek az ennél hosszabb periódusú szoros kettősöket eredményező mechanizmus(ok)tól.

A 4.8. ábra jobb oldalán látható ferde, piros vonal a dinamikailag stabil, illetve instabil rendszerek tartományát választja el agymástól. A vonal helyzete Mardling és Aarseth (2001) félempirikus formuláján alapszik, amely könnyen átírható az alábbi alakba:

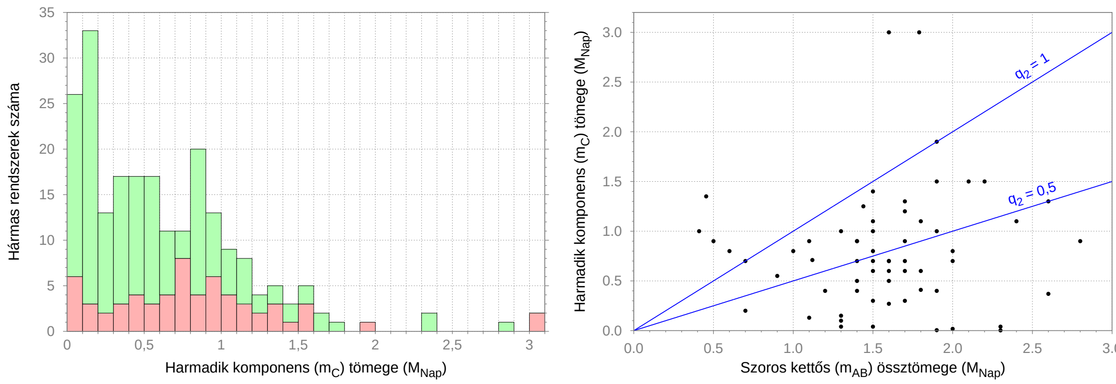
$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)_{\mathrm{stab}} \gtrsim 4{,}68\left(\frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{AB}}}\right)^{1/10}\frac{(1+e_2)^{3/5}}{(1-e_2)^{9/5}}, \tag{4.10}$$

amely a tapasztalatok szerint a külső tömegarány-, illetve excentricitásértékek széles tartományára érvényes. (Ugyanakkor, mint jól látható, nem foglalja magában sem a belső e_1 excentricitástól, sem a két pályasík i_{m} köztes inklinációjától való függést, és ezért e két paraméter extrém értékeinek esetében megbízhatósága megkérdőjelezhető.) E stabilitási kritérium alkalmazásakor a külső pálya excentricitását $e_2 = 0{,}35$-nek választottuk, ez a 4.9.a ábrán feltüntetett excentricitáseloszlás mediánja. A bal oldali, függőleges piros vonal pedig a $P_2 = 0\overset{\mathrm{d}}{,}2$ értéket jelöli, amely, mint korábban említettem, hozzávetőleg a legrövidebb periódusú, átlagos érintkező kettősök keringési periódusa. Négy kivételével mind a 222 rendszerünk e két piros vonalon belülre, vagyis az „engedélyezett” tartományba esik. A rövidebbik oldalon kilógó egyetlen rendszer, amint már említettem, a ritka, forró B típusú szubtörpét tartalmazó, elfejlődött KIC 09472174, ahol a fedési kettős specifikus volta igazolja az extrém elhelyezkedést. Az instabilitási tartományba kismértékben beleeső három hármas rendszer esetében pedig azt kell észben tartanunk, hogy a fenti (4.10) kifejezés csak közelítő formula, és nem általános érvényű.



4.9. ábra. *Bal panel:* A tág pályák e_2 excentricitásának eloszlása a *Kepler*-mező 222 hierarchikus hármas rendszere esetében. *Jobb panel:* A 222 *Kepler*-hármas e_2 külső excentricitásának kumulatív eloszlása. Összehasonlításképpen felrajzoltuk a $[0;1)$ intervallumon egyenletesen eloszló (zöld), illetve az e_2-vel lineárisan növő (kék) excentricitáseloszlások esetén adódó kumulatív eloszlásokat is. Jól látható, hogy az $e_2 \sim 0{,}3$ körüli csúcsot mutató megfigyelt eloszlás az elméleti eloszlásgörbék egyikével sem magyarázható kielégítően.

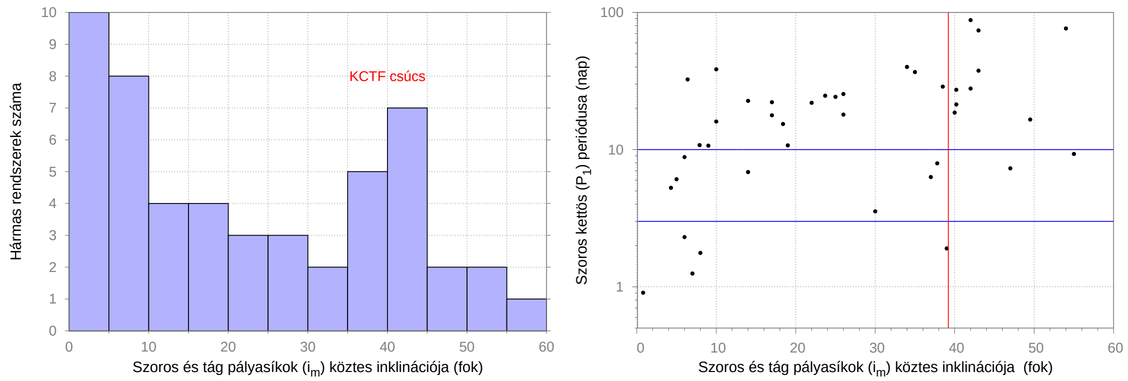
A külső e_2 excentricitások csaknem minden lehetséges értéket felvesznek (4.9.a ábra). Az eloszlást egy $e_2 \simeq 0{,}28$ körüli kiugró és az ezt a tartományt körülvevő alacsonyabb, de szélesebb csúcs jellemzi. Ez az eloszlás egybevág az elmúlt években több, különböző szerzők által publikált munkában a mezőbeli kettősök különféle populációira talált excentricitáseloszlásokkal. Ez különösen jól látható, ha a 222 rendszerünk e_2 külső excentricitásának kumulatív eloszlását mutató 4.9.b ábrát összevetjük Duchêne és Kraus (2013) összefoglaló művének 3. ábrájával, ahol a szerzők $100\,\mathrm{d} \leq P \leq 10\,000\,\mathrm{d}$ periódusú kettőscsillagok



4.10. ábra. *Bal panel:* A harmadik komponens $m_{\rm C}$ tömegének eloszlása a *Kepler*-mezőben talált 222 hármasrendszer-jelölt esetében. A 62 pirossal jelölt érték esetében a kombinált fényidő- és dinamikai megoldásból a tömeg közvetlenül számolható. A fennmaradó 160 (zöld) esetben a megadott tömeg a fényidőmegoldásból becsült minimális tömeg, amennyiben a szoros kettős össztömegére $m_{\rm AB} = 2\,{\rm M}_\odot$ értéket teszünk fel. *Jobb panel:* A harmadik komponens $m_{\rm C}$ és a szoros kettős $m_{\rm AB}$ tömege közti összefüggés a 62 kombinált ETV-megoldású rendszer esetére.

többféle, homogén alcsoportjának kumulatív excentricitáseloszlását mutatják be. (Természetesen ezeknek az összehasonlításoknak az erejéig hármas rendszereinket olyan kettőscsillagoknak tekintjük, amelyek egyik komponense a harmadik test, a másik pedig a szoros kettős.) Egy további összehasonlítás kedvéért a 4.9.b ábrán azt is megmutatjuk, milyen lenne a kumulatív eloszlás, ha az excentricitáseloszlás lineárisan nőne e_2-vel (Jeans-féle „termális" eloszlás, Jeans 1919), vagy pedig ha az excentricitások egyenletesen oszlanának el a $[0;1)$-tartományban. A Duchêne és Kraus (2013) által bemutatott eloszlásokhoz hasonlóan, az észlelt excentricitáseloszlás a bemutatott elméleti esetek egyikére sem illeszkedik. A megfigyelt külső excentricitáseloszlás magyarázatával (a korábbi munkákhoz hasonlóan) adósak maradunk.

A 4.10. ábra bal oldalán a harmadik kísérők tömegeloszlását tüntettük fel. Tényleges tömegeket, a korábbiakban elmondottak értelmében csak arra a 62 hármas rendszerre tudtam meghatározni, ahol mind a fényidő-, mind a dinamikai effektust képes voltam kimérni. A fennmaradó 160 rendszer esetében a szoros kettős össztömegére az ésszerűnek tűnő $m_{\rm AB} \simeq 2\,{\rm M}_\odot$ feltevést használva, a fényidőmegoldásból származó $f(m_{\rm C})$ tömegfüggvényből a harmadik kísérő minimális tömegére adtam egy becslést. Az ábrából jól látható, hogy a tömegeloszlás kis kísérőtömegekre meglehetősen népes, majd $m_{\rm C} \simeq 1\,{\rm M}_\odot$ környékén gyorsan esni kezd, és alig találtunk egy-két olyan rendszert, ahol a harmadik komponens becsült tömege meghaladná az $m_{\rm C} \simeq 1{,}8\,{\rm M}_\odot$ értéket. Ez feltehetőleg csupán kiválasztási effektus, mivel a *Kepler*-célpontokat eleve úgy választották ki, hogy viszonylag kevés ($\lesssim 1/2\%$) ennél nagyobb tömegű objektumot tartalmazzanak. Az is megfigyelhető, hogy a tisztán fényidőeffektust mutató rendszerek esetében tendenciáját tekintve kisebb harmadiktest-tömegek adódtak, mint a dinamikai eredetű ETV-ket is produkáló hármasokban. Feltehetőleg ez leginkább annak a következménye, hogy az előbbi esetben a tömegek csupán becsült alsó értékek. Ennélfogva, amennyiben a tág pálya i_2 inklinációja elég kicsi, a harmadik komponens tömege számottevően nagyobb is lehet. Mindezek ellenére, az egészen kis tömegű ($m_{\rm C} \lesssim 0{,}2\,{\rm M}_\odot$) harmadik komponensek kiugróan nagy száma méginkább óvatosságra int azzal kapcsolatban, hogy mennyire elfogadható az egészen kis amplitúdójú, kvázi-periodikus ETV-k fényidőeffektusként való értelmezése. (Ehelyütt különösképpen az



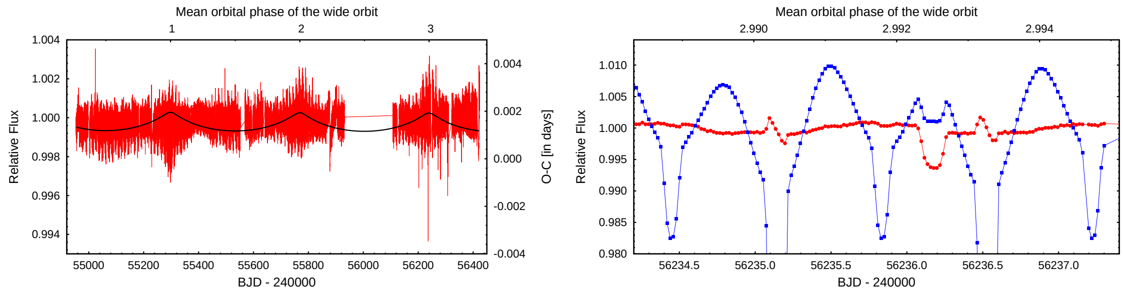
4.11. ábra. *Bal panel:* Az i_m köztes inklináció eloszlása azon 62 hármas rendszer esetén, ahol a dinamikai ETV lehetővé teszi ennek meghatározását. Vegyük észre az $i_\mathrm{m} \simeq 40^\mathrm{o}$ körüli csúcsot, amely a KCTF mechanizmus működésére utalhat (részletek a szövegben). Az $i_\mathrm{m} = 0^\mathrm{o}$ és 5^o fok közti csúcs ténylegesen 21 csillagot tartalmaz, azaz túlfut az általam használt skálán. *Jobb panel:* Az i_m köztes inklináció és a szoros kettős P_1 periódusa közti kapcsolat a 44 nem egysíkú, dinamikai rendszer esetére. A KCTF mechanizmusban kritikus $i_\mathrm{m} \sim 39\overset{\circ}{.}2$ (függőleges piros vonal) környezetében Fabrycky és Tremaine (2007) a vízszintes kék vonalakkal jelzett P_1 értékek közti periódustartományban a fedési kettősök feldúsulását jósolja. Mintánk nem mutat ilyen tendenciát.

előző alfejezet végén tárgyalt esetekre érdemes visszagondolni.)

A 62 dinamikai rendszerre megvizsgáltuk az m_AB és m_C tömegek közti korrelációt is (4.10. ábra jobb oldala). A kisebb meredekségű ferde vonal az $m_\mathrm{A} = m_\mathrm{B} = m_\mathrm{C}$ esetnek felel meg, míg a nagyobb meredekségű vonal az $m_\mathrm{C} = m_\mathrm{AB}$ feltételt kielégítő pontokat jelöli. Durván a rendszerek fele helyezkedik el e két vonal között, és nagyjából ugyanennyi található az alsó vonal alatt is. Alig néhány olyan hármas rendszert találtunk, ahol a harmadik komponens tömege meghaladja a szoros kettős össztömegét.

További statisztikai vizsgálódásaink eredményeiből ehelyütt még az i_m köztes inklinációra vonatkozó eredményeket emelem ki. A 4.11. ábra bal oldalán a 62 kombinált megoldású rendszer i_m köztesinklináció-eloszlását tüntettük fel. Az eloszlásnak egyértelműen két csúcsa van. A közel egysíkú hármasok nagy gyakorisága mellett, a rendszerek csaknem egyharmada egy $i_\mathrm{m} \sim 40^\mathrm{o}$ körüli csúcs környékén helyezkedik el. Mint ismeretes, az aszimptotikus kvadrupól KCTF modell (ld. az 1.3.3. szakaszban) éppen egy $i_\mathrm{m} \simeq 40^\mathrm{o}$ (vagy ennek retrográd megfelelője) körüli értékre „befagyott" köztes inklinációt jósol a KCTF mechanizmuson átesett hármas rendszerek esetén (Fabrycky és Tremaine, 2007). Ebben a tekintetben az általunk kapott eloszlás akár a KCTF mechanizmus működésének szép, és első kísérleti bizonyítékát adhatja. Hozzá kell tenni azonban, hogy sajnálatos módon a 4.11. ábra jobb oldalán bemutatott $P_1 - i_\mathrm{m}$ reláció viszont messze nincs összhangban a Fabrycky és Tremaine (2007) által jósolttal. E szerzők eredményei szerint ugyanis a KCTF mechanizmus az $i_\mathrm{m} \sim 40^\mathrm{o}$ körüli köztes inklinációjú rendszerek esetében a $3\,\mathrm{d} \lesssim P_1 \lesssim 10\,\mathrm{d}$ periódustartományban eredményezne látványos feldúsulást.

A releváns statisztikai eredmények ismertetésének zárásaként még azt érdemes megemlíteni, hogy a 222 hármas rendszert tartalmazó mintánk az elsődleges *Kepler*-mezőben katalogizált összes fedési kettős (illetve ellipszoidális változó) csaknem 10%-át jelenti. A tágpálya-periódusok túlnyomó többségükben 30 és 2000 nap közé esnek. Ily módon a teljes minta a lehetséges 6-7 nagyságrendnyi periódustartományból csak hozzávetőlegesen 1,8-nyit fed le. Amennyiben a hierarchikus hármas rendszerek tágpálya-periódusai logarit-



4.12. ábra. A KIC 09007918 *Kepler*-fénygörbéjén megfigyelhető egyetlen külső fedési esemény azonosítása. *Bal panel:* A fázisba rendezett, átlagolt fénygörbét levonva az LC adatsorból, a maradványfénygörbén (pirossal) feltűnővé válik egy határozott elhalványodás MBJD 56326,2 körül. Ez az esemény közel esik az ETV-görbére adott fényidőmegoldás (fekete görbe) egyik éles maximumához. *Jobb panel:* Kinagyítva a reziduál-fénygörbe (piros) adott részét egyértelműen látszik, hogy az elhalványodás egy tranzitszerű extra fedési esemény, amely ezek után már könnyen azonosítható az eredeti *Kepler*-fénygörbén is (kékkel). Az esemény a fedési kettős maximális Rømer-késéséhez nagyon közeli időpontban következett be, amely ráadásul ebben a hármas rendszerben majdnem egybeesik a tág kettős periasztron-átmenetével (lásd az ábra felső vízszintes oldalán lévő skálát). Ebben a speciális esetben a fedési kettős és a harmadik komponens fizikai (azaz térbeli), illetve az égboltra vetített távolsága is ugyanakkor éri el minimumát, ami még tovább növeli egy esetleges külső fedés bekövetkeztének valószínűségét. Az elhalványodás szabályos, egyszerű átvonulásra utaló formája, valamint az, hogy pont a fedési kettős második kvadratúrájának az idejében következett be, vagyis akkor, amikor a szoros kettős két komponense közti vetített távolság a legnagyobb, azt valószínűsíti, hogy a harmadik kísérő csak a fedési kettős egyik komponense előtt vonult át.

mikus skálán durván egyenletesen oszlanának el, akkor ebből rögvest következne, hogy az összes kettőscsillag legalább 30%-a hármas vagy többes rendszer tagja, amely eredmény jó egyezést mutat a Bevezetés 1.3.1. alfejezetében áttekintett statisztikai eredményekkel.

4.6.3. Extra fedési eseményeket mutató rendszerek

Amint azt fentebb már említettem, mintánkban tíz olyan hierarchikus hármas rendszer is szerepel, amely egy vagy több olyan extra fedési eseményt is mutat, amelyek ugyanannak a harmadik komponensnek tulajdoníthatók, mint amelyik a fedésiminimum-időpontok változásait is előidézi. E tíz rendszer triplán fedő természetük első bejelentésének időrendjében: KIC 05897826(=KOI–126) (Carter és mktsai., 2011), KIC 05952403(=HD 181068) (Derekas és mktsai., 2011), KIC 06543674 és 07289157 (Slawson és mktsai., 2011), KIC 02856960 (Armstrong és mktsai., 2012), KIC 02835289 (Conroy és mktsai., 2014), KIC 05255552, 06964043, 07668648 (Borkovits és mktsai., 2015), s végül KIC 09007918 (Borkovits és mktsai., 2016). Az extra fedések alakja, mélysége és időtartama, gyakran még egy rendszeren belül is, nagy változatosságot mutathat. Az esetek nagy részében ezek az adott fénygörbe legmarkánsabb s legnagyobb amplitúdójú jellegzetességei. Előfordul azonban az is, hogy az extra fedések csupán apró, nehezen észrevehető, rövid szabálytalanságokként, esetleg bolygóátvonulásokat utánzó, kis amplitúdójú, lapos elhalványodásokként jelennek meg, amelyek valódi természete csak egy fényidő- vagy kombinált ETV-megoldás segítségével fedhető fel. Ez utóbbira a KIC 06543674, a KIC 07668648, illetve még kifejezettebben a KIC 09007918 fénygörbéi (4.12. ábra) szolgáltatnak példát.

A külső fedések lefolyása, azok pontos időzítése, alakja és amplitúdója rendkívül érzékeny a hármas rendszer szinte minden geometriai és dinamikai paraméterére. Ily módon, egyik oldalról, e fedések sikeres modellezésével, ahogy azt a következő, 5. fejezetben látni fogjuk, a hármas rendszer számos paraméterét egyedülálló pontossággal határozhatjuk meg. A másik oldalon viszont az áll, hogy éppen emiatt a nagyfokú paraméterérzékenység miatt egy ilyen fénygörbe-modellezés rendkívül nagy kihívást jelent, s korántsem egyszerű dolog. Például, még ha a külső pálya elég tág is ahhoz, hogy a rövid és hosszú időskálájú dinamikai perturbációk elhanyagolhatók legyenek, az extra fedések fényességlefutását még ezekben az esetekben is alapvetően, és akár alkalomról alkalomra befolyásolhatják a fedési kettős pozíciójának például a pályasíkok precessziója, vagy az apszismozgás miatti apró változásai, amelyek máskülönben esetleg csak évek, évtizedek alatt okoznának kimutatható változást magában a fedési kettős fénygörbéjében. Ezért, a gyakorlatban az ilyen hármas rendszerek pontos analízise csak dinamikai és fotometriai jellemzőik egyidejű modellezésével lehetséges, ahogy ezt Carter és mktsai. (2011) el is végezték az elsőként felfedezett külső fedésű rendszer, a KIC 05897826 esetében.

Két további triplán fedő rendszerre érhető el még fénygörbemegoldás az irodalomban. A KIC 05952403 esetében ezt a modellezést, amelyet az általam vezetett csoport végzett el, a következő fejezetben fogom részletesen bemutatni. A másik hármas pedig a KIC 06543674 (Masuda és mktsai., 2015). E két megoldás azonban nem a teljes fotodinamikai analízisen alapul. Amint azt rövidesen látni fogjuk, az általunk vizsgált KIC 05952403 esetében, két egysíkú körpályáról lévén szó, a rendszer konfigurációja hosszabb távon is változatlan marad (sem pályasík-precesszió, sem apszismozgás nem lép fel, sőt a rövidebb időskálájú egyéb dinamikai perturbációk is teljességgel elhanyagolhatók), és ezért nem volt szükség a mozgás numerikus integrálására (vagyis a dinamikai modellre). A másik esetben pedig csupán egyetlen külső fedési esemény volt megfigyelhető, s ily módon e rendszer nem alkalmas a mindenre kiterjedő fotodinamikai analízisre. Itt jegyezzük meg azt is, hogy ez utóbbi hármas esetében a tág pálya periódusa $P_2 = 1101\overset{\mathrm{d}}{.}4 \pm 0\overset{\mathrm{d}}{.}4$, amely értékkel ez a jelenleg ismert leghosszabb külső periódusú triplán fedő rendszer, és egyszersmind, e rendszer tág kettőse birtokolja a leghosszabb periódusú „fedési kettős” címét a teljes *Kepler*-katalógusban.[22]

A *Kepler*-űrtávcső néhány további fedési kettős esetében is mutatott ki extra fedési eseményeket, sőt esetenként fedések egész összetett sorozatát is. Azonban ezeket alaposabban megvizsgálva, egyes esetekben ki tudtam zárni, hogy egy tág pályán keringő harmadik komponens fedéseiről lenne szó. Más esetekben pedig nem tapasztaltam fedésiminimumidőpont-változást. E rendszereket ily módon kihagytam mintánkból. Azonban ehelyütt néhány jellemző példát ismertetek.

A KIC 07670485 jelű fedési kettős fénygörbéjén egyetlen extra fedési esemény figyelhető meg BJD 2 455 665 körül (Orosz, 2015). Ugyanakkor sem a fő- sem a mellékminimumok $O-C$ görbéje sem mutat ETV-t, hanem csupán egy $\sim 3\times10^{-4}$ d nagyságrendű szórást.

A KIC 04247791 és 07622486 fedési rendszerek esetében az extra fedések szigorú periodicitása, valamint változatlan alakja egyértelműen mutatja, hogy mindkét fénygörbén két-két fedési kettős összeadódott fényváltozását látjuk. Az első esetben Lehmann és mktsai. (2012) már korábban kimutatták, hogy ez a forrás két kétvonalas (SB2) spektroszkópiai kettőst tartalmaz. A feladatom ebben a két esetben annak az eldöntése volt, hogy vajon ezen objektumok 2+2 elrendeződésű hierarchikus négyes rendszereket alkotnak-e. E kérdés el-

[22]Érdemes megjegyezni, hogy tudomásom szerint J. Carter és munkatársai elkészítették a KIC 07289157 teljes fotodinamikai modelljét is, ám ezt a mai napig nem publikálták. Orosz (2015) pedig a KIC 07668648 fotodinamikai modellezéséről számol be anélkül, hogy az eredményeket teljes egészében publikálná. Végezetül jelenleg is folynak erőfeszítések a KIC 02835289 (amelynek szoros kettőse szigorúan véve nem is fedési kettős, hanem ELV, Conroy és mktsai., 2015), valamint a KIC 02856960, a „lehetetlen hármas” (Marsh és mktsai., 2014) fénygörbe- és dinamikai modellezésére (S. Rappaport személyes közlése).

döntése érdekében kifejlesztettem egy eljárást, amellyel szimultán fénygörbe-analízis nélkül, egyszerűen formálisan szétválaszthattam az egybemosódó két kettős fénygörbéjét. Először az összemosódott fénygörbét fázisba rendeztem és 1000 vagy 2000 egyenletesen elosztott fázispontban átlagoltam mindkét fedési kettős efemeriszei szerint. Az átlagolt fénygörbékből meghatároztam a kétszer két fedési esemény első, illetve utolsó kontaktusainak pontos fázisértékeit. Ezt követően, a fázis- és periódusinformációk birtokában, a feltekerés és átlagolás eljárását megismételtem úgy, hogy kizártam a másik kettősbeli fedésekhez tartozó adatpontokat. Ezt követően ezeket a feltekert és átlagolt fénygörbéket kivontam az eredeti fénygörbeidősorból, mégpedig úgy, hogy az eredeti idősor minden egyes pontja esetében hárompontos lokális Lagrange-polinom-interpolációval határoztam meg az átlagolt fénygörbe fluxusértékét. Ily módon két-két olyan maradványfénygörbét kaptam, amelyek elsősorban a másik fedési kettős fedési struktúráját tartalmazták. Ezt követően, az utolsó lépésben ezekből a maradványgörbékből határoztam meg az adott kettős fedésiminimumidőpont-változásait ugyanazon a módon, ahogy azt a 4.4. szakaszban bemutattam.

A KIC 04247791 esetében a négy $O-C$ görbe nem mutat semmilyen szignifikáns görbületet. Ez természetesen nem zárja ki, hogy a két fedési kettős egy gravitációsan kötött, hierarchikus négyes rendszert alkosson, azonban azt a következtetést levonhatjuk, hogy az esetleges tág pálya periódusa nagy valószínűséggel legalább néhány évtized.

A KIC 07622486 esete kicsit bonyolultabb. E forrás egyik komponense egy hosszú periódusú ($P_{1\mathrm{A}} = 40\overset{\mathrm{d}}{.}25$) excentrikus fedési kettős, amely szűk, és viszonylag mély főminimumokat mutat. Mellékminimumok nem figyelhetők meg, azonban a szétválasztott és átlagolt fénygörbe látni enged egy szívdobbanás-szerű alakzatot a főminimum két szélén. A másik forrás egy jóval rövidebb periódusú ($P_{1\mathrm{B}} = 2\overset{\mathrm{d}}{.}28$), feltehetőleg félig érintkező fedési kettős, sekély, átvonulásra utaló főminimumokkal, és alig észrevehető mellékminimumokkal. Ebből kifolyólag az ETV-analízishez csak a kétféle főminimum $O-C$ görbéit használtam. A hosszab periódusú, excentrikus kettős esetében ezúttal sem találtam érdekes ETV-ket ($3-4\times10^{-4}$ napos pontossági korláttal). Ezzel szemben a rövidebb periódusú kettős $O-C$-jében találtam egy $P \simeq 231\pm4$ napos ciklikus változást. Az alaposabb vizsgálat azonban azt mutatta ki, hogy ez a kvázi-periodikus változás az egyik csillag rövid periódusú ($10^{-3}-10^{-2}$ d) oszcillációinak a következménye, mert ezek az oszcillációk éppen ezzel a periódussal torzítják el a sekély főminimum alakját. Ebből kifolyólag ennél a forrásnál is arra a következtetésre jutottam, hogy a két kettős ETV-iben semmi olyan jel nem figyelhető meg, amely azt bizonyítaná, hogy azok egyetlen hierarchikus többes rendszert alkotnának.

Az alfejezet végére hagytam a KIC 04150611 jelű objektumot, amelynek adatsora, valószínűleg túlzás nélkül mondható, hogy a *valaha* megfigyelt legösszetettebb fedési fénygörbe. A fedési jelenségek között három különböző periódus állapítható meg. Ráadásul a leghosszabb periódusú fedések egészen összetett és változó jellegzetességeket mutatnak. Ily módon e rendszer többes természetéhez nem fér kétség. Anélkül, hogy az ETV-k minden részletre kiterjedő, átfogó vizsgálatát megkíséreltem volna, csupán a $\sim 8\overset{\mathrm{d}}{.}65$ periódusú, excentrikus kettőstől származó fedések $O-C$-it készítettem el, ugyanis egyedül e kettős fénygörbéjét tudtam a fentebb leírt szétválasztási technikával könnyen, minimális erőfeszítéssel előállítani. Sajnálatos módon a kétféle minimumra számolt $O-C$ görbék egyike sem mutatott semmiféle periodicitást vagy görbületet. Ily módon, érdekes és informatív ETV hiányában ezt az egyébként nagyon izgalmas rendszert sem vettem fel mintánkba.

4.6.4. Nem fedő, cirkumbináris bolygójelöltek

Vizsgálataim során három olyan hármas rendszert találtam, ahol a harmadik komponens a tömegbecslés alapján nagy valószínűséggel bolygó. Ezek a KIC 07177553, 07821010 és 09472174 katalógusszámú rendszerek.

A KIC 09472174, mint már említettem, mintánk egyetlen rövid periódusú sdB+dM kettőse. A periodikus ETV-t először Baran és mktsai. (2015) magyarázták egy nagy valószínűséggel bolygótömegű harmadik komponens okozta fényidőeffektussal. Analízisem eredményüket mind kvalitatív, mind kvantitatív oldalról alátámasztja, így e rendszerrel különösebben nem is foglalkozom tovább. Egyetlen dolgot azonban érdemes kiemelni, amit a fentebbi szerzők elmulasztottak megemlíteni. Østensen és mktsai. (2010) korábban a fedési kettős össztömegére az $m_{\rm AB} = 0{,}60 \pm 0{,}03\,{\rm M}_\odot$ értéket kapták. Ebből a fényidőpálya amplitúdója alapján a harmadik komponensre $(m_{\rm C})_{\rm min} = 2{,}0\,{\rm M_J}$ alsó tömeghatár adódik. Eszerint e kísérő tömege csak $i_2 \lesssim 15^{\rm o}$ külső inklináció esetén érné el, illetve haladná meg a barna törpék alsó tömeghatárát. Ily módon, ha az ETV valóban fényidőeffektusnak tulajdonítható, akkor a kísérő tömege nagy valószínűséggel a bolygók tartományába esik.

A *Kepler*-küldetés története során e tanulmány megjelenésének idejéig tíz kettős körül találtak a csillag(ok) előtt átvonuló (úgynevezett tranzitáló) kettős körüli (cirkumbináris) bolygót. Kutatásom során két, e rendszerekhez hasonló konfigurációjú, de átvonulások okozta elhalványodásokat nem mutató kettőskörüli exobolygójelöltet találtam, mégpedig a KIC 07177553, illetve a 07821010 kettősökben. E két exobolygójelölt viszonylag tágabb, excentrikus kettősök ($P_1 = 18\overset{\rm d}{.}00$ és $P_1 = 24\overset{\rm d}{.}24$; $e_1 = 0{,}39$ és $e_1 = 0{,}68$ rendre a KIC 07177553-ra és a 07821010-re) körül kering, mégpedig $P_2 = 529 \pm 2$ és 999 ± 3 napos keringési idővel. Az ETV-t mindkét esetben a dinamikai effektus uralja ($\mathcal{A}_{\rm dyn}/\mathcal{A}_{\rm LTTE} \sim 48$ és 33).

A KIC 07821010 körüli exobolygójelöltet korábban már a D. Fabrycky vezette kutatócsoport is megtalálta, sőt kiegészítő spektroszkópiai méréseket is végeztek. Eredményeiket azonban mind ez ideig nem publikálták, csak egy még 2014-ben Portugáliában megrendezett konferencián tartott előadás interneten elérhető diáiban[23] akadtam rá véletlenül, a jelen munka készítése közben.

Az elsőként általam azonosított KIC 07177553 bolygójelöltjének biztos kimutatása érdekében nemzetközi spektroszkópiai észlelőkampányt kezdeményeztem. Holger Lehmann, a tautenburgi 2m-es távcsőre szerelt spektrográffal végzett első mérései során azt a meglepő felfedezést tette, hogy a spektrumban négy hasonló csillagtól származó színképvonalak találhatók, amelyek páronként két excentrikus, $P \simeq 16 - 18$ nap körüli kettőst alkotnak. Ezek egyike a fedési rendszerünk. Noha ez az eredmény nem cáfolja az ETV alapján valószínűsíthető, másfél év keringési idejű exobolygó létét a négyes rendszer fedési kettőse körül, hisz a másik kettős semmiképpen sem okozhatja a két $O - C$ görbén megfigyelt kis amplitúdójú, periodikus jelet, a négy vonal jelenléte, illetve a két kettős feltételezhető gravitációs kölcsönhatása nagyon megnehezíti, ha nem egyenesen lehetetlenné teszi az általam valószínűsített kettős körüli, nem fedő exobolygónak a radiálissebesség-mérés alapján történő igazolását.

E négyes rendszerről a későbbiekben részletes analízist is publikáltunk (Lehmann és mktsai., 2016), amelynek keretében az általam kifejlesztett új fénygörbemodellező-programmal (ld. a 5.2. fejezetben) elvégeztem a fedési kettős *Kepler*-fénygörbéjének analízisét. A kombinált fénygörbe- és radiálissebességgörbe-megoldás alapján azt találtam, hogy mind a releváns pályaelemek [különösen $(e_1)_{\rm ETV} = 0{,}39412 \pm 0{,}00001$; $(e_1)_{\rm LC} = 0{,}3915 \pm 0{,}0010$ és $(\omega_1)_{\rm ETV} = 179\overset{\circ}{.}7 \pm 0\overset{\circ}{.}4$; $(\omega_1)_{\rm LC} = 183\overset{\circ}{.}30 \pm 0\overset{\circ}{.}06$], mind pedig a kettős össztömegére kapott érték [$(m_{\rm AB})_{\rm ETV} = 1{,}9 \pm 0{,}8$; $(m_{\rm AB})_{\rm RV+LC} = 2{,}06 \pm 0{,}02$] egybevág a jelen ETV-analízisből kapott értékekkel, ami eljárásom megbízhatóságának további igazolása.

4.10. táblázat. További *Kepler*-kettősök, ahol az érdekes ETV mintázat hátterében egy harmadik komponens dinamikai perturbációi állhatnak

KIC No.	P_1 (nap)	ETV jellegzetességei
05393558	10,22	mellékminimum nem 0,5 fázisnál,
		a két ETV görbe alakja eltérő
05553624	25,76	mellékminimum nem 0,5 fázisnál,
		a két ETV görbe alakja eltérő
06146838[a]	27,47	excentrikus, nem síkbeli harmadik komponens
		valószínűsíthető periasztronátmenete (csak főminimumok)
09032900	67,42	szinuszos alak hatalmas amplitúdóval
10666242	87,24	nagy amplitúdójú szinusz szakasza?
		(csökkenő fedésmélység, csak főminimum)

Megjegyzések. [a]: Lásd még: http://www.exoplanet-science.com/koi-6668.html

4.6.5. További érdekes fedésiminimumidőpont-változások

A végső analízisünkbe felvett 222 (230) rendszeren kívül még több száz további olyan, a *Kepler*-űrtávcső által megfigyelt fedési kettős van, amelynek $O-C$ diagramja ETV-k széles változatosságáról árulkodik. Ezek az ETV-k azonban gyakran az adatsor hosszát jelentősen meghaladó időskálá(ko)n zajló jelenségekhez kapcsolódnak, s így, sajnálatos módon a *Kepler*-űrtávcső észlelései nem teszik lehetővé a megfigyelési eredmények kvantitatív, de gyakran még kvalitatív értelmezését sem. Természetesen, amennyiben a fő-, illetve mellékminimumok egyszerűen össze- vagy széttartó $O-C$ diagramokat mutatnak, valószínűleg nem állunk messze a valóságtól, ha ezt a klasszikus árapály-, vagy a relativisztikus effektus(ok) okozta apszisvonalmozgás következményeként értelmezzük. Egy többé-kevésbé tisztán parabolikus alakot felvevő $O-C$ görbe esetén viszont már korántsem lehetünk biztosak abban, hogy vajon valamilyen időben (asztrofizikai szempontból) rövid távon konstans periódusváltozást okozó jelenség (pl. tömegátadás, tömegvesztés, bizonyos mágneses kölcsönhatások), vagy pedig egy hosszú periódusú további komponens okozta fényidőeffektus áll-e a háttérben. További megfigyelések természetesen a parabolikus $O-C$-jű *Kepler*-rendszerek egy része esetében bebizonyíthatják, hogy ezeknél is a harmadik komponens nyomát látjuk, és így a későbbiekben helyet kaphatnak a *Kepler*-misszió során megfigyelt hierarchikus hármas rendszerek remélhetőleg egyre bővülő családjában. Mivel több tucat ilyen rendszer van, ezeket ehelyütt nem sorolom fel. Van azonban további öt olyan fedési kettős is a *Kepler* által megfigyelt bő két és félezer között, ahol az $O-C$ diagram nagy valószínűséggel egy távolabbi, hosszú periódusú harmadik komponens okozta dinamikai effektusról árulkodik. E rendszereket a 4.10. táblázatban mutatom be.

4.7. Összefoglalás, végkövetkeztetések

E fejezetben a hierarchikus hármas csillagrendszerekben elhelyezkedő fedési kettőscsillagok rövid időskálákon jelentkező perturbációinak hatására a fedési minimumok bekövetkezési idejében bekövetkező változásokat leíró, általam kifejlesztett analitikus modell (ld. 2. fejezet) első átfogó gyakorlati alkalmazását mutattam be, amelynek révén a szakirodalomban egyedülálló és teljesen újszerű módon, 62 fedési kettőscsillag komplex dinamikai analízisét voltam képes elvégezni, kizárólag a fedésiminimumidőpont-változásaik vizsgálata alapján.

[23]http://www.astro.up.pt/investigacao/conferencias/toe2014/files/wwelsh.pdf

A fejezet elején az analitikus modellre épülő, paraméteroptimalizáló szoftver működési elvét, valamint a különböző futtatási módokban megkapható, egyedülálló mennyiségű dinamikai, illetve asztrofizikai paramétert mutattam be.

Ezt követően, rátérve a *Kepler*-űrtávcső által többségében közel négy éven át, csaknem megszakítatlanul és nagy pontossággal megfigyelt, több mint két és fél ezer fedési kettőst tartalmazó kiindulási mintára való alkalmazásra, a kiválasztás és az adatok előzetes feldolgozásának az elveit ismertettem. A minél pontosabb fedésiminimum-időpontok előállításának érdekében több, korábban tudomásom szerint még nem, vagy csak esetenként használt módszert algoritmizálva, a fedési minimumok időpontjait automatikusan meghatározó eljárásom szerves részévé tettem. A két legfontosabb újítás a fő-, illetve mellékminimumokra meghatározott $O-C$ görbék összeátlagolása, illetve ahol a fénygörbék tulajdonságai szükségessé (és lehetővé) tették, a helyi simítópolinomok levonásával az egyes fedések első és utolsó kontaktusának egy szintbe hozása[24] volt. Ezen felül bevezettem több új, szigorú szelekciós eljárást is azért, hogy kiszűrjem a tévesen hierarchikus hármasként azonosítható rendszereket. Egyrészt, ahol azt a fedési kettős geometriai tulajdonságai, illetve a *Kepler*-fénygörbék minősége lehetővé tette, a fedésiminimumidőpont-változások vizsgálatát, tudomásom szerint először, összekapcsoltam az ellipszoidális effektus okozta kvadratúrabeli maximumfényesség-időpontok változásainak vizsgálatával, és kritériumot fogalmaztam meg arra, hogy a QTV-görbék viselkedése mely esetekben támasztja alá az ETV-kből kikövetkeztetett fényidőmegoldást, illetve mely esetekben cáfolja azt. Másrészt pedig megmutattam, hogy a fénygörbe, illetve az $O-C$-görbék bizonyos egyszerű tulajdonságainak az elemzése révén az ellipszoidális változók és a pulzáló (és esetleg a rotációs) változók spektroszkópiai vizsgálatok nélkül is megbízhatóan elkülöníthetők egymástól.

A teljes *Kepler* fedési kettős mintára kiterjesztett vizsgálódás alapján 222 hierarchikushármas-jelöltet találtunk, amely rendszerek fedésiminimum-időpontjainak analízisét (egyetlen rendszer kivételével) teljes egészében magam végeztem el az ismertetett szoftverrel. E 222 rendszerből 160 esetben a fedésiminimumidőpont-változásokat a klasszikus fényidőeffektussal modelleztem. A harmadik komponensek keringési periódusa $95 \lesssim P_2 \lesssim 9256$ nap közé esik. 25 esetben a fényidőpálya-megoldással párhuzamosan kvadratikus, négy esetben pedig köbös polinomillesztésére is szükség volt. Végül, négy esetben a klasszikus apszismozgás jelensége is megfigyelhető volt az $O-C$ diagramokon, így természetesen ennek egyidejű modellezésére is sor került.

A fennmaradó 62 fedési kettős esetében a fedésiminimumidőpont-változásokat az összetett, a fényidőeffektus mellett a harmadik test P_2 időskálájú dinamikai perturbációit (sőt esetenként a harmadik test okozta hosszabb időskálájú apszis- és csomóvonalmozgási járulékokat) is figyelembe vevő fizikai modellel írtam le. Ennek a 62 hierarchikushármasjelöltnek az esetében (amelyek külsőperiódus-tartománya: $34 \lesssim P_2 \lesssim 15271$ nap), olyan további, asztrofizikailag, illetve dinamikailag alapvetően fontos rendszerparamétereket is meg tudtam határozni, mint például a fedési kettős össztömege, a harmadik komponens tömege, illetve a két pályasík egymással bezárt i_m hajlásszöge.

Végül pedig az általam bevezetett szigorú szelekciós eljárások révén tucatnyi, más szerzők által hierarchikus hármasként leírt *Kepler*-rendszerről megmutattam, hogy a következtetések a mérési adatok téves interpretációján alapultak: vagy a fedésiminimumidőpont-változásokat magyarázták tévesen fényidőeffektusként; vagy pedig a *Kepler*-fénygörbét értelmezték tévesen fedési kettős (illetve ellipszoidális változó) fénygörbéjeként.

Vizsgálataink során külön figyelmet szenteltünk a tíz triplán fedő hármas rendszer-

[24] Az ötlet még a HD 181068 triplán fedő hármas analízisének idejéből (ld. 5. fejezet) Kiss Lászlótól származik, viszont az e helyütt bemutatott vizsgálat az első, amikor ezt nagy mintán, gyakorlatilag futószalagon alkalmazták.

nek. Közülük négy esetben az extra fedések létét először mi ismertettük az e fejezetben bemutatott két közleményben. A két nem triviális esetben (KIC 07668648 és 09007918) $O - C$ megoldásomhoz kötődően én magam mutattam ki ténylegesen, hogy a fénygörbében megbúvó, alig észrevehető extra fedések valóban ugyanattól a rendszerbeli harmadik komponenstől származnak, amely a fedésiminimum-időpontok változásaiért is felel.

Három esetben a harmadik komponensre kapott tömeg azt valószínűsíti, hogy óriásbolygóval van dolgunk. A három bolygójelölt közül kettőt a kutatásunk időtartama alatt más szerzők is megtaláltak. A harmadik rendszer, a KIC 07177553 esetleges cirkumbináris exobolygókísérőjét azonban elsőként az analízis során én találtam meg, és természetesen így mi is publikáltuk először. Ezt követően megszerveztem e kettős spektroszkópiai követőészleléseit a célból, hogy a fedési kettős tömegközéppontjának radiálissebesség-változásainak megfigyelésével igazolni vagy cáfolni tudjuk e bolygóméretű komponens létét. E spektroszkópiai észlelések megmutatták, hogy a KIC 07177553 jelű *Kepler*-forrást két excentrikus kettőscsillag alkotja, amelyek valószínűleg egymáshoz gravitációan kötöttek, azaz egy 2+2-es hierarchiát valósítanak meg. Ez az eredmény ugyan nem cáfolja az esetleges kettőskörüli exobolygó létét, viszont csaknem reménytelenné teszi annak lehetőségét, hogy azt spektroszkópiai úton kimutassuk.

Elvégeztük mintánk átfogó statisztikai analízisét is. Az általunk talált 222 hierarchikus hármas rendszerből 104 esetében a harmadik komponens periódusa rövidebb mint 1000 nap. Ezek szerint az ilyen rövid külső periódusú rendszerek korábban feltűnő hiánya (ld. pl. Tokovinin, 2014b) sokkal inkább valamilyen, egyelőre nem átlátott észlelési effektusra, nem pedig asztrofizikai, illetve evolúciós okokra vezethető vissza.[25] Ily módon természetesen mintánk a rövid külső periódusú hármas rendszerek egyben legpopuláltabb halmazát is adja. Megmutattuk viszont, hogy érintkező kettősök esetében a 1:100-nál kisebb periódusarányú hármas rendszerek hiánya nem lehet észlelési effektus, hanem valószínűleg asztrofizikai (evolúciós) okai vannak. Többszörösére (legalább négyszeresére) növeltük azon hármas rendszerek számát is, amelyekben ismerjük a szoros és tág pályák kölcsönös pályahajlását. Azt találtuk, hogy noha a kölcsönös pályahajlásoknak lokális maximuma van a KCTF mechanizmusból jósolt $i_\mathrm{m} \sim 40^\circ$ érték körül, azonban a $P_1 - i_\mathrm{m}$ eloszlás nem követi az elmélet jóslatát.

[25] Érdemes megjegyezni, hogy az előbb idézett szerző ezzel szemben azt állítja, hogy mivel az 1000 naposnál rövidebb periódusú kettőscsillagok radiálissebesség-változások útján éppen hogy jó eséllyel kimutathatók (Tokovinin, 2014a), az 1000 napnál rövidebb külső periódusú hármasok hiánya mögött tényleges fizikai oknak kell(ene) lennie.

5. fejezet

Egyedi *Kepler*-rendszerek komplex vizsgálata
I. Új kihívás a fénygörbe-modellezésben: A triplán fedő HD 181068 esete

5.1. Bevezetés

A *Kepler*-űrtávcső elsődleges tudományos céljain túl egyebek között a fedési kettős és többes rendszerek kutatásában is új korszakot nyitott. Mindez az e rendszerekről az űrtávcső által előállított példa nélküli pontosságú, négy éves időskálán csaknem folyamatosan mintavételezett adatsor helyes fizikai modellezése és értelmezése területén is új kihívás elé állította a tudományterület művelőit. E kihívások egyike másika már előre ismert volt. Erre jó példa, amint azt a Bevezetés 1.1.2. szakaszában tárgyaltam, a relativisztikus Doppler-nyalábolás fénygörbemodellekbe való beépítésének szükségessége. Hasonlóképpen, az is előre várható volt, hogy az űrtávcső nagy valószínűséggel fog olyan bolygórendszereket is találni, amelyekben egynél több fedési exobolygó kering (Holman és Murray, 2005).

A felfokozott várakozások ellenére a CoRoT- és *Kepler*-űrtávcsövek, mégis képesek voltak számtalan további, előre nem látott vagy nem várt meglepetést okozni mind a missziók kutatási programjának fősodrába eső területeken, mind az olyan másodlagos kutatási területeken, mint a fedési kettőscsillagok és többes rendszerek vizsgálata. Az amerikai űrtávcső által talált, dinamikai szempontból különleges, kompakt hierarchikus hármas rendszerek vizsgálatával az előző fejezetekben foglalkoztam. Noha e rendszerek konfigurációja a rövid időskálájú dinamikai perturbációk következtében olyan gyorsan módosulhat, amely már önmagában is képes lehet feltűnő változást okozni a fénygörbén is (ld. pl. a 4.6. ábrán), az igazán érdekes és nagy kihívást jelentő felfedezések egyes fedési kettőscsillagok nem várt összetettségű fényváltozásaihoz kapcsolódnak. Ezen, időnként egészen bizarr fénygörbék egyes esetekben a komponensek közti ma még nem igazán értett fizikai kölcsönhatásokra utalhatnak (például a 6. fejezetben bemutatandó kettős esetében az anomális ellipszoidális effektus, illetve az orbitális periódussal meglepő kapcsolatban lévő pulzációs periódus), illetve származhatnak csillagkörüli vagy kettőskörüli anyaggal való, különösen komplex kölcsönhatásokból is, de egyikük sem produkál annyira látványos fényességmenetet, mint az elsőként (és némileg váratlanul) a *Kepler*-űrtávcső észlelési adatsoraiban felfedezett triplán fedő hierarchikus hármas csillagrendszerek némelyike.

Előzőleg, a 4.6.3. alfejezetben már röviden kitértem arra a kérdésre, hogy a triplán fedő rendszerek fénygörbéjének modellezése miért jelent igazán nagy kihívást, de miért éri meg mégis a fáradtságot (ld. még az 1.3.2. alfejezetet is).[1] Ebben a fejezetben az e kihívásra adott válaszomat, azaz a triplán fedő HD 181068(=KIC 05952402) hármas rendszer fénygörbéjének értelmezéséhez kifejlesztett fénygörbeszintézis-kódomat fogom bemutatni, nem annyira a szoftver vagy az algoritmus ismertetésével, hanem közvetlenül a hármas rendszer fénygörbe-analízise kapcsán.

A HD 181068 a maga 7 magnitúdójával a *Kepler*-minta egyik legfényesebb csillaga. Különleges fénygörbéjét először a *Kepler* Asztroszeizmológiai Konzorciumhoz (KASC) csatlakozott magyar kutatók között tevékenykedő Derekas Aliz vette észre. A rendszer felfedezéséről, majd az azt követő széles körű analízisról beszámoló dolgozat a Science folyóiratban jelent meg (Derekas és mktsai., 2011). E tanulmány (amely nem képezi részét a jelen értekezésnek) megjelenését végül is másfél hónappal megelőzte egy másik, ugyancsak a Science-ben megjelent dolgozat, amelyben J. Carter és munkatársai egy másik triplán fedő hierarchikus hármas rendszer, a KOI–126 felfedezését jelentették be (Carter és mktsai., 2011).

Ily módon a szinte egy időben felfedezett KOI–126, illetve HD 181068 lett a triplán fedő hierarchikus hármascsillagok első két képviselője. Noha e két rendszer kétségkívül hasonlít egymásra kompaktságában (amint a 4.5. táblázatban látható, az egész *Kepler*-minta két legrövidebb külső periódusú hármas rendszeréről van szó), valamint a korábban példa nélkül álló $q_2 > 1{,}5$-ös tömegarányban, ezektől a – feltehetően kiválasztási effektusból származó – hasonlóságoktól eltekintve szinte semmi közös sincs bennük. Egyik oldalról a KOI–126 három közel gömb alakú fősorozati csillagot tartalmaz, ahol a szoros kettős extrém kis tömegű vörös törpéinek felületi fényessége olyannyira elmarad a jóval nagyobb tömegű fő komponensétől, hogy a hármas rendszer fénygörbéje gyakorlatilag ugyanúgy modellezhető, mint az átvonuló exobolygóké. Ez viszont messze nem igaz a HD 181068 esetére, ahol mindhárom csillagnak hasonló a felszíni fényessége, továbbá a csillagok alakját az árapályerők eltorzítják, s ráadásul a fénygörbét jelentősen befolyásolja a főcsillag erőteljes kromoszferikus aktivitása is.[2] Az érem másik oldalán viszont a két hármas rendszer dinamikai viselkedése áll. Amint azt a 4.6.3. alfejezetben már említettem, míg a KOI–126 esetében a pályasíkok eltérő hajlásszöge, valamint a két pálya excentricitása miatt a fénygörbe-modellezést mindenképpen össze kellett kötni a hármas rendszer pályafejlődésének numerikus integrálásával (fotodinamikai módszer), addig a HD 181068 esetében a két egysíkú körpályának köszönhetően a hármas rendszer geometriai konfigurációja az észlelések teljes hosszában állandó maradt, és így a csillagok pozíciói egyszerűen a perturbálatlan Kepler-egyenlet analitikus megoldásából voltak számolhatók. E jellegzetességekből kifolyólag a fénygörbe-modellezés során a hagyományos fedésifénygörbe-modellezési eljárásokra (ld. pl. Kallrath és Milone, 2009) támaszkodhattam.

A fénygörbe-modellezésből kapott eredményeimet a HD 181068 átfogó analízisének részeként publikáltuk szerzőtársaimmal (Borkovits és mktsai., 2013). Ehelyütt nem mutatom be e tanulmányt annak teljes egészében, hanem csupán az analízis általam végzett elemeire koncentrálok. Emiatt, illetve a redundanciát is elkerülendő (hiszen a fedésiminimumidőpont-változások analízisének elméleti és tecnikai részleteit e dolgozat előző fejezeteiben már tárgyaltam, és így fölösleges lenne erre az egy rendszerre megismételni), a most következő alfejezetek sorrendje eltér az eredeti tanulmány sorrendjétől. Először a triplán fedő hierarchikus hármas rendszerek fénygörbe-modellezésére kifejlesztett fénygörbeszintézis-kódom

[1] A több fedési (tranzitáló) bolygót tartalmazó bolygórendszerek kontextusában ezeket az előnyöket Ragozzine és Holman (2010), valamint Pál (2012) foglalta össze.

[2] Ily módon egyáltalán nem meglepő, hogy míg a KOI–126-ot a fedési exobolygójelöltek között, addig a HD 181068-at az asztroszeizmológiai vizsgálatok kapcsán érdekes célpontok között fedezték fel.

jellemzőit ismertetem. Ezt követően tárgyalom a HD 181068 fényességváltozásainak részleteit, illetve a fénygörbe-analízis menetét és eredményeit, majd azt mutatom be, hogy a HD 181068 egyedülálló tulajdonságainak felhasználásával, az ehelyütt elvégzett fénygörbe- és ETV-analízis, valamint az irodalomi radiálissebesség-adatok ötvözésével miként tudtam komplex dinamikai, geometriai megoldást adni a hármas rendszerre, beleértve a tömegek dinamikai úton való meghatározását is. A fejezetet természetesen az eredmények diszkussziója és a végkövetkeztetések levonása zárja. Ezen felül a dolgozat végén elhelyezett B. függelékben egy konkrét példán azt mutatom meg, hogy milyen összefüggés van a tág fedések alakja és a rendszer geometriája között.[3]

5.2. Fénygörbeszintézis-kód triplán fedő hierarchikus hármascsillagok modellezésére

Az általam 2011–12 folyamán, eredetileg kifejezetten a HD 181068 külső fedéseinek modellezésére kifejlesztett kód alapvetően a fedésifénygörbe-modellezésben jól ismert, és sztenderdnek tekintett, Robert E. Wilson professzor, illetve tanítványai által immár 45 éve (Wilson és Devinney, 1971) folyamatosan fejlesztett (ld. pl. Wilson, 2008; Wilson és Van Hamme, 2009) fénygörbe-modellező és -illesztő Wilson-Devinney (WD) kódon alapul. (E programot, illetve a benne található szubrutinokat részletesen ismerteti Kallrath és Milone, 2009 fedési kettősökről írt monográfiája is.) Ezen felül az eredetileg a WD-program köré épített grafikus interfésznek indult, de mára sok tekintetben önálló fénygörbe-modellező programcsomaggá vált PHOEBE szoftver Tudományos Referencia Kézikönyvét (Prša, 2006) használtam fel „szakácskönyvként”. Egyes szubrutinokat teljes egészében átvettem e kipróbált és ellenőrzött programcsomagokból. Ugyanakkor a megoldandó probléma, nevezetesen sima fedési kettős helyett a hármas rendszer mozgásának, illetve a változatos lehetséges fedési geometriák leírásának érdekében sok lényeges változtatást, illetve kiegészítést kellett megtennem. Így a jelen problémában már nem elég csupán a fedési kettős relatív pályájának az égbolt síkjába eső vetületét kiszámítani, hanem a hármas rendszer tényleges térbeli mozgását kell végigszámolni, majd ebből számítani az égbolt síkjára eső vetületeket. Mindez ráadásul nemcsak a külső fedési események változatos geometriája miatt van így, hanem azért is, mert a tág kettős szeparációja már elég jelentős ahhoz, hogy a belső fényidőeffektust is be kelljen építeni a fénygörbemodellbe. A problémát még tovább bonyolítja a három csillag közti árapály-kölcsönhatás miatt folyamatosan változó csillagalakok kérdése. A WD modell az általánosított Roche-potenciált (ld. az 1.1.3. szakaszban) használja a csillagok alakjának és felszíni fényességeloszlásának modellezésére. Mivel a jelen esetben az egyes csillagok alakját tengelyforgásukon kívül nem csak egy, hanem két másik csillagkomponens árapályhatása is befolyásolja, a csillagok alakjának és felszíni gravitációs gyorsulásuknak a leírása érdekében visszatértem a korábbi, klasszikus Chandrasekhar-féle tárgyalásmódhoz. Ebben a modellben a csillagok alakját az enyhén torzult szférikus testek potenciáljának sorfejtése alapján, gömbfelületi függvények sorával írjuk le. Ennek előnye, hogy amíg a sorfejtés elsőrendű komponenseinél maradunk, a különféle külső potenciálokra adott válaszok lineárisan kezelhetők. Ebben a formalizmusban tehát a csillag sugara az alábbi formában írható fel:

$$r = R\left(1 + \sum_{j=2}^{4} f_j + g_2\right), \tag{5.1}$$

[3] Felhívom a figyelmet, hogy e fejezetben és a B. függelékben a dolgozat többi részétől eltérően, a hármas rendszer komponenseit az „A” (vörös óriás főcsillag), illetve „Ba” és „Bb” (szoros kettős két tagja) betűkkel jelölöm, összhangban a hierarchikus többes rendszerek Tokovinin (1997) által javasolt jelölésmódjával.

ahol a k-adik csillag árapályhatása következtében az i-edik csillag felszínén jelentkező elsőrendű árapálytorzulások amplitúdói a következők:

$$f_j^{(i \leftarrow k)} = \left(1 + 2k_j^{(i)}\right) \frac{m_k}{m_i} \left(\frac{R_i}{\rho_{ik}}\right)^{j+1} P_j\left(\lambda''_{ik}\right), \tag{5.2}$$

míg a forgási torzultság szintén első rendbe eső amplitúdója

$$g_2^{(i)} = -\frac{\omega_i^2 R_i^3}{3Gm_i} P_2\left(\nu'_i\right). \tag{5.3}$$

Ezekben az egyenletekben R_i az i-edik csillag effektív (torzítatlan) sugarát jelöli, továbbá $k_j^{(i)}$ a j-edik belsőszerkezeti állandó, ρ_{ik} a két csillag távolsága, míg ω_i pedig az adott csillag tengelyforgási szögsebessége. Végül a P_j Legendre-polinomok argumentumaiban szereplő iránykoszinuszok közül az árapálykomponensben szereplő λ'' egy adott felszínelemhez vezető vezérsugár és a megfelelő két csillag kölcsönhatásából származó árapálydudor tengelye (vagyis, legalábbis disszipációmentes esetben a két csillag tömegközéppontját összekötő szakasz) által bezárt szög koszinusza, míg a forgási tagban megjelenő ν'_i a felszínelem vezérsugara és a csillag forgástengelye által bezárt szög koszinusza.

Fontos megjegyezni, hogy erősen torzult rendszerek esetében ez a modell kevésbé pontos eredményt ad, mint a zárt alakú megoldást kínáló Roche-modell. A jelen helyzetben azonban, tekintve, hogy a fénygörbe alapján mindhárom csillag csak mérsékelt árapály- (és forgási) torzultságot szenved el, e modell tökéletesen megfelel a pontossági kritériumoknak. Ráadásul azt is érdemes hozzátenni, hogy a linearitásból származó nyilvánvaló előnyön felül az is emellett a leírás mellett szól, hogy a csillagokat, a Roche-modell feltevésével szemben nem tömegpontként (pontosabban: végtelen középponti tömegsűrűsődést mutató objektumokként) kezeli.

Ezen felül egy személyes oka is volt e formalizmus választásának. Nevezetesen az, hogy ugyanezt a matematikai apparátust alkalmaztam a PhD-értekezésemben bemutatott numerikus integrátor kifejlesztése során (Borkovits, 2002; Borkovits és mktsai., 2004). Ez azon felül, hogy biztosította számomra az adott formalizmusban való teljes jártasságot (beleértve a bonyolult geometriai számításokra készen álló szubrutinjaimat is), még azt is lehetővé teszi, hogy ahogy azt rövidesen tervezem is, e fénygörbe-modellező kódomat minden további átalakítás nélkül, közvetlenül képes legyek összekapcsolni a torzult hármasok mozgását leíró numerikus integrátorommal. Ezáltal pedig a kód különösebb erőfeszítés nélkül is alkalmassá tehető a rövid időskálájú dinamikai perturbációknak alávetett hármas rendszerek közvetlen modellezésére is.

A kód egy másik fejlesztést is tartalmaz a *Kepler*-éra előtti, jelenleg is használt fénygörbeillesztő eljárásokhoz képest. Ez pedig a Doppler-nyalábolás jelenségének a beépítése amely nyilvánvalóan alapvető kritérium, ha ki akarjuk használni a nagy pontosságú műholdas fotometriákban rejlő lehetőségeket. Noha a Doppler-nyalábolás okozta fényességváltozás mértékét a program a Zucker és mktsai. (2007) által leírt egyszerű, fenomenologikus közelítő formula alapján számolja, azáltal, hogy ezt minden egyes felszíni cellára külön-külön teszi meg, a kód elméletben alkalmas a Doppler-nyalábolás során a klasszikus Rossiter–McLaughlin-effektussal analóg további fényességváltozások kimutatására is.

A program első, a HD 181068 fénygörbéjének vizsgálatakor használt változatában a fénygörbe alakját meghatározó (illesztési) paraméterek a következők voltak. A csillagok fizikai, sugárzási, geometriai tulajdonságait 3×11 paraméter írta le. Ezek a tömegek, sugarak, $k_{2..4}$ belsőszerkezeti paraméterek, effektív hőmérsékletek, kémiai abundanciák, gravitációs kifényesedési, illetve bolometrikus szélsötétedési paraméterek, valamint a bolometriai albedók. Ezen felül a $3 \times 3 + 1$ fotometriai sávspecifikus paraméterek közé a csillagok adott hullámsávban mérhető luminozitásai és a szűrőspecifikus (lineáris és nemlineáris) szélsötétedési együtthatókon kívül a negyedik fény tartozik. A dinamikai paramétereket pedig a külső és belső pálya 2×6 pályaeleme, valamint a hármas rendszer tömegközéppotjának radiális sebessége alkotja. Ugyanakkor, mivel hármas rendszerek esetében az általában feltételezett szinkron keringés szigorúan véve voltaképpen nem is értelmezhető, további paraméterekként megjelennek a három csillag forgástengelyének irányát, valamint a tengelyforgás sebességét leíró Euler-szögek, illetve ezek deriváltjai.

Ezen felül, noha eredetileg nem terveztem, de a fénygörbe-analízis menete során egyértelművé vált, hogy valamiképpen kezelni kell a fénygörbén megjelenő egyéb, akár instrumentális, akár a csillagok kormoszferikus vagy fotoszferikus aktivitásából, esetleg pulzációjából, vagy pedig a csillagkörüli anyag jelenlétéből származó fényváltozásokat is. A klasszikus fénygörbeillesztő programok ezek közül többnyire csak a kromoszferikus (fotoszferikus) aktivitás csillagfoltok általi modellezését teszik lehetővé, vagy pedig egyes, kimondottan erre specializált szoftverek a csillagkörüli anyag (akkréciós korong) okozta fényességváltozást képesek kezelni. Ezen eljárásokkal ellentétben egyelőre egy egyszerű, fenomenologikus módszert alkalmaztam, amely a nem a többességből származó fényességváltozásokat azok eredetétől függetlenül távolítja el. Az eljárás lényege, hogy a fenti paraméterekkel előállított fénygörbéhez a program képes hozzáadni egy maximum öt Fourier-komponenssel leírt további fényváltozást (zavart) is. Ennek frekvenciáit rögzíteni kell, viszont lehetőség van az amplitúdók lineáris legkisebb négyzetek módszere általi illesztésére. Ezáltal a paraméteroptimalizációs eljárás során ezzel a komponenssel szimulálható mindaz a fényességváltozás, amely a rendszer hármas (vagy kettős) természetéből következő fényességváltozáshoz képest zajként jelenik meg.

A program a WD-módszerhez hasonló filozófiát követve különböző kapcsolókkal szabályozza az egyes modellparaméterek közti esetleges fizikai összefüggések figyelembevételének szükségességét, vagy éppen figyelmen kívül hagyását. Ugyanakkor részben kényelmi okokból, részben viszont a hármas rendszerek modellezése esetében a fénygörbéből kinyerhető többletinformációk okán a paraméterek közti számos olyan további összefüggés figyelembevételére is lehetőség van, amelyek a korábbi kódokban nem találhatók meg. Például egy fedési kettős fénygörbe-modellezése során, ha semmilyen más információ nem áll a rendelkezésünkre, akkor a két csillag tömegéről közvetlenül semmilyen információt nem szerezhetünk (eltekintve attól az esettől, ha a Doppler-nyalábolás kimérhető, és a programunk képes is kezelni). A triplán fedő hármas rendszereknél azonban változik a helyzet. Ezért ilyen esetben bemeneti paraméterként megadható a három tömeg, illetve az egyik tömeg és a szoros, valamint a tág kettős tömegaránya is. Ezzel összefüggésben egy fedési kettős fénygörbéje a két komponens tényleges fizikai méretéről sem hordoz információt, csak a kettős pályaméretével skálázott, dimenziótlan relatív csillagsugár határozható meg belőle. Triplán fedő hármasoknál értelem szerint ez is változik, így a bemeneti adatok között szerepelhetnek a tényleges csillagsugarak is. A kényelmi funkciók közé pedig olyan (az elmúlt évek során fokozatosan beépített további) összefüggések figyelembevétele sorolható, mint például az, hogy egy excentrikus fedési kettős esetében a pálya lapultságának és a pericentrum argumentumának a megadása (a kezdeti érték problémában) kiváltható egy fő-, illetve egy mellékminimum időpontjának (vagy a köztük lévő fáziseltérésnek) a megadásával. Hasonlóképpen, a csillagok sugara is definiálható a fedéshosszakon, azaz a fénygörbéből közvetlenül kimérhető jelenségeken keresztül. Ezen felül, idővel több olyan, csak a kvantitatív spektroszkópiából meghatározható mennyiségre vonatkozó összefüggést is beépítettem, amelyeknek vannak a fénygörbemegoldást érintő implikációi. Így például lehetőség van a spektroszkópiából meghatározott felszíni gravitációs gyorsulás, valamint a vetített tengelyforgási sebesség és a csillag sugara, valamint tömege, sőt alakja közti összefüggések figyelembevételére is.

A program első két alkalmazását az alábbiakban (ebben és a következő fejezetekben) fogom ismertetni, illetve egy további alkalmazása már szóba került fentebb, a 4.6.4. fejezetben. Ezen felül, más kollégák kifejezett kérésére, több kutatásba is „bedolgoztam" fénygörbe-modellezéssel. E kutatások természetesen nem képezik doktori értekezésem (és így téziseim) részét, azonban ehelyütt, a fénygörbemodell hadrafoghatóságának bizonyítékaként annyit mégis érdemes megemlíteni, hogy ezekben az esetekben fénygörbekódomat sikeresen alkalmaztam pulzáló komponenst tartalmazó, nem fedési, HB kettős (Hareter és mktsai., 2014), valamint extrém mély, teljes fedést és erős visszasugárzási effektust produkáló ritka sdO+dM rendszer (Derekas és mktsai., 2015) analízise során is.

A program a jelenlegi formájában még csupán a direkt problémát képes hatékonyan kezelni. Az inverz probléma, vagyis a paraméterek optimalizásának hatékony kezelésére a jövőben valószínűleg az Markov-láncos Monte-Carlo-eljárással fogom összekapcsolni a kódot. A jelen disszertációban leírt esetek mindegyikében viszont egyelőre az illesztendő paraméterek számának az egyéb mérésekből származó információk, illetve a fizikai, geometriai összefüggések figyelembevételével történő minimalizálását követően a nem igazán hatékony „rácskereső" eljárással határoztam meg a valószínű megoldás tartományát.

5.3. A HD 181068 fénygörbéjének vizsgálata

Vizsgálataimat szinte pontosan az elsődleges *Kepler*-küldetés félidejében végeztem. Az általam használt adatsor teljes hossza 775 nap volt. Ennek során az első hat negyedévben ($Q1-16$) a csillagot csak a 29,4 perces mintavételezésű „long cadence" (LC) üzemmódban mérte az űrtávcső. A különleges fénygörbe felfedezését követően a felfedező, Derekas Aliz vezetésével a szerzőlistában szereplő kutatók többsége által a *Kepler* vendégészlelői (Guest Observer – GO) programja keretében benyújtott és elfogadott távcsőidő-kérelemnek köszönhetően a fennmaradó időszakban az űrtávcső (egészen négyéves működésének a végéig) már az 58,9 másodperces, sűrű mintavételezésű „short cadence" (SC) üzemmódban is gyűjtötte az adatokat. Ily módon, a $Q7-9$ észlelési időszakra ez utóbbi adatsor is rendelkezésemre állt. A szerzőtársaktól hozzám már az előfeldolgozott adatok jutottak el, így az adatfeldolgozás mikéntjére nem térek ki.

5.3.1. A fénygörbe jellemzői

A HD 181068 fénygörbéje legalább öt különböző, élesen elkülönülő komponensből tevődik össze. Ezek a következők:

(i) és *(ii)* A szoros, illetve a tág kettős alrendszerekben bekövetkező fedések mintázata. Ezekhez a komponensekhez soroljuk a többi olyan fénygörbe-jellegzetességet is, amelyek a kettősség (illetve hármasság) következtében lépnek fel, nevezetesen egyrészt az ellipszoidális fényváltozást, másrészt a relativisztikus Doppler-nyalábolás okozta járulékot. A szintén a többescsillag-jellegből következő visszasugárzási effektus a tág kettős geometriai viszonyai mellett nem ad érzékelhető fénygörbejárulékot, azonban a szoros kettős két tagja között elvben ez is kimutatható nagyságú. E fényváltozások jellemző időskálája megegyezik a két alrendszer P_1, P_2 fedési periódusaival. Érdemes megjegyezni, hogy a két periódus aránya csaknem pontosan $P_1 : P_2 = 5 : 251$. Természetesen egy ilyen, 246-od rendű középmozgás-rezonancia szinte kizárható, hogy bármilyen kimutatható dinamikai következménnyel járna, azonban a fénygörbén jellegzetes mintázatot eredményez. A tág fedések hosszát, illetve leszálló és felszálló ágaik alakját alapvetően befolyásolja a szoros kettős két komponensének egymáshoz

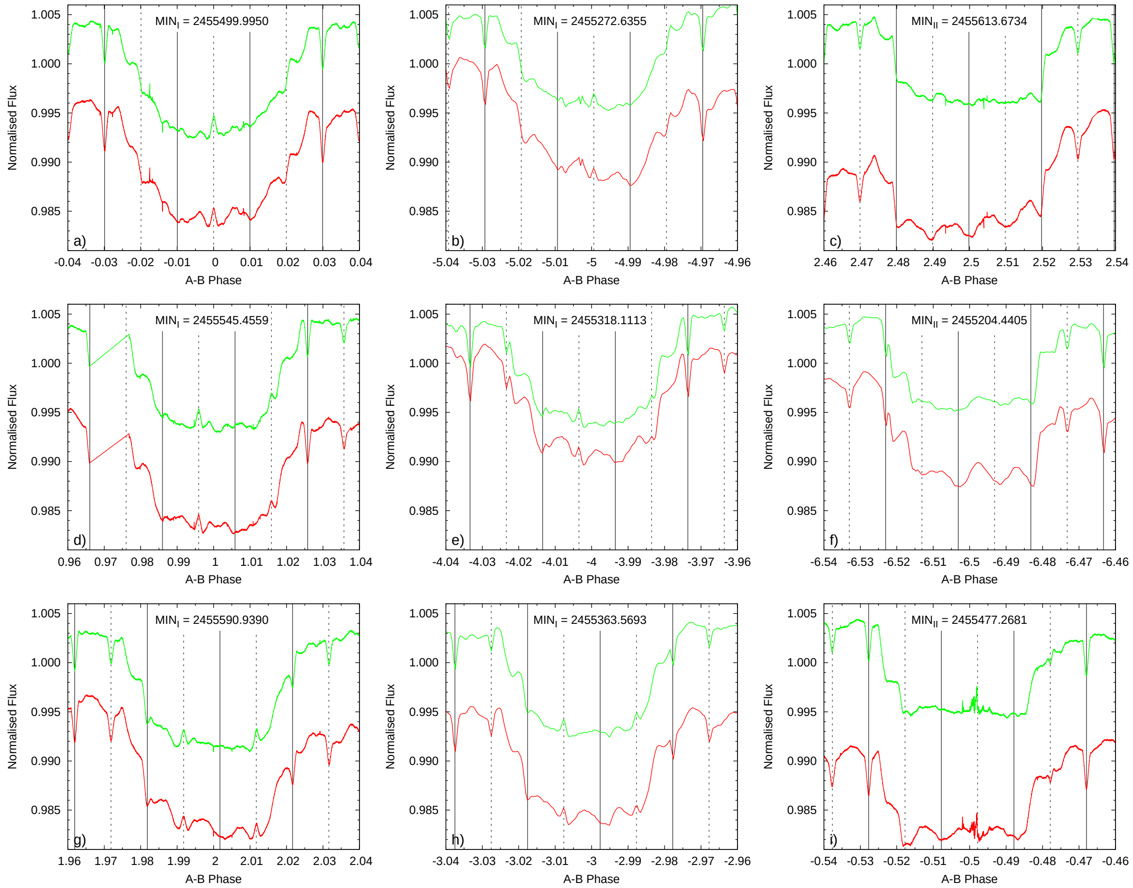
viszonyított helyzete. A fenti rezonancia pedig azáltal, hogy emiatt a tág kettős minden ötödik keringését követően a szoros kettős két komponense egymáshoz képest a Földről nézve ugyanabba a pozícióba kerül, a Szárosz-ciklusok távoli analógiájaként öt különböző tágfedési „családot” definiál. Magyarán, ahogy az az 5.1. ábrán jól megfigyelhető, minden ötödik tág főminimum hasonló mintázatú le- és felszálló ágat mutat. E tág főminimumok „családjához” tartozik az összetartozó főminimumok közt félidőben (azaz két és fél keringést követően) bekövetkező mellékminimum is, azzal az eltéréssel, hogy ezek fénygörbéjén a szűk kettős sekély fő- és mellékminimumainak a szerepe felcserélődik.

(iii) A szigorúan periodikus és szabályos fénygörbeváltozásokra rárakódnak időszakos vagy egészen véletlenszerű, szabálytalan fényváltozások, amelyek nagysága esetenként eléri, sőt meg is haladja a tág fedések amplitúdóját. E változások eredete összetett. Részben minden bizonnyal a vörösóriás-komponens kromoszferikus aktivitása okozza. Így például az 5.1. ábra legfelső sorában bal oldalt, illetve középen látható, egy fedési „családhoz” tartozó két külső főminimumot összehasonlítva feltűnő a két, geometriailag hasonló körülmények között bekövetkező tranzitfénygörbe eltérő mélysége és alakja. Mindez arra utal, hogy a középső ábrán látható (időben kb. 7 és fél hónappal korábbi) főminimum esetében a szoros kettős egy sötétebb, alacsonyabb hőmérsékletű terület, vagyis feltehetőleg egy nagy kiterjedésű foltcsoport előtt vonult át. A folyamatos, szabálytalan változások 1–2 hónapos kvázi-periodicitást is mutatnak, amely az óriáskomponens pálya menti, illetve tengelyforgási periódusával való kapcsolatot valószínűsít. Ugyanakkor az sem zárható ki, hogy e szabálytalan változások egy része nem valódi, hanem instrumentális effektus. Mivel a tág pálya keringési ideje, amely egyébként Derekas és mktsai. (2011) megállapításai szerint valószínűleg közel egybeesik a vörös óriás tengelyforgási idejével is, csaknem pontosan a fele annak az időtartamnak, amely időszakonként a *Kepler*-űrtávcsövet újrapozicionálták, az instrumentális effektusok biztos leválasztása szinte teljesen reménytelen.

(iv) A fénygörbén további, kis amplitúdójú, többé-kevésbé szabályos oszcillációk is megfigyelhetők, amelyek periódusa a szoros kettős vörös óriás komponenshez viszonyított szinodikus periódusának a fele. Ily módon, amint arra már Derekas és mktsai. (2011) felhívták a figyelmet, ezen oszcilláció nagy valószínűséggel árapály-eredetű.

(v) Mindezeken túl több flerjellegű gyors kifényesedés is megfigyelhető a fénygörbén. Amennyiben ezek a kifényesedések ténylegesen a HD 181068 hármas rendszerében bekövetkezett kitörésektől származnak, akkor legalább egy esetben biztosak lehetünk benne, hogy a jelenség forrása a vörös óriás komponens. Ugyanis a $Q9$ észlelési sorozat alatt, BJD 2 455 659-kor bekövetkező fler éppen egy mellékminimum lapos, középső szakaszára esett, amikor a szoros kettős két komponense az űrtávcsőről nézve a vörös óriás teljes takarásában volt.

Az itt bemutatásra kerülő vizsgálatban kizárólagosan a hármas rendszer fedési fénygörbéjére, azaz az *(i)*-*(ii)* pontokban felsorolt fénygörbejellemzőkre összpontosítottam, hiszen elsősorban a tág fedések leszálló és felszálló ágainak finomszerkezete hordoz információkat a szoros és a tág kettős köztes inklinációjáról (beleértve még a szokványos i_m, $180^\mathrm{o} - i_\mathrm{m}$ kétértelműség feloldását is), továbbá, amint azt a B. függelékben külön is megmutatom, a szokványos, illetve a külső fedések kombinációja a szoros, illetve a tág rendszerek tömegarányáról is egyértelmű információt hordoz.

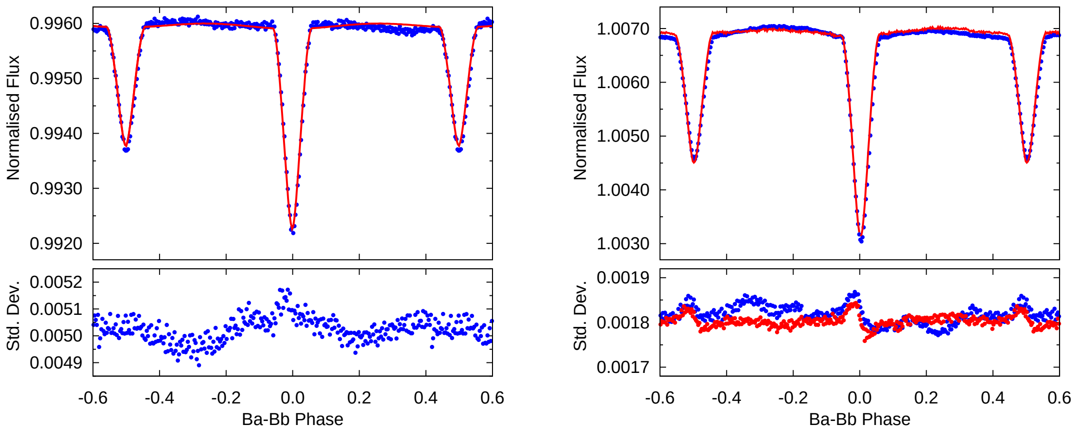


5.1. ábra. Példák fedési „családokra” a HD 181068 tág fedései körében. Az egyes sorokban egyazon fedési „családhoz” tartozó két fő- és egy mellékminimumot (jobb oldalt) ábrázoltam. A folytonos, illetve szaggatott függőleges vonalak a szoros kettős fő-, illetve mellékminimumainak középidejéhez tartoznak. A piros görbék a nyers fénygörbét mutatják, míg a zöld görbék esetében az egyéb fényváltozások (a szövegben leírtak szerint) levonásra kerültek.

5.3.2. A fénygörbevizsgálat menete

Az első lépésben a vizsgálataim szempontjából csupán zajként jelentkező *(iii)*-*(v)* fénygörbe-összetevőket igyekeztem leválasztani. Az elvétve előforduló, gyors lefolyású tranziensek, azaz a valószínű fleresemények eltávolítása nem okozott különösebb nehézséget. A kis amplitúdójú, szabályos periodicitást mutató oszcillációkkal pedig, azoknak a fedési struktúrától jóval kisebb amplitúdója miatt az első lépésben nem foglalkoztam. A hosszabb időskálájú, szabálytalan fényváltozások biztonságos elkülönítése a vörös óriás komponens velük időtartamban és nagyságban is összemérhető ellipszoidális fényváltozásától azonban komolyabb feladat volt. Ezt egy iteratív eljárással oldottam meg, amelynek egyes lépései gyakorlatilag egy a Fourier-térbeli szűrésre hasonlítanak.

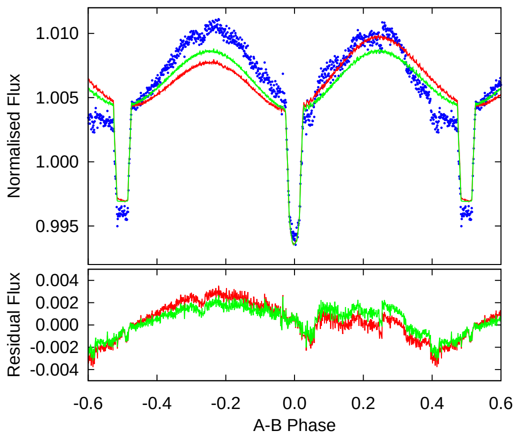
Elsőként a szoros kettős fázisba rendezett, átlagolt fénygörbéjét készítettem el oly módon, hogy a tág fedések tartományait kizártam az átlagolásból. Tekintve, hogy egy-egy negyedévnyi *Kepler*-észlelés alatt a szoros kettős közel 100 fordulatot végez, azt vártam, hogy ily módon a feltekert fénygörbéből kiátlagolódik minden, nem a szoros kettős orbitális fázisától függő fényváltozás. Amint az 5.2. ábra mutatja, ez a várakozásom teljesült is. Hat különböző adatsorra végeztem el ezt a feltekerést és átlagolást. A rendelkezésre álló



5.2. ábra. *Bal panel:* A szoros kettős $Q7 - Q9$ SC adatokból kapott feltekert, 300 fáziscellában átlagolt fénygörbéje (kék körök a felső ábrán) és egy a PHOEBE-kóddal illesztett görbe (piros vonal), valamint az egyes fáziscellákba tartozó pontok fluxusának sztenderd deviációja a fáziscella fluxusátlagától (alul). *Jobb panel:* A szoros kettős $Q7^* - Q9^*$ SC (szűrt) adatokból kapott feltekert, 300 fáziscellában átlagolt fénygörbéje, valamint az újonnan kifejlesztett fénygörbe-szintetizáló kódommal ugyanerre az idősorra, a komplett hármas rendszerre előállított fénygörbéből azonos módon elkészített feltekert, átlagolt szintetikus szoroskettős-fénygörbe (piros vonal), valamint mindkét adatsor egyes fáziscellákba eső pontjai fluxusértékeinek a fáziscella átlagfluxusától való eltérése (sztenderd deviáció). Tartsuk szem előtt, hogy az alsó ábrákon nem a felső illesztések reziduálgörbéi láthatók!

három ($Q7$, $Q8$, $Q9$) negyednyi sűrűn mintavételezett SC adatsort külön-külön, illetve egyben is feltekertem és átlagoltam. Ezen felül a $Q1 - Q6$ LC adatsorból képeztem az ötödik átlagolt, fázisba rendezett fénygörbét. Végül, hatodikként a teljes $Q1 - Q9$ LC adatsorra is elkészítettem ezt. Különböző fázisfelbontásokkal próbálkoztam, és végül a 300 fáziscella használatát találtam optimálisnak. Ily módon még kielégítő fázisfelbontást kaptam, ugyanakkor egy fáziscellába is elegendő mennyiségű adatpont került ahhoz, hogy a kiátlagolás hatékonyan működjön. (Az egyes adatpontok fázisát, a fáziscellába besorolás előtt korrigáltam a fényidőeffektusra is noha, mivel egy fáziscella mérete közel egybeesik a teljes fényidő-amplitúdóval, ez különösebben nem befolyásolta a pontosságot.) A szoros kettős ily módon kapott hat átlagolt fénygörbéje közül a $Q7 - Q9$ SC adatsorok összeátlagolásával előállítottat választottam ki a további analízisre. Ennek előzetes fénygörbe-analízisét a PHOEBE-kóddal (Prša és Zwitter, 2005) végeztem el, amelyhez a kezdeti paramétereket Derekas és mktsai. (2011) munkájából vettem. Ebben a fázisban a vörös óriás komponens hatását csak a rendszerbeli konstans harmadik fény révén vettem figyelembe. Ennek értékét a külső mellékminimumok amplitúdójából határoztam meg, hiszen ebben az orbitális fázisban csak a vörös óriás fénye jut el hozzánk. Az 5.2. ábra bal oldalán az átlagolt $Q7-Q9$ fénygörbe mellett a PHOEBE-megoldást is feltüntettem.

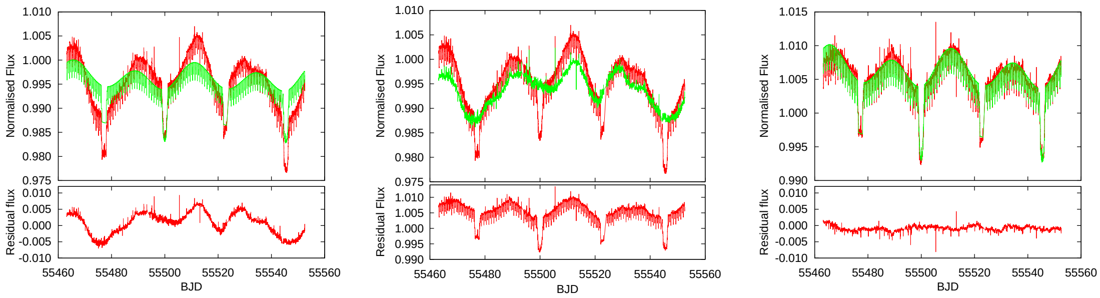
Ugyanezzel a technikával elkészítettem a tág kettős fázisba rendezett, átlagolt fénygörbéjét is. Ebben az esetben 1000 egyforma méretű fáziscellát használtam (5.3. ábra). Tekintettel arra, hogy a teljes $Q1 - Q9$ észlelési időtartam során a tág kettős csupán ~ 17 keringést végzett, továbbá, a mérések rövidebb megszakításai miatt még ez a 17 ciklus sincs teljesen lefedve, nem meglepő, hogy ebben az esetben az átlagolás nem működött annyira hatékonyan. Ezen felül, noha az átlagolt görbe így is szépen megmutatja a külső főminimum tranzit-, illetve a mellékminimum okkultációjellegét, valamint a vörös óriás ellipszoidális fényváltozását is, éppen a legfontosabb, a fedési minimumok le- és felszálló ágainak finomszerkezetébe kódolt információk a kiátlagolódás okán elvesznek. Ezek az információk csak az 5.2. fejezetben bemutatott, a hármas rendszer fedési fényváltozásait egyidejűleg modellezni képest kód kifejlesztésével és alkalmazásával váltak elérhetővé.



5.3. ábra. A tág kettős $Q1-Q9$ LC adatokból kapott feltekert, 1000 fáziscellában átlagolt fénygörbéje (kék), valamint a saját kódommal kapott, s hasonlóképpen feldolgozott szintetikus fénygörbe a Doppler-nyalábolás figyelembevételével (piros), illetve anélkül (zöld). Az alsó ábrán az eredeti adatsor, illetve a kétféle fénygörbemegoldás különbségének, azaz a reziduálgörbéknek a hasonlóképpen feltekert, átlagolt változata látható.

A zavaró, szabálytalan fényváltozások eltávolítása érdekében először egy olyan elméleti fénygörbét szintetizáltam a programmal, amelyhez bemenő paraméterekként a szoros kettős esetében az átlagolt fénygörbére kapott PHOEBE-megoldás értékeit használtam fel, míg a tág pálya, illetve a harmadik komponens asztrofizikai paraméterei tekintetében egyrészt Derekas és mktsai. (2011) eredményeire támaszkodtam, másrészt felhasználtam a következő szakaszban ismertetésre kerülő, szintén újszerű eljárásomat, amelynek segítségével a szoros kettős fedésiminimumidőpont-változásaiban jelentkező fényidőeffektus, valamint az irodalomban (Derekas és mktsai., 2011) elérhető egyvonalas radiálissebesség-mérések felhasználásával képes voltam a tág kettős két komponensének a tömegét is meghatározni. Alig néhány próbálkozással sikerült a paramétereket megfelelően finomhangolni ahhoz, hogy viszonylag kielégítő illeszkedést kapjak. Az 5.3. ábrán a szintézisgörbe két változatát is bemutatom (az átlagolási processzust követően). Az egyik esetben a Doppler-nyalábolást is modelleztem, a másik esetben ezt figyelmen kívül hagytam. Látható, hogy a (hozzávetőlegesen 1ppt nagyságrendű) Doppler-nyalábolás figyelembevételével jobb illeszkedés adódott. Annak ellenére, hogy még csak egy próbálkozással előállított előzetes illesztésről van szó, és ráadásul még a zavaró szabálytalan fényváltozások kiszűrése sem történt meg, az illeszkedés egészen kielégítő a tág főminimum első kontaktusa és az azt követő fényességmaximum (az első kvadratúra) közti szakaszon. A fénygörbe egyéb szakaszain lévő diszkrepancia az elégtelen átlagolásnak tudható be.

A következő lépésben a teljes $Q1-Q9$ intervallumon, az egyedi mérések időpontjában kiszámított szintetikus fénygörbét levontam az eredeti mérési adatokból. Az 5.4. ábra bal oldalán ezt a lépést a $Q7$ SC adatsoron szemléltetem. Ezt követőn a reziduál-fénygörbéket használtam a zavaró egyéb fényváltozások kiszűrésére. Ebben a fázisban ismét csak több adatsort vizsgáltam. Elsőként a lehető leghosszabb homogén $Q7-Q9$ adatsor reziduálját vetettem alá diszkrét Fourier-transzformációnak (DFT). Ezen felül még külön-külön a $Q1-Q6$ LC, illetve a $Q7-Q9$ SC adatsorok reziduáljaiban is kerestem e módon a jellemző frekvenciákat. A különböző adatsorok többé-kevésbé hasonló frekvenciaspektrumokat mutattak. Ezek közül kiválasztottam a $10-15$ legnagyobb csúcsot, valamint a rövid periódusú árapály-oszcillációk két jellemző frekvenciáját is, és ezek felhasználásával lineáris legkisebb négyzetek módszerével Fourier-görbéket illesztettem a reziduálokra. Úgy találtam, hogy e görbék akkor írták le legjobban a reziduálgörbe fényváltozásait, ha két-két egymást követő

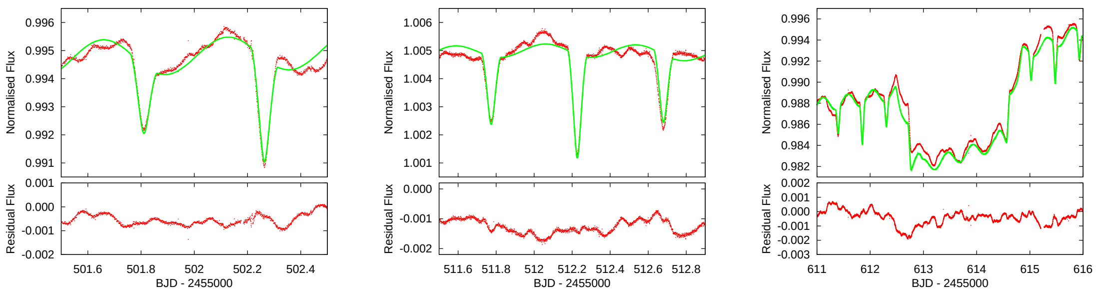


5.4. ábra. A nyers adatsort eltorzító szabálytalan fényváltozások eltávolításának folyamata a $Q7$ SC adatsor esetén. *Bal panel:* A közelítő adatokkal szintetizált előzetes fedési fénygörbét (zöld) az eredeti $Q7$ adatsorból (felső piros görbe) levonva a maradványgörbe (alsó piros görbe) elvben már csak a szabálytalan fényváltozást tartalmazza. *Középső panel:* E maradványgörbét DFT-nek alávetve, a szignifikáns frekvenciák felhasználásával a zajt Fourier-polinomokkal modelleztem (zöld), majd e modellgörbét levontam az eredeti adatsorból (felső ábra piros görbéje). Az eredményül kapott megtisztított $Q7^*$ adatsor a középső ábra alsó részén, piros színben látható. *Jobb panel:* A végső fénygörbemegoldás (zöld) és az előző lépésben kinyert, megtisztított $Q7^*$ adatsor (felül, pirossal). Alul a reziduál-fénygörbe látható.

negyedre végeztem el az illesztéseket. Végezetül ezeket a Fourier-polinomokat kivontam az eredeti mérési adatokból. Ily módon olyan „észlelési" adatsorokhoz jutottam, amelyek jellemzően már csak a hármasságból származó fényváltozásokat tartalmazták. A továbbiakban ezt a megtisztított adatsort használtam a fénygörbevizsgálathoz. A fent leírt folyamat lépései az 5.4. ábra három paneljén követhetők nyomon. A fentebbi 5.2. ábra jobb oldala pedig a fedési kettősnek a megtisztított $Q7^* - Q9^*$ adatsorból előállított átlagolt fénygörbéjét mutatja, amely jól illusztrálja a módszer hatékonyságát.

Az ily módon megtisztított mérési adatok közül a $Q7^*$ LC adatsort választottam ki a végső analízisre, ugyanis már az eredeti, nyers fénygörbék közül is ez tűnt a szabálytalan fényváltozásokkal legkevésbé terheltnek. A paraméterek optimalizálását rácskereséses eljárással végeztem. Az illesztett paraméterek a következők voltak: a két alrendszer $q_{1,2}$ tömegaránya; a három csillagsugár ($R_{\mathrm{A,Ba,Bb}}$), a szoros kettős két komponensének $T_{\mathrm{Ba,Bb}}$ effektív hőmérséklete, az egyik komponens luminozitása a *Kepler* által használt hullámsávban (a másik két luminozitás ekkor már nem választható szabadon), a két keringési periódus ($P_{1,2}$), a két nullepocha, a két észlelői rendszerbeli pályahajlás ($i_{1,2}$), valamint az észlelői rendszerbeli csomóvonalak által bezárt szög ($\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$). A többi paraméter minden futtatás során megőrizte kezdeti értékét. A csillagkorongok szélsötétedését a logaritmikus szélsötétedési törvénnyel modelleztem (amely ekvivalens a WD-, illetve PHOEBE-kódok $ld = 2$ üzemmódjával), és a megfelelő szélsötétedési együtthatókat is a PHOEBE kódjából vettem át. A Chandrasekhar-féle csillagalak-közelítésből kifolyólag szükségem volt a k_2 belsőszerkezeti állandókra is, amelyeket Claret és Gimènez (1992) táblázataiból vettem.

A végeredmény megbízhatóságát, illetve a paraméterek hibáit vizsgálandó az eljárást megismételtem további észlelési negyedek adatsoraira is. Ez lehetővé tette azt is, hogy képet alkothassak arról, mennyire befolyásolják a megoldást a tisztított fénygörbékben kis mértékben nyilvánvalóan továbbra is benne maradt szabálytalanságok, foltok, vagy egyéb jelenségek okozta torzulások. A fénygörbeillesztés kvantitatív eredményeit az 5.1. táblázatban foglalom össze, míg az 5.5. ábrán az eredeti $Q7$ és $Q8$ adatsorok, illetve a megoldásfénygörbe néhány jellemző részletébe nyújtok közeli bepillantást.



5.5. ábra. Kiragadott részletek a nyers $Q7$ és $Q8$ fénygörbékből, a megoldásfénygörbe, illetve a maradványgörbe megfelelő szakaszaival. *Felső ábrák:* Az eredeti fénygörbéket pirossal ábrázoltam, míg a zöld görbék a megoldásfénygörbe és a Fourier-polinomokkal leírt szabálytalan fényességváltozások eredőjét mutatják. *Alsó ábrák:* A maradványgörbék. A bal oldali, illetve középső ábrák a $Q7$ adatsor rövid részleteit mutatják, az első esetben közvetlenül egy külső főminimum után, míg a második esetben a tág kettős előbbi főminimumot követő első kvadratúrájában. A jobb oldali ábra pedig a jóval torzultabb $Q8$ adatsoron mutatja egy külső mellékminimum környékét.

5.4. Dinamikai tömegmeghatározás fényidőeffektus és radiálissebesség-mérés felhasználásával

Az 5.1. táblázatban a három komponens tömegét, illetve tényleges fizikai méretét is megadtam. Ezen adatokat, mint korábban már említettem, egy közönséges fedési kettőscsillag esetében pusztán fénygörbe-analízisből nem lehet meghatározni. A HD 181068 egyedülálló tulajdonságainak köszönhetően azonban több lehetőségünk is van a három tömeg meghatározására. Az egyik esetben a hármas rendszer fedésifénygörbe-megoldásából kinyert q_2 tömegarány, illetve i_2 inklináció figyelembevételével, a szoros kettős ETV-jére kapott fényidőmegoldás amplitúdójából meghatározható a tág pálya fizikai mérete, és így Kepler 3. törvényének felhasználásával a tág kettős két komponensének tömege is, majd pedig a q_1 tömegarány ismeretében ebből a szoros kettős két komponensének külön-külön is megkapható a tömege.

Egy további, szintén egyedülálló lehetőség, hogy a vörösóriás-komponensre rendelkezésre álló radiálissebesség-görbét (Derekas és mktsai., 2011) kombináljuk a szoros kettős ETV-je által adott fényidőgörbével (ld. a C.3. ábrán). Ismeretes ugyanis, hogy a fényidőpályát, amely a radiális irányú (asztrometriában általánosan z-vel jelölt) koordináta idő szerinti differenciájának függvénye, illetve a radiálissebesség-görbét (amely ugyanezen koordináta időderiváltjának függvénye), ugyanazon paraméterek írják le. Így a jelen esetben noha a tág kettős csak egyvonalas (SB1) spektroszkópiai kettős, a szoros kettős ETV-jével kombinálva a tág rendszerről mindaz az információ megszerezhető, amely különben csak kétvonalas (SB2) spektroszkópiai kettősök esetében lenne elérhető.

Ezt felismerve, vizsgálatomban az első perctől kezdve kiemelt fontosságot tulajdonítottam a szoros kettős fedésiminimum-időpontjai analízisének. A fedésiminimum-időpontokat a munka idejében elérhető adatsorra Kiss László iránymutatásai alapján Király Amanda egyetemi hallgató határozta meg.[4] E módszer kétségtelen előnye, hogy a tág kettőst alkotó két komponens tömegét gyakorlatilag a fénygörbemegoldástól függetlenül adja meg, különösen, ha azt is figyelembe vesszük, hogy bár az i_2 inklináció értékét elvben a fény-

[4] A polinomális sablonminimumok alkalmazása mellett a lokális simítópolinomok ötletét is éppen innen vettem át, és fejlesztettem tovább a néhány évvel későbbi, a 4. fejezetben tárgyalt kutatásaim során.

görbemegoldás nélkül nem ismernénk, azonban a tág kettős fedési természetéből kifolyólag biztosak lehetünk benne, hogy annak értéke $i_2 \simeq 90^{\circ}$. Az eljárás kétségtelen hátránya viszont az, hogy a szoros kettős két komponensének tömegéről külön-külön ekkor nem mondhatunk semmit, ezt csupán a fénygörbemegoldásra támaszkodva tehetjük meg.

Így végső soron azt a megoldást választottam, hogy a rácskereséses fénygörbeparaméter-optimalizációs eljárás során vörösóriás-komponens tömegét a kombinált ETV- és radiálissebességgörbe-megoldásból adódó $m_{\mathrm{A}} = 3{,}00 \pm 0{,}13\,\mathrm{M}_{\odot}$ értéken rögzítettem. Ezzel egyrészt eggyel csökkentettem az illesztendő paraméterek amúgy is ijesztően nagy számát, másrészt ez lehetővé tette, hogy közvetlenül a fizikai csillagsugarakat használjam illesztési paraméterként a fajlagos sugarak helyett.[5]

5.1. táblázat. A kombinált fénygörbe- és ETV-analízis révén meghatározott asztrofizikai és orbitális paraméterek. (A zárójeles számok az utolsó jegyek becsült hibáit adják meg.)

	pályaelemek		
	alrendszer		
	Ba–Bb		A–B
P [d]	0,9056768(2)		45,4711(2)
T_{MINI} [BJD]	2455051,23623(5)		2455499,9962(4)
a [$\mathrm{R}_{\odot}$]	4,777(39)		90,31(72)
e	0,0		0,0
ω	–		–
i [deg]	86,7(14)		87,5(2)
$\Delta\Omega$ [fok]	0,0(5)		
i_{m} [fok]	0,8(14)		
q	0,95(3)		0,595(5)
$L_{\mathrm{sec}}/L_{\mathrm{TOT}}$	0,3468		0,0078
	csillag paraméterek		
	Ba	Bb	A
	illesztett és/vagy számolt paraméterek		
	relatív mennyiségek		
r_{pole}	0,1798	0,1664	0,1376
r_{side}	0,1808	0,1672	0,1379
r_{point}	0,1826	0,1687	0,1382
r_{back}	0,1822	0,1684	0,1382
	fizikai mennyiségek		
m [$\mathrm{M}_{\odot}$]	0,915(34)	0,870(43)	3,0(1)
R [$\mathrm{R}_{\odot}$]	0,865(10)	0,800(20)	12,46(15)
T_{eff} [K]	5100(100)	4675(100)	5100(100)
L_{bol} [$\mathrm{L}_{\odot}$]	0.447(37)	0.270(27)	92.812(7615)
$\log g$ [dex]	4,53	4,58	2,73
	rögzített paraméterek		
k_2	0,020	0,020	0,033
β	0,32	0,32	0,32
A	0,5	0,5	0,5
x_{bol}	0,71476	0,71476	0,71159
y_{bol}	0,13026	0,13026	0,12561
x_{K}	0,70835	0,70835	0,70074
y_{K}	0,16354	0,16354	0,16609

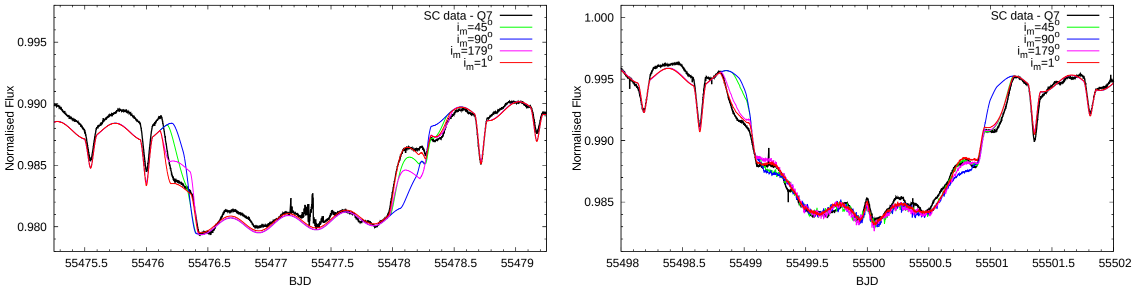
5.5. A főbb eredmények áttekintése

Eredményeimet áttekintve elmondható, hogy azon paraméterek esetében, amelyeket már a felfedezést bejelentő kutatócsoportnak (Derekas és mktsai., 2011) is sikerült meghatároznia, a random hibákat sikerült egy nagyságrenddel lejjebb szorítani. Ezenfelül, a hármas rendszer szinte egyedülálló geometriája tartogatta lehetőségek kiaknázásának köszönhetően sikerült olyan további paramétereket is meghatározni, amelyek korábban nemcsak ennek a rendszernek az esetében, hanem általában is csupán nehezen, vagy egyáltalán nem voltak elérhetőek.

A már korábban is ismert paraméterek finomítására jó példa a vörös óriás sugara, illetve tömege. Így például míg a *Hipparcos* asztrometriai műhold távolságadatának és a CHARA/PAVO[6] műszeregyüttes interferometriai méréseinek kombinálásával Derekas és mktsai. (2011) a vörös óriás komponens sugarára $R_{\mathrm{A}} = 12{,}4 \pm 1{,}3\,\mathrm{R}_{\odot}$ értéket kaptak, addig az álta-

[5] A fényidőeffektusból, illetve a fent tárgyalt kombinált analízisekből meghatározott egyéb dinamikai paramétereket előzőleg a 4. fejezet 4.5. és 4.9. táblázataiban (KIC 05952403 azonosító alatt) is megadtam, és a 4.6.2. szakasz statisztikai analízisében is felhasználtuk azokat, így ehelyütt a további diszkussziótól eltekintek.

[6] Center for High Angular Resolution Array/Precision Astronomical Visible Observations



5.6. ábra. Az 5.1. táblázatban megadott paraméterekkel, de különböző i_m köztes inklinációk mellett előállított fénygörbék a $Q7$ adatsor egy külső mellékminimumával (balra), illetve főminimumával (jobbra) összevetve. További magyarázat a szövegben.

lam kidolgozott és alkalmazott, pusztán a *Kepler*-űrtávcső fotometriai mérésein alapuló eljárás (a hármas rendszer fénygörbemegoldásának és az ETV-analízisnek a kombinációja) az előbbivel konzisztens, de egy nagyságrenddel pontosabb $R_\mathrm{A} = 12{,}46 \pm 0{,}15\,\mathrm{R}_\odot$ értéket eredményezett. Hasonló a helyzet a vörös óriás tömegével is, amelyre Derekas és mktsai. (2011) közvetve, az elméleti csillagfejlődési útvonalak segítségével adott olyan becslést, amelyet a radiálissebesség-görbe és az ETV összetett analíziséből kapott $m_\mathrm{A} = 3{,}00 \pm 0{,}13\,\mathrm{M}_\odot$ eredmény számszerűleg teljesen alátámaszt, ugyanakkor viszont jóval megbízhatóbb eredményt jelent.

Ezen a ponton érdemes megmutatni, hogy a hármas rendszer dinamikai tulajdonságai miként hordozhatnak további, nagyon konkrét információkat a vörös óriás főkomponens evolúciós állapotával kapcsolatban. Amint azt Derekas és mktsai. (2011) az általuk meghatározott csillagparaméterek alapján megállapították, a vörös óriás komponens a H–R-diagramnak pontosan azon a szakaszán helyezkedhet el, ahol a vörösóriás-ágra első alkalommal felkapaszkodó H-héj égető csillagok, valamint a He-mag égető vörös óriások átfedik egymást. Ez jelentős bizonytalanságot okoz az egész rendszer becsült életkorában. Ezen a ponton segíthetnek a dinamikai megfontolások. Verbunt és Phinney (1995) a közelmúltban elhunyt J.-P. Zahn a témakörben alapvető munkáin (Zahn, 1977, 1989) alapuló számításai szerint egy, a HD 181068 tág kettőséhez hasonló paraméterekkel, és H-héj égető főkomponenst tartalmazó kettőscsillag esetében $P \lesssim 15\,\mathrm{d}$ keringési idő esetében várhatjuk, hogy az árapályerőknek köszönhetően a kettős körpályán keringjen. Ily módon a jelen esetben a $P_2 \sim 45$ napos periódus és a körpálya együttesen azt látszik sugallni, hogy a vörös óriás valószínűleg öregebb, vagyis inkább a He-mag égés fázisában van. Ekkor ugyanis már rendelkezésre állhatott annyi idő, hogy a tág pálya is elveszítse excentricitását. Ugyanakkor azt is hozzá kell tenni, hogy ez a probléma a másodkomponens kettős természete miatt még összetettebb, hiszen ez felveti a kérdést, hogy az e kettősség miatt fellépő további árapály-fékeződés elég hatékony tud-e lenni, hogy számottevően lerövidítse a cirkularizációs időskálát.

Végezetül, anélkül, hogy a tanulmány befejező részében tárgyalt összes eredményt és konklúziót tételesen ismertetném, a köztes inklináció fedési úton való meghatározásának részleteit tárgyalom. A fedésifénygörbe-megoldásból természetesen mind a szoros, mind a tág rendszer látszó inklinációját meghatároztam. A szoros kettős esetében ez csak elég nagy hibával sikerült, miszerint $i_1 = 86{,}^\circ7 \pm 1{,}^\circ4$. E nagy bizonytalanság ugyanakkor nem különösebben meglepő, ha meggondoljuk, hogy a részleges fedések miatt ez a paraméter nagyon érzékeny a rendszerben jelen lévő, és e konkrét esetben átlagosan a teljes fluxus $\sim 99{,}2\%$-át kitevő, ráadásul folyamatosan változó harmadik fény mennyiségére. A tág alrendszer $i_2 = 87{,}^\circ2 \pm 0{,}^\circ2$ inklinációját jóval pontosabban sikerült meghatározni. E két inklinációból még egyáltalán nem következik, hogy a két pályasík egybeesne, hiszen a köztes inklináció, a $\Delta\Omega$ paraméter függvényében $(i_1 - i_2)$ és $(i_1 + i_2)$ között bármilyen értéket felvehet.[7] A hiányzó információt (vagyis a $\Delta\Omega$ paraméter értékét) a külső fedések geometriája szolgáltatja nekünk. Amint korábban említettem, a HD 181068 esetében ez az információ elsősorban a külső fedések le- és felszálló ágának finomszerkezetében van eldugva. Ennek szemléltetésére az 5.6. ábrán a $Q7$ SC fénygörbe első két külső fedését ábrázoltam együtt olyan szintetikus fénygörbékkel, amelyek csak a $\Delta\Omega$ paraméter (és így közvetve az i_m köztes inklináció) értékében különböznek. Míg a külső fedéseken kívüli részek, illetve a teljesség fázisai teljesen egyformák, a felszálló és leszálló ágak (időbeli hosszúságukat is beleértve) lényegesen különböznek, ami $\Delta\Omega$-t egy jól meghatározott paraméterré teszi. Ráadásul, amint az különösen a bal oldali ábrán látványos, még az $i_\mathrm{m} = 1^\mathrm{o}$ és az $i_\mathrm{m} = 179^\mathrm{o}$ köztes inklinációhoz tartozó görbék is határozottan elkülönülnek, azaz ezen a módon még a direkt/retrográd bizonytalanság is feloldható (feltéve, hogy a szoros kettőst nem két egyforma komponens alkotja). A jelen fénygörbemegoldás esetében $\Delta\Omega = 0\overset{\circ}{.}0 \pm 0\overset{\circ}{.}5$ adódott, amely az i_1, i_2 inklinációk fenti értékeivel kombinálva $i_\mathrm{m} = 0\overset{\circ}{.}8 \pm 1\overset{\circ}{.}4$ köztes inklinációra vezet (ahol a viszonylag nagyobb hiba i_1 már említett bizonytalanságának a következménye), amely viszont a gyakorlatban azt sugallja, hogy a két pálya tökéletesen egy síkba esik.

5.6. Összefoglalás

Olyan fénygörbeszintetizáló-kódot fejlesztettem ki, amely alkalmas a nagy pontosságú űrfotometriai fénygörbéken megfigyelhető, korábban nem látott fizikai, illetve geometriai jelenségek modellezésére is. Ily módon, a korábban a fedésifénygörbe-modellezésben sztenderdnek tekinthető programok képességeit meghaladva a programba beépítettem a Dopplernyalábolás jelenségét valamint, fő újdonságként a külső vagy extra fedések bonyolult geometriájának modellezését. (S ezzel együtt, a harmadik komponens mozgásának modellezésével természetszerűleg a fényidőeffektus fénygörbére gyakorolt hatása is megjelenik a modellfénygörbéken.) Ezen felül beépítettem egy a csillagpulzációból, illetve az esetleges kromoszferikus aktivitásból származó további fényváltozások egyidejű modellezéséhez szükséges matematikai (nem fizikai!) eljárást.

A kódot először a triplán fedő HD 181068 (KIC 5952403) hierarchikus hármas rendszer komplex fénygörbe-, radiálissebességgörbe- és ETV-analízise során alkalmaztam. Sikerrel modelleztem a külső fedések komplex szerkezetét, és ezáltal meghatároztam a hármas rendszer számos paraméterét, s megmutattam, hogy mind a szoros, mind a tág rendszer körpályán kering, amelyek relatív hajlásszöge kisebb mint 1^o. (Dinamikai megfontolásokból viszont az egzakt koplanaritás is valószínűsíthető, és a retrográd keringés is kizárható.)

Az ETV-görbén megfigyelhető fényidőeffektus, illetve az óriás főkomponens radiálissebesség-görbéjének vegyítésével újszerű módon meghatároztam a tág rendszer két komponensének vetített tömegét, majd ebből, a fénygörbemegoldás felhasználásával mindhárom csillag tömegét és méretét is megadtam.

Végezetül egy tisztán algebrai eljárást adtam arra, hogy egysíkú, két körpályát tartalmazó, triplán fedő rendszer esetén miképpen határozhatók meg pusztán a külső fedések kontaktusidőpontjaiból alapvető rendszerparaméterek (ld. a B. függelékben).

[7] Ld. az (1.32) kifejezést.

6. fejezet

Egyedi *Kepler*-rendszerek komplex vizsgálata

II. HD 183648: pulzáló komponenst tartalmazó fedési kettős anomális ellipszoidális változással

6.1. Bevezetés

Az értekezésem zárásaként egy olyan, szintén a *Kepler*-űrtávcső mérési adatai nyomán felfedezett fedési kettős komplex vizsgálatát mutatom be, amelynek legfőbb érdekessége és jelentősége, hogy a fénygörbén a markáns, viszonylag mély fedéseken kívül néhány napos periódusú millimagnitúdós amplitúdójú pulzációs mintázat is megfigyelhető. A különálló fedési kettősökben előforduló pulzáló csillagok asztrofizikai szempontból kiemelkedő jelentőséggel bírnak, hiszen amennyiben a fotometriai észleléseket spektroszkópiai megfigyelésekkel is kiegészíthetjük, akkor az ilyen csillagok tömegét és sugarát akár 1%-nál is pontosabban meghatározhatjuk, amely nagyon erős megkötéseket szolgáltat a pulzációs (és csillagfejlődési) modellekhez (Aerts, 2007). Ráadásul, a fedések nagy segítséget jelentenek a pulzációs módusok detektálásában és azonosításában is, valamint a nem-radiális módusok forgási felhasadása révén lehetővé teszik a pulzáló csillag belsejében a forgási sebesség mérését (Baptista és Steiner, 1993; Goupil és mktsai., 2000; Gamarova és mktsai., 2003; Mkrtichian és mktsai., 2005; Bíró és Nuspl, 2011).

Míg a 2000-es évek elejéig csupán korlátozott számban ismertünk pulzáló csillagot tartalmazó fedési kettőst,[1] az elmúlt évtized nagyszabású földfelszíni égboltfelméréseinek, illetve a CoRoT- és *Kepler*-űrmissziók működésének köszönhetően számuk rohamos növekedésbe kezdett. Ráadásul a *Kepler*-, illetve CoRoT-űrtávcsövek talán legizgalmasabb asztroszeizmológiai felfedezése a beveztőben említett HB-kettősök felfedezése volt. Ehhez az égitestcsoporthoz hasonlóan, az árapály-gerjesztette pulzációk közé sorolható az a kis amplitúdójú oszcilláció is, ami az előző fejezetben tágyalt HD 181068 fénygörbéjén figyelhető meg (Derekas és mktsai., 2011; Fuller és mktsai., 2013).

Az e fejezetben tárgyalandó HD 183648 (*Kepler*-azonosítója: KIC 0856061) ideális célpontnak tűnt egy „klasszikus" vizsgálathoz: ahhoz, hogy a kis amplitúdójú oszcillációk

[1] Ugyanakkor érdemes megjegyezni, hogy Szatmáry Károly egyetemi doktori értekezését már e kutatási irány hőskorában ennek a témának szentelte (Szatmáry, 1987).

leválasztása után visszamaradó fedési fénygörbe, és a két csillag radiálissebesség-görbéje felhasználásával nagy pontossággal meghatározzuk a csillagok állapothatározóit, majd a pulzációs módusok azonosítását követően, ezen eredményeket összevessük a megfelelő pulzációs modellekkel. E kettős azért is ígéretesnek tűnt, mert egyrészt a fedések elég mélyek ahhoz, hogy a pulzációs mintázat nem tökéletes leválasztása se befolyásolja jelentősen a fedésifénygörbemodell-illesztés pontosságát. Továbbá, az elegendően mély mellékminimumok azzal kecsegtettek, hogy mindkét csillag radiálissebesség-görbéje kimérhető lesz. Végül, a célpont $V = 8{,}5$ magnitúdós fényessége lehetővé tette, hogy a spektroszkópiai észleléseket (részben) „saját hatáskörünkben", az ELTE Gothard Asztrofizikai Obszervatóriumának echelle-spektrográfjával (Csák és mktsai., 2014) végezzük el egyrészt az obszervatórium szombathelyi telephelyén felállított 50 cm-es RC teleszkóppal, másrészt az MTA Csillagászati és Földtudományi Kutatóközpont Piszkés-tetői Obszervatóriumának 1m-es RCC távcsövével. Ily módon, tudomásom szerint az ennek a kutatásnak az eredményeit ismertető dolgozat (Borkovits és mktsai., 2014) lett az első olyan referált folyóiratban megjelent tudományos közlemény, amely a *Kepler*-űrtávcső fotometriai méréseit kiegészítő, földfelszíni észlelési eredmények között magyarországi adatokat is felhasznált.

A következő alfejezetekben a HD 183648 komplex vizsgálatának (Borkovits és mktsai., 2014) csak azokat az elemeit tárgyalom részletekbe menően, amelyeket én végeztem. Ezek a fedésiminimumidőpont-változások és a radiálissebesség-görbe kombinált analízise, valamint a fénygörbe vizsgálata, beleértve a kettősségből, illetve a pulzációból származó fényváltozások szétválasztását, majd előbbi kvantitatív analízisét. A szerzőtársak tevékenységére és eredményeire csak annyiban térek ki, amennyiben az általam elvégzett analízis ezekre épült, vagy ezekhez adott kiindulási alapot.

6.2. A felhasznált fotometriai és spektroszkópiai adatsorok

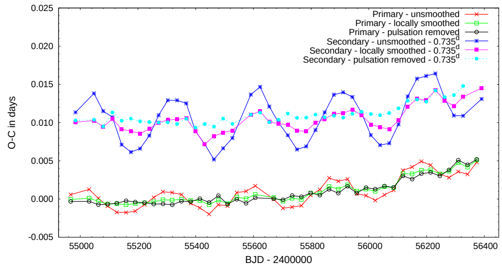
Fotometriai vizsgálataim során elsősorban a *Kepler*-űrtávcső 29,4 perces mintavételezésű LC adatsorát használtam, leszámítva az űreszköz meghibásodása előtt röviddel megkezdett 17. negyedév ($Q17$) akkor még nem elérhető alig néhány napos adatsorát. Ezen felül, a fénygörbe-analízis egyes szakaszaiban használtam azt a rövid, 30 napos hosszúságú sűrű mintavételezésű (SC) adatsort is, amelyet az űreszköz még a 3. negyedév középső egy hónapjában ($Q3.2$) rögzített. Ezen adatok előfeldolgozását, illetve a forrás esetleges kontaminációjának vizsgálatát Szabó Róbert végezte el.

Amint fentebb már említettem, a kutatáshoz használt földfelszíni, spektroszkópiai adatsor egy része, mégpedig nagyobb része, az ELTE szombathelyi Gothard Asztrofizikai Obszervatóriumának $R = 11\,000$ felbontású echelle (eShel) spektrográfjával készült spektrumok feldolgozásával állt elő. Az obszervatórium akkori kutatói (köztük jómagam is), 2012. folyamán, 11 éjszakán 34 spektrumot készítettek a szombathelyi 50 cm-es RC-távcsőre szerelt műszerrel. Ugyanez a spektrográf többször vendégszerepelt a Piszkéstetői Obszervatóiumban is, ahol is az 1 m-es RCC-teleszkópra felszerelve, 2012 és 2013 nyarán 16 éjszakán további 36 spektrumot vettünk fel. E spektrumok feldolgozását, s azokból a radiális sebességek meghatározását elsősorban Csák Balázs, Kovács József, illetve Szabó M. Gyula végezték el. Mivel a kettős csaknem 32 napos keringési ideje ezt lehetővé tette, a jobb jel/zaj viszony érdekében a feldolgozás során az azonos éjszakán készült spektrumokat összeadtuk, így végül 27 különböző éjszakához tartozó spektrumhoz jutottunk. Ezenfelül a külföldi társszerzők három további, jóval nagyobb távcsőre szerelt, nagyobb felbontású eszközzel[2] tíz további éjszakán, éjszakánként egy-egy spektrumot rögzítettek.

[2]Ezek a Kitt Peak National Observatory (KPNO) 4 méteres Mayall-teleszkópjára szerelt $R = 20\,000$ felbontású echelle spektrográfja (2 spektrum), az Apache Point Observatory (APO) 3,5 méteres teleszkóp-

6.3. A fedésiminimumidőpont-változások vizsgálata

A fedésiminimum-időpontok meghatározásánál ugyanazt az eljárást követtem, amit a 4.4. fejezetben részletesen ismertettem. A nyers $O-C$ diagram a kettős excentrikus pályája miatt a főminimumtól $0\overset{\mathrm{d}}{.}75$ nappal feljebb elhelyezkedő mellékminimumokon felül egy kvadratikus trendet, illetve egy $\sim 287\,\mathrm{d} \simeq 9P_1$ periódusú ciklikus változást is mutat, amelynek amplitúdója viszont jelentősen nagyobb a mellékminimumok, mint a főminimumok esetében (6.1. ábra). Míg a parabolikus változás ténylegesen fizikai eredetűnek tűnik, a periodikus változást a helyi simítópolinomok alkalmazása (ld. a 4.4. fejezetben) teljesen eltüntette a főminimumok $O-C$ görbéjéről, míg a mellékminimumok esetében noha teljesen nem tudta kiküszöbölni, de jelentősen redukálta annak amplitúdóját. Mindez arra mutat, hogy az ETV e periodikus viselkedése csak látszólagos, és mögötte a fedési fénygörbe pulzáció miatti modulációja áll. A jelenség magyarázata abban áll, hogy az átlagos pulzációs frekvencia 165:9 arányban áll az orbitális frekvenciával, vagyis minden kilencedik fő-, illetve mellékminimum hasonlóképpen torzul el. A pulzációs eredetet az is alátámasztja, hogy amikor a későbbiekben, a fénygörbe analízise során szétválasztottam a fedési és pulzációs fényességváltozást (ld. alább a 6.5. fejezetben), a pulzáció levonását követően újra meghatározott fedésiminimum-időpontokban már nyoma sem volt e ciklikus változásnak.



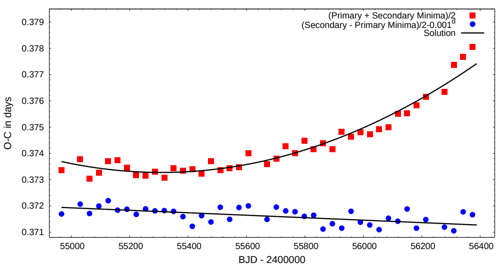
6.1. ábra. A fő-, illetve mellékminimumok fedésiminimumidőpont-változásainak (ETV) $O-C$ diagramjai. (A jobb láthatóság érdekében a mellékminimumok görbéjét $0\overset{\mathrm{d}}{.}735$ nappal eltoltam lefelé.) A parabolikus viselkedés valóságosnak tűnik. A ciklikus változás azonban a fénygörbe csillagpulzáció általi modulációjából származó hamis jel. Ez a látszólagos ciklikus változás hatékonyan eliminálható akár az egyes fedések körüli fénygörbeszakaszok lokális simítópolinomok általi kiegyenesítésével, akár az oszcillációknak a fedési fénygörbéből való eltávolításával (részletek a szövegben.)

Az ETV kvantitatív analízise során így végül a csillagpulzációk levonása után kapott $O-C$ görbéket használtam. A fő- és mellékminimum $O-C$ görbéinek átlaga még nyilvánvalóbbá tette a kvadratikus változást, azaz a fedési periódus kis mértékű, konstans növekedését. Ugyanakkor a két $O-C$ görbe különbségének nem nulla meredeksége nagy valószínűséggel a pályaellipszis kis mértékű elfordulására utal (6.2. ábra). Következésképpen az ETV általános matematikai alakját leíró (4.1) kifejezésből jelen $O-C$ görbék esetében a másodfokú polinom, illetve az apszismozgást leíró Δ_{apse} komponens marad csupán meg. Ez összesen hat szabad paramétert jelent, mégpedig a $c_{0..2}$ polinom-együtthatókat, illetve az apszismozgással kapcsolatos e_1, ω_1, illetve $\Delta\omega$ paramétereket. Ugyanakkor, amint azt Claret (1998) részletesen tárgyalta, az apszismozgási periódusnál sokkal rövidebb időskálák esetében a $\Delta\omega$ paraméter nagyon erős korrelációban van az e_1 és ω_1 pályaelemekkel. Ezért e három utóbbi paraméter közül az e_1 excentricitást rögzítettem a későbbiekben tárgyalásra kerülő radiálissebesség-analízisből meghatározott értéken. Ily módon a 4.3. fejezetben bemutatott $O-C$-analizáló kódomat használva 5 paraméteres Levenberg–Marquardt-eljárással kerestem meg az ETV-t legjobban leíró megoldásgörbét. Ezt követően pedig, a megoldást finomítandó az illesztőeljárást megismételtem kissé módosított e_1 értékekkel

ján üzemelő ARCES echelle spektrográf ($R = 31\,500$ – 5 spektrum), illetve a Lick Observatory 3 méteres Shane teleszkópjára szerelt Hamilton Echelle Spektrográf ($R = 37\,000$ – 3 spektrum).

is. Ez utóbbi lépés érdemben már nem befolyásolta a numerikus eredményt, azonban lehetővé tette, hogy az e_1 excentricitás becsült hibáját egy nagyságrenddel csökkentsem a radiálissebesség-görbe analíziséből kapotthoz képest. Noha az illesztés, mint minden más (excentrikus) esetben is közvetlenül a fő- és a mellékminimumok $O-C$ görbéjére történt, a szemléletesség kedvéért a 6.2. ábrán ehelyett a két $O-C$ összeadásával, illetve kivonásával kapott átlag és különbség $O-C$-t mutatom be, a megoldásgörbék átlagával és különbségével egyetemben.[3] Ennek az ábrázolásnak az előnye, hogy szétválasztja a kvadratikus változást (amely egyformán érinti a fő- és mellékminimum $O-C$ görbéjét, és ezért a különbséggörbéről eltűnik) és az apszismozgás okozta effektust (amelynek vezető tagja ellentétes előjelű a két görbén, és ezért az átlaggörbéből tűnik el), s ily módon mindkettő jobban felismerhető.

A parabolikus ETV ezúttal, a két csillag nagy szeparációja miatt nem magyarázható sem tömegátadással, tömegvesztéssel, vagy a komponensek közti mágneses kölcsönhatással. A klasszikus magyarázatok közül így a távoli, harmadik komponens okozta fényidőeffektus feltételezése marad. Amennyiben tényleg ez lenne a helyzet, e kísérőnek mindenképpen halvány objektumnak kell lennie, hiszen sem a spektroszkópiai, sem a fotometriai észlelési adatok nem utalnak további fényforrás jelenlétére. Lehet azonban egy további, nagyon gyenge, közvetett bizonyíték egy gravitációsan kötött harmadik komponens jelenlétére. Az ETV-megoldásból ugyanis $P_{\rm apse}^{\rm obs} \simeq 10\,000 \pm 3\,000$ éves apszismozgási periódus adódott, míg a spektroszkópiai, illetve fénygörbemegoldások alapján számolt elméleti, nem dinamikai eredetű periódus $P_{\rm apse}^{\rm elm} \simeq 97\,000 \pm 9\,000$ év lenne. Ily módon esetleg elképzelhető, hogy az apszismozgásnak van dinamikai járuléka is, amely a harmadik kísérő perturbációiból származhat. Azonban egy alig négy év hosszúságú adatsorból egy tízezer éves időskálájú jelenséggel kapcsolatban természetesen semmilyen komoly következtetést nem vonhatunk le.



6.2. ábra. A pulzációs jel eltávolítása után kapott átlagolt (piros), illetve (fél-) különbség (kék) $O-C$ görbék és az ETV-megoldás (fekete vonal). Az átlagolt görbe kiemel bármilyen, a fő- és a mellékminimumok ETV-iben egyformán megjelenő viselkedést, míg a különbséggörbe a kétféle fedés viszonylatában ellentétes (antikorrelatív) viselkedésű ETV-ket emeli ki. Az átlagolt görbén ez esetben jól látható a parabolikus változás, míg a különbséggörbe nullától eltérő meredeksége apszismozgásra utal.

6.4. A radiális sebességek vizsgálata

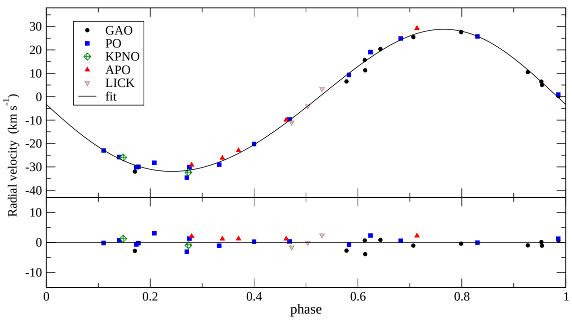
Az első spektrumok kiértékelése után meglepetéssel tapasztaltuk, hogy várakozásunkkal ellentétben csak a főkomponens vonalai láthatóak. A jobb jel/zaj viszonyú, illetve nagyobb felbontású KPNO, APO és Lick spektrumokban sem sikerült a keresztkorrelációs függvény (CCF) alkalmazásával végzett hagyományos kiértékelő eljárásokkal a másodkomponens nyomára bukkanni. Míg a legjobb jel/zaj arányt elérő KPNO színképek kvantitatív analízisét Szabó M. Gyula végezte, a radiális sebességek (RV) analízise rám hárult. Noha Wilson (1979) e téren alapvető tanulmánya óta a radiálissebesség-görbéket és a fénygör-

[3] Mind az összeg- mind a különbséggörbéket osztottam kettővel, így jogos az „átlag” kifejezés használata.

béket általában egyidejűleg szokták analizálni,[4] a jelen vizsgálat során nem ezt az utat követtem. A szimultán illesztés melleti egyik legfőbb érvként az szokott felmerülni, hogy $e\cos\omega$ értékét a fénygörbe, $e\sin\omega$-ét pedig a radiálissebesség-görbe határozza meg sokkal robusztusabban. A jelen esetben viszont a *Kepler*-fotometriának hála, nagy pontosságú fedésiminimum-időpontok álltak rendelkezésemre mind a fő-, mind a mellékminimumról, és így ezek időkülönbségének a keringési periódus felétől való eltérését is nagy pontossággal tudtam meghatározni, márpedig ez az adat adja a legerősebb megkötést $e\cos\omega$ értékére a fénygörbe-analízis során is. Így végül is úgy döntöttem, hogy e_1-et és ω_1-et az RV- és az ETV-görbék iteratív illesztésével fogom meghatározni, majd az így kapott e_1 és ω_1 értékeket fixen tartom az ezt követő fénygörbeillesztés során egészen annak a legutolsó, finomhangolási szakaszáig.

Az RV-analízis első lépésében az $a_\mathrm{A}\sin i_1$, e_1, ω_1, $(M_0)_1$ pályaelemek, illetve a V_γ rendszersebesség értékét kerestem LM-eljárással, míg a P_1 periódus és T_0 kezdő epocha (azaz egy főminimum időpontja) értékét az ETV-analízisből vett értéken rögzítettem. Ezen felül olyan alternatív futtatást is végeztem, amelyben azt vizsgáltam, hogy vajon az ETV-analízis során talált periódusváltozás (a parabolikus tag) megjelenik-e a rendszer radiális sebességének a változásában is. Ehhez bevezettem a további $\dot{V}_\gamma$ paramétert is, amelyet szintén bevontam az LM-illesztési eljárásba.

Ezeket a futtatásokat követte az e_1 excentricitás értékének pontosítása az ETV-analízis során, ahogy azt az előző szakaszban leírtam. Végül az ETV-megoldásból visszakapott excentricitást rögzítettem, és a többi paraméterre újfent megismételtem az RV-illesztést. E futtatások eredményeként a periasztron argumentuma RV-analízisből meghatározott értéke, a jelentős formális hiba ellenére, $\simeq 1^\mathrm{o}$-on belül egybeesett az ETV-analízisből kapott értékkel. Ami pedig az illesztett $\dot{V}_\gamma$ paraméter értékéből visszaszámolt ΔP_1 periódusváltozást illeti, ez hibahatáron belül konzisztens az ETV-megoldásból kapott periódusváltozás nagyságával. Az eredményeket a 6.1. táblázatban sorolom fel, míg a $\dot{V}_\gamma \equiv 0$ esetben kapott illesztésem az eredeti RV-görbével, valamint a reziduálokkal egyetemben a 6.3. ábrán látható.



6.3. ábra. A mért radiálissebesség-értékek és a legjobb illesztést adó elméleti görbe a $\dot{V}_\gamma \equiv 0$ esetben. Alul a mért és a megoldásból számolt értékek különbsége látható.

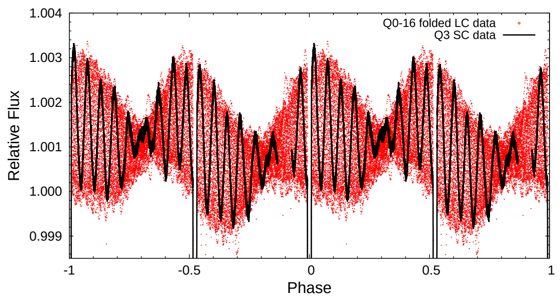
Már nem a radiálissebesség-görbe analíziséhez tartozik, de idekötődik, hogy a kombinált RV+ETV-analízis során meghatározott pályaelemek, illetve a rövidesen tárgyalandó fénygörbe-analízisből megbecsült fluxusarány felhasználásával K. Pavlovski és tanítványa V. Kolbas végül a Fourier-tartományban sikeresen elkülönítette a fő- és a mellékkomponenstől származó jeleket a spektrális szétválasztás (spectral disentanglement – SPD) módszerével (Simon és Sturm, 1994; Hadrava, 1995). Ily módon lehetővé vált mindkét csillag tömegének dinamikai úton való meghatározása. Ezzel kapcsolatban annyit viszont meg kell jegyezni, hogy az SPD $\sim 13\%$-kal nagyobb félamplitúdót eredményezett a főkomponens radiálissebesség-amplitúdójára, mint amit az RV-analízis során a főkomponens CCF technikával kimért radiálissebesség-görbéjére találtam. (Ez azt is jelenti, hogy a fénygörbeillesztés első szakaszában, amikor is az egyvonalas RV-megoldásból nyert spektroszkópiai

[4]Ez a lehetőség a WD-kód 1979-nél frissebb minden változatában, és hasonlóképpen az erre épülő PHOEBE-kódban is elérhető.

tömegfüggvény és a q_1 tömegarány közti összefüggést használta a fénygörbeillesztő-program a tömegek, sugarak, illetve csillagalakok kiszámításához, akkor egy kis mértékben alábecsült tömegaránnyal dolgozott.) A nagyobb SPD-amplitúdó valószínűleg abból a tényből fakadhat, hogy a CCF spektroszkópiából meghatározott radiálissebesség-értékek esetében a nem felbontott, de jelen lévő, a másodkomponenstől származó, a főkomponens vonalainak Doppler-eltolódásához képest antikorrelációban lévő jel csökkentette az amplitúdót. Érdemes megjegyezni, hogy Southworth és Clausen (2007) összehasonlító vizsgálatai általánosságban is azt a következtetést engedik levonni, hogy az SPD technika, különösen jelentősen kiszélesedett vonalak esetében nagyobb (és pontosabb) félamplitúdót eredményez, mint a hagyományos CCF módszer.

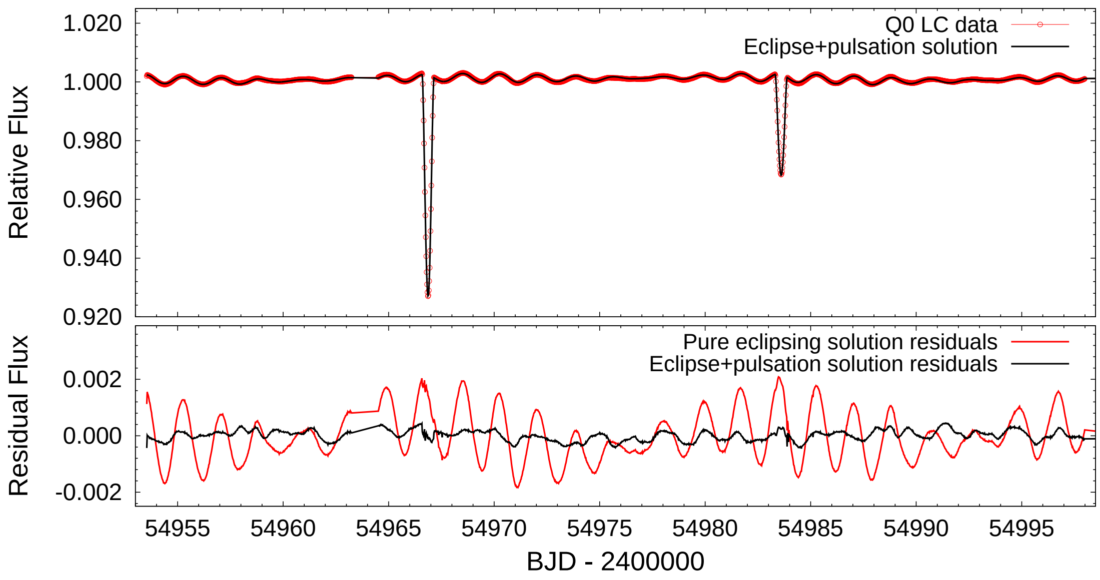
6.5. Fénygörbe-analízis

A HD 183648 *Kepler*-fénygörbéje legalább három jellegzetességet mutat. A $P_{\rm orb} = 31\overset{\rm d}{.}973$ periódusú, enyhén excentrikus fedési fénygörbére egy feltűnő, $\sim 1\overset{\rm d}{.}78$ periódusú pulzációs mintázat rakódik. Ezt a mintázatot különösen érdekessé teszi a keringési periódus felével megjelenő lebegés. Ennek következtében a pulzációs fényváltozások burkolójának csomópontjai, illetve maximumai a teljes négy éves időskálán ugyanarra az orbitális fázisra esnek. Ezen felül egy további, a keringési idő felével periodikus szinuszos fényváltozás is megfigyelhető, amelynek maximumhelyei hozzávetőlegesen a 0,0 és 0,5 fotometriai fázisokkal esnek egybe. Ez a rejtélyes hullám olyan, mintha egy kifordított ellipszoidális változás lenne. (Elvileg ugyan a visszasugárzási effektus okozhatna hasonló jellegű fényváltozást, azonban ebben a kettősben a csillagok elég jelentős távolsága miatt ennek amplitúdója nagyságrendekkel marad el a megfigyelttől.) Mindezen felül egy további, szintén szinuszoidális fényváltozás is kimutatható, amelynek periódusa a keringési periódussal egyezik meg. E fénygörbe-jellegzetességek mindegyike megfigyelhető a 6.4. ábrán.



6.4. ábra. A HD 183648 fázisba rendezett fénygörbéje a maximumfényesség szintjén (ily módon a fedési minimumok nem látszanak az ábrán). A feltekert (de nem átlagolt!) $Q0 - Q16$ LC fénygörbe (piros) jól mutatja, hogy a pulzációs mintázat burkológörbéje a négyéves mérési időszak alatt a fedési (orbitális) fázis szerint változatlan maradt. A fekete pontok ez egyetlen, egy hónapos ($Q3.2$) SC fénygörbe mérési pontjait jelölik, ezzel egy tetszőleges keringési ciklus során megfigyelhető pulzációs mintázatot bemutatva.

A fedési fénygörbe lehető legpontosabb modellezéséhez az 5. fejezetben tárgyalt esethez hasonlóan az összetett fénygörbeváltozások szétválasztására volt szükség. Természetesen az ideális az lenne, ha a fedési és a pulzációs fényváltozásokat egyidejűleg lehetne modellezni, azonban jelenleg ilyen eljárás még nem elérhető. Ezért egyelőre maradtam a korábban leírt iteratív, a nemfedésifénygörbe-összetevőket Fourier-polinomokkal közelítő módszernél. A teljes $Q0 - Q16$ LC adatsor fedéseken kívüli részének DFT-amplitúdóspektrumát elkészítve két domináns pulzációs frekvenciát azonosítottam az orbitális frekvencia 17. és 19. felharmonikusa közelében, egymástól pontosan az orbitális frekvencia kétszeres távolságára. (Ez természetesen a fent említett lebegési jelenség után nem hatott váratlanul.) Az első lépésben ezzel a két pulzációs frekvenciával, illetve az orbitális frekvenciával és annak kétszeresével négy szinuszgörbét illesztettem (lineáris legkisebb négyzetek módszerével)



6.5. ábra. *Felül:* Az előfeldolgozott *Kepler* LC adatpontok (piros), valamint a kombinált fedési és 5 frekvenciás pulzációs modellfénygörbe (fekete). *Alul:* Reziduál-fénygörbék, amelyek a Q0–Q16 LC adatsorból a teljes kombinált szintézisfénygörbe (fekete), illetve a fedésifénygörbe-komponens (piros) levonásával adódtak. Ez utóbbi az észlelt fénygörbe tisztán pulzációs komponensét adja, amelyet munkánk hátra lévő részében tovább analizáltunk.

a fénygörbe fedéseken kívüli szakaszára, majd az illesztés eredményeként kapott görbét levontam a teljes fénygörbéből. Természetesen ezzel a módszerrel a pulzáción kívül az esetleges ellipszoidális, visszasugárzási effektusokból, illetve a Doppler-nyalábolásból származó összetevőket is eltávolítottam a fénygörbéből. A célom azonban ebben a lépésben nem is volt más, minthogy a lecsupaszított fedési fénygörbéből a PHOEBE szoftverrel gyors kiindulási értékeket kapjak a csillagok ETV+RV-analízisből nem meghatározható geometriai paramétereire (elsősorban a fajlagos sugarakra, másrészt pedig az inklinációra és a két komponens fényességarányára).

Az ily módon kapott előzetes PHOEBE-megoldással generált fedési fénygörbét ezután levontam a nyers adatsorból, és a maradványgörbét használva pontosítottam a pulzációs frekvenciákat. Ezt követően tértem át az 5.2. fejezetben bemutatott fénygörbe-modellező kódra. Ez esetben a Doppler-nyalábolás figyelembevételén felül az a tény szólt a saját kód használata mellett, hogy a fedési fénygörbe modellezésével egyidejűleg a pulzációs fénygörbét is előállítja az előre beállított frekvenciájú Fourier-polinomokkal (miközben, opcionálisan, akár ezek amplitúdóit és fázisait is megilleszti), és így a kettős rendszer paramétereinek rácskereséses χ^2 optimalizációs eljárása során ez utóbbiak hatását is figyelembe veszi. A fénygörbemegoldás e befejező(nek szánt), finomhangolási szakaszában öt frekvenciát használtam: a négy legnagyobb amplitúdójú pulzációs frekvencián kívül a fejezet elején említett „kifordított” ellipszoidális változás modellezése érdekében, a $2f_{\mathrm{orb}}$ frekvenciájú komponenst is figyelembe vettem. Ugyanakkor, miután a kód által használt fizikai modell magában foglalja a Doppler-nyalábolás jelenségét is, az f_{orb} frekvenciájú szinuszos fényváltozás Fourier-modellezésére immár nem volt szükség. Mivel a spektrumok CCF analízise, majd később az SPD vizsgálatok is azt mutatták, hogy a két csillag gyors tengelyforgást végez, a fénygörbemodellbeli forgási szinkronizációs paramétert (és ezzel együtt a csillagok alakját, és a többi függő paramétert is) a program minden egyes lépésben újraszámolta oly módon, hogy a csillagok vetített forgási sebessége ($v_{\rm rot} \sin i_{\rm rot}$) megegyezzen a spektrumanalízisből meghatározott értékkel (az $i_{\rm rot} = i_1$ önkényes feltétel mellett).

E paraméterfinomítást rácskereséses eljárással az összesen 64 528 adatpontot tartalmazó teljes $Q0 - Q16$ LC adatsorra végeztem el. A megoldásként kapott fénygörbét az eredeti, teljes hosszúságú adatsorból levonva azt tapasztaltam, hogy a reziduál észlelési negyedenként eltérő, időnként szisztematikus, máskor csupán random mintázatot mutat. E szisztematikus, észlelésinegyed-függő zaj valószínűleg instrumentális eredetű, és a nem 100%-osan hatékony adatelőfeldolgozás következménye. A szisztematikus eltérések legfeltűnőbbje az egyes negyedekben jelen lévő fényességgradiens volt. Ezt eltüntetendő e reziduálfényességekre észlelési negyedenként egyenest illesztettem, majd ezekkel negyedről negyedre korrigáltam a $Q0 - Q16$ adatsort. Ezután újra megismételtem a fénygörbeillesztési eljárás záró, finomhangolási szakaszát.

6.1. táblázat. A kombinált analízis során meghatározott asztrofizikai és orbitális paraméterek

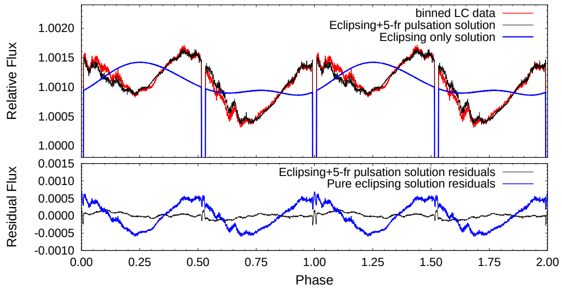
	orbitális paraméterek	
$P_{\rm orb}$ (d)	$31{,}97325 \pm 0{,}00002$	
$T_{\rm MINI}$ (BJD)	$2\,454\,966{,}8687 \pm 0{,}0002$	
a ($\mathrm{R}_\odot$)	$61{,}08 \pm 1{,}27$	
e	$0{,}0477 \pm 0{,}0020$	
ω (°)	$40{,}08 \pm 0{,}08$	
i (°)	$87{,}32 \pm 0{,}15$	
τ (BJD)	$2\,454\,962{,}798 \pm 0{,}025$	
q	$0{,}5523 \pm 0{,}0226$	
$(V_\gamma)_0$ (km/s)	$-6{,}3 \pm 1{,}7$	
$(\Delta P)_{\rm ETV}$ (10^{-6} d/c)	$7,\ 2 \pm 0\ 8$	
$(\Delta P)_{\rm RV}$ (10^{-6} d/c)	11 ± 5	
$P_{\rm apse}^{\rm obs}$ (y)	$10\,400 \pm 3\,000$	
	elméleti apszismozgási paraméterek	
$P_{\rm apse}^{\rm elm}$ (y)	$34\,200 \pm 2\,000$	
$\dot{\omega}_{\rm rel}^{\rm elm}$ ($''/P_{\rm orb}$)	$2{,}547 \pm 0{,}167$	
$\dot{\omega}_{\rm cl}^{\rm elm}$ ($''/P_{\rm orb}$)	$0{,}772 \pm 0{,}103$	
	csillagparaméterek	
	Főkomponens	Másodkomponens
	relatív mennyiségek	
$r_{\rm pole}$	$0{,}05240 \pm 0{,}00010$	$0{,}01810 \pm 0{,}00020$
$r_{\rm side}$	0,05475	0,01813
$r_{\rm point}$	0,05476	0,01813
$r_{\rm back}$	0,05476	0,01813
	fizikai mennyiségek	
M ($\mathrm{M}_\odot$)	$1{,}93 \pm 0{,}12$	$1{,}06 \pm 0{,}08$
R ($\mathrm{R}_\odot$)	$3{,}30 \pm 0{,}07$	$1{,}11 \pm 0{,}03$
$T_{\rm eff}$ (K)	7650 ± 100	6450 ± 100
L ($\mathrm{L}_\odot$)	$32{,}88 \pm 0{,}20$	$1{,}87 \pm 0{,}12$
$\log g$ (dex)	$3{,}71 \pm 0{,}03$	$4{,}38 \pm 0{,}04$
$P_{\rm rot}$ (d)	$1{,}60 \pm 0{,}04$	$2{,}15 \pm 0{,}21$

A kombinált spektroszkópiai és fotometriai analízis során meghatározott paraméterek értékeit a 6.1. táblázatban soroltam fel,[5] a fénygörbemegoldás egy részlete pedig a 6.5. ábrán látható. Ezenfelül a 6.6. ábrán külön bemutatom a feltekert és átlagolt eredeti, illetve modellfénygörbék fedéseken kívüli viselkedését is. Az ábrán külön berajzoltam a (pulzáció nélküli) tiszta fedési modellfénygörbét is, amely gyakorlatilag a közönséges ellipszoidális változás és a Doppler-nyalábolás eredőjéből tevődik össze. Az ábra alján látható, hogy az ehhez a pulzációs komponenst nem tartalmazó fedésifénygörbemegoldáshoz tartozó reziduálgörbéből már hiányzik az $f_{\rm orb}$ frekvenciájú komponens, amely azt bizonyítja, hogy ezt a fénygörbe-összetevőt valóban a Doppler-nyalábolás okozta. Ezen felül e komponens hiánya indirekt bizonyítékként szolgál a harmadik fény már említett hiányára is. Ugyanis, ha a fénygörbe szignifikáns nagyságú harmadik fluxuskomponenst is tartalmazna, ennek hatása látszólag csökkentené a Doppler-nyalábolás amplitúdóját, és ily módon az illesztésünk ezt túlbecsülné. Következésképp újfent kijelenthetjük, hogy ha a

[5] A fénygörbeillesztés (valamint az elméleti apszismozgási paraméterek számítása) során használt egyes további, a paraméterkeresés során fixen tartott további fizikai mennyiség (pl. szélsötétedési együtthatók, belsőszerkezeti állandó stb.) értékét helyhiány miatt ehelyütt nem adom meg, ezek az eredeti dolgozat (Borkovits és mktsai., 2014) 8. táblázatában találhatók.

6.3. szakaszban kimutatott parabolikus ETV egy harmadik komponens okozta fényidőeffektusra vezethető vissza, akkor e kísérő valószínűleg egy kis tömegű M törpe lehet.

Ugyanitt célszerű néhány szót szólni a reziduál-fénygörbék fedések közbeni viselkedéséről, ugyanis egy fedésifénygörbe-illesztés során ez a szakasz szemlélteti a leglátványosabban, hogy az adott megoldás mennyire követi az eredeti görbe fénymenetét. A fedések le- és felszálló ágai helyén a maradványfénygörbékben általában megjelenő „könyökök” amplitúdói között[6] az ehelyütt előforduló 300-500 ppm-nyi érték bőven olimpiai kvótás helyet ér. Tekintettel arra, hogy az általam használt fizikai modell bizonyosan nem írja le pontosan a kettős rendszer fényváltozásait, hiszen egyrészt a pulzációt csak formálisan, nem pedig fizikailag vettem figyelembe, valamint a fizikai modell a „kifordított” ellipszoidális változásról sem tud számot adni, hajlok arra, hogy a megoldásfénygörbe e rendkívül jó illeszkedése inkább köszönhető a véletlennek, mint a fizikai (és geometriai) modell kiemelkedő pontosságának.



6.6. ábra. *Felső ábra:* A finomított $Q0-Q16$ LC adatsor (piros), valamint a szimultán fedési és 5-frekvenciás pulzációs fénygörbemegoldásból szintetizált adatsor (fekete), illetve ez utóbbi szintézisgörbe kizárólag a kettősségből származó fényváltozásokat tartalmazó komponensének (kék) fedési fázisba rendezett, átlagolt, fedéseken kívüli szakasza. *Alsó ábra:* A fenti két megoldásgörbe levonásával kapott maradványgörbék.

A 6.1. táblázatban az illesztésekből közvetlenül adódó paramétereken kívül néhány további, számolt mennyiséget is megadtam, mégpedig a két csillag tengelyforgási periódusát ($P_{\rm rot}$), valamint a klasszikus árapály- és relativisztikus apszismozgási szögsebességeket, illetve az ezekből számolt elméleti apszismozgási periódust. (Ez utóbbiak számításához a belsőszerkezeti állandókat újfent Claret és Gimènez (1992) táblázataiból vettem.) Az apszismozgás árapály-kölcsönhatásból származó járulékát az egyensúlyi árapály-közelítés alapján számoltam ki, bár a két csillag gyors tengelyforgása következtében a dinamikaiárapály-modell (pl. Claret és Willems, 2002; Willems és Claret, 2005) valószínűleg a valósághoz közelebb álló eredményt adna.

Az illesztett paraméterek bizonytalanságait több különböző módon becsültem meg. Az ETV- és RV-analízis során az LM-illesztés korrelációs mátrixából számított formális hibákat használtam. Ugyanakkor az ily módon számolt bizonytalanságokra ugyanazok a megállapítások érvényesek, amelyeket a 4.3. alfejezetben az $O-C$-görbeanalízis-kódommal kapcsolatban már tárgyaltam. Ezért a fénygörbemegoldás során egy reálisabb hibabecslést adtam, ami a fénygörbeillesztés utolsó, finomítási szakaszán alapult, amely gyakorlatilag egy Monte-Carlo-szimulációt valósított meg. Az általam kapott statisztikai bizonytalanságok jó összhangban vannak a Hambleton és mktsai. (2013) által egy hasonló munka során talált bizonytalanságokkal. Összegzésképpen tehát levonható az a következtetés, hogy a paramétertérbeli jelentős korrelációk ellenére az elegendően mély fedéseket mutató, különálló *Kepler*-kettősök fénygörbe-paraméterei jól meghatározottak.

A fedési fénygörbe sikeres modellezése lehetővé tette a pulzációs fényváltozások pontos leválasztását és analízisét. Az oszcillációs frekvenciák kvantitatív analízisét Derekas Aliz

[6] E jellegzetes mintázat elsősorban nem is annyira a nem igazán eltalált fénygörbe-paraméterekből, hanem inkább a fénygörbék leírására használt fizikai modellek elégtelen voltából adódnak. A kérdést röviden Hambleton és mktsai. (2013) tárgyalják.

végezte el, majd ezek eredetére Jim Fuller kísérelt meg elméleti magyarázatot adni. Noha elméleti asztrofizikai szempontból ez utóbbi rész a jelen dolgozat legérdekesebb része, mivel ebben közvetlen részem (a pulzációs fénygörbe, illetve a fundamentális csillagparaméterek előállításán kívül) már nem volt, ezek ismertetésére nem térek ki.

6.6. Összefoglalás

Elvégeztem a marginálisan excentrikus HD 183648 (KIC 8560861) fedési kettős *Kepler*-fénygörbéjének és (részben általam és munkatársaim által Magyarországon mért) egyvonalas radiálissebesség-görbéjének, valamint fedésiminimumidőpont-változásának összetett vizsgálatát, és meghatároztam a rendszer orbitális és asztrofizikai paramétereit, amelyeket azután a szerzőtársak által végzett kvantitatív spektrumanalízis felhasználásával több iterációs lépésben pontosítottunk. Sikeresen szétválasztottam a kettősségből, illetve a csillagpulzációkból adódó fényességváltozást, és megmutattam, hogy a fénygörbén megjelenő pulzációban megfigyelhető lebegésért felelős két pulzációs frekvencia közti távolság pontosan megfelel az orbitális frekvencia kétszeresének. Ily módon a pulzáció árapály-eredetéhez nem férhet kétség, ami egy ilyen tág ($P \sim 32\,\mathrm{d}$) és csak egészen kis mértékben excentrikus ($e \sim 0,048$) kettős esetében váratlan eredmény.

Kimutattam, hogy az ETV-n megjelenő periodikus változás a pulzációs és keringési periódus összemérhetőségéből fakadó hamis jel, nem pedig egy harmadik test okozta fényidő- (és/vagy dinamikai) effektus következménye. Ugyanakkor azt is megmutattam, hogy az űrfotometriai észlelések négy éve alatt a szoros kettős keringési periódusa kis mértékben folyamatosan nőtt. Az ETV-ből meghatároztam az apszismozgás periódusát is, ami kb. kilencszer rövidebbnek adódott, mint amit a relativisztikus, illetve klasszikus árapályeffektus alapján várnánk, azonban az adatsor rövidsége miatt ebből jelenleg komoly következtetés még nem vonható le.

7. fejezet

A kutatás további irányai

A dolgozatban bemutatott kutatási témák természetesen korántsem képeznek lezárt egységeket. Mind a bemutatott elméleti vizsgálatok, mind azok gyakorlati alkalmazásai magukban hordozzák a továbblépés irányait. Így például, ahogy arra a 2. fejezetben már utaltam, ahogy az elsődleges *Kepler*-küldetés egyre hosszabb és hosszabb időtartamú mérési eredményei váltak elérhetővé, úgy találtunk egyre több és különlegesebb ETV-t mutató rendszereket, amelyek megmutatták, hogy szükség van az analitikus modell továbbfejlesztésére. Így vontam be egymás után a harmadrendű közelítést, majd a rövid periódusú komponensek átlagát, illetve az apszismozgásbeli szekuláris perturbációk modellezését. Az azóta eltelt idő nyilvánvalóvá tette számomra, hogy ez utóbbi effektus leírása még mindig nem egészen kielégítő, ezért analitikus kutatásaimat azóta ezen a vonalon folytattam tovább, s már el is értem újabb eredményeket, amelyeket azonban még nem publikáltam. Az ez irányú kutatást ugyanis kicsit visszavetette, hogy a *Kepler*-űrtávcső elsődleges küldetésének lezárulásával további, megfelelően hosszú és pontos ETV-megfigyelések nem állnak rendelkezésre.

A figyelmem így jelenleg inkább a fénygörbe-modellezés új kihívásai felé irányul, hiszen noha mind a CoRoT-, mind az elsődleges *Kepler*-küldetések véget értek, több ezernyi feldolgozandó, értelmezendő fedési fénygörbét hagytak hátra, amelyek közül talán a százas számot is eléri a különösen érdekes, nem triviálisan modellezhető rendszerek száma. Ráadásul a *K2*-küldetés negyedévről negyedévre újabb izgalmas fénygörbék tucatjait eredményezi. Így csak az idei évben Rappaport professzorral, és egy nagyobb, nemzetközi kutatócsoporttal már több fedési négyes, ötös csillagrendszer összetett fotometriai, spektroszkópiai, asztrometriai (adaptív optikával) és elméleti, dinamikai vizsgálatát is elvégeztük (EPIC 212651213 – Rappaport és mktsai., 2016, illetve EPIC 220204960 – Rappaport, Vandenburg, Borkovits és mktsai, 2016, előkészületben).

Mindezek a kutatások már annak a komplex szemléletmódnak a talaján állnak, amely alapvető szerepet játszik az általam a 2015–2018-as időszakra elnyert *Többszörös csillag- és bolygórendszerek űrfotometrián alapuló komplex vizsgálata* című OTKA K113117 pályázatban, amelynek keretében munkatársaimmal azt a feladatot tűztük ki célul, hogy egy olyan új generációs programcsomagot fejlesztünk ki, amely lehetővé teszi fedési fénygörbék, radiálissebesség-görbék, fedésiminimumidőpont-változások, majd a későbbiekben akár csillagpulzációk okozta fényváltozások egyidejű és nagysebességű analízisét egy a jelenleg használatban lévőkhöz képest jelentősen kiterjesztett fizikai és geometriai modell mellett. A programcsomag, amelynek alapját az 5.2. szakaszban bemutatott fénygörbeszintézis-kódom képezi, képes lesz nemcsak hármas, de 2+2 hierarchiájú négyes rendszerek fedéseit is kezelni, csakúgy, mint nem hierarchikus pályaelrendeződésű exobolygórendszerek tranzitjait is, beleértve a bolygók esetleges kölcsönös fedéseit is. Ehhez a mozgásegyenleteket numerikusan integráljuk, azaz a programcsomag komplett fotodinamikai kódként fog funkcionálni. Emellett kísérletet teszünk e fedési modell és egy fizikai pulzációs modell ötvözésére is a projektben szintén részt vevő bajai kollégám, Bíró Imre Barna kezdeti eredményeire (Bíró és Nuspl, 2011) alapozva. A programcsomag másik újdonsága a kiterjesztett modellezésen felül a grafikuskártya alapú, párhuzamosított jelleg, amellyel igyekszünk a fent említett hatalmas, új adatmennyiség által támasztott további kihívásoknak is megfelelni.

Ezekbe a kutatásokba egyre inkább igyekszem doktorandusz hallgatóimat és mind több fiatal kutatót bevonni, hiszen úgy gondolom, eljutottam abba a korba, amikor már kötelességem a feltörekvő, ifjú generáció számára tapasztalataimat és az általam felhalmozott tudásanyagot is átadni, így is gondoskodva a megfelelő utánpótlás biztosításáról.

Köszönetnyilvánítás

Kutatási eredményeim nem jöhettek volna létre számos munkatársam és barátom önzetlen és odaadó segítsége nélkül. Mivel egy akadémai doktori eljárás során az egész eddigi életmű kerül elbírálásra, helyénvaló, hogy az egész eddigi pályafutásomra visszatekintve soroljam fel azokat, akiket köszönet illet. Első helyen a bajai csillagvizsgálót az elmúlt bő két évtizedben vezető Hegedüs Tibort kell megemlítenem, aki annak idején elindított a fedési kettősök vizsgálatának rögös útjain, és akinek abban is elévülhetetlen érdemei vannak, hogy a fedésiminimumidőpont-változások analízisében alapvető $O-C$-diagramokkal máig tartó, bensőséges kapcsolatba kerültem. Vele egy lapon kell megemlékeznem gyermekkori mentoromról, a bajai csillagvizsgáló néhai vezetőjéről, Ill Mártonról (1930–2015). Tíz éves koromban kezdtem el Marci bácsi szakkörébe járni, amely szakköri foglalkozásokat hétről hétre nem csillapodó izgalommal vártam. Kapcsolatunk később is megmaradt, noha mire én végeztem az egyetemen, ő már éppen nyugdíjba vonult, de pályafutásomat mindvégig figyelemmel kísérte. Hasonlóképpen szeretném kiemelni Érdi Bálint, az ELTE Csillagászati Tanszékének korábbi vezetője, jelenleg emeritus professzor, korábbi PhD-témavezetőm szerepét, aki az égi mechanika szeretetét oltotta belém annak a vágyával egyetemben, hogy egyszer majd képes legyek éppen olyan élvezetesen előadni, tanítani az égi mechanika hosszas, száraz matematikai levezetéseit, ahogy ő tette ezt egyetemi előadásain. Szeretnék köszönetet mondani Ábrahám Péternek, Kiss L. Lászlónak (MTA CsFK) és Jankovics Istvánnak (ELTE GAO, Szombathely) azért, hogy amikor Baján bizonyos nehézségek léptek fel, segítő kezet nyújtottak, és biztosították, hogy időszakosan az általuk vezetett intézmények infrastruktúráját és egyéb lehetőségeit kihasználva folytathassam kutatásaimat.

Az elmúlt két évtized kutatásai során nagyon sok kollégával dolgoztam együtt, sokakkal folytattam tanulságos diszkussziókat, amelyek révén nagyon sok segítséget kaptam munkámhoz (és remélhetőleg e segítségnyújtás kölcsönös volt). Itt elsősorban a Forgácsné Dajka Emesével fennálló, hosszú ideje gyümölcsöző együttműködésemet emelem ki, de (névsor szerint) Bíró Imre Barna, Csizmadia Szilárd, Derekas Aliz, Kiss L. László, Kovács Tamás, Oláh Katalin, Paragi Zsolt, Pál András, Saul A. Rappaport, Regály Zsolt, Sándor Zsolt, Szabó M. Gyula, Szabó Róbert és Robert E. Wilson nevét is meg kell említenem. Köszönöm továbbá Szabados Lászlónak a folyamatos nyelvi lektori tevékenységét, legyen szó akár folyóiratcikkről, akár erről az értekezésről.

Kutatásaimhoz időről időre hathatós anyagi támogatást nyújtott az OTKA az F030147, T030743, illetve K113117 pályázati támogatásokon keresztül.

Végül, de nem utolsósorban szeretném megköszönni családomnak, szüleimnek (Borkovits Lajos és Lajosné), illetve korábbi (József Rita) és jelenlegi (Kozák Krisztina) páromnak a megfelelő, nyugodt, boldog hátország biztosításával nyújtott támogatását.

A. Függelék

Geometriai összefüggések: az inklinációk és a csomóvonal-hosszúságok alkotta gömbháromszögek

Amint az a 2–4. fezetekben gyakran szóba került, a két pályasík, illetve az égbolt síkja (a vizsgált objektum látóirányára merőleges sík) metszésvonalai által létrehozott gömbháromszög szögei és oldalai alapvető szerepet játszanak az adott hármas rendszer teljes, 3 dimenziós konfigurációjának és mozgásának észlelői, illetve dinamikai rendszerbeli leírásában. Szigorúan véve nem egyetlen gömbháromszögről van szó, hiszen amint az a 2.1. ábrán jól látható, a felsorolt három sík az absztrakt éggömbből nyolc (félgömbönként négy) gömbháromszöget vág ki. E nyolc gömbháromszögből a továbbiakban azt az egyet választjuk ki és tesszük diszkussziónk tárgyává, amelynek három csúcsa a két pályasík észlelői rendszerbeli felszálló csomópontja, valamint a két pályasík csomóvonalának az éggömbbel való, az észlelőtől távolabb eső (a konvenciók szerint pozitív z koordinátájú) metszéspontja. Ez esetben a háromszög két belső szöge a pályasíkok i_m köztes inklináció szöge, valamint az i_1, i_2 látszó inklinációk egyike, míg a harmadik belső szög a fennmaradó inklináció külső szöge lesz. Továbbá, a háromszög három oldala a csomóvonal-jellegű n_1, n_2, valamint a $\Delta\Omega=\Omega_2-\Omega_1$ ívhosszak lesznek. Ezenfelül, az invariábilis sík és az égbolt metszésvonala a fent említett gömbháromszöget két kisebb gömbháromszögre bontja fel. Ezek egyik íve és az ezen fekvő egyik szög megegyezik az eredeti gömbháromszög megfelelő ívével és szögével (pl. a 2.1. ábrán felrajzolt esetben i_2 és n_2, valamint $180^\mathrm{o}-i_1$, n_1), míg i_m szerepét a két dinamikai inklináció $j_{1,2}$ veszi át, és hasonlóan, $\Delta\Omega$-t (az invariábilis sík és az égbolt síkja metszésvonalától mért) $\Omega_{1,2}$ szögek helyettesítik, míg a harmadik szög az invariábilis sík észlelői rendszerbeli i_0 inklinációja (illetve ennek kiegészítő szöge), a harmadik ív pedig a $h_{1,2}$ dinamikai csomóvonal-hosszúságok egyike lesz.

Először a „nagy" háromszöggel foglalkozunk. Mint láttuk, ennek n_1 és n_2 ívei közvetlenül is megjelennek a perturbációs egyenletekben. Továbbá ezek a szögek teremtenek közvetlen kapcsolatot az észlelői rendszerbeli $\omega_{1,2}$, illetve a dinamikai $g_{1,2}$ pericentrum-argumentumok között. E mennyiségek közül ω_1 közvetlenül is észlelhető mind fotometriai (fénygörbeillesztés, apszismozgás $O-C$ analízise), mind spektroszkópiai úton (radiálissebesség-mérés). Természetesen ugyanezek a lehetőségek elvben adottak ω_2-re is, amennyiben a tág kettős szintén mutat fedéseket, illetve amennyiben a tág pályán való keringés is kimérhető hosszabb időtartamú radiálissebesség-mérésekből. Ezenfelül az $O-C$ görbéből kimérhető fényidőeffektus egy további lehetőséget is jelent ω_2 meghatározására. A $g_{1,2}$ dinamikai pericentrum-argumentumok pedig a hármas rendszerek szekuláris dinamikájában játszanak alapvető szerepet (ld. pl. Ford és mktsai., 2000). Ezen felül, amint azt a 3. fejezetben láttuk, g_1-nek kulcsszerepe van a pillanatnyi apszismozgási ráták meghatározása szempontjából is, és ily módon gömbháromszögünk az íveire és szögeire vonatkozó gömbháromszögtani összefüggéseken keresztül még az aktuális apszismozgási rátára, illetve ennek ETV-beli leképeződésére is szolgáltat megkötéseket.

Az oldalakról a szögekre áttérve, az i_m köztes inklináció a dinamikai perturbációk másik alapvető paramétere. A két észlelői koordináta-rendszerbeli inklináció közül i_1 közvetlenül csak a dinamikai $O-C$ járulék precessziós tagjában jelenik meg, mégpedig a $\cot i_1$ függvényen keresztül, ily módon csak nagyon kis közvetlen hatást kifejtve a fedésiminimumidőpont-változásokra. Másik oldalról azonban az a tény, hogy fedési kettőscsillagokkal dolgozunk, erős megkötést jelent i_1 értékére, mégpedig általában annál erősebbet, minél hosszabb az éppen vizsgált rendszerek fedési periódusa. A tág pálya i_2 inklinációja (pontosabban annak szinusza) közvetlenül csak a fényidőjárulék amplitúdójában jelenik meg, ráadásul összetett, és jócskán elfajuló kapcsolatban van a csillagok tömegével, illetve tömegarányával. Azonban abban az esetben, ha a tág kettős is produkál fedéseket, ez i_2-re a nagyobb szeparáció miatt még jóval erősebb megkötést jelent, mint i_1-re a szoros kettős fedési természete.

A gömbháromszögek elméletéből ismeretes, hogy egy gömbháromszöget szögei és oldalai közül bármely három tetszés szerinti kombinációja meghatároz, noha bizonyos esetekben a megoldás nem egyértelmű (vagyis az adott paraméter-kombináció nem csak egy, hanem két különböző gömbháromszög esetében is érvényes lehet). Ebből következik, hogy a hat paraméter közül csupán három választható szabadon, és ezek értéke a további három paramétert (a fenti kétértelműségtől eltekintve) már meghatározza.

Felmerül a kérdés, hogy a gyakorlati alkalmazás céljából esetünkben mely kombináció(ka)t célszerű használni. Az összes lehetőségre kiterjedő diszkusszió túlságosan hosszadalmas lenne, és valójában nincs is rá szükség. Ezért csak a mi szempontunkból legfontosabb két esetet tárgyalom.

(a) *Külső fedéseket mutató rendszerek (szabad paraméterek: i_2, i_m, n_2).* Ebben az esetben a tág kettősben fellépő fedések nagyon erős megkötést jelentenek a tág pálya látszó inklinációjára, ezért i_2 biztonsággal rögzíthető valamely 90^o közeli értéken. Ugyanakkor, mivel a gömbháromszög egyik oldala és az oldalon fekvő két szög kombinációja esetén az egyik legegyszerűbb a fennmaradó három paraméter kiszámításának menete, célszerű az ehhez a szöghöz csatlakozó egyik oldalt választani. Mivel mind n_2, mind i_m közvetlenül megjelenik a dinamikai ETV analitikus megoldásában, ezt a kombinációt célszerű választani. A másik három paraméter kiszámítása ekkor ugyan egyszerű, de gondos diszkussziót igényel, amit az alábbiakban részletezek.

Amint említettem, az egyik észlelhető inklináció a gömbháromszög belső, a másik pedig külső szöge. Ahhoz, hogy az alább felírandó gömbháromszögtani összefüggések egyforma alakúak maradjanak, akár i_1, akár i_2 a belső szög, n_1, és n_2 definícióját kicsit megváltoztatjuk, és a továbbiakban az adott pálya dinamikai rendszerbeli felszálló csomójának ugyanazon pálya észlelői rendszerbeli felszálló csomójától a pályasíkban, a pálya menti keringés irányában mért szögét értjük alattuk. E definíció értelmében, ha (mint a 2.1. ábrán megvalósuló esetben) az i_1 inklináció a külső szög, akkor n_1 megtartja korábbi jelentését, míg n_2 értéke 180^o-kal megnő. Ekkor a fennmaradó három paraméter értéke a következőképpen számítható ki.

$$\cos i_{1a,b} = \cos i_2 \cos i_\mathrm{m} + \sin i_2 \sin i_\mathrm{m} \cos n_{2a,b}, \tag{A.1}$$

$$\sin i_{1a,b} = \sqrt{1-\cos^2 i_{1a,b}}, \tag{A.2}$$

$$\sin n_{1,a,b} = -\frac{\sin i_2}{\sin i_{1a,b}}\sin n_{2a,b}, \tag{A.3}$$

$$\sin\Delta\Omega_{a,b} = \frac{\sin i_\mathrm{m}}{\sin i_{1,ab}}\sin n_{2a,b} = -\frac{\sin i_\mathrm{m}}{\sin i_2}\sin n_{1a,b}, \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}\cos\Delta\Omega_{a,b} &= \frac{\cos i_\mathrm{m} - \cos i_2\cos i_{1a,b}}{\sin i_2 \sin i_{1a,b}}\\ &= \frac{\cos i_\mathrm{m}\sin i_2 - \sin i_\mathrm{m}\cos i_2\cos n_{2a,b}}{\sin i_{1a,b}},\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}\cos n_{1a,b} &= -\frac{\cos\Delta\Omega_{a,b} + \sin n_{2a,b}\sin n_{1a,b}\cos i_\mathrm{m}}{\cos n_{2a,b}}\\ &= -\cos n_{2a,b}\cos\Delta\Omega_{a,b} + \sin n_{2a,b}\sin\Delta\Omega_{a,b}\cos i_2.\end{aligned} \tag{A.6}$$

(Mint látható, az esetek egy részében több alternatív formulát is megadtam, amiből azt választhatjuk, amelyik az adott esetben numerikusan jobban viselkedik.) Noha n_2 értékét ezesetben a paraméterillesztésből kapjuk, a kétértelműség mégis megmarad, ugyanis amint az a 2. fejezetben levezetett formulákból látható, a kvadrupól perturbációs tagokban csak $2n_2$ jelenik meg, így ezzel az n_2-beli 180$^\mathrm{o}$-os bizonytalanság nem oldható fel. Az oktupól tagokban a szögfüggvények együtthatóiban pedig minden esetben csupán n_1 és n_2 lineáris kombinációi jelennek meg, és így a páratlan együtthatók ellenére, ezek a tagok szintén nem alkalmasak a kétértelműség feloldására. Ez egyedül a kicsi, ($\cot i_1$-gyel szorzott) precessziós komponensek figyelembevételével tehető meg, amely előjelet vált, ha n_1 értéke 180$^\mathrm{o}$-kal változik. Az általam kifejlesztett szoftver általában mindkét megoldást kiszámítja, és ezek közül a kisebb χ^2 értékűt választja. Azonban, a fentebb említettek miatt a megoldást csak nagyon gyengén befolyásolja ez a kétértelműség. Amennyiben viszont az éppen vizsgált rendszer fedésmélység-változást mutat, e jelenség megbízhatóbban használható a két megoldás közti választásra. Ugyanis, amint azt majd rövidesen tágyaljuk, a legtöbb esetben az egyik megoldás fedésmélység-csökkenéssel, a másik pedig fedésmélység-növekedéssel jár együtt. Végül azt is megjegyezzük, hogy megfelelő átcímkézéssel a fenti egyenletekkel analóg kifejezések használhatók abban az esetben is, ha szabadon állítható paraméterekként az i_1, i_m, n_1 hármast választjuk.

(b) *Kis excentricitású fedési kettősök, külső fedések nélküli esetben (i_1, i_m, n_2).* Amennyiben a fénygörbén nem látunk külső fedéseket, i_2-re általában semmilyen megkötést sem tehetünk. Ezért célszerű helyette i_1-et választanunk, bár az esetek nagy részében, a kisebb szeparáció miatt, a fedések megléte ellenére, legalábbis részleges fedések esetén, erre csak gyengébb megkötést tehetünk. Ekkor, az i_1, i_m, n_1 választással, mint fentebb már említettem, az előző esetben tárgyaltakkal analóg egyenleteket kapunk. Azonban ez nem mindig a legcélszerűbb választás. Amint az ugyanis a dinamikai ETV domináns összetevőjét adó (2.63) kifejezésből látszik, (amennyiben a kicsi, precessziós tagtól ismételten eltekintünk), a kifejezés összes olyan tagja, amely n_1-et tartalmazza egyben szorzódik az e_1 excentricitással is, és ily módon kis belső excentricitások esetén a dinamikai járulék csak gyengén függ n_1-től, sőt körpályán mozgó fedési kettős esetében a dinamikai ETV független n_1-től. Ezzel szemben az n_2-től való függés ekkor sem tűnik el (2.66. egyenlet). Ily módon célszerűbb az i_1, i_m, n_2 változók hármasát választani. E választás mellett a maradék három paraméter kiszámítása kicsit körülményesebb ugyan, de komolyabb gondot ez sem okoz. A számolás menete a következő:

$$\begin{aligned}
\sin\Delta\Omega_{a,b} &= \frac{\sin i_\mathrm{m}}{\sin i_1}\sin n_{2a,b}, &(A.7)\\
\cos\Delta\Omega &= \sqrt{1-\sin^2\Delta\Omega}, &(A.8)\\
\cos i_{2a,b} &= \frac{\cos i_1\cos i_\mathrm{m}-\sin i_1\sin i_\mathrm{m}\cos\Delta\Omega\cos n_{2a,b}}{1-\sin^2 n_{2a,b}\sin^2 i_\mathrm{m}}, &(A.9)\\
\sin i_{2a,b} &= \sqrt{1-\cos^2 i_{2a,b}}, &(A.10)\\
\cos\Delta\Omega &= \frac{\cos i_\mathrm{m}-\cos i_1\cos i_{2a}}{\sin i_1\sin i_{2a}} = \frac{\cos i_\mathrm{m}-\cos i_1\cos i_{2b}}{\sin i_1\sin i_{2b}}. &(A.11)
\end{aligned}$$

E lépést követően, amennyiben $\cos\Delta\Omega < 0$ adódna, i_2 két értékét fel kell cserélni. Végül,

$$\begin{aligned}
\cos n_{1a,b} &= -\cos n_{2a,b}\cos\Delta\Omega+\sin n_{2a,b}\sin\Delta\Omega_{a,b}\cos i_{2a,b}, &(A.12)\\
\sin n_{1a,b} &= -\frac{\sin i_{2a,b}}{\sin i_1}\sin n_{2a,b} = -\mathrm{sgn}(\sin n_{2a,b})\sqrt{1-\cos^2 n_{1a,b}}. &(A.13)
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy amennyiben $i_\mathrm{m} = 90^\mathrm{o}$, $n_2 = \pm 90^\mathrm{o}$, (A.9) 0/0 alakra vezet. Könnyen belátható azonban, hogy ebben az esetben az $i_1 = i_2 = 90^\mathrm{o}$, $n_1 = \mp 90^\mathrm{o}$ és $\cos\Delta\Omega = 0$ egyenlőségek is fennállnak. Vagyis ez a numerikusan rendkívül kedvezőtlen eset akkor következne be, ha a két pályasík egymással, illetve a az égbolt síkjával is derékszöget zárna be. Mivel az általunk vizsgált *Kepler*-hármasok egyikében sem találtunk az $50^\mathrm{o} \leq i_\mathrm{m} \leq 130^\mathrm{o}$ köztesinklináció-tartományba eső hármas rendszert, ezt a lehetőséget kényelmesen figyelmen kívül hagyhattuk. Érdekességképpen azonban érdemes megjegyezni, hogy a mind a fedési kettősök, mind a szoros hierarchikus hármas csillagok körében az egyik legrégebben ismert, és legjobban tanulmányozott rendszer, az Algol (β Persei) csaknem megvalósítja ezt az extrém konfigurációt (ld. pl. Csizmadia és mktsai., 2009a). Ezen felül a 3.3. alfejezetben vizsgált egyik hipotetikus hármas rendszer, mégpedig az AS4 jelű szintén közel van ehhez az elrendeződéshez.

Most fordítsuk a figyelmünket a két kisebb gömbháromszög felé. E gömbháromszögek segítségével egyrészt megadható az invariábilis síknak az égbolt síkjához viszonyított helyzete, másrészt, és a gyakorlati szempontból ez a fontosabb, lehetővé teszik a pályasík precessziójának (azaz a dinamikai csomóvonal mozgásának) az észlelési koordináta-rendszerbe történő transzformálását. E háromszögek még ismeretlen szögei és oldalai például az alábbi egyszerű összefüggésekből számolhatók ki:

$$\begin{aligned}
\cos i_0 &= \frac{G_1}{C}\cos i_1+\frac{G_2}{C}\cos i_2, &(A.14)\\
\sin i_0 &= \sqrt{1-\cos^2 i_0}, &(A.15)\\
\cos h_1 &= \frac{G_1}{C}\frac{\sin i_1}{\sin i_0}\cos n_1-\frac{G_2}{C}\frac{\sin i_2}{\sin i_0}\cos n_2, &(A.16)\\
\sin h_1 &= \frac{\sin i_1}{\sin i_0}\sin n_1 = -\frac{\sin i_2}{\sin i_0}\sin n_2, &(A.17)\\
h_2 &= h_1+180^\mathrm{o}, &(A.18)\\
\cos j_1 &= \frac{G_1}{C}+\frac{G_2}{C}\cos i_\mathrm{m}, &(A.19)\\
\sin j_1 &= \frac{G_2}{C}\sin i_\mathrm{m}, &(A.20)
\end{aligned}$$

$$j_2 = i_\mathrm{m} - j_1, \tag{A.21}$$
$$\cos\Omega_1 = \frac{G_1}{C}\frac{\sin i_1}{\sin i_0} + \frac{G_2}{C}\frac{\sin i_2}{\sin i_0}\cos\Delta\Omega, \tag{A.22}$$

ahol $G_{1,2}$ a szoros (belső) és a tág (külső) pályában tárolt impulzusmomentum abszolút értékét jelenti, míg C az eredő impulzusmomentum, amely az alábbi formula szerint számolható:

$$C = G_2\sqrt{1 + 2\frac{G_1}{G_2}\cos i_\mathrm{m} + \left(\frac{G_1}{G_2}\right)^2}. \tag{A.23}$$

A dinamikai inklinációk és csomóvonalhosszak ismeretében az észlelői rendszerbeli (i_1, i_2) inklinációk (és így a dinamikai csomóvonalmozgás hatása a pályasíkok látszó helyzetére) ismét csak a megfelelő gömbháromszögtani azonosságok alapján számolhatók ki. Ezek szerint

$$\cos i_{1,2} = \cos i_0 \cos j_{1,2} - \sin i_0 \sin j_{1,2} \cos h_{1,2}, \tag{A.24}$$
$$\sin i_{1,2} = \sqrt{1 - \cos^2 i_{1,2}}, \tag{A.25}$$
$$\sin n_{1,2} = \frac{\sin i_0}{\sin i_{1,2}} \sin h_{1,2}, \tag{A.26}$$
$$\sin\Omega_{1,2} = \frac{\sin j_{1,2}}{\sin i_{1,2}} \sin h_{1,2}, \tag{A.27}$$
$$\cos\Omega_{1,2} = \frac{\cos j_{1,2} - \cos i_0 \cos i_{1,2}}{\sin i_0 \sin i_{1,2}} = \frac{\cos j_{1,2}\sin i_0 + \sin j_{1,2}\cos i_0 \cos h_{1,2}}{\sin i_{1,2}}, \tag{A.28}$$
$$\cos n_{1,2} = \frac{\cos\Omega_{1,2} - \sin h_{1,2}\sin n_{1,2}\cos j_{1,2}}{\cos h_{1,2}} = \cos h_{1,2}\cos\Omega_{1,2} + \sin h_{1,2}\sin\Omega_{1,2}\cos i_0. \tag{A.29}$$

Végezetül még az (A.24) azonosság felhasználásával néhány kvalitatív megjegyzést teszünk az egyes fedési kettősökben megfigyelhető fedésmélység-változás iránya és nagysága, valamint a pályasík-precesszió közti összefüggések vonatkozásában. A hivatkozott kifejezést deriválva, és figyelembe véve, hogy az invariábilis sík helyzete térben rögzített, azaz $i_0 \equiv 0$, további gömbháromszögtani azonosságok figyelembevételét követően arra az eredményre jutunk, miszerint

$$i_1 = \dot{j}_1 \cos n_1 - \dot{h}_1 \sin j_1 \sin n_1. \tag{A.30}$$

A j_1 dinamikai inklináció általában kicsi változásait elhanyagolva csak az utolsó tag marad. Ekkor könnyen látható, hogy az n_1-ben 180°-kal eltérő két megoldás általában eltérő irányú inklináció-, és így fedésmélység-változást eredményez, azaz az esetleg megfigyelhető fedésmélység-változás iránya valóban segítséget nyújthat a megoldás kétértelműségének feloldásában. (Ezalól azok az esetek jelenthetnek kivételt, ahol a két alternatív megoldásban $\cos i_1$ is előjelet vált.)

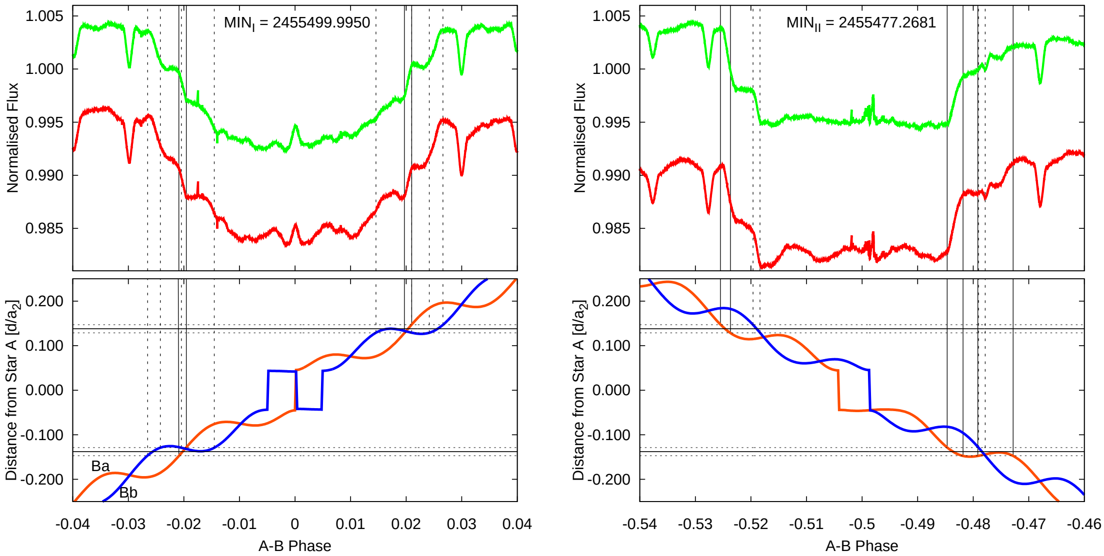
B. Függelék

Rendszerparaméterek meghatározása a külső fedésekből

E függelékben arra mutatok példát, hogy miképpen határozhatók meg egy triplán fedő hármas rendszer különféle orbitális, illetve asztrofizikai paraméterei részben kizárólag a távolabbi, harmadik komponens részvételével bekövetkező (továbbiakban: külső) fedéseknek, részben pedig a külső és a a szoros kettős két komponense közti hagyományos (a továbbiakban: belső) fedéseknek a fénygörbe lefutásából kikövetkeztethető geometriája segítségével. Szigorúan véve az alább ismertetendő paramétermeghatározó-eljárás használhatósága leginkább nem is csak egyszerűen a külső és belső fedések meglétén alapul, hanem azon a tényen, hogy a szoros kettős két csillaga az egymást követő külső fedések során az észlelő irányából nézve a harmadik komponenshez képest másképp helyezkedik el. Ily módon az egymást követő külső fedések egymástól alakban, hosszban, mélységben is különbözhetnek (illetve különböznek is), és ezáltal az ismeretlen paraméterek meghatározásához elegendő számú pillanatfelvételt (azaz független egyenletet) biztosítanak. A bemutatásra kerülő algoritmus természetes kiterjesztése annak az egyszerű, évszázados eljárásnak, amellyel fedési kettősök fajlagos sugarát lehet meghatározni a fedések négy kontaktusa között eltelt idők alapján (az inklináció mint ismeretlen paraméter függvényében).

Könnyen belátható, hogy két szférikus csillag alkotta kettős esetében a csillagkorongok középpontjának égboltra vetített távolsága a korongok első, illetve utolsó (külső) érintkezése (első és negyedik kontaktus) pillanatában $R_1 + R_2$, míg a belső érintkezés (a teljesség fázisának kezdete és vége, azaz a második és harmadik kontaktus) bekövetkeztekor $|R_1 - R_2|$. Másrészt a két korong középpontjának égboltra vetített távolsága kifejezhető a pályaelemek és az idő függvényeként is, és ily módon az első és negyedik, valamint (ha léteznek) a második és harmadik kontaktusok között eltelt idő megmérésével a két csillag fajlagos sugara kiszámítható. (Természetesen, ha a kettős részleges fedésű, akkor csak a két fajlagos sugár összegét határozhatjuk meg.)

A jelenleg vizsgált hármas rendszerben a külső fedések teljesek. A teljesség fázisa során az egyes külső fedések mintázata (legalábbis geometriai okokból) nem különbözik egymástól. (Ez a másodminimumok, azaz az okkultációk esetében triviális, hiszen ilyenkor csak a vörös óriás főkomponenset látjuk, azonban a szoros kettős főkomponens előtti átvonulásai, a főminimumok esetében nem magától értetődő dolog, hanem annak a következménye, hogy a három csillag felületi fényessége csaknem egyforma.) Ugyanakkor a külső fedések le-, illetve felszálló ágai meglehetősen összetett, és fedésről fedésre változó mintázatot mutatnak annak függvényében, hogy a két vörös törpe alkotta szoros kettős komponensei külön-külön vagy együtt lépnek-e be a vörös óriás korongja elé vagy mögé, illetve hogy eközben mekkora a vörös óriáshoz és egymáshoz viszonyított vetített távolságuk és sebességük (B.1. ábra).



B.1. ábra. A szoros kettős két komponensének égboltra vetített „keringője” a vörös óriás főcsillag előtt (balra), illetve mögött (jobbra). A felső sorban mutatott fő- illetve mellékminimumok azonosak, az 5.1a, illetve i, ábrákon láthatókkal. A szaggatott vízszintes vonalak a vörös óriás középpontjától mért $(R_\mathrm{A} \pm \overline{R_\mathrm{Ba,b}})/a_2$ relatív távolságokat mutatják, azaz ezeket a vonalakat metszik a szoros kettős komponenseinek relatív távolságait mutató narancs és kék vonalak a külső és belső kontaktusok pillanataiban. A két folytonos vízszintes vonal a vörös óriás komponens közepes fajlagos sugarát mutatja. A függőleges vonalak a szoros kettős két komponensének külső és belső kontaktusaihoz tartozó pillanatokat kötik össze.

Ugyanakkor, függetlenül attól, hogy mennyire összetett egy le-, illetve felszálló ág mintázata, nyilvánvaló, hogy minden egyes fedési eseménynek egy és csak egy kezdete és vége lehet, azaz a négyfajta kontaktus időpontja elvben egyértelműen meghatározható. Továbbá, hacsak valamely kontaktus pillanatában a fénygörbét nem változtatja el túlságosan egy éppen folyamatban lévő belső fedés, akkor azt is könnyen és egyértelműen megmondhatjuk, hogy a szoros kettős mely komponense vesz részt az éppen vizsgált kontaktusban. Például direkt keringés ($i_\mathrm{m} < 90^\mathrm{o}$) esetén a vörös óriás korongja előtti átvonulás (főminimum) esetében elsőként mindenképpen az a csillag éri el a főkomponens peremét, amely az érintkezést megelőző utolsó belső fedés során az észlelőhöz közelebb volt (azaz amely elfedte a társát), vagyis ha a külső főminimumot megelőző utolsó belső minimum történetesen főminimum volt (miként a B.1. ábrán), akkor az első kontaktusban a szoros kettős másodkomponense érintett.

Tekintsük a csillagkorongok középpontjainak égboltra vetített távolságait az egyes kontaktusok pillanataiban. Egy külső fedés esetén az elfedő és az elfedett csillag középpontjának távolsága (és így ennek égboltra eső vetülete is) két perturbálatlan[1] kéttest-mozgás, mégpedig a szoros kettős adott komponensének a kettős tömegközéppontja körüli mozgásának, illetve e tömegközéppontnak a vörös óriás komponens körüli relatív mozgásának az eredőjéből határozható meg. A mozgás leírásánál természetesen ismét a Jacobi-vektorokat célszerű használni. E vektorokkal a csillagok közti térbeli távolságok

$$\boldsymbol{d}_\mathrm{BaBb} = \boldsymbol{\rho}_1, \tag{B.1}$$

[1]Ez a jelen esetben igaz, azonban a legtöbb, a *Kepler* méréseiből talált triplán fedő rendszer esetében már nincs így, ld. pl. a 4.6.3. alfejezetet.

$$\boldsymbol{d}_{\rm BaA} = \boldsymbol{\rho}_2 + \frac{q_1}{1+q_1}\boldsymbol{\rho}_1, \tag{B.2}$$

$$\boldsymbol{d}_{\rm BbA} = \boldsymbol{\rho}_2 - \frac{1}{1+q_1}\boldsymbol{\rho}_1, \tag{B.3}$$

míg a vetített távolságok

$$d^{xy}_{\rm BaBb} = \rho_1\sqrt{1-\sin^2 i_1 \sin^2 u_1}, \tag{B.4}$$

$$d^{xy}_{\rm BaA} = \rho_2\left[1-\sin^2 i_2\sin^2 u_2 + 2\frac{q_1}{1+q_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\lambda - \sin i_1 \sin u_1 \sin i_2 \sin u_2\right) + \left(\frac{q_1}{1+q_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\left(1-\sin^2 i_1\sin^2 u_1\right)\right]^{1/2}, \tag{B.5}$$

$$d^{xy}_{\rm BbA} = \rho_2\left[1-\sin^2 i_2\sin^2 u_2 - 2\frac{1}{1+q_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\lambda - \sin i_1 \sin u_1 \sin i_2 \sin u_2\right) + \left(\frac{1}{1+q_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\left(1-\sin^2 i_1\sin^2 u_1\right)\right]^{1/2}, \tag{B.6}$$

ahol az asztrometriai és égi mechanikai konvenciókat megtartva az égbolt síkjának az xy sík felel meg, és a látóiránnyal egybeeső z tengely pozitív iránya az észlelőtől elfelé mutat. Az utolsó két kifejezésben megjelenő λ iránykoszinusz, mint az eddigiekben is, a $\boldsymbol{\rho}_1$, $\boldsymbol{\rho}_2$ rádiuszvektorok által bezárt szög koszinusza, azaz

$$\lambda = \cos w_1 \cos w_2 + \sin w_1 \sin w_2 \cos i_{\rm m}. \tag{B.7}$$

A hármas rendszer térbeli konfigurációjának meghatározása szempontjából az $i_{1,2}$ inklinációk mellett ez a kulcsparaméter, hiszen ebben jelenik meg közvetlenül az A. függelékben már részletesen tágyalt „mágikus” háromszög harmadik szöge ($i_{\rm m}$), illetve a ($w_{1,2}$ dinamikai valódi pálya menti hosszúságokon keresztül) két oldala ($n_{1,2}$) is.

Az általam vizsgált HD 181068 hármas rendszer esetében a (B.5), illetve (B.6) kifejezések az egybeeső pályasíkoknak, illetve a két körpályának köszönhetően sokkal egyszerűbb alakot vesznek fel. Az egysíkúság miatt ugyanis $\sin i_1 = \sin i_2$, illetve

$$\lambda = \cos(u_2 - u_1), \tag{B.8}$$

végül a körpályák pedig azt eredményezik, hogy $\rho_{1,2} \equiv a_{1,2}$.

A csillagok mérete és a fennmaradó pályaelemek közti függvénykapcsolat a fentiek alapján formálisan így írható:

$$R_{\rm A} \pm R_{\rm Ba,Bb} = a_2 f_{\rm Ba,Bb}(i_1, i_2, \Delta\Omega, q_1, a_1/a_2; u_1, u_2), \tag{B.9}$$

ahol a plusz és minusz jelek értelem szerint a külső, illetve a belső kontaktusok pillanataira vonatkoznak. Ezen túl a részleges belső fedések külső kontaktusaira is felírható a jól ismert

$$R_{\rm Ba} + R_{\rm Bb} = a_1 f_{\rm Bab}(i_1; u_1) \tag{B.10}$$

függvénykapcsolat. Megjegyzendő, hogy a (B.9) egyenlet felírásánál csak a két pálya kör alakját használtuk ki, a formula a két pályasík tetszőleges elhelyezkedése mellett is érvényes. Az ebben a függelékben eddig nem említett $\Delta\Omega$ paraméter használata az $i_{\rm m}$ köztes inklináció (illetve a redundáns $n_{1,2}$ ívhosszak helyett) azzal indokolható, hogy a megfelelő gömbháromszögtani összefüggések használatával (ld. pl. az [1.32] egyenletet) ezek meghatározzák egymást. A fenti kifejezésben az idő az $u_{1,2}$ független változókban van elrejtve.

Ismeretes (ld. pl. a 1.2.3. szakaszban), hogy körpályák esetében a minimumok a szélességi argumentum $u = \pm 90^o$ értékénél következnek be. Könnyen belátható, de a későbbiekben némi odafigyelést igényel az a tény, hogy míg a szoros kettős esetében a főminimum során $u_1 = 270^o$, addig a külső minimumoknál fordul a helyzet, azaz a külső főminimumok közepén $u_2 = 90^o$. Figyelembe véve, hogy körpályákról lévén szó, u időben lineárisan változik, a szélességi argumentum könnyen kifejezhető közvetlenül akár a fotometriai fázissal, akár az idővel. Eszerint, $u_i(t) = 360^o \times \phi_i \mp 90^o$ vagy pedig $u_i(t) = \frac{2\pi}{P_i}(t - T_{0i}) \mp \frac{\pi}{2}$, ahol $i = 1$-re a felső, $i = 2$-re pedig az alsó relációs jelek érvényesek.

A külső minimumok esetében a $(T_0)_2$ referencia-időpontnak, vagyis egy kiszemelt főminimum középidejének a meghatározása némi nehézséget okozhat. A szoros kettős fiktív tömegközéppontja ugyanis nem feltétlenül az adott fedési esemény első és utolsó kontaktusa közti félidőben halad át a vörös óriás centrálmeridiánján. Szerencsére akár a vörös óriás komponensre elérhető radiálissebesség-mérések (Derekas és mktsai., 2011), akár az 5.3. ábrán bemutatott fénygörbe-átlagolási technika segítségével a referencia-időpont mégis kielégítő pontossággal meghatározható.

A következő lépésben használjuk ki azt az alapvető különbséget egy közönséges fedési kettőscsillag, illetve a mi triplán fedő rendszerünk között, amire a bevezetőben már utaltam. A közönséges fedési kettősök esetében az egyes kontaktusok fedésről fedésre ugyanannál az orbitális fázisnál következnek be (legalábbis azon a időskálán, amelyen a kettős mozgását érintő esetleges perturbációk elhanyagolhatók). Továbbá, körpálya esetén a fedési geometria teljesen szimmetrikus a fedés középidejére nézve. Ezért ekkor $\sin^2 u_I \equiv \sin^2 u_{IV}$, és hasonló egyenlőség írható fel a belső kontaktusok esetére is. Következésképpen csupán egy-egy egyenletünk lesz $\frac{R_1+R_2}{a}$-ra, illetve $\frac{R_1-R_2}{a}$-ra s így az inklinációfüggés feloldására további, a fedési geometrián túlmutató összefüggések figyelembevételére is szükség van. Ezzel szemben, a triplán fedő rendszerek külső fedései esetében a különféle kontaktusok pillanataiban fennálló geometriai helyzet fedésről fedésre változik, mégpedig nemcsak fedésről fedésre, de egyetlen fedésen belül is, így még körpálya esetén sem áll fenn elfajulást okozó szimmetria egy fedési esemény részleges, illetve teljességi fázisainak kezdő és záró kontaktusai között. Következésképp, elegendő számú külső fedés megfigyelése esetén meghatározható annyi, a (B.9) egyenleteket kielégítő u_1, illetve u_2 érték, amelyek felhasználásával a (B.9) egyenletekben szereplő ismeretlen paraméterek numerikus, vagy akár algebrai úton meghatározhatók.

Érdemes hozzátenni azt is, hogy mivel a jelen esetben a külső fedések teljesek, ezért a három csillag fajlagos sugara külön-külön a (B.10) összefüggés használata nélkül is megkapható lenne, vagyis akkor is, ha szoros kettős nem mutatna fedéseket. Ugyanakkor, amennyiben mind a belső, mind a külső fedések részlegesek lennének, a (B.10) összefüggés használatával ebben az esetben is képesek lennénk mindhárom csillag fajlagos sugarát is meghatározni.

Ezen felül, ha egyszer az a_1/a_2 arány már ismert, akkor Kepler III. törvényének felhasználásával a tág alrendszer q_2 tömegaránya szintén kiszámolható, hiszen

$$\frac{q_2}{1+q_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2. \tag{B.11}$$

Az alábbiakban egy külön példán mutatom be a módszer működését. A B.1. táblázatban a $Q7 - Q9$ SC adatsorral megegyező pontokban kiszámolt megoldásfénygörbén előforduló külső mellékminimumok a fénygörbéből meghatározható kontaktusidőpontjait soroltam fel. A mellékminimumok használata azért előnyösebb, mert ebben az esetben, okkultációról lévén szó, a vörös óriás komponens szélsötétedése nem befolyásolja előnytelenül a kontaktusidőpontok (különösen a belső kontaktusok) meghatározásának pontosságát. Az

B.1. táblázat. A külső mellékminimumoknak a $Q7 - Q9$ SC szintetikus fedési fénygörbéből kimérhető kontaktusidőpontjai

ciklusszám	kontaktus	komponens	MBJD	u_1	u_2
-0,5	I	Ba	55476,1096	313°,75441	260°,89609
	II	Bb	55476,4245	78°,92486	263°,38919
	III	Ba	55477,9677	332°,33560	275°,60691
	IV	Ba	55478,4722	172°,87067	279°,60111
0,5	I	Ba	55521,5177	3°,14288	260°,39810
	II	Ba	55522,0279	205°,94365	264°,43742
1,5	III	Bb	55568,9434	134°,51263	275°,87372
2,5	I	Bb	55612,4733	157°,33030	260°,50577
	II	Bb	55612,9903	2°,83403	264°,59893
	III	Bb	55614,3571	186°,12706	275°,42007
3,5	II	Bb	55658,3965	51°,46726	264°,08590
	III	Ba	55659,9241	298°,67710	276°,18012
	IV	Bb	55660,2422	65°,11954	278°,69856
4,5	I	Ba	55703,4516	320°,54080	260°,79316
	II	Bb	55703,7629	84°,28028	263°,25777
	III	Ba	55705,3125	340°,23499	275°,52616
	IV	Ba	55705,8234	183°,31398	279°,57102

utolsó oszlopból látható, hogy az u_2 szélességi argumentum értéke fedésről fedésre kontaktusonként csupán néhány tized fokkal változik. Noha ez igen kicsi változásnak tűnik, tartsuk szem előtt, hogy egy tipikusnak mondható 0°,5 fokos elcsúszás az adott esemény bekövetkezési idejében közel másfél órás eltérést takar.

A táblázatból kiderül, hogy a Ba komponens esetében három-három *különböző* külső- és belsőkontaktus-időpontot tudtunk meghatározni, míg a Bb komponensre mindkét fajtából kettő-kettő áll rendelkezésre. Szándékosan használtam a *különböző* megkötést, ugyanis az $E = -0{,}5$ és $E = 4{,}5$ ciklusszámú események ugyanahhoz a fedési „családhoz” tartoznak így azokat, miután mind az u_1 és u_2 értékeikben nagyon közel állnak egymáshoz, nem számítottam külön eseménynek. Szerencsére így is elegendő számú egyenletet írhatunk fel.

Lássunk egy konkrét számítást! Az $E = -0{,}5$ fedés első és utolsó, valamint az $E = 0{,}5$ esemény első kontaktusát használva, a megfelelő $u_{1,2}$ értékeket a (B.5) kifejezésbe helyettesítve, és az így kapott egyenletek négyzeteit egymásból kivonva három különböző egyenletet kapunk, amelyekből nekünk kettőre lesz szükségünk. Például az első egyenletből a másodikat, illetve a harmadikat kivonva kapjuk az alábbiakat:

$$\sin^2 i\left(\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2\right) + \delta_2 x = 0, \tag{B.12}$$

$$\sin^2 i\left(\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 x^2\right) + \delta_3 x = 0, \tag{B.13}$$

ahol

$$x = \frac{a_{\mathrm{Ba}}}{a_2}, \tag{B.14}$$

és

$$\alpha_{2,3} = (\sin^2 u_2)_1 - (\sin^2 u_2)_{2,3}, \tag{B.15}$$

$$\beta_{2,3} = 2[(\sin u_1)_1(\sin u_2)_1 - (\sin u_1)_{2,3}(\sin u_2)_{2,3}], \tag{B.16}$$

B.2. táblázat. A fedési geometriából nyert algebrai megoldás összevetése az eredeti értékekkel

paraméter	felhasznált kontaktusok	számolt	eredeti
a_{Ba}/a_2	$(\mathrm{I,IV})_{-0,5}$,$\mathrm{I}_{0,5}$	0,023	0,026
i	$(\mathrm{I,IV})_{-0,5}$,$\mathrm{I}_{0,5}$	$83\overset{\circ}{,}7$	$86\overset{\circ}{,}7/87\overset{\circ}{,}5$
a_{Bb}/a_2	$\mathrm{II}_{-0,5}$,$\mathrm{III}_{1,5}$,$\mathrm{I}_{2,5}$,$\mathrm{IV}_{3,5}$	0,027	0,029
i	$\mathrm{II}_{-0,5}$,$\mathrm{III}_{1,5}$,$\mathrm{I}_{2,5}$,$\mathrm{IV}_{3,5}$	$87\overset{\circ}{,}0$	$86\overset{\circ}{,}7/87\overset{\circ}{,}5$
q_1		0,85	0,95
a_1/a_2		0,049	0,053
q_2		0,439	0,545
R_{A}/a_2	Ba-ból	0,170	0,138
R_{A}/a_2	Bb-ből	0,139	0,138
R_{Ba}/a_2		0,009	0,010
R_{Bb}/a_2		0,010	0,009

$$\gamma_{2,3} = (\sin^2 u_1)_1 - (\sin^2 u_1)_{2,3}, \tag{B.17}$$
$$\delta_{2,3} = 2[\cos(u_1 - u_2)_{2,3} - \cos(u_1 - u_2)_1]. \tag{B.18}$$

A δ tagokat eliminálva, illetve figyelembe véve, hogy $\sin^2 i \neq 0$, x-re másodfokú egyenletet kapunk. Ennek megoldását követően az i inklináció a két egyenlet bármelyikéből megkapható. Ezután hasonló eljárás követhető a Bb komponens esetében is. Egy apró, az elvet nem érintő különbség, hogy mivel csak két olyan külsőkontaktus-időpont elérhető, amelyben a Bb komponens érintett, a (B.12, B.13) kifejezésekkel analóg különbségek előállításához két külső-, illetve két belsőkontaktus-időpont használatára van szükség. (Ugyanakkor hozzá kell tenni, hogy miután az előző lépésben már sikerült az i inklinációt meghatározni, elvben a két különbség egyike is elegendő lenne.) Ily módon az a_{Ba}/a_2, illetve az a_{Bb}/a_2 arányokat meghatározva mind a q_1 tömegarány, mind a két relatív pálya a_1/a_2 aránya közvetlenül adódik. Ez utóbbiból pedig a (B.11) egyenlet alapján a tág pálya q_2 tömegaránya is kiszámítható. Végezetül, miután immáron a (B.9) kifejezések jobb oldalain található $f_{\mathrm{Ba,Bb}}$ függvények konkrét értékeit ismerjük az összes fedési esemény időpontjára, a három csillag fajlagos sugarának meghatározására többféle kombinációs lehetőség áll rendelkezésünkre. A már felhasznált fedési eseményeknél maradva, például először R_{A}/a_2-t, illetve $R_{\mathrm{Bb}}/a_2/(a_1/a_2)$-t határozzuk meg a Bb komponensre felhasznált egyik külső-, illetve belsőkontaktus-időpontra felírt egyenletek segítségével, majd ezt követően $R_{\mathrm{Ba}}/a_2/(a_1/a_2)$ meghatározásához már csupán egyetlen kontaktusidőpontra kiszámolt egyenletre van szükségünk. Ezenfelül könnyen látható, hogy amennyiben használjuk a belső fedések külső kontaktusaira érvényes (B.10) kifejezést is, egyáltalán nincs szükség belsőkontaktus-időpontok használatára, azaz a módszerünk működne tisztán részleges fedésű hármas rendszerek esetére is. A fenti számolás révén kapott numerikus értékeket a B.2. táblázatban foglalom össze, ahol összehasonlításképpen megadom a paraméterek eredeti (a szintézisfénygörbe előállításánál használt) értékeit is.

Befejezésül, ezeket az eredményeket akár a fényidőmegoldásból adódó, fizikai egységekben megkapott $a_{\mathrm{B}} \sin i$, akár a radiálissebesség-görbéből meghatározott, szintén fizikai egységekben adódó $a_{\mathrm{A}} \sin i$ vetített pályamérettel kombinálva a három csillag tömege, illetve sugara fizikai egységekben is megkapható. Ily módon levonhatjuk a következtetést, miszerint egy triplán fedő hármas rendszer esetében pusztán a fedések nagy pontosságú fotometriai mérése (akár egyetlen hullámsávban is) elvben lehetővé teszi a rendszer szinte minden orbitális, valamint a legfontosabb asztrofizikai paramétereinek meghatározását.

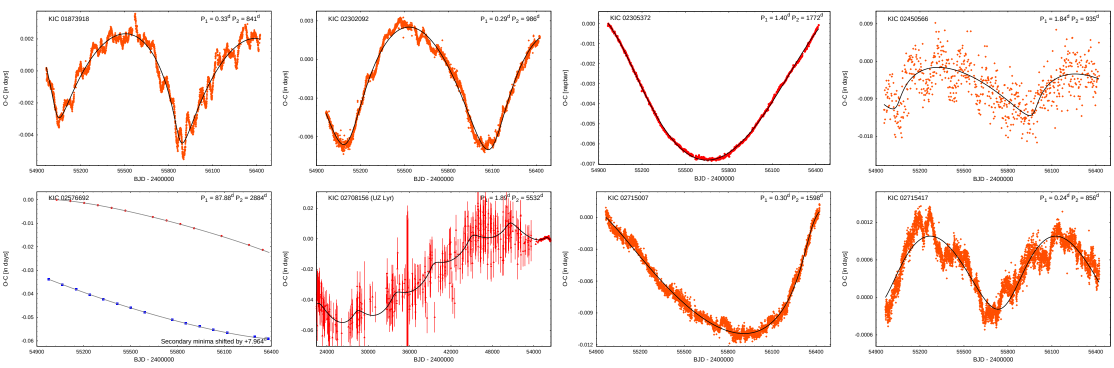
Természetesen fontos hangsúlyozni, hogy amennyiben a két pálya nem esik egy síkba, illetve a pályák valamelyike, vagy mindkettő excentrikus, a változók száma megnövekszik, a köztük lévő függvénykapcsolat pedig bonyolultabbá válik, így egyrészt több független egyenletre, azaz több kontaktusidőpontra van szükség, másrészt pedig a fent bemutatott egyszerű, tisztán algebrai eljárás helyett numerikusan lehet csak meghatározni a rendszer geometriai paramétereit. Mindez azonban csak gyakorlati nehézséget jelent, a lényeget, miszerint a külső fedésekből mindezek a mennyiségek elvben meghatározhatók, ez nem befolyásolja.

C. Függelék

221 *Kepler*-hármas jelölt fedésiminimumidőpont-változása – *O-C* görbék és harmadiktest-megoldások

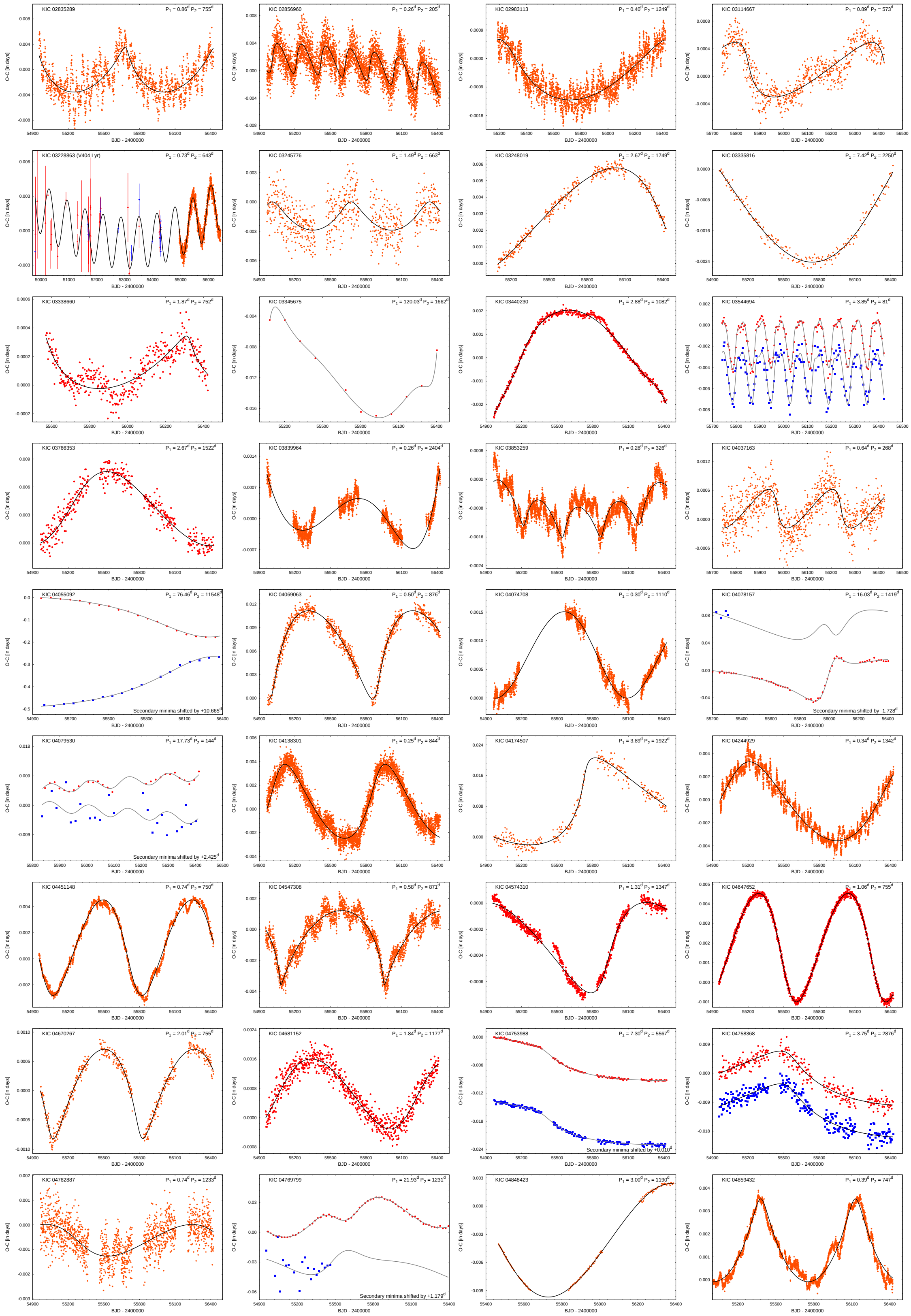
Ebben a mellékletben a 4. fejezetben vizsgált, az eredeti *Kepler*-misszió során felfedezett 222 hierarchikushármas-jelölt közül 221-nek az ETV görbéjét mutatom be, a háromtest-megoldás elméleti görbéjével (azaz az illesztett görbével) együtt. Az egyetlen kimaradt hármas rendszer a KIC 05897826, amely esetében a dolgozat megfelelő helyén részletezett okokból nem lehetett fedésiminimum-időpontokat meghatározni.

A főminimumokat piros körök, a mellékminimumokat kék négyzetek, míg az átlagolt görbéket élére állított narancs négyszögek jelölik. Ahol az illesztéshez földfelszíni észleléseket is felhasználtam, ezeket fölfelé néző piros, illetve lefelé néző kék háromszögekkel jelöltem, és ezek esetében az észlelők által megadott, vagy általam becsült random hibát (vagy szórást) is bejelöltem. Azt, hogy mely szempontok alapján használtam a megoldáshoz az átlagolt ETV-t, vagy pedig az eredeti fő- és mellékminimumokra számolt ETV-ket, a 4.4. alfejezetben tárgyaltam, és ugyanezt az egyes rendszerekre lebontva (az illesztés egyéb részleteivel együtt) a 4.1. táblázatban is megadtam. Azokban az esetekben, ahol csak fényidőmegoldást számoltam, az illesztett görbét feketével rajzoltam be, a komplex, dinamikai és fényidőmegoldású rendszerek esetében pedig a megoldásgörbe szürke. Ugyanakkor a harmadiktest-megoldáson felüli esetleges négyzetes vagy köbös polinomillesztéseket nem jeleztem külön, az erre vonatkozó információk a 4.1. táblázat 10. oszlopában olvashatók.

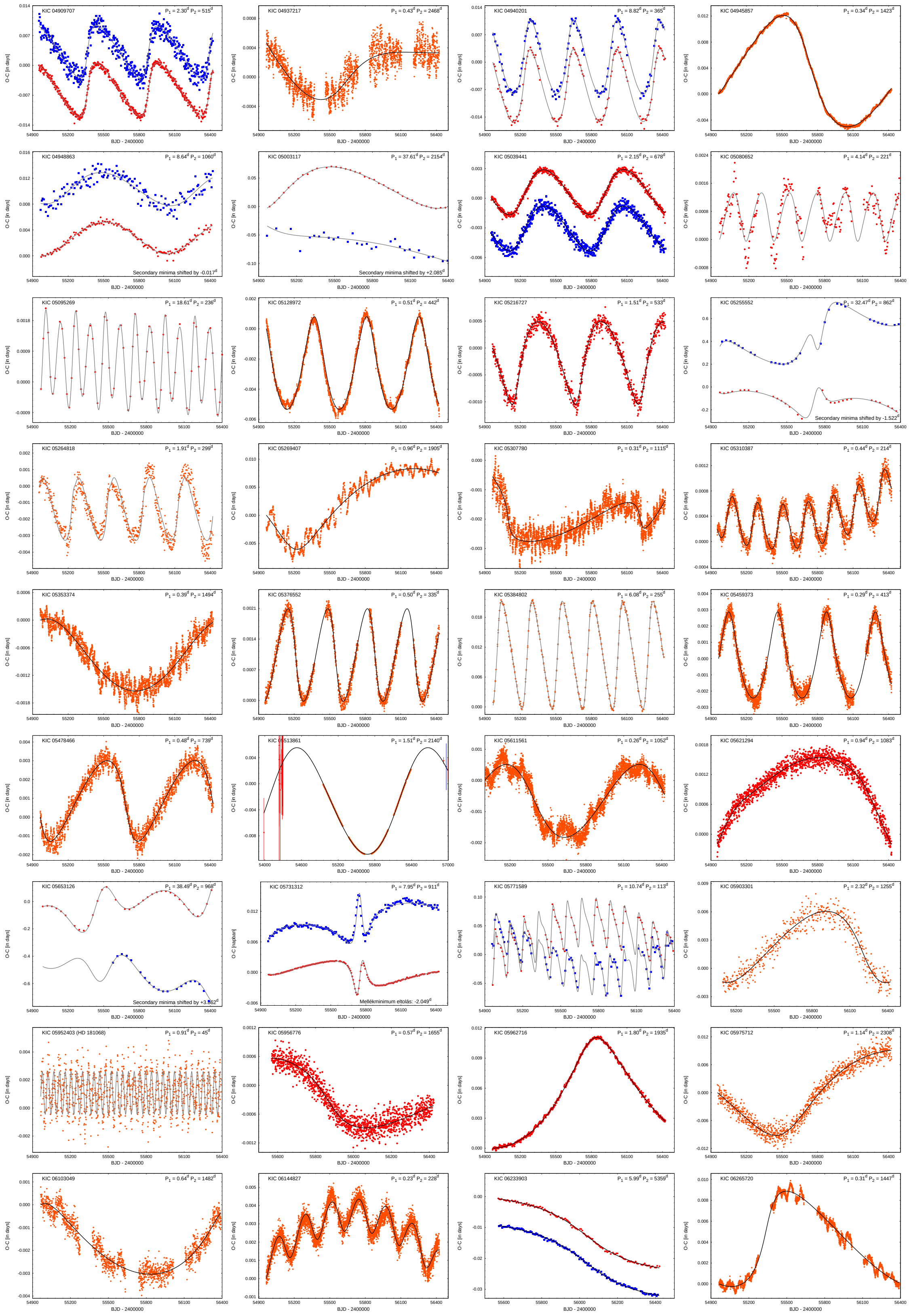


C.1. ábra. KIC 01873918 – KIC 02715417

dc_1364_16

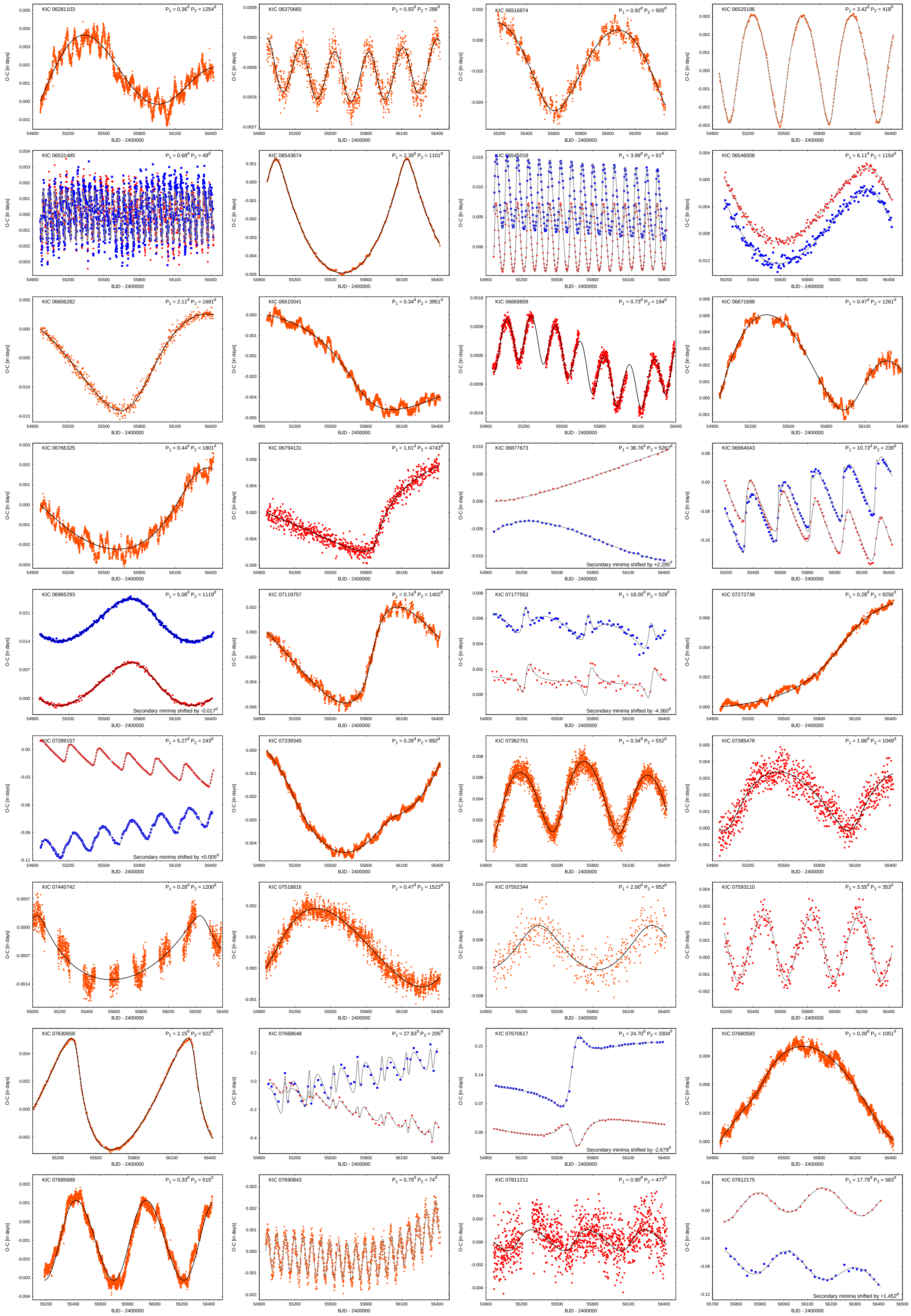


C.2. ábra. KIC 02835289 – KIC 04859432

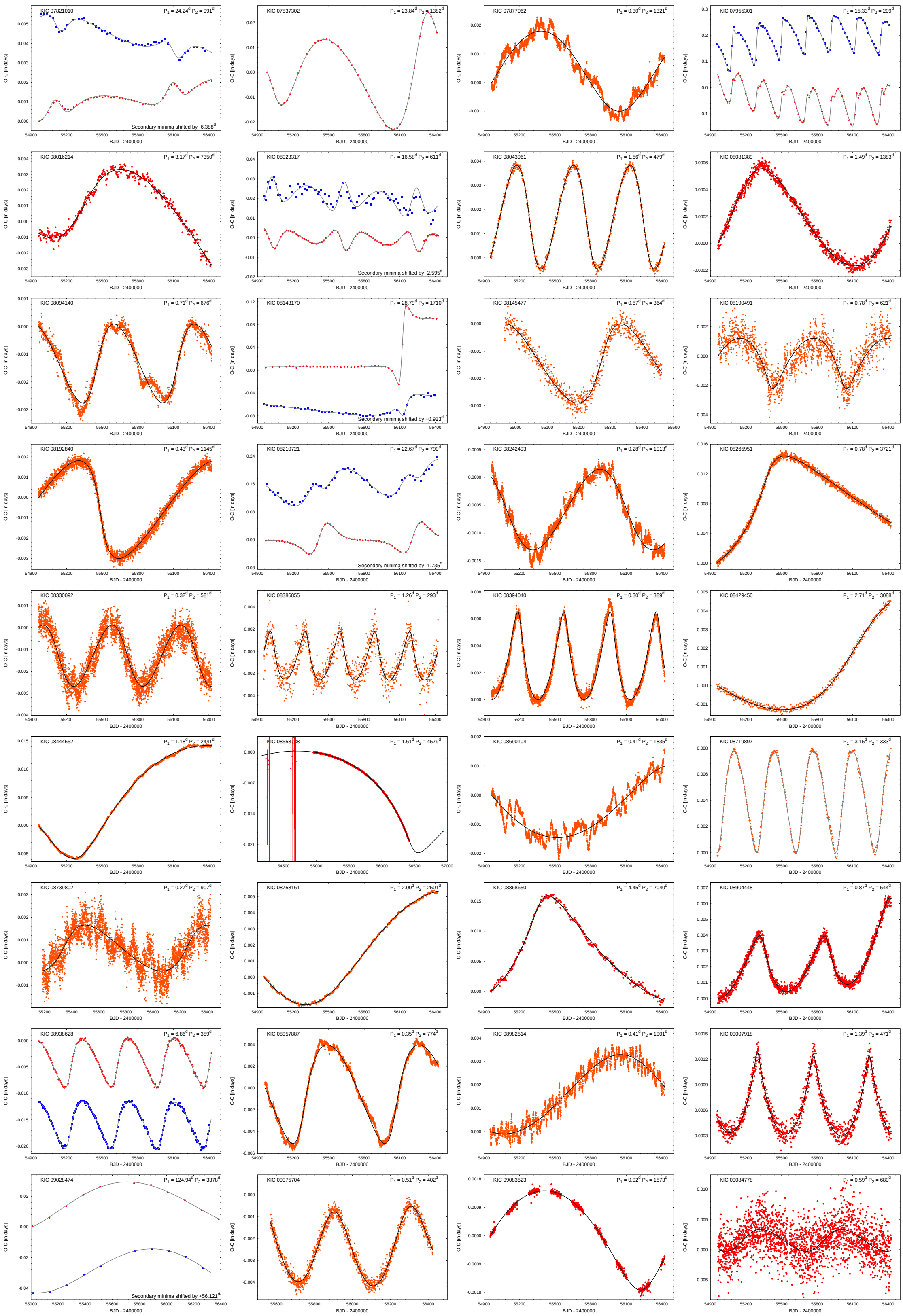


C.3. ábra. KIC 04909707 – KIC 06265720

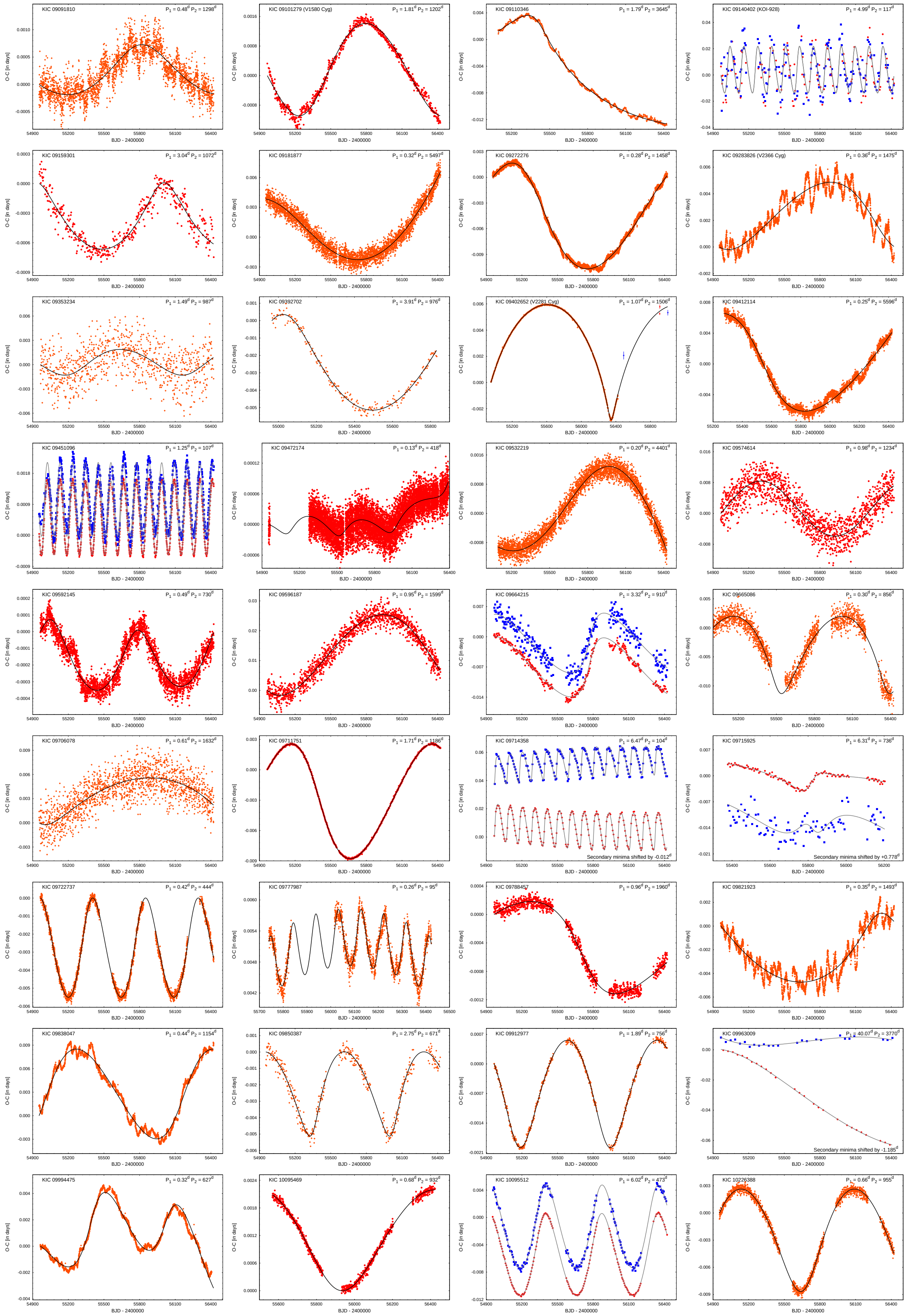
dc_1364_16



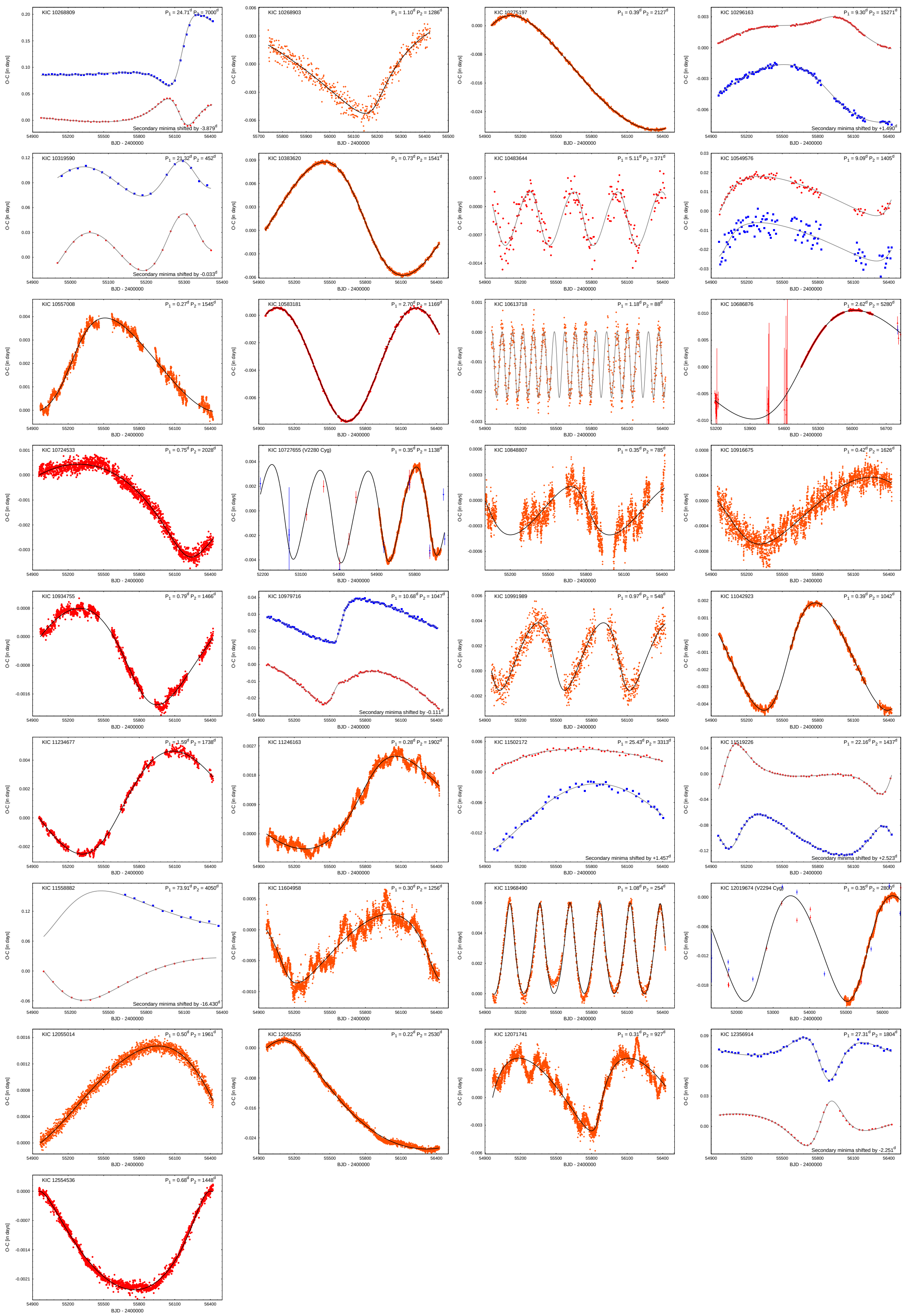
C.4. ábra. KIC 06281103 – KIC 07812175



C.5. ábra. KIC 07821010 – KIC 9084778



C.6. ábra. KIC 09091810 – KIC 10226388



C.7. ábra. KIC 10268809 – KIC 12554536

Irodalomjegyzék

Abt, H.A., Levy, S.G., 1978, ApJS, 36, 241
Aerts, C., 2007, IAUS, 240, 432
Albrecht, S., Reffert, S., Snellen, I. A. G., Winn, J. N., 2009, Nature, 461, 373
Applegate, J. H., 1992, ApJ, 385, 621
Armstrong, D. és mktsai., 2012, A&A, 545, L4
Auvergne, M., Bodin, P., Boisnard, L. és további 107 szerző, A&A, 506, A411
Avni, Y., 1976, ApJ, 209, 574
Awadalla, N., Chochol, D., Hanna, M., Pribulla, T., 2004, Contrib. Astr. Obs. Skal. Pleso, 34, 20
Baptista, R., Steiner, J. E., 1993, A&A, 277, 331
Baran, A. S., Zola, S., Blokesz, A., Østensen, R., Silvotti, R., 2015, A&A, 577, A146
Batalha, N.M., Borucki, W.J., Koch, D.G, és mktsai. 2010, ApJ, 713, L109
Batten, A. H., 1973, *Binary and multiple systems of stars*, (International series of monographs in natural philosophy ; v. 51), Pergamon Press,
Beust, H., Corporon, P., Siess, L., Forestini, M., Lagrange, A.-M., 1997, A&A, 320, 478
Binnendijk, L., 1965, Kleine Veroff. Bamberg, 4, No. 40, 36
Bíró, I. B., Nuspl, J., 2011, MNRAS, 416, 1601
Borkovits, T., 2002, *A forgási-, illetve az árapálytorzultság hatása a hierarchikus hármas csillagrendszerek dinamikai evolúciójára*, PhD disszertáció, ELTE Fizika Doktori Iskola, BKKM Önk. Csillagvizsgáló Intézete, Baja, 2002
Borkovits, T., 2003, Proc. of the „3rd Austrian-Hungarian Workshop on Trojans and Related Topics", held at Vienna, 2002 May 13-15th, (Freistetter, F., Dvorak, R., Érdi, B. eds.), p. 161
Borkovits, T., Bíró, I. B., 1999, A&A, 349, 515
Borkovits, T., Hegedüs, T., 1996, A&AS, 120, 63
Borkovits, T., Csizmadia, Sz., Hegedüs, T., Bíró, I.B., Sándor, Zs., Opitz, A., 2002, A&A, 392, 895
Borkovits, T., Érdi, B., Forgács-Dajka, E., Kovács, T., 2003, A&A, 398, 1091
Borkovits, T., Forgács-Dajka, E., Regály, Zs., 2004, A&A, 426, 951
Borkovits, T., Elkhateeb, M. M., Csizmadia, Sz., Nuspl, J., Bíró, I. B., Hegedüs, T., Csorvási, R., 2005a, A&A, 441, 1087
Borkovits, T., Forgács-Dajka, E., Regály, Zs., 2005b, ASP Conf. Ser., 333, 128
Borkovits, T., Forgács-Dajka, E., Regály, Zs., 2007, A&A, 473, 191
Borkovits, T., Csizmadia, Sz., Forgács-Dajka, E., Hegedüs, T., 2011, A&A, 528, A53
Borkovits, T., Derekas, A., Kiss, L. L., Király, A., Forgács-Dajka, E., Bíró, I. B., Bedding, T. R., Bryson, S. T., Huber, D., Szabó, R., 2013, MNRAS, 428, 1656
Borkovits, T., Derekas, A., Fuller, J., Szabó, Gy. M., Pavlovski, K., Csák, B., Dózsa, Á., Kovács, J., Szabó, R., Hambleton, K. M., Kinemuchi, K., Kolbas, V., Kurtz, D. W., Maloney, F., Prša, A., Southworth, J., Sztakovics, J., Bíró, I. B., Jankovics, I., 2014, MNRAS, 443, 3068
Borkovits, T., Rappaport, S., Hajdu, T., Sztakovics, J., 2015, MNRAS, 448, 946
Borkovits, T., Hajdu, T., Sztakovics, J., Rappaport, S., Levine, A., Bíró, I. B., Klagyivik, P. 2016, MNRAS, 455, 4136
Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G. és további 68 szerző, Science, 327, 977
Brown, E. W., 1936, MNRAS, 97, 62
Carter, J. A., Fabrycky, D. C., Ragozzine, D. és további 20 társszerző, 2011, Science, 331, 562
Chandler, S.C., 1892, AJ, 11, 113
Chandrasekhar, S., 1933, MNRAS, 93, 539
Claret, A., 1998, A&A, 330, 533
Claret, A., Gimènez, A., 1991, A&AS, 91, 217
Claret, A., Gimènez, A. 1991, A&AS, 96, 255
Claret, A., Willems, B., 2002, A&A, 388, 518
Company, R., Portilla, M., Gimenez, A., 1988, ApJ, 335, 962

Conroy, K. E., Prša, A., Stassun, K. G., Orosz, J. A., Fabrycky, D. C., Welsh, W. F. 2014, AJ, 147, 45
Conroy, K. E., Prša, A., Stassun, K. G., Orosz, J. A., 2015, IBVS, 6138
Copperwheat, C. M., Marsh, T. R., Littlefair, S. P., Dhillon, V. S., Ramsay, G., Drake, A. J., Gänsicke, B. T., Groot, P. J., Hakala, P., Koester, D., Nelemans, G., Roelofs, G., Southworth, J., Steeghs, D., Tulloch, S., 2011, MNRAS, 410, 1113
Cowling, T. G., 1938, MNRAS, 98, 734
Csák, B., Kovács, J., Szabó, Gy.M., Kiss, L.L., Dózsa, Á., Sódor, Á., Jankovics, I., 2014, Contr.Astr.Obs.Skal.Pleso, 43, 183
Csizmadia, Sz., 2009, Fizikai Szemle, 59, 49
Csizmadia, Sz., Klagyivik, P., 2004, A&A, 426, 1001
Csizmadia, Sz., Sándor, Zs., 2001, IBVS, 5045
Csizmadia, Sz., **Borkovits, T.**, Paragi, Zs., Ábrahám, P., Szabados, L., Mosoni, L., Sturmann, L., Sturmann, J., Farrington, C., McAlister, H. A., ten Brummelaar, T. A., Turner, N. H., Klagyivik, P., 2009a, ApJ, 705, 436
Csizmadia, Sz., Illés-Almár, E., **Borkovits, T.**, 2009b, New Astr., 14, 413
D'Antona, F., Mazzitelli, I., 1994, ApJS, 90, 467
Deeg, H. J., Moutou, C., Erikson, A., Csizmadia, Sz. és további 57 társszerző, 2010, Nature, 464, 384
Derekas, A., Kiss, L. L., **Borkovits, T.** és további 41 társszerző, 2011, Science, 332, 216
Derekas, A., Németh, P., Southworth, J., **Borkovits, T.**, Sárneczky, K., Pál, A., Csák, B., Garcia-Alvarez, D., Maxted, P. F. L., Kiss, L. L., Vida, K., Szabó, Gy. M., Kriskovics, L., 2015, ApJ, 808, 179
Drechsel, H., Haas, S., Lorenz, R. és Mayer, P., 1994, A&A, 284, 853
Duchêne, G., Kraus, A., 2013, ARA&A, 51, 269
Duquennoy, A., Mayor, M., 1991, A&A, 248, 485
Eaton, J. A., 2016, MNRAS, 457, 836
Eddington, S. A., 1924, MNRAS, 84, 308
Eggleton, P. P., Tokovinin, A. A., 2008, MNRAS, 389, 869
Érdi B., 1989, *Égi mechanika*, Tankönyvkiadó, Budapest
Érdi B., 1989, *Mesterséges holdak mozgása*, Tankönyvkiadó, Budapest
Fabrycky, D., 2010, in: Exoplanets (Ed.: Seager, S.), Univ. of Arizona Press, pp. 217-238 (arXiv:1006.3834)
Fabrycky, D., Tremaine, S., 2007, ApJ, 669, 1298
Faigler, S., Mazeh, T., Quinn, S. N., Latham, D. W., Tal-Or, L., 2012, ApJ, 746, 185
Ford, E. B., Kozinsky, B., Rasio, F. A., 2000, ApJ, 535, 385
Frieboes-Conde, H., Herczeg. T., 1973, A&AS, 12, 1
French, L. M., 2012, JAAVSO, 40, 1
Fuller, J., Derekas, A., **Borkovits, T.**, Huber, D., Bedding, T. R., Kiss, L. L., 2013, MNRAS, 429, 2425
Gamarova, A. Yu., Mkrtichian, D. E., Rodriguez, E., Costa, V., Lopez-Gonzalez, M. J., 2003, ASPC, 292, 369
Gaulme, P., McKeever, J., Rawls, M. L., Jackiewicz, J., Mosser, B., Guzik, J. A., 2013, ApJ, 767, 82
Gies, D. R., Williams, S. J., Matson, R. A., Guo, Z., Thomas, S. M., Orosz, J. A., Peters, G. J., 2012, AJ, 143, 137
Gies, D. R., Matson, R. A., Guo, Z., Lester, K. V., Orosz, J. A., Peters, G. J., 2015, AJ, 150, 178
Giménez, A., 1985, ApJ, 297, 405
Giménez, A., Garcia-Pelayo, J. M., 1983, Ap&SS, 92, 203
Goodricke, J., 1783, Phil. Trans. of Roy. Soc., 73, 474
Goupil, M.-J., Dziembowski, W. A., Pamyatnykh, A. A., Talon, S., 2000, ASPC, 210, 267
Guinan, E. F., Maloney, F. P., 1985, AJ, 90, 1519
Hadrava P., 1995, A&AS, 114, 393
Hall, D. S., 1989, SpaceSci.Rev., 50, 219
Hambleton, K. M. és mktsai., 2013, MNRAS, 434, 925
Hareter, M., Paparó, M., Weiss, W., García Hernández, A.,**Borkovits, T.**, Lampens, P., Rainer, M., De Cat, P., Marcos-Arenal, P., Vos, J., Poretti, E., Baglin, A., Michel, E., Baudin, F., Catala, C., 2014, A&A, 567, A124
Harrington, R.S. 1968, AJ, 73, 190
Harrington, R.S. 1969, Cel Mech, 1, 200
Hegedüs, T., 1996, *Gravitációelméletek tesztelése fedési kettőscsillagok apszismozgásának vizsgálatával*, Egyetemi doktori disszertáció, ELTE
Hegedüs, T., Nuspl, J., 1986, Acta Astron., 36, 381
Hilditch, R.W., 1972a, MemRAS, 76, 141
Hilditch, R. W., 1972b, PASP, 84, 519
Hill, G. W., 1878a, American Journal of Mathematics, 1, 5
Hill, G. W., 1878b, American Journal of Mathematics, 1, 129

Hill, G. W., 1878c, American Journal of Mathematics, 1, 245
Holman, M. J., Murray, N. W. 2005, Science, 307, 1288
Holman, M., Touma, J., Tremaine, S., 1997, Nature, 386, 254
Irwin, J. B., 1952, ApJ, 116, 211
Irwin, J. B., 1959, AJ, 64, 149
Jeans, J. H., 1919, Nature, 103, 64
Jefferys, W. H., Moser, J., 1966, AJ, 71, 568
Kalimeris, A., Rovithis-Livaniou, H., Rovithis, P., 2002, A&A, 387, 969
Kallrath, J., Milone, E. F., 2009, *Eclipsing Binary Stars: Modeling and Analysis*, Astronomy and Astrophysics Library, Second Edition, Springer-Verlag, New York
Kaplan, D. L., 2010, ApJ, 717, L108
Khaliullin, Kh., F., Kozyreva, V.S., 1983, Ap&SS, 94, 115
Khodykin, S. A., Vedeneyev, V. G., 1997, ApJ, 475, 798
Khodykin, S. A., Zakharov, A. I., Andersen, W. L., 2004, ApJ, 615, 506
Kiseleva, L. G., Eggleton, P. P., Mikkola, S., 1998, MNRAS, 300, 292
Klagyivik, P., Csizmadia, Sz., 2004, ASP Conf. Ser., 318, 195
Kopal, Z., 1955, Annales d'Astrophysique, 18, 379
Kopal, Z., 1978, *Dynamics of Close Binary Systems*, D. Reidel Pub.
Kopal, Z., 1979, *Language of the Stars*, D. Reidel Pub.
Kozai, Y., 1962, AJ, 67, 591
Kuiper, G. P., 1941, ApJ, 93, 133
Kuiper, G. P., 1948, ApJ, 108, 541
Lacy, C. H. S., Torres, G., Claret, A., Sabby, J. A., 2003, AJ, 126, 1905
LaCourse, D. M. és mktsai., 2015, MNRAS, 452, 3561 [2015arXiv150301829L]
Lane, B. F., Muterspaugh, M. W., Griffin, R. F., Scarfe, C. D., Fekel, F. C., Williamson, M. H., Eaton, J. A., Shao, M., Colavita, M. M., Konacki, M., 2014, ApJ, 783, 3
Lanza, A. F., Rodonò, M., 2002, Astr. Nachr., 323, 424
Lee, J. W., Kim, S.-L., Lee, C.-U., Lee, B.-C., Park, B.-G., Hinse, T. C., 2013, ApJ, 763, 74
Lee, J. W., Kim, S.-L., Hong, K., Lee, C.-U., Koo, J.-R., 2014, AJ, 148, 37
Lee, J. W., Hong, K., Hinse, T. C., 2015, AJ, 149, 93
Lehmann, H., Zechmeister, M., Dreizler, S., Schuh, S., Kanzler, R., 2012, A&A, 541, 105
Lehmann, H., **Borkovits, T.**, Rappaport, S. A., Ngo, H., Mawet, D., Csizmadia, Sz., Forgács-Dajka, E., 2016, ApJ, 819, 33
Lestrade, J.-F., Phillips, R. B., Hodges, M. W., Preston, R. A., 1992, ApJ, 410, 808
Lidov, M. L., 1962, Planet. Space Sci., 9, 719
Liška, J., 2014, IBVS, 6119
Loeb, A., Gaudi, B. S., 2003, ApJ, 588, L115
Lucy, L. B., 1967, Zeit. für Ap., 65, 89
Lucy, L. B., 1968a, ApJ, 151, 1123
Lucy, L. B., 1968b, ApJ, 153, 877
Lucy, L. B., Wilson, R. E., 1979, ApJ, 231, 502
Maloney, F. P., Guinan, E. F., Boyd, P. T., 1989, AJ, 98, 1800
Maloney, F.P., Guinan, E.F., Mukherjee, J., 1991, AJ, 102, 256
Maoz, D., Mannucci, F., Nelemans, G., 2014, ARA&Ap, 52, 107
Mardling, R. A., Aarseth, S. J., 2001, MNRAS, 321, 398
Marion, G. H., Brown, P. J., Vinkó, J. és további 26 társszerző, 2016, ApJ, 820, 92
Marsh, T. R., Armstrong, D. J., Carter, P. J., 2014, MNRAS, 445, 309
Martynov, D. Ia., Khaliullin, Kh. F., 1980, Ap&SS, 71, 147
Mason, B. D., Wycoff, G. L., Hartkopf, W. I., Douglass, G. G., Worley, Ch. E., 2001, AJ, 122, 3466
Masuda, K., Uehara, Sh., Kawahara, H., 2015, ApJ, 806, L37
Matijevic, G., Prša, A., Orosz, J. A., Welsh, W. F., Bloemen, S., Barclay, T., 2012, AJ, 143, 123
Mazeh, T., 2008, EAS Publ. Ser., 29, 1
Mayer, P., 1990, BAIC 41, 231
Milone, E. E., 1968, AJ, 73, 708
Mitrofanova, A. A., Shimansky, V. V., Borisov, N. V., Spiridonova, O. I., Gabdeev, M. M., 2016, Astron. Rep., 60, 252
Mkrtichian, D. E., Rodríguez, E., Olson, E. C., Kusakin, A. V., Kim, S.-L., Lehmann, H., Gamarova, A. Yu., Kang, Y. W., 2005, ASP Conf. Ser., 333, 197
Moffat, J. W., 1979, PhysRevD, 19, 3554
Moffat, J. W., 1983, PhysRevLett, 50, 709
Moffat, J. W., 1984, ApJ, 287, L77

Moffat, J. W., Woolgar, E., 1985, Can. J. of Phys., 63, 428
Moffat, J. W. 1986, Can. J. of Phys., 64, 178
Naoz, S., 2016, Ann.Rev.A&A, 54, 441 [arXiv:1601.07175]
Naoz, S., Fabrycky, D., 2014, ApJ, 793, 137
Naoz, S., Farr, W, M., Lithwick, Y., Rasio, F. A., Teyssandier, J., 2013, MNRAS, 431, 2155
Naoz, S., Fragos, T., Geller, A., Stephan, A. P., Rasio, F. A., 2016, ApJ, 822L, 24 [arXiv:1510.02093]
Nanouris, N., Kalimeris, A., Antonopoulou, E., Rovithis-Livaniou, H., 2011, A&A, 535, A126
Nanouris, N., Kalimeris, A., Antonopoulou, E., Rovithis-Livaniou, H., 2015, A&A, 575, A64
O'Connell, D. J. K., 1951, Riverview College Observatory publications, 2, 85
Orosz, J. A., 2015, ASPC, 496, 55
Østensen, R. H. és mktsai., 2010, MNRAS, 408, L51
Özdemir, S., Mayer, P., Drechsel, H., Demircan, O., Ak, H., 2003, A&A, 403, 675
Padalia, T.D., Srivastava, R.K., 1975, Ap&SS, 38, 87
Patkós, L, 1981, Kölcsönható kettőscsillagok, *in: Csillagászati Évkönyv az 1981. évre*, Gondolat, p. 266
Pavlovski, K., Southworth, J., Kolbas, V., 2011, ApJ, 734, L29
Pál, A., 2012, MNRAS, 420, 1630
Petrie, R. M., 1939, Publ.Dom.Obs., 7, 205
Petrovich, C., Tremaine, S., 2016, ApJ, beküldve [arXiv:1604.00010]
Perets, H. B., Fabrycky, D. C., 2009, ApJ, 697, 1048
Podsiadlowski, Ph., Rappaport, S., Han, Z., 2003, MNRAS, 341, 385
Pont, F., Hébrard, G., Irwin, J. M. és további 24 társszerző, 2009, A&A, 502, 695
Pourbaix D., Tokovinin A.A., Batten A.H., Fekel F.C., Hartkopf W.I., Levato H., Morrell N.I., Torres G., Udry S., 2004, A&A, 424, 727
Pribulla, T., Rucinski, S. M., 2008, MNRAS, 386, 377
Prša, A., 2006, *PHOEBE Scientific Reference. PHOEBE version 0.30*, University of Ljubljana, Faculty of Mathematics and Physicy, Dept. of Astrophysics
Prša, A., Zwitter, T., 2005, ApJ, 628, 426
Ragozzine, D., Holman, M. J., 2010, arXiv:1006.3727
Rappaport, S., Deck, K., Levine, A.,**Borkovits, T.**, Carter, J., El Mellah, I., Sanchis-Ojeda, R., Kalomeni, B., 2013, ApJ, 768, 33
Rappaport, S., Lehmann, H., Kalomeni, B.,**Borkovits, T.**, Latham, D., Bieryla, A., Ngo, H., Mawet, D., Howell, S., Horch, E., Jacobs, T. L., LaCourse, D., Sódor, Á., Vanderburg, A., Pavlovski, K., 2016, MNRAS, 462, 1812
Regály, Zs., Sándor, Zs., Csomós, P., Ataiee, S., 2013, MNRAS, 433, 2626
Rodriguez, J. E., Stassun, K. G., Lund, M. B., Siverd, R. J., Pepper, J., Tang, S., Kafka, S., Gaudi, B. S., Conroy, K. E., Beatty, T. G., Stevens, D. J., Shappee, B. J., Kochanek, C. S., 2016, AJ, 151, 123
Rudkjøbing, M., 1959, Annales d'Astrophysique, 22, 111
Russell, H. N., Merrill, J. E., 1952, Princeton Obs. Contr., 26
Rybicki, G. B., Lightman, A. P., 1979, *Radiative processes in astrophysics*, Wiley-Interscience, New York
Semeniuk, I., 1968, ActaAstron., 18, 1
Shakura, N. I., 1985, Sov.Astron.Lett., 11, 224
Shappee, B. J., Thompson, T. A., 2013, ApJ, 766, 64
Simon K. P., Sturm E., 1994, A&A, 281, 286
Slawson, R. W. és mktsai., 2011, AJ, 142, 160
Southworth, J., Clausen, J. V., 2007, A&A, 461, 1077
Söderhjelm, S., 1975, A&A, 42, 229
Söderhjelm, S., 1982, A&A, 107, 54
Söderhjelm, S., 1984, A&A, 141, 232
Steffen, J. H., Quinn, S. N., Borucki, W. J., Brugamyer, E., Bryson, S. T., Buchhave, L. A., Cochran, W. D., Endl, M., Fabrycky, D. C., Ford, E. B., Holman, M. J., Jenkins, J., Koch, D., Latham, D. W., MacQueen, P., Mullally, F., Prša, A., Ragozzine, D., Rowe, J. F., Sanderfer, D. T., Seader, S. E., Short, D., Shporer, A., Thompson, S. E., Torres, G., Twicken, J. D., Welsh, W. F., Windmiller, G., 2011, MNRAS, 417, L31
Sterne, T. E., 1939, MNRAS, 99, 451
Szatmáry, K., 1987, *Delta Scuti típusú változócsillagok kettős rendszerekben*, Egyetemi doktori értekezés, JATE, Szeged
Tal-Or, L., Faigler, S., Mazeh, T., 2015, A&A, 580, A21
Tauris, T. M., van den Heuvel, E. P. J., 2014, ApJ, 781, L13
Thompson, S.E., Everett, M., Mullally, F., et al. 2012, ApJ, 753, 86
Tokovinin, A., 1997, A&AS, 124, 75
Tokovinin, A., 2008, MNRAS, 389, 925

Tokovinin, A., 2014a, AJ, 147, 86
Tokovinin, A., 2014b, AJ, 147, 87
Tokovinin, A., Thomas, S., Sterzik, M., Udry, S., 2006, A&A, 450, 681
Torres, G., Andersen, J., Giménez, A., 2010, A&ARev., 18, 67
Tran, K., Levine, A., Rappaport, S., **Borkovits, T.**, Csizmadia, Sz., Kalomeni, B., 2013, ApJ, 774, 81
Van Kerkwijk, M.H., Rappaport, S., Breton, R.P., Justham, S., Podsiadlowski, Ph., Han, Z., 2010, ApJ, 715, 51
von Zeipel, H., 1924, MNRAS, 84, 665
Verbunt, F., Phinney, E. S., 1995, A&A, 296, 709
Welsh, W. F., Orosz, J. A., Aerts C. és mktsai., 2011, ApJS, 197, 4
Willems, B., Claret, A., 2005, ASPC 333, 52
Wilson, R. E., 1973, ApJ, 184, L99
Wilson, R.E., 1979, ApJ, 234, 1054
Wilson, R.E., 1994, PASP, 106, 921
Wilson, R. E., 2008, ApJ, 672, 575
Wilson, R. E., Devinney, E. J., 1971, ApJ, 166, 605
Wilson, R. E., Mukherjee, J., 1988, AJ, 96, 747
Wilson, R. E., Van Hamme, W., 2009, ApJ, 699, 118
Wilson, R. E., Pettera, L.E., Van Hamme, W., 1985, ApJ, 289, 748
Woltjer, J., Jr., 1922, BAN, 1, 93
Zahn, J.-P., 1977, A&A, 57, 383
Zahn, J.-P., 1989, A&A, 220, 112
Zasche, P., Wolf, M., Kučáková, H., Vraštil, J., Juryšek, J., Mašk, M., Jelínek, M., 2015, AJ, 149, 197
Zucker, S. Mazeh, T., Alexander, T., 2007, ApJ, 670, 1326