Opponensi vélemény
Szalay László MTA doktori disszertációjáról

Szalay László disszertációjában a diofantikus számelmélet, ezen belül elsősorban a polinomiális-exponenciális egyenletek területére eső problémákat vizsgál. Már elöljáróban elmondható, hogy a vizsgált problémakörök egyrészt a téma klasszikus, sokak által vizsgált kérdései közé tartoznak, másrészt, több esetben az eredmények a diofantikus egyenletek területén túlmutató alkalmazásokkal rendelkeznek. A bizonyítások háttere igen változatos: több helyen elemi, egyéni, ötletes konstrukciókkal találkozunk, míg máshol mély eszközök (altér tétel, Baker-módszer) értő, konstruktív alkalmazására kerül sor. Az értekezésben szereplő eredmények úttörő jellegűek: szinte kivétel nélkül a pályázó (illetve társszerzői) olyan jellegű eredményeiről van szó, amelyek (jól beágyazottságuk mellett) új kutatási irányokat nyitottak, és melyekhez publikálásuk óta számos szerző kapcsolódott.

Az értekezésen végigfutó fő motívum (alapegyenlet) általános alakja a következő. Legyenek $u_1, \dots, u_k$ és $\xi_1, \dots, \xi_k$ rögzített egészek, $p(X_1, \dots, X_t)$ pedig egy adott egészegyütthatós polinom. Tekintsük az

$$u_1\xi_1^{n_1} + \dots + u_k\xi_k^{n_k} = p(x_1, \dots, x_t) \qquad (1)$$

egyenletet, ahol $n_1, \dots, n_k$ ismeretlen nemnegatív egészek, $x_1, \dots, x_t$ pedig ismeretlen egészek. Az (1) egyenlet egy úgynevezett polinomiális-exponenciális egyenlet. Érdemes megemlíteni, hogy ez az egyenlet teljes általánosságban a területen rendelkezésre álló számos mély módszer ellenére sem kezelhető. Például még abban a speciális esetben, amikor a p polinomot azonosan 1-nek választjuk, és $k \geq 3$, sem ismert korlát az $n_1, \dots, n_k$ kitevők **nagyságára**, csupán az $(n_1, \dots, n_k)$ megoldások **száma** korlátozható. (Az utóbbi korlát levezetése mély diofantikus approximációs eszközök, például az altér tétel használatát igényli; kapcsolódó eredményekért például Evertse, Győry, Schimdt, Schlickewei, Siegel tételeit említhetjük.)

Mint ahogyan az az értekezésből is kiderül, számos diofantikus jellegű probléma redukálható (1) alakú egyenletre: például adott darab számjeggyel felírható hatványok, vagy rekurzív sorozatok polinomértékei, de több klasszikus, sokak által vizsgált, önmagában érdekes diofantikus egyenletet is említhetnénk. Egy ilyen példa az úgynevezett Ramanujan-Nagell egyenlet. Ramanujan fogalmazta meg azt a sejtést, mely szerint az

$$x^2 + 7 = 2^n$$

polinomiális-exponenciális diofantikus egyenlet csupán az

$$(x,n) = (1,3),\ (3,4),\ (5,5),\ (11,7),\ (181,15)$$

megoldásokkal rendelkezik. Ezt a sejtést Nagell igazolta. Később az egyenletet általánosították, és azt számos szerző (köztük például Beukers, Brindza, Bugeaud és Cohn) vizsgálta.

Ahogyan az a fentiekből is látható, illetve a részletes értékelésből is kiderül majd, a disszertáció témaköre a diofantikus egyenletek elméletének homlokterébe tartozik. Az alábbiakban az értekezés témaköreit követve adom meg részletes véleményemet.

A disszertáció két fejezetre bontható. Az első fejezetben az (1) típusú egyenletre vezető problémákról, a másodikban (1) típusú egyenletekből álló egyenletrendszerekre redukálható problémákról van szó. A disszertációban **elsőként érintett kérdéskör** négyzetszámok diadikus reprezentációjával kapcsolatos. Pontosabban, Szalay László (az (1) egyenlet speciális eseteként) a

$$\pm 2^{n_1} \pm \cdots \pm 2^{n_k} = x^2$$

egyenletet tekinti, $n_1, \ldots, n_k, x$ ismeretlen nemnegatív egészekben. A kérdésről illetve a problémáról különös részletességgel szólok, mivel ezt tartom a pályázó legszebb, legnagyobb hatású és legújszerűbb eredményének.

A problémakör klasszikus eredményeken alapul. Régóta ismert, hogy a $2^{n_1} + 1 = x^2$ egyenlet egyetlen megoldása $(n_1, x) = (3,3)$. Továbbá, Lebesgue már 1850-ben megmutatta, hogy a $2^{n_1} - 1 = x^2$ csupán az $(n_1, x) = (0,0), (1,1)$ megoldásokkal bír. Világos, hogy a már említett Ramanujan-Nagell egyenlet is szoros kapcsolatban áll a vizsgált egyenletcsaláddal. Emellett például Rotkiewicz és Zlotokowski is vizsgált hasonló jellegű kérdéseket.

Szalay a problémát háromtagú összeg esetében vizsgálja, azaz a

$$2^N \pm 2^M \pm 2^L = x^2$$

egyenletet tekinti. Innen egyszerű megfontolásokkal a

$$2^n \pm 2^m \pm 1 = x^2 \quad \text{és} \quad 2^n \pm 2^m \pm 2 = x^2$$

egyenletekhez jutunk. A második egyenlet könnyen kezelhető (például azt modulo 4 tekintve, azonnal $\min(n,m) \le 1$ adódik). Az első egyenlet a Lebesgue által vizsgált egyenlethez képest látszólag „csupán” egy exponenciális tag betoldását jelenti. Valójában ez azonban nagyon nagy jelentőségű lépés: mind az eredmény súlya, mind a bizonyítás nehézsége jelentősen megnő. (A ma rendelkezésre álló módszerekkel Lebesgue eredménye több módon is egyszerűen adódna.)

A fenti első egyenlet (az előjelek megválasztása szerint) négy esetre bomlik (a disszertáció 1., 2. és 3. tételei). A $2^n \pm 2^m - 1 = x^2$ egyenletek modulo 4 triviálisak, a $2^n - 2^m + 1 = x^2$ egyenlet megoldásai pedig Beukers egy mély, Ramanjuan-Nagell típusú egyenletekre vonatkozó tételének alkalmazásával adódnak. Merőben más a helyzet a

$$2^n + 2^m + 1 = x^2 \tag{2}$$

egyenlettel. (Amely a korábbiak fényében úgy is interpretálható, hogy a diadikusan felírva háromjegyű négyzetszámokat keressük.) Ez az egyenlet a végtelen

$$(n, m, x) = (2t, t+1, 2^t + 1) \quad (t \geq 1)$$

megoldáscsalád mellett az

$$(n, m, x) = (5, 4, 7), (9, 4, 23)$$

megoldásokkal rendelkezik. Ennek igazolására azonban semmilyen ismert eszköz sem áll rendelkezésre, a standard, mély (vagy éppen elemi) eszközök nem alkalmazhatók. A (2) egyenlet kezelésére Szalay László egy szellemes, a hasonló jellegű diofantikus egyenletek esetében merőben szokatlan eszközt használ. Nevezetesen, a végtelen megoldáscsalád tagjait szabályosnak, a két speciális megoldást kivételesnek nevezve, egy olyan τ leképezést ad meg (2) (n, m) megoldásainak halmazán, amely minden megoldást szabályos megoldásba visz. A τ tulajdonságait vizsgálva majd azokat kihasználva, sikerül olyan egyenletrendszerre redukálnia a problémát, amelyet Beukers egy mély diofantikus approximációs tételével már kezelni tud. Ezt a bizonyítást rendkívül ötletesnek, szellemesnek és újszerűnek tartom, amely a problémakör alapos és mély értő ismeretéről is tanúskodik.

Ezen a ponton egy kérdést is megfogalmazok. *Lát-e a pályázó lehetőséget arra, hogy a τ leképezéshez hasonló leképezések más rokon jellegű problémák, egyenletek esetén is használhatóak lehetnek?*

Az eredmény hatása, utóélete is figyelemre méltó. Megjelenése óta számos szerző nyert kapcsolódó eredményeket, elismerve Szalay tételének úttörő voltát. Ezek az eredmények részben a 2 prímet egy páratlan p prímmel helyettesítik, vagy x^2 helyére kerül magasabb fokú hatvány. A hivatkozó szerzők között például Luca, Maohua Le, Bennett, Bugeaud, Mignotte és Ward szerepel, de Szalay eredménye utat talált Guy híres, számelméleti problémákat taglaló könyvébe is.

A disszertációban **másodikként tárgyalt problémát** az

$$(a^n - 1)(b^n - 1) = x^2 \tag{3}$$

alakú egyenletek megoldása jelenti, ahol a, b rögzített pozitív egészek, n, x pedig ismeretlen nemnegatív egészek. Világos, hogy a fenti egyenlet (1) speciális esetének is tekinthető. Ugyanakkor a kérdés úgy is interpretálható, hogy két másodrendű lineáris rekurzív sorozat n-edik tagjainak szorzatai között (avagy egy negyedrendű lineáris rekurzív sorozatban) keressük a négyzetszámokat.

A rekurzív sorozatokban található teljes hatványok irodalma rendkívül gazdag. Az általános esetben Pethő, illetve tőle függetlenül Shorey és Stewart adott felső korlátot egy rekurzív sorozat hatványértékeire. Speciálisan a Fibonacci sorozatban (több korábbi részeredmény után) Bugeaud, Mignotte és Siksek határozta meg az összes teljes hatványt, a modern, mély és nagyhatású moduláris módszer segítségével.

Szalay (részben szerzőtársakkal) meghatározza (3) összes megoldását, a, b bizonyos speciális megválasztásai mellett (a disszertáció 4., 5., 6., 7., 8. és 9. tételei). Fontos megemlíteni, hogy az első eredmények (melyek az $(a, b) = (2, 3)$ és $(2, 5)$ esetekre vonatkoznak) a pályázó önálló tételei, így a téma kezdeményezése egyértelműen az ő érdeme. Az eredmények bizonyításának hátterében változatos elemi eszközök (például a Legendre-szimbólum és kongruenciák) és mély módszerek (például a Pell egyenletek és a Ljunggren-típusú egyenletek elmélete) állnak. A tételek levezetése korántsem automatikus, ez az említett módszerek értő kombinálását igényli.

Az eredmények segítségével Szalay itt is egy új kutatási irány nyitott meg, melyhez számos szerző, köztük például Pethő, Luca, Walsh, Cohn, Maohua Le, és Corvaja és Zannier kapcsolódott. Megemlítendő, hogy Corvaja és Zannier részben e kérdéskör segítségével mutatta be nagyhatású, mély ineffektív eredményeik széleskörű alkalmazhatóságát.

A disszertációban **harmadikként tárgyalt probléma** lineáris rekurzív sorozatokban előforduló további polinomértékekre vonatkozik. Nevezetesen, Szalay bemutatja módszerét (lásd a disszertáció 10. tételét), amely lehetővé teszi az $\binom{x}{3}$ polinom értékeinek meghatározást bizonyos említett típusú sorozatokban. Ez a kérdés is jól illeszkedik a korábbi irodalomhoz, például Mordell vizsgált hasonló jellegű kérdéseket. A pályázó újszerű eljárása, a vizsgált rekurzív sorozat esetében lehetővé teszi a kérdés redukcióját elliptikus egyenletekre, amelyek (például Gebel, Pethő és Zimmer nevezetes módszerének segítségével) már jól kezelhetőek. A módszer hatékonyságát Szalay nevezetes sorozatok segítségével (a Fibonacci, Lucas és Pell sorozaton keresztül) illusztrálja (a disszertáció 11. tételében).

Ehhez a kérdéskörhöz is többen csatlakoztak, megemlíthetjük Kovács, Tengely valamint Luca és Szalay eredményeit.

A disszertáció második fejezetében úgynevezett diofantikus halmazok kerülnek terítékre. Pozitív egész számok egy $\{a_1, \ldots, a_m\}$ halmazát diofantikus halmaznak nevezzük, ha $i \neq j$ esetén $a_i a_j + 1$ négyzetszám. (A kérdés a racionális számok körében is érdekes, de erre most nem térünk ki.) A diofantikus halmazok problémaköre nagyon messzire nyúlik vissza: Diofantosz vizsgálatai mellett Fermat eredményeit is megemlíthetjük. Emellett a probléma modernkori elmélete is rendkívül gazdag; például a nevezetes, nagy hatású Baker-Davenport lemma is egy kapcsolódó kérdés vizsgálatakor keletkezett. Kiemelkedő eredményként megemlítjük Dujella szép tételét, miszerint nincs hatelemű diofantikus halmaz, és az ötelemű diofantikus halmazok száma véges. Valójában egy standard sejtés szerint nincs ötelemű diofantikus halmaz (de négyelemű diofantikus halmazból végtelen sok ismert). Könnyen látható, hogy a diofantikus halmazokat jellemző egyenletek felfoghatók (1) alakú egyenletekből álló egyenletrendszerként.

A disszertációban **negyedikként tárgyalt probléma** azon diofantikus jellegű A halmazok jellemzése, melyeknél az A különböző elemei szorzatának 1-gyel megnövelt értékei egy adott másodrendű lineáris rekurzív sorozat tagjai. Szalay (és társszerzői) munkája nyomán kiderül, hogy ebben az esetben a háromelemű halmazok jelentik az érdekes objektumokat. Két kérdés adódik természetes módon: melyek a végtelen sok fenti jellegű diofantikus hármast lehetővé tevő sorozatok, illetve adott sorozat esetén hogyan lehet meghatározni a sorozathoz tartozó összes diofantikus hármast. Az első kérdéssel kapcsolatban bizonyos technikai (például nemdegeneráltsági) feltétel mellett Szalay (Fuchs-szal és Lucával közösen) megmutatja, hogy csak speciális sorozatokhoz tartozhat végtelen sok diofantikus hármas (12. tétel). A bizonyítás technikás és komplikált, számos módszer, tulajdonság, észrevétel értő alkalmazására és ötvözésére van szükség. A vezérfonalat az altér tétel jelenti. Ezen túl, Szalay (Lucával illetve Irmakkal közösen) megmutatja, hogy a Fibonacci-sorozathoz, illetve bizonyos feltételeknek eleget tévő Lucas-sorozathoz nem tartozik diofantikus hármas. Ezek az eredmények is új (bár egyelőre nem túlságosan messzire nyúló) kutatási irányt nyitottak.

Legyen S prímszámok egy véges halmaza. Ekkor egy s racionális számot S-egységnek nevezünk, ha s számlálója és nevezője is csupán S-beli prímekkel osztható. A disszertációban **ötödikként tárgyalt probléma** azokra a diofantikus jellegű (pozitív egészekből álló) A halmazokra vonatkozik, ahol az A különböző elemei szorzatának 1-gyel megnövelt értékei S-egységek. Amint az Szalay (és Ziegler) eredményeiből kiderül, ebben az esetben a négyelemű diofantikus jellegű halmazok kérdése az érdekes. Az eredmények ismertetése előtt megemlítjük, hogy ez a kérdéskör is jól beágyazott. Például Győry, Sárközy és Stewart egy sejtése szerint, melyet később Corvaja és Zannier illetve tőlük függetlenül Hernandez és Luca igazolt, $(ab+1)(ac+1)(bc+1)$ legnagyobb prímfaktora végtelenhez tart, amennyiben $\max(a,b,c)$ tart a végtelenbe.

A disszertációban bemutatott eredmények arra az esetre vonatkoznak, amikor S kételemű. Szalay először egy sejtést közöl (15. sejtés), mely szerint $S = \{p, q\}$ esetén nincs S-hez tartozó diofantikus négyes. A 16. és 17. (Zieglerrel közösen nyert) tételek ezt a sejtést igazolják, bizonyos p-re és q-ra rótt feltételek mellett. Az eredmények bizonyítása során Stewart és Tijdeman egy módszerének és a Baker-módszer éles, modern (Matveev illetve Laurent, Mignotte és Nesterenko nevéhez fűződő) változatának kombinálása áll.

Összegzésként, véleményem szerint Szalay László disszertációjában több érdekes, számos neves matematikus által vizsgált, klasszikus kérdésekhez kötődő problémát tárgyal a polinomiális-exponenciális diofantikus egyenletek területén. A bemutatott eredmények fontosak, érdekesek, újak, azok az irodalomhoz jól illeszkednek, valamint jelentős előrelépést hoznak, illetve új irányokat nyitnak a vizsgált területeken. Különösen érdekesnek és értékesnek ítélem a (2) egyenlettel kapcsolatos eredményeket, illetve az ott bevezetett újszerű, szellemes ötleteket. A védés kitűzését és az MTA doktori cím odaítélését határozottan támogatom.

Debrecen, 2015. február 26.

(Hajdu Lajos)
az MTA doktora